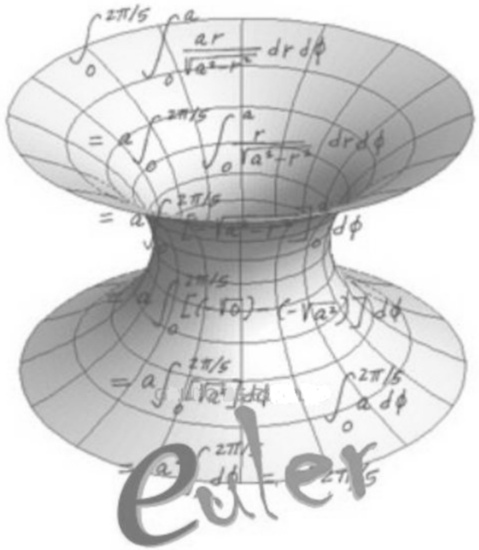
2 Aproximación numérica, errores y métodos numéricos iniciales

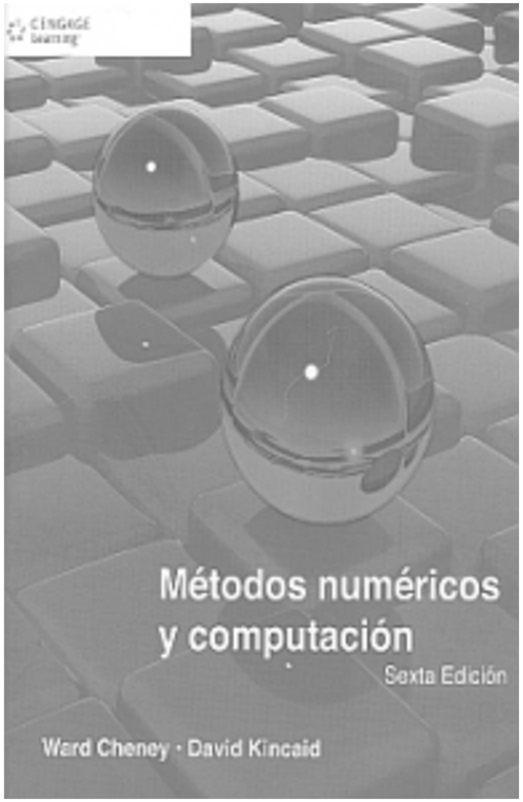
Objetivo: Aplicar métodos de soluciones numéricas, considerando y minimizando los errores y la convergencia.



Bibliografía

Cálculo y métodos numéricos. Francisco Javier Rodríguez Gómez, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, España, 2003.

Bibliografía



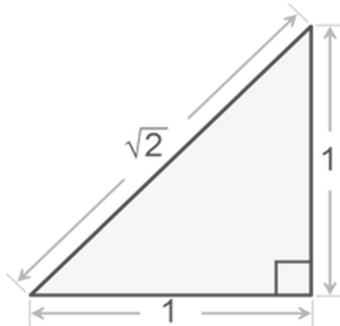
***Métodos numéricos y computación*. Ward Cheney, David Kincaid, sexta edición, Cengage Learning, 2011.**

2.1 Aproximación numérica y errores

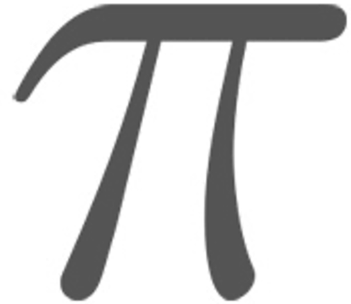
La aproximación numérica trata de minimizar el error estimado, para que el resultado obtenido sea lo más cercano a la realidad.

Es decir, si se tiene una cifra x* que representa a un número cuyo valor exacto es x, se dice que en la medida que x* se acerca más al valor exacto de x, la aproximación numérica que x* proporciona es mejor.

Por ejemplo:



1.4142



3.1416

0.333333

2.7183

Debido a la omisión de algunas cifras, se genera un error matemático.

Se conoce como error (E) matemático a la diferencia que existe entre el valor real y el valor aproximado.

$$E = \text{valor}_{\text{Real}} - \text{valor}_{\text{Aproximado}}$$

$$e = \frac{E}{\text{valor}_{\text{Real}}} * 100$$

Aritmética de computadoras

DEC	HEX	OCT	CHAR	DEC	HEX	OCT	CH	DEC	HEX	OCT	CH	DEC	HEX	OCT	CH
0	0	000	NUL	32	20	040		64	40	100	@	96	60	140	`
1	1	001	SOH	33	21	041	!	65	41	101	A	97	61	141	a
2	2	002	STX	34	22	042	"	66	42	102	B	98	62	142	b
3	3	003	ETX	35	23	043	#	67	43	103	C	99	63	143	c
4	4	004	EOT	36	24	044	$	68	44	104	D	100	64	144	d
5	5	005	ENQ	37	25	045	%	69	45	105	E	101	65	145	e
6	6	006	ACK	38	26	046	&	70	46	106	F	102	66	146	f
7	7	007	BEL	39	27	047	'	71	47	107	G	103	67	147	g
8	8	010	BS	40	28	050	(	72	48	110	H	104	68	150	h
9	9	011	TAB	41	29	051	)	73	49	111	I	105	69	151	i
10	A	012	LF	42	2A	052	*	74	4A	112	J	106	6A	152	j
11	B	013	VT	43	2B	053	+	75	4B	113	K	107	6B	153	k
12	C	014	FF	44	2C	054	,	76	4C	114	L	108	6C	154	l
13	D	015	CR	45	2D	055	-	77	4D	115	M	109	6D	155	m
14	E	016	SO	46	2E	056	.	78	4E	116	N	110	6E	156	n
15	F	017	SI	47	2F	057	/	79	4F	117	O	111	6F	157	o
16	10	020	DLE	48	30	060	0	80	50	120	80	112	70	160	p
17	11	021	DC1	49	31	061	1	81	51	121	Q	113	71	161	q
18	12	022	DC2	50	32	062	2	82	52	122	R	114	72	162	r
19	13	023	DC3	51	33	063	3	83	53	123	S	115	73	163	s
20	14	024	DC4	52	34	064	4	84	54	124	T	116	74	164	t
21	15	025	NAK	53	35	065	5	85	55	125	U	117	75	165	u
22	16	026	SYN	54	36	066	6	86	56	126	V	118	76	166	v
23	17	027	ETB	55	37	067	7	87	57	127	W	119	77	167	w
24	18	030	CAN	56	38	070	8	88	58	130	X	120	78	170	x
25	19	031	EM)	57	39	071	9	89	59	131	Y	121	79	171	y
26	1A	032	SUB	58	3A	072	:	90	5A	132	Z	122	7A	172	z
27	1B	033	ESC	59	3B	073	;	91	5B	133	[	123	7B	173	{
28	1C	034	FS	60	3C	074	<	92	5C	134	\	124	7C	174	|
29	1D	035	GS	61	3D	075	=	93	5D	135	]	125	7D	175	}
30	1E	036	RS	62	3E	076	>	94	5E	136	^	126	7E	176	~
31	1F	037	US	63	3F	077	?	95	5F	137	_	127	7F	177	DEL

Las conversiones así como los cálculos realizados suscitan pequeños errores que es importante tener en cuenta.

Los bits se agrupan en unidades llamadas palabras, las cuales pueden contener 8, 16, 32 o 64 bits, dependiendo de la computadora.

Los bits también se pueden agrupar en bytes:

1 byte = 8 bits

Por ejemplo, una palabra de 32 bits consta de 4 bytes.

Dependiendo de la arquitectura de la computadora, los números enteros pueden ocupar 16 ó 32 bits en memoria, donde el primer bit registra el signo y los restantes registran la capacidad del entero.

Un número entero que ocupa 32 bits en memoria y puede almacenarse como sigue:

+/-	n_{30}	n_{29}	n_{28}	n_{27}	n_{26}	n_{25}	n_{24}	n_{23}	n_{22}	n_{21}	n_{20}	n_{19}	n_{18}	n_{17}	n_{16}
n_{15}	n_{14}	n_{13}	n_{12}	n_{11}	n_{10}	n_9	n_8	n_7	n_6	n_5	n_4	n_3	n_2	n_1	n_0

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{28} + 2^{29} + 2^{30} = 2147483647$$

Por lo tanto, un número entero puede ir en el rango de -2 147 483 648 a 2 147 483 647.

Ejemplo 2.1

Convertir el número $28{,}345_{10}$ a binario y mostrar su representación en memoria (32 bits).

28 345	/ 2
14 172	1
7 086	0
3 543	0
1 771	1
885	1
442	1
221	0
110	1
55	1
27	1
13	1
6	1
3	0
1	1
0	1

$$28{,}345_{10} = 110111010111001_2$$

Ejemplo 2.1

La representación en memoria del número $28{,}345_{10}$ es:

$$28{,}345_{10} = 110111010111001_2$$

+

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1

Sin embargo, los número reales en la computadora no se pueden representar de manera exacta, debido a que el número de dígitos está limitado por el tamaño de palabra de cada máquina.

Por lo tanto, los números necesariamente son redondeados, y, por lo tanto, se provoca un error.

Para realizar el registro de un número real se utiliza la notación de punto flotante normalizado.

Un número A puede ser expresado en notación científica normalizada, es decir, expresar el número como una potencia de 10:

$$A = C \times 10^{n}$$

Donde $0.1 <= C < 1$ y n es un entero positivo, negativo o cero ($n \in Z$).

Por ejemplo: $836.238 = 0.836238 \times 10^{3}$

Los número binarios también pueden ser representados en notación científica normalizada (notación de punto flotante normalizada).

$$A = M \times 2^{n}$$

donde n es un entero positivo, negativo o cero (expresado en binario) y M es la mantisa (dígitos significativos del número), que debe ser menor a 1 y mayor o igual que 0.1_2 (0.5_{10}).

Por ejemplo:

$$11111.01_2 = 0.1111101_2 \times 2^{101}$$

$$-0.0000001110110 1_2 = -0.11101101_2 \times 2^{-110}$$

Un número flotante ocupa 32 bits (4 bytes) y se distribuyen de la siguiente manera:

1 bit para el signo de la mantisa
1 bit para el signo del exponente
7 bits para el exponente entero (en binario)
23 bits para la mantisa (en binario)

Debido a que la mantisa siempre empieza con uno, no hay necesidad de almacenar este dígito.

La representación en memoria queda de la siguiente manera:

$\pm$	$\pm$	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1	e_0	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	m_{17}	m_{18}	m_{19}	m_{20}	m_{21}	m_{22}

Ejemplo 2.2

Representar el número 31.25_{10} en sistema binario, así como su representación en memoria en una variable flotante.

$$31.25_{10} = 0.3125_{10} \times 10^2 = 0.3125_{10} \times 100_{10}$$

0.3125	*2
0.6250	0
0.2500	1
0.5000	0
0.0000	1

100	%2
50	0
25	0
12	1
6	0
3	0
1	1
0	1

Ejemplo 2.2

0.3125	*2
0.6250	0
0.2500	1
0.5000	0
0.0000	1

100	%2
50	0
25	0
12	1
6	0
3	0
1	1
0	1

$$31.25_{10} = 0.0101_2 \text{ x } 1100100_2 = 11111.01_2$$

$$11111.01_2 = 0.1111101_2 \;\; 2^{101}$$

<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ejemplo 2.3

Realizar la representación del número -0.000721619 en una palabra de 32 bits.

Al convertir la cifra a binario se tiene:

$$-0.000721619_{10} = -0.00000000000101111010010101100001000_2$$
$$= -0.101111010010101100001000_2 \times 2^{-1011}$$

Al exponente, por ser negativo, se le aplica complemento A2 (a 7 cifras), se invierte la polaridad y se le suma uno:

$$0001011_2 = 1110100_2 + 1_2 = 1110101_2$$

Ejemplo 2.3

Recordando que el primer dígito de la mantisa no se escribe, la representación en memoria del número -0.000721619$_{10}$ queda de la siguiente manera:

$\pm$	$\pm$	e_6	e_5	e_4	e_3	e_2	e_1	e_0	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6
m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}	m_{15}	m_{16}	m_{17}	m_{18}	m_{19}	m_{20}	m_{21}	m_{22}

$\underline{1}$	$\underline{1}$	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

Tarea 2.1

Se tiene una computadora que maneja palabras de 16 bits, ¿cuál sería el resultado de sumar 1000 veces el número fraccionario 1/100?

Dibujar su representación en memoria. Considerar 2 bits para los signos, 5 bits para el exponente y 9 bits para la mantisa.

Errores

El error es la relación entre el resultado exacto y el resultado verdadero. Está dado por:

Valor verdadero = Valor estimado + error

Sean X un valor verdadero (o exacto) y X* un valor estimado (observado o calculado), el error absoluto se calcula de la siguiente manera:

$$E_x = |X - X^*|$$

Sean X un valor exacto, X* un valor estimado (observado o calculado) y E_x el error absoluto, el error relativo (*e*x) se calcula de la siguiente manera:

$$e_x = E_x/X \approx E_x/X^* \text{ (X y X* != 0)}$$

Es decir, para medir la magnitud del error, o la incidencia en el cálculo se tiene:

$$e_x = \frac{E_x}{\text{Valor verdadero}}$$

$$e\%_x = \frac{E_x}{\text{Valor verdadero}} \times 100$$

Ejemplo 2.4

Se mide un puente y un remache, y se obtienen 9999 y 9 cm, respectivamente. Si los valores verdaderos son 10000 y 10. Hallar el error relativo fraccional verdadero y el error absoluto en cada caso.

Puente:

e = 10000 – 9999 = 1[cm]

E = (1/10000) * 100 = 0.01 %

Remache:

e = 10 -9 = 1 cm

E = 1 / 10 * 100 = 10%

La exactitud se refiere a que tan cercano está el valor calculado o medido con respecto al valor real.

La inexactitud (sesgo) se define como una desviación sistemática del valor verdadero, por ejemplo, un cronómetro que se detiene medio segundo después de pulsar el botón.

La precisión se refiere a que tan cercanos se encuentran (unos de otros) los valores calculados o medidos.

La imprecisión (incertidumbre) se refiere a la magnitud en la dispersión de los datos.

Baja exactitud
Alta precisión

Alta exactitud
Baja precisión

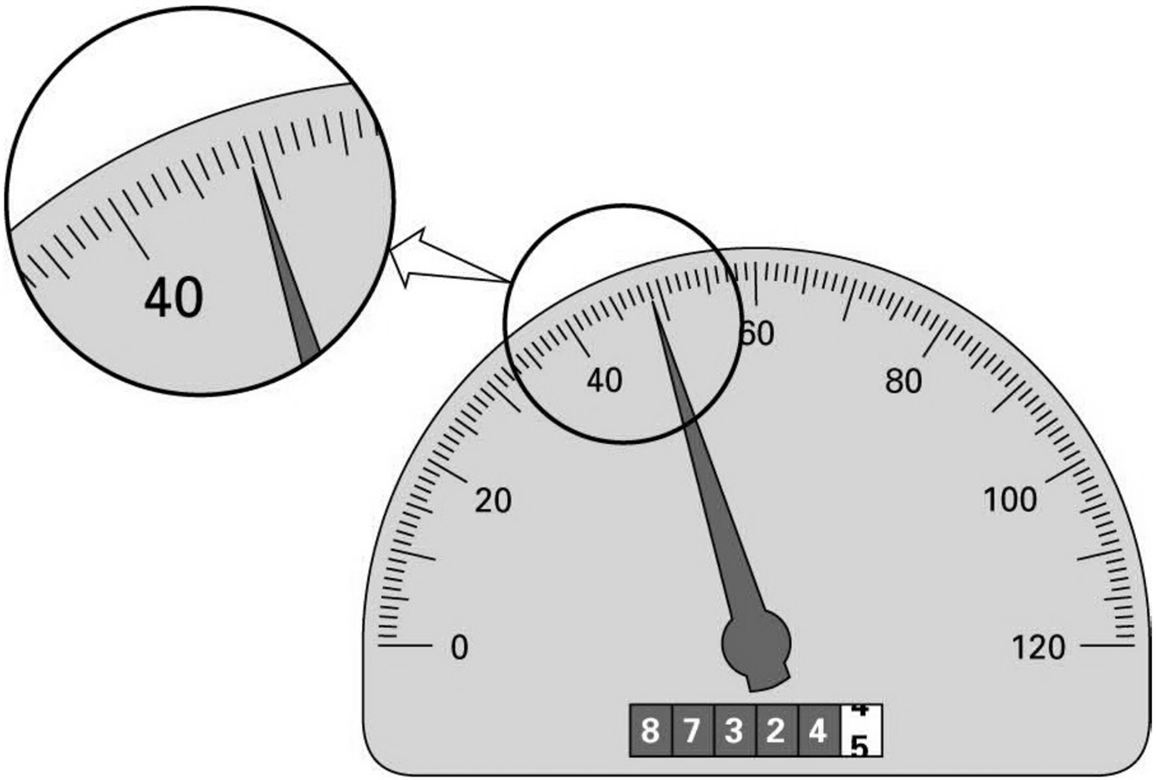
Alta exactitud
Alta precisión

Error de redondeo

Los métodos numéricos dan resultados aproximados, por lo que hay que establecer criterios para ver que tan confiables son.

El error de redondeo se atribuye a la imposibilidad de almacenar todas las cifras de un número y a la imprecisión de los instrumentos de medición con los cuales se obtienen los datos.

La omisión del resto de cifras significativas en un número se le conoce como *error de redondeo*.



Cuando se redondea un número, es necesario observar la cifra que está a su derecha:

1) **Si la cifra es mayor a 5, se suma 1 a la cifra anterior , es decir, la que está a la izquierda.**
2) **Si es menor a 5, la cifra anterior no se altera.**
3) **Si la cifra es igual a 5, se observa la cifra anterior, si ésta es un número par se deja la misma cifra, de lo contrario (si es impar), se deja en la cifra par siguiente.**

Ejemplo 2.5

Redondear:

72.36 (en décimas) = 72.4
7.462 (en centésimas) = 7.46
7.465 (en centésimas) = 7.46
7.475 (en centésimas) =7.48
72.8 (a unidades) = 73.
116,500,000 (a millones) = 116,000,000
117,500,000 (a millones) = 118,000,000

NOTA:

En 1991 un misil iraquí impactó en un cuartel estadounidense, matando a 28 soldados.

La investigación demostró que el misil fue detectado por el radar, pero el sistema antimisiles Patriot no entró en funcionamiento.

El sistema Patriot tenía un error de redondeo (al calcular 1/10) que provocaba un retraso de 0.000000095 segundos cada segundo. Tras 100 horas en funcionamiento, el sistema antimisiles acumulaba un error 0.34 segundos, tiempo suficiente para que un misil Scud iraquí avanzase 600 metros y escapase de la detección.”

Tarea 2.2

Calcular los errores, absolutos y relativos, de los redondeos vistos en el ejemplo 2.1.1.4.

72.36 (en décimas) = 72.4
7.462 (en centésimas) = 7.46
7.465 (en centésimas) = 7.46
7.475 (en centésimas) =7.48
72.8 (a unidades) = 73.
116,500,000 (a millones) = 116,000,000
117,500,000 (a millones) = 118,000,000

Error de truncamiento

- Cuando un número se reemplaza por una expresión de éste más simple, se introduce un error de truncamiento.
- En una iteración, se genera el error al no seguir iterando para aproximarse a una solución más exacta.

Cuando se trunca un número en una cifra determinada, se consideran igual a cero todas las cifras que siguen a la derecha.

Ejemplo 2.6

Truncar:

1) 7.475 (en décimas) = 7.4
2) 7.447 (en décimas) = 7.4

1) E = 7.475 – 7.4 = 0.075
e = (0.075/7.475) * 100 = 1%

2) E = 7.447 – 7.4 = 0.047
e = (0.075/7.447) * 100 = 0.63%

Ejemplo 2.7

La serie de Taylor proporciona una buena forma de aproximar el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto.

La idea general es realizar operaciones según una fórmula general y, mientras más términos de la fórmula tenga la serie, más exacto será el resultado.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplo 2.7

La serie de Taylor para calcular e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots$$

Obtener una aproximación a e^x, para $x = 0.1$, utilizando cuatro elementos de la serie con 8 cifras significativas. Obtener el error relativo porcentual con el valor exacto de $e^{0.1}$.

$$e^{0.1} = 1.1051709180756$$

Ejemplo 2.7

$$e^{0.1} = 1.1051709180756,\ x = 0.1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \cdots$$

$$e^{0.1} \approx 1 + (0.1/1) + (0.1)^2/2 + (0.1)^3/6$$

$$e^{0.1} \approx 1 + 0.1 + 0.005 + 1.6666667\text{x}10^{-4} = 1.1051667$$

$$E = \frac{1.1051709180756 - 1.1051667}{1.1051709180756} * 100 =$$

$$\boxed{E = 0.0003816672}$$

Tarea 2.3

Obtener las aproximación de e^x, para $x = 0.1$, utilizando cinco y seis elementos de la serie con 8 cifras significativas. Obtener el error relativo porcentual con el valor exacto de $e^{0.1}$.

Error de propagación

Es el efecto provocado por los errores de las variables de una expresión matemática que depende de dichas variables.

Las medidas indirectas son magnitudes que se calculan a partir de los valores encontrados en las medidas de otras magnitudes y éstas provocan el error de propagación.

Supongamos que se miden dos dimensiones, *a* y *b*, (con las mismas unidades) y se obtienen sus respectivos errores, pero se desea encontrar una tercera cantidad que es el resultado de operaciones aritméticas de las dos primeras, es decir:

z = a + b | z = a – b

z = a * b | z = a / b

Realizando las operaciones anteriores se propaga el error para el resultado *z* a partir de los errores de *a* y *b*.

Para encontrar el error propagado en z (E_z), se emplean diversas fórmulas, dependiendo de la operación aritmética:

Para la suma y la resta:

$$E_z = E_a + E_b$$

Para el producto:

$$e_z = (E_a / |a^*|) + (E_b / |b^*|)$$

Para el cociente:

$$e_z = (E_a / |a|) + (E_b / |b|)$$

Ejemplo 2.8

Para medir la altura de un árbol A, se mide la longitud de su sombra A*, la altura de un objeto de referencia R y la longitud de la sombra de dicho objeto R*, quedando la ecuación:

A = SA (R/SR)

Una vez realizadas las medidas se obtienen los siguientes datos:

SA = 200 $\pm$ 2 [cm]
R = 100 $\pm$ 4 [cm]
SR = 10.3 $\pm$ 0.2 [cm]

Realizando las operaciones correspondientes tenemos:

$$A = 200 * (100/10.3) = 1941.7 \text{ [cm]}$$

El error propagado está dado por:

$$\frac{\delta A}{|A|} \approx \frac{\delta SA}{|SA|} + \frac{\delta R}{|R|} + \frac{\delta SR}{|SR|} = \frac{2}{200} + \frac{0.4}{100} + \frac{0.2}{10.3} = 0.0334$$

$$\frac{\delta A}{|A|} = 0.0334 \qquad \delta A = 0.0334 \times 1941.7 = 64.8$$

$$\boxed{A = 1941.7 \text{ [cm]} \pm 64.8 \text{ [cm]}}$$

2.2 Solución numérica de ecuaciones algebraicas y trascendentes

En el proceso de resolución de ecuaciones es muy frecuente encontrarnos con ecuaciones que no se pueden resolver por métodos convencionales, así como ecuaciones cuyas raíces no son un número racional.

En estos casos se necesitan métodos que aproximen dichas soluciones, de manera que si no es posible conocer la raíz exacta, sí una buena aproximación de ella.

Existen diferentes métodos para resolver ecuaciones no lineales:

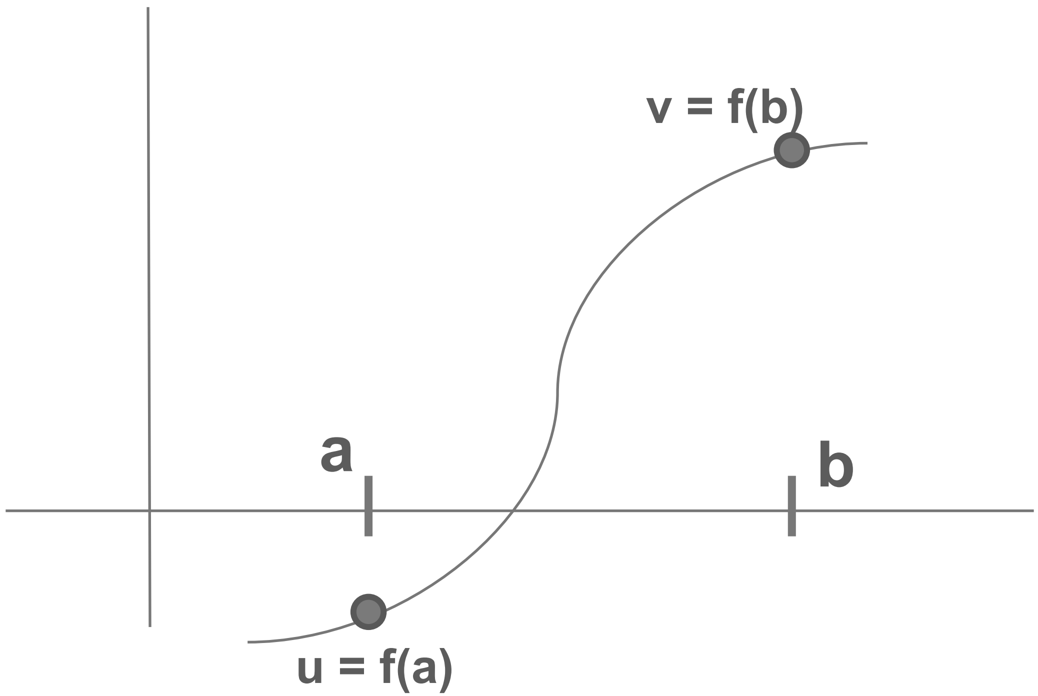
- **Bisección**
- **Interpolación o de la cuerda**
- **Secante**
- **Del punto fijo**
- **Newton-Raphson**
- **Bierge-Vieta**
- **Steffensen**
- **Müller**

Algoritmo de bisección

El algoritmo o método de bisección permite encontrar raíces o aproximaciones de la raíz de una ecuación mediante un método iterativo, aprovechando la propiedad de las funciones continuas

D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

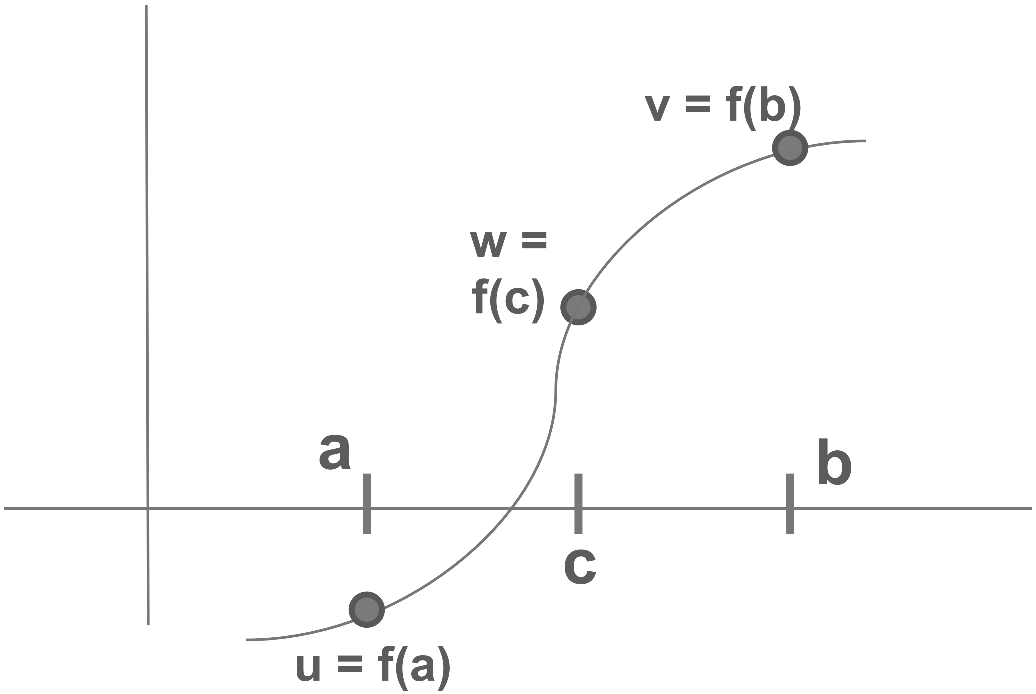
❑Se cuenta con un intervalo (a, b) y con los valores: *u* = *f*(a) y *v* = *f*(b)



❑Se cumple u*v < 0.

Descripción

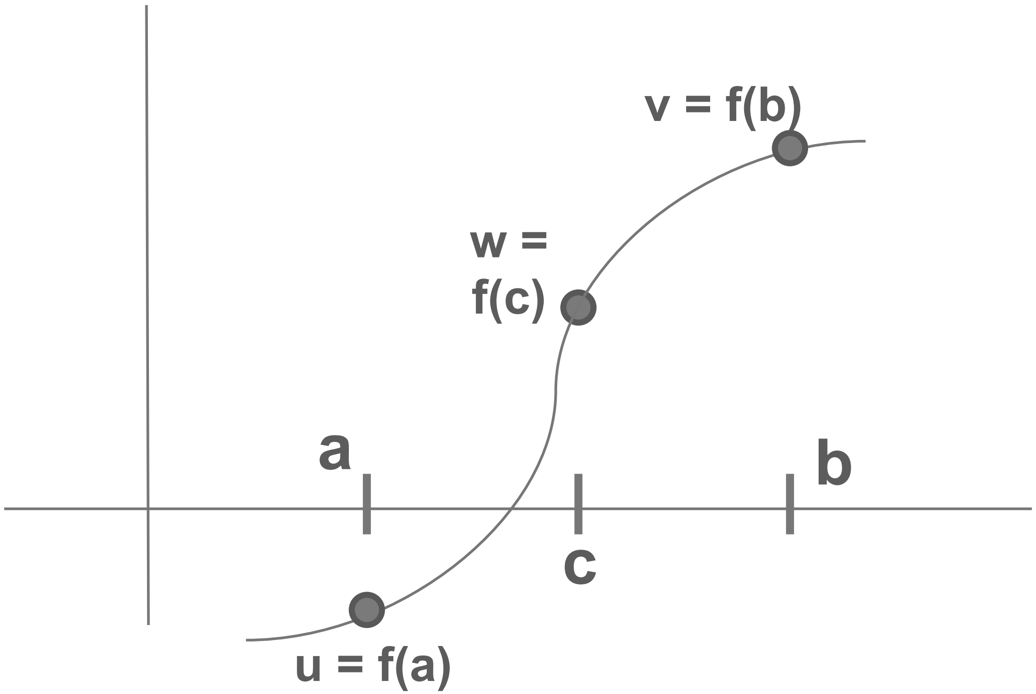
- Se obtiene el punto medio c del intervalo (a,b), es decir: $c = \frac{1}{2}(a + b)$.



- Se obtiene el valor $w = f(c)$.
- Si $f(c) = 0$, termina el método.

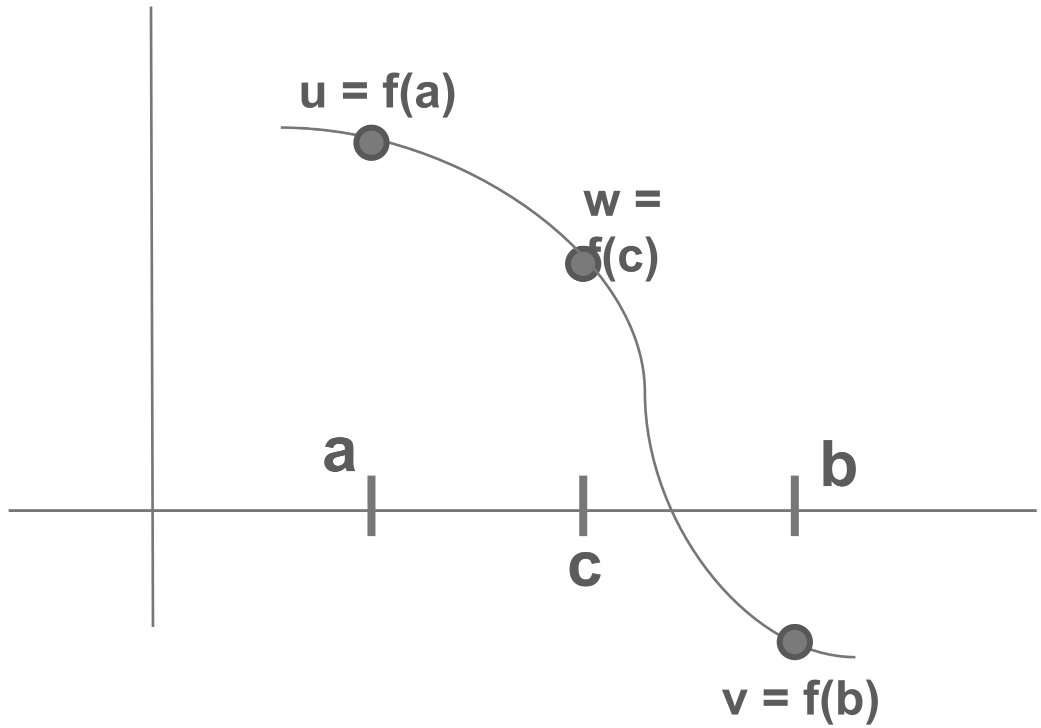
Descripción

- Si $f(c) \neq 0$, se comprueba si $w*u < 0$ o si $w*v < 0$.



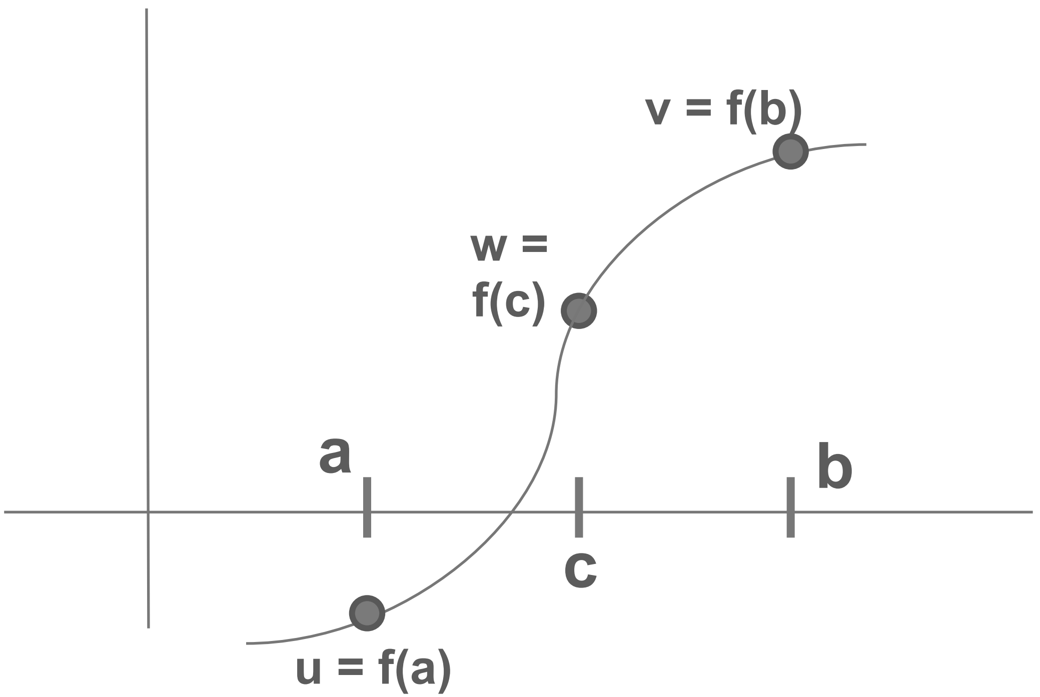
D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

❑ **Si $w*v < 0$, se puede asegurar que una raíz de f existe en el intervalo [c, b] y, por lo tanto, el nuevo intervalo será (a=c, b) y u = w.**



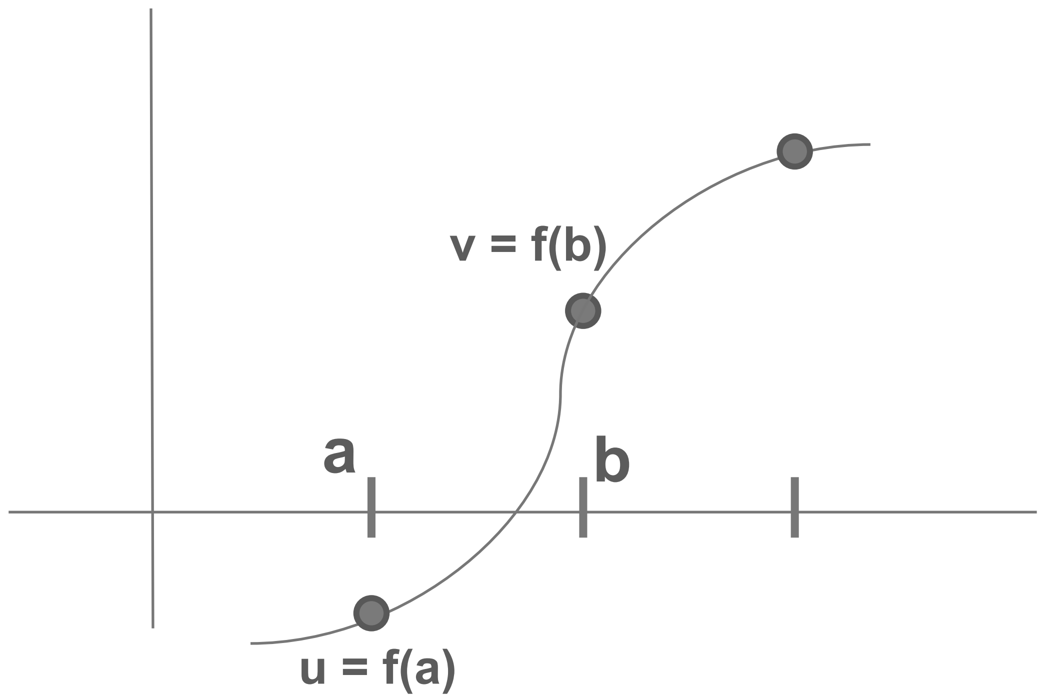
D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

- **Si *w*u* < 0, se puede asegurar que una raíz de f existe en el intervalo [a, c] y, por lo tanto, el nuevo intervalo será (a, b=c) y v = w**



D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

- Se repite el proceso con el intervalo obtenido hasta que se consiga la raíz (f(c) = 0) o hasta que el intervalo sea muy pequeño.



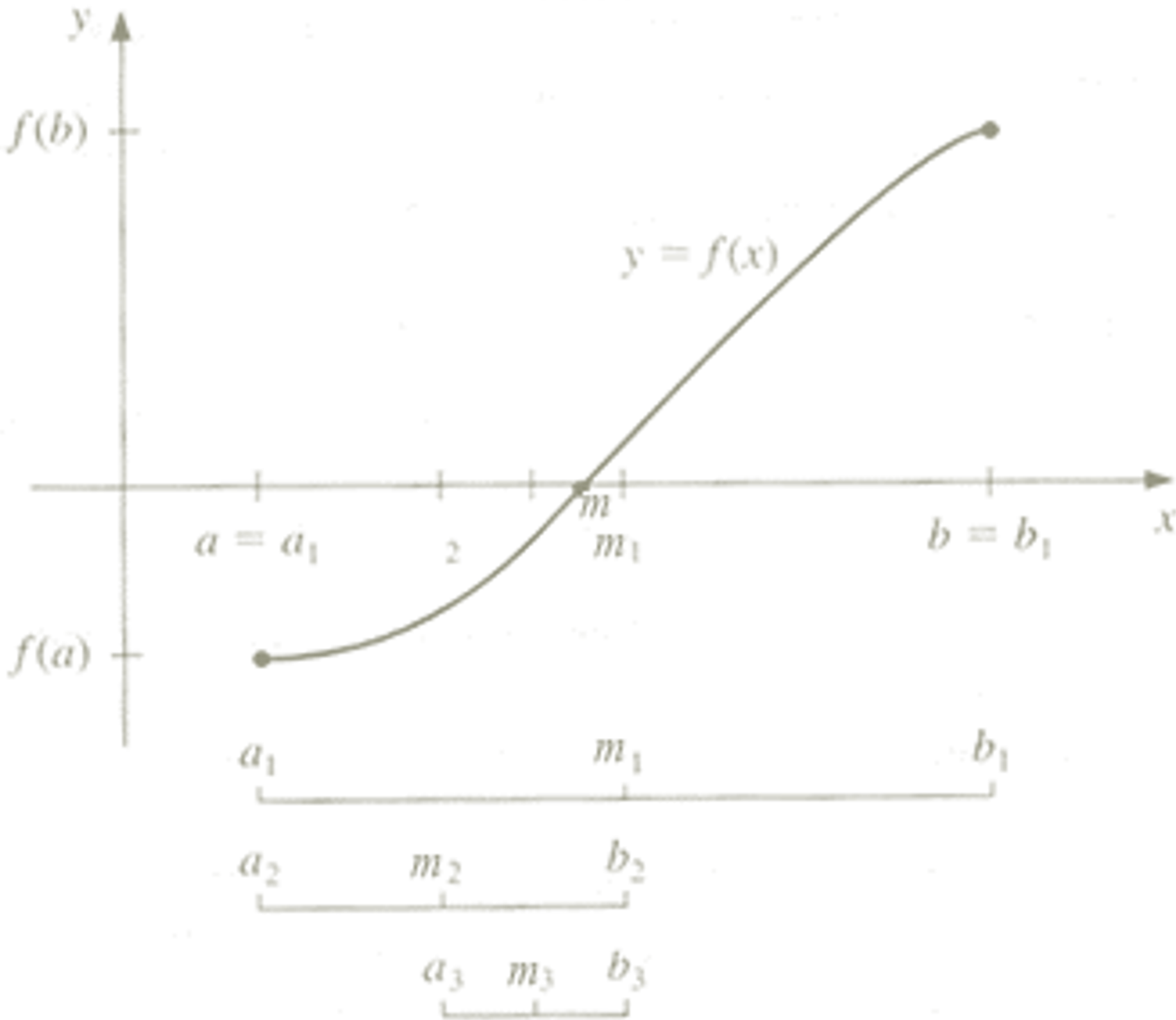
D e s c r i p c i ó n

El error absoluto para el método de bisección está dado por:

$$|x - x^*| \leq (1/2)|b_i - a_i| \leq (1/(2^{i+1}))\ |b_0 - a_0|$$

$$|x - x^*| \leq (1/(2^{i+1}))\ |b_0 - a_0|$$

Bisección



Ejemplo 2.9

Hallar la raíz aproximada de la ecuación

$$f(x) = e^x - \text{sen}(x)$$

en el intervalo [-4, -3] hasta que el error absoluto sea 0.01

i	a_i	b_i	$c_i = (a_i + b_i)/2$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$	$\lvert b_i - a_i \rvert$

Ejemplo 2.9

$$f(x) = e^x - \text{sen}(x)$$

i	a_i	b_i	$c_i = (a_i + b_i)/2$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$	$\|b_i - a_i\|$
0	-4	-3	-3.5	-0.73849	0.19091	-0.32059	1
1	-3.5	-3	-3.25	-0.32059	0.19091	-0.06942	0.5
2	-3.25	-3	-3.125	-0.06942	0.19091	0.06053	0.25
3	-3.25	-3.125	-3.1875	-0.06942	0.06053	-0.00462	0.125
4	-3.1875	-3.125	-3.15625	-0.00462	0.06053	0.02793	0.0625
5	-3.1875	-3.15625	-3.17188	-0.00462	0.02793	0.01165	0.03125
6	-3.1875	-3.17188	-3.17969	-0.00462	0.01165	0.00351	0.01563
7	-3.1875	-3.17969	-3.18359	-0.00462	0.00351	-0.08421	0.00781

Ejemplo 2.9

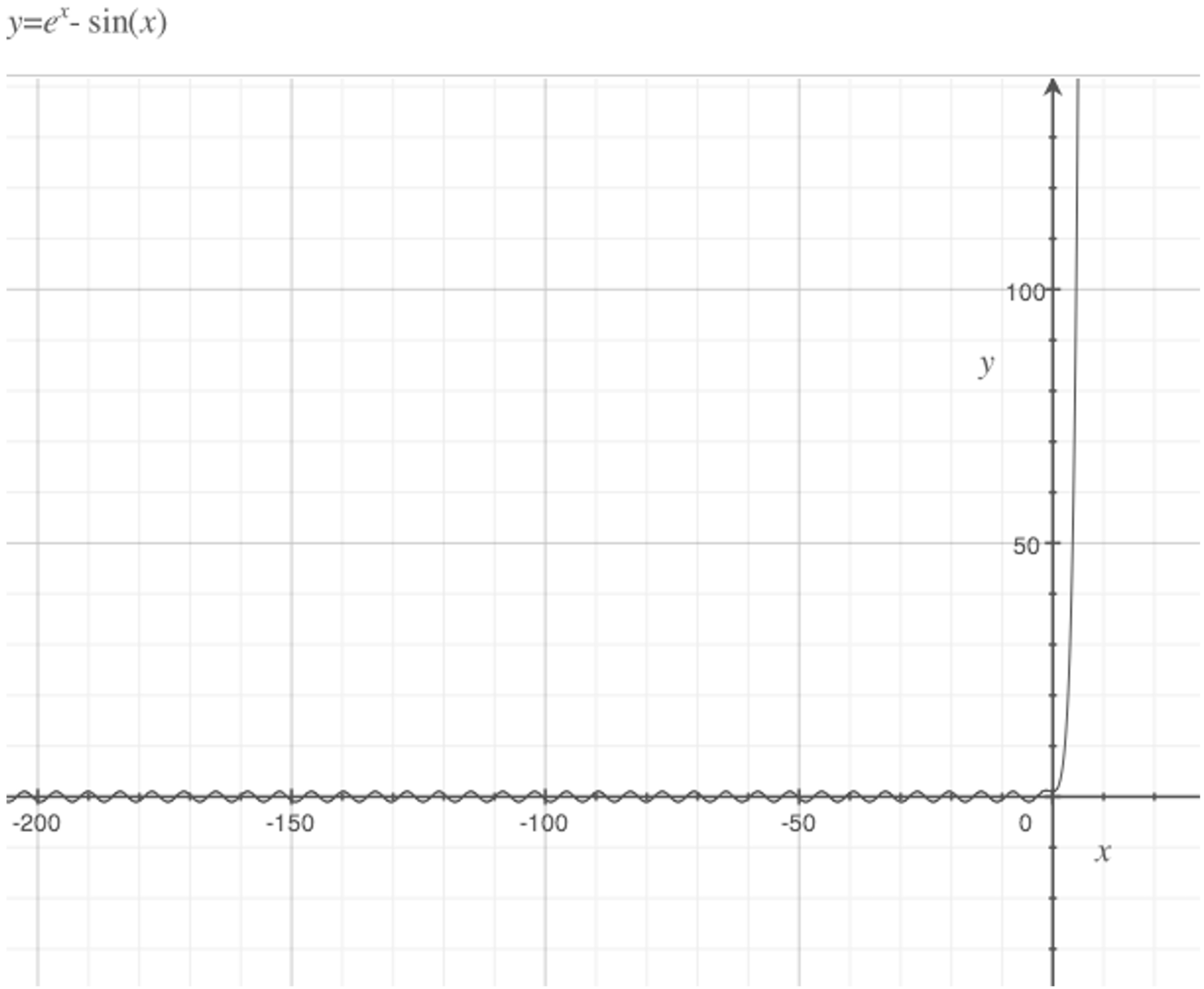
La raíz aproximada de la función $f(x) = e^x - \text{sen}(x)$ en el intervalo [-4, -3] es:

$$x = x_7 = -3.18359$$

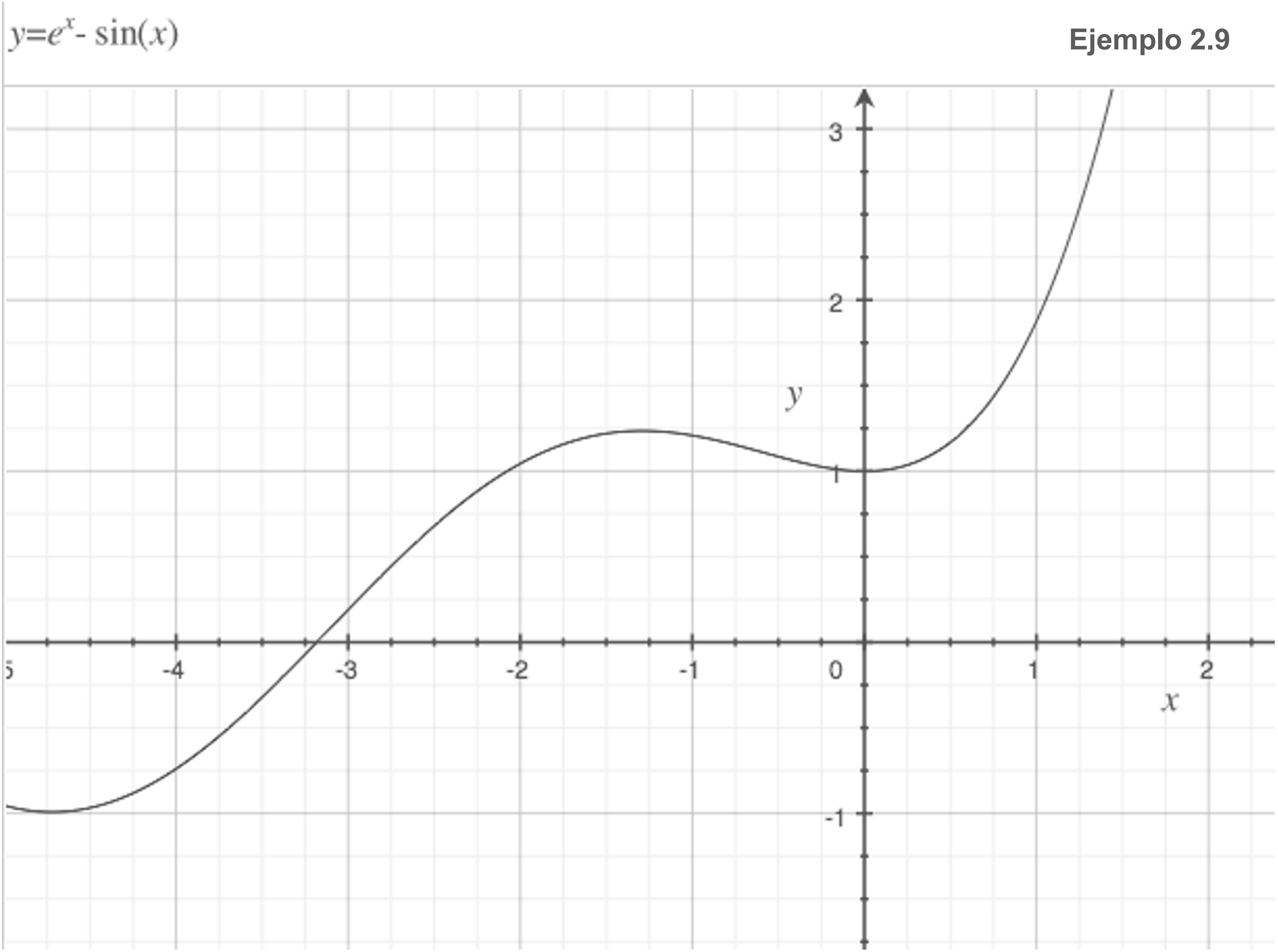
El error obtenido es:

$$E_x = |(b_0 - a_0)| \,/\, 2^{i+1}$$
$$E_x = |(-3) - (-4)|/2^8$$
$$E_x = 0.003906$$

Ejemplo 2.9



Ejemplo 2.9



Ejemplo 2.9

El número de iteraciones necesarias para obtener la raíz aproximada con base en la condición dada ($\Delta x = 0.01$) se puede obtener de la siguiente manera:

$$(|b_0 - a_0|) / 2^i < \Delta x$$

donde

$$i > (\ln (b_0 - a_0) - \ln \Delta x) / \ln (2)$$
$$i > (\ln (-3 - -4) - \ln 0.01) / \ln (2) = 6.64386$$
$$i \approx 7$$

Las iteraciones comienzan en 0, es decir, $i = 0$, $i = 1$, $i = 2$, … , $i = 6$, $i = 7$

Desventajas del método de bisección

La principal desventaja de este método es que trabaja sobre un intervalo fijo, si dentro de este intervalo la función no converge a cero (no hay raíz), el número de iteraciones para el cálculo de la raíz tiende a infinito.

Ejercicio 2.1

Para la ecuación $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, en el intervalo [1, 2], con una exactitud de 10^{-3}, hallar la raíz aproximada y el error absoluto mediante el método de bisección.

i	a_i	b_i	$c_i = (a_i + b_i)/2$	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(c_i)$	$\lvert b_i - a_i \rvert$

Método de Newton-Raphson

También conocido simplemente como método de Newton es uno de los métodos numéricos para la aproximación de raíces más potentes y conocido.

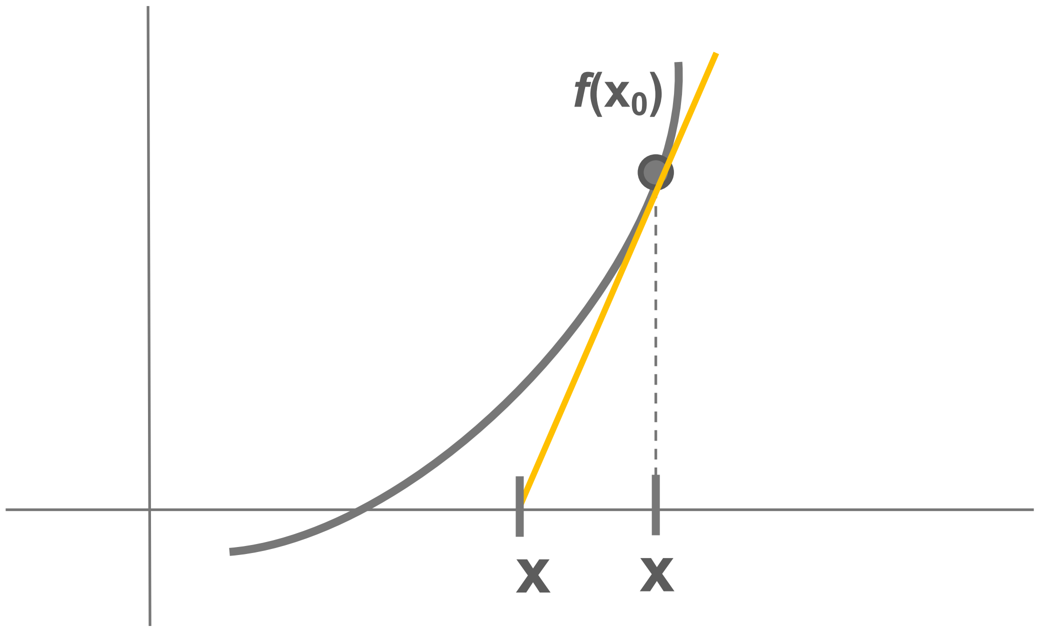
Es una técnica que permite lograr una convergencia más rápida que la que ofrecen otros tipos de métodos de iteración funcional. Se basa en los polinomios de Taylor.

Este método supone desde un principio que la función *f* es derivable. Esto implica que la gráfica de *f* tiene una pendiente definida en cada punto y, por tanto, una recta tangente única.

A diferencia del método de bisección, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iteractivo.

Descripción

- **Se tiene un punto dado $(x_0, f(x_0))$**
- **En ese punto, existe una recta tangente que es una muy buena aproximación de la curva en la vecindad del punto.**



- **La recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ cruza el eje x en el punto x_1**

Descripción

➢ **Para calcular el punto x_1 calculamos la ecuación de la recta tangente. Sabemos que la pendiente está dada por:**

$$m = f'(x_0)$$

y, por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Como el punto de interés (la raíz) se obtiene cuando $y = 0$

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Descripción

De donde se obtiene x:

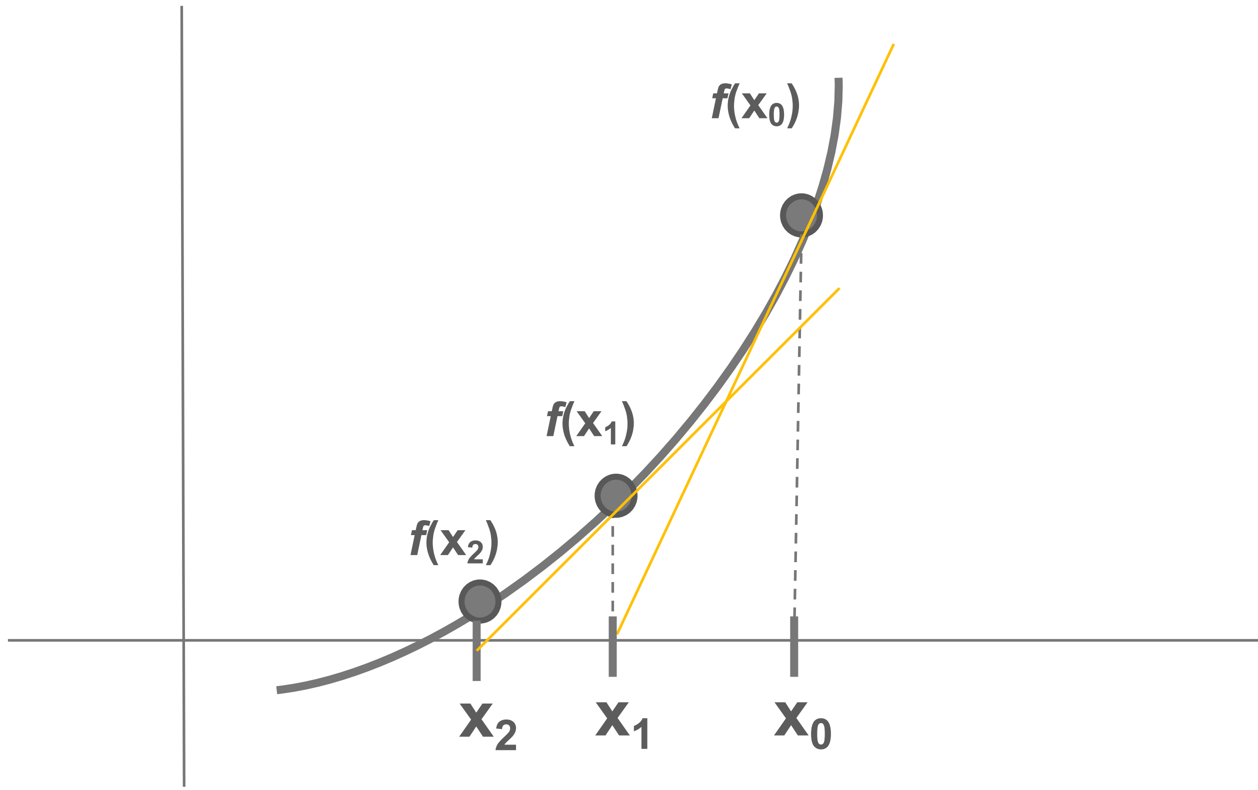
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

La ecuación anterior es la fórmula iterativa del método de Newton-Raphson para calcular la siguiente aproximación, es decir:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \text{ con } f'(x_i) \neq 0$$

Descripción

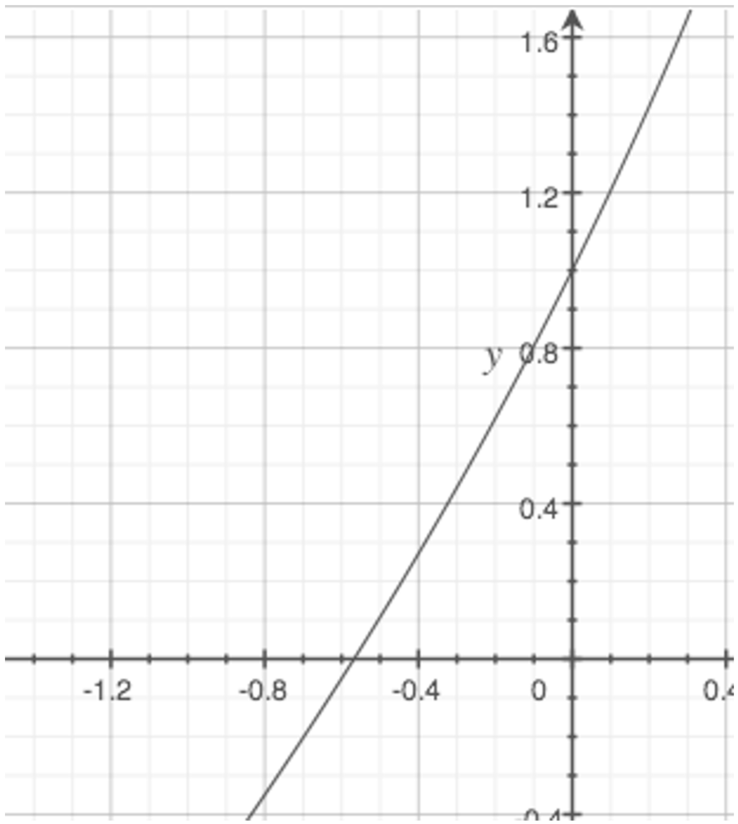
Representación gráfica del método de Newton – Raphson:



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Ejemplo 2.11

Obtener la aproximación de la raíz de la función $f(x) = e^x + x$, mediante el método de Newton-Raphson, hasta que se cumpla que $|x_i - x_{i-1}| \leq 0.5x10^{-3}$.



Ejemplo 2.11

De la gráfica, la función $f(x) = e^x + x$ es continua y derivable. En el intervalo [-1, 0] se encuentra la raíz, esto se comprueba valuando los puntos -1 y 0 y observando el signo del resultado

$$f(-1) = -0.632121 < 0$$
$$f(0) = 1 > 0$$

La derivada la función es: $f'(x) = 1 + e^x$.

Ejemplo 2.11

De la fórmula iterativa del método de Newton-Raphson se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{xi} + x_i}{e^{xi} + 1} = \frac{e^{xi}(-1 + x_i)}{e^{xi} + 1}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$

Ejemplo 2.11

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	-1	-0.632121	1.367879	-
1	-0.537883	0.0461	1.583983	0.462117
2	-0.566987	0.000245	1.567232	0.029104
3	-0.567143	6.927809×10^{-9}	1.567143	0.000156

La raíz aproximada es:

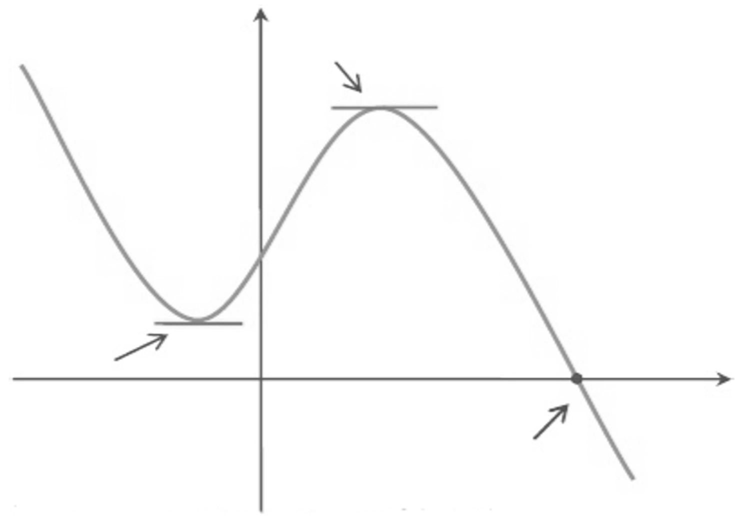
$$x^* = x_3 = -0.567143$$

Desventajas del método de Newton-Raphson

Si la función dada no converge a cero (no tiene raíz) el método se repite n veces.

Si la función dada o la función valuada en x_0 ($f(x_0)$) no tiene derivada, este método no se puede aplicar debido a que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



Ejercicio 2.2

Para la ecuación $f(x) = x^2 - 2x + 5$, partiendo del punto $x_0 = 3.5$ hasta obtener un error absoluto entre los puntos de $|x_i - x_{i-1}| < 0.01$, mediante el método de Newton-Raphson, con un máximo de 6 iteraciones.

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$

Método de la secante

Este método traza rectas secantes a la curva de la ecuación que se está analizando y verifica la intersección de dichas rectas con el eje ‘x’ para conocer la aproximación de la raíz buscada.

Este método converge a la raíz con una velocidad semejante al método de Newton-Raphson.

Este método es parecido al de Newton-Raphson, pero evita el cálculo de derivadas. De la iteración de Newton tenemos la fórmula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (1)$$

El método de la secante reemplaza $f'(x_i)$ por la aproximación de la derivada, debido a su definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

Para una h pequeña:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (3)$$

Si $x = x_i$ y $h = x_{i-1} - x_i$, se tiene:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \qquad (4)$$

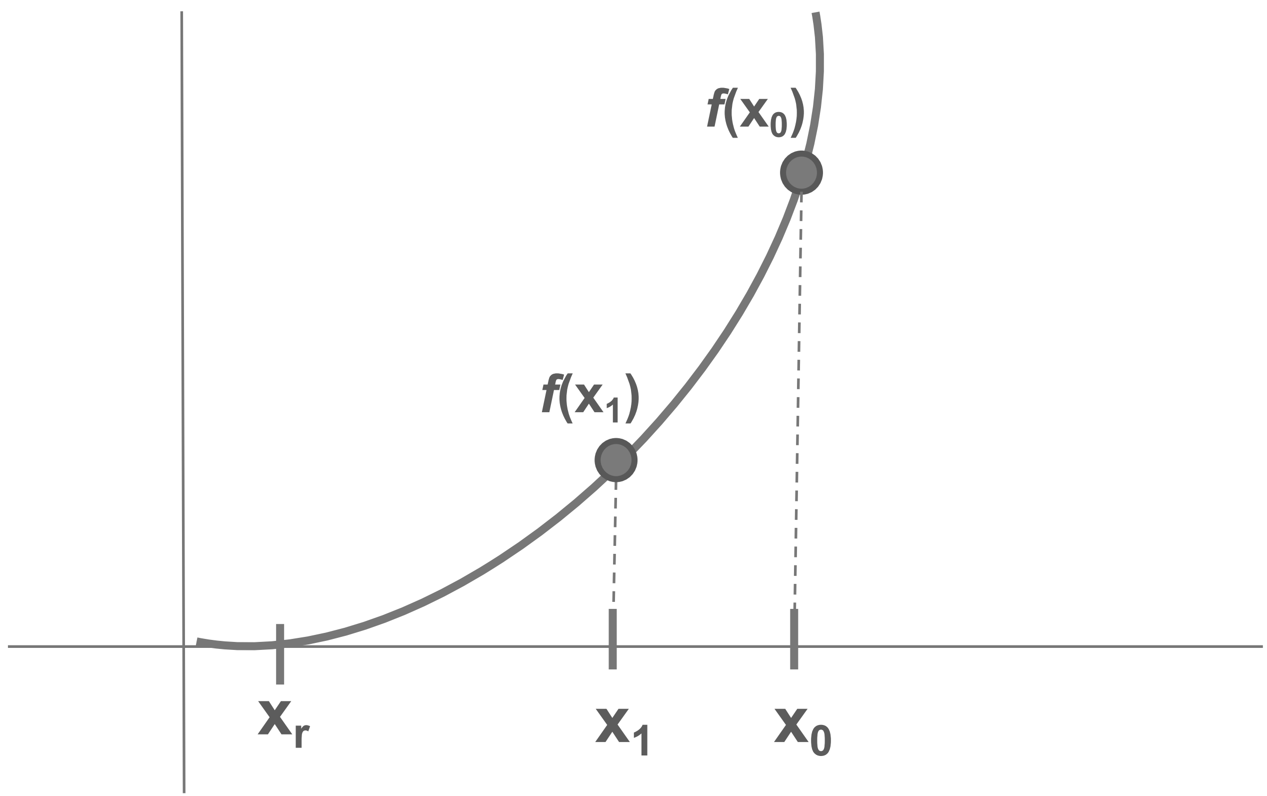
El miembro derecho de la ecuación (4) es la pendiente de una recta secante de la gráfica *f*.

Sustituyendo (4) en (1), se obtiene la fórmula iterativa del método de la secante:

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right] f(x_i) \qquad (5)$$

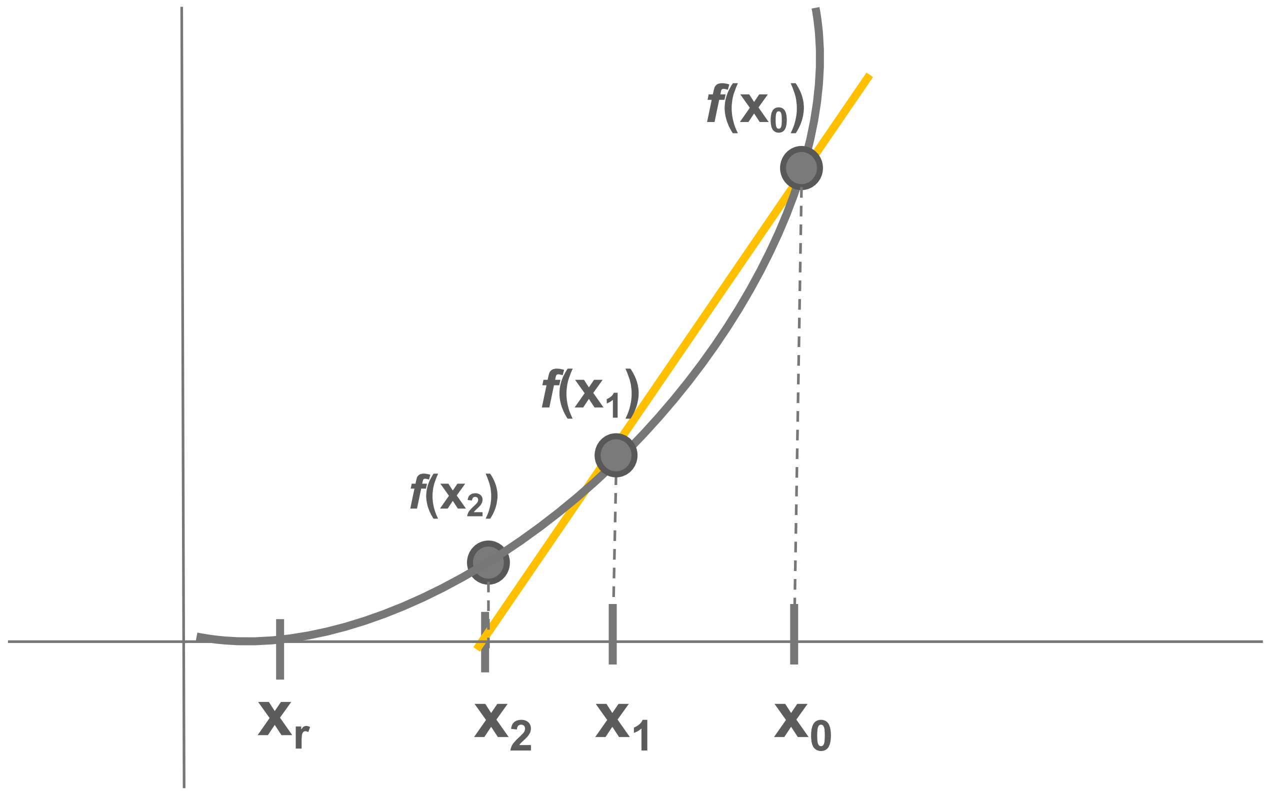
Descripción

El proceso iterativo comienza con dos puntos próximos al punto de la raíz (x_r, 0), que son (x_0, $f(x_0)$) y (x_1, $f(x_1)$)



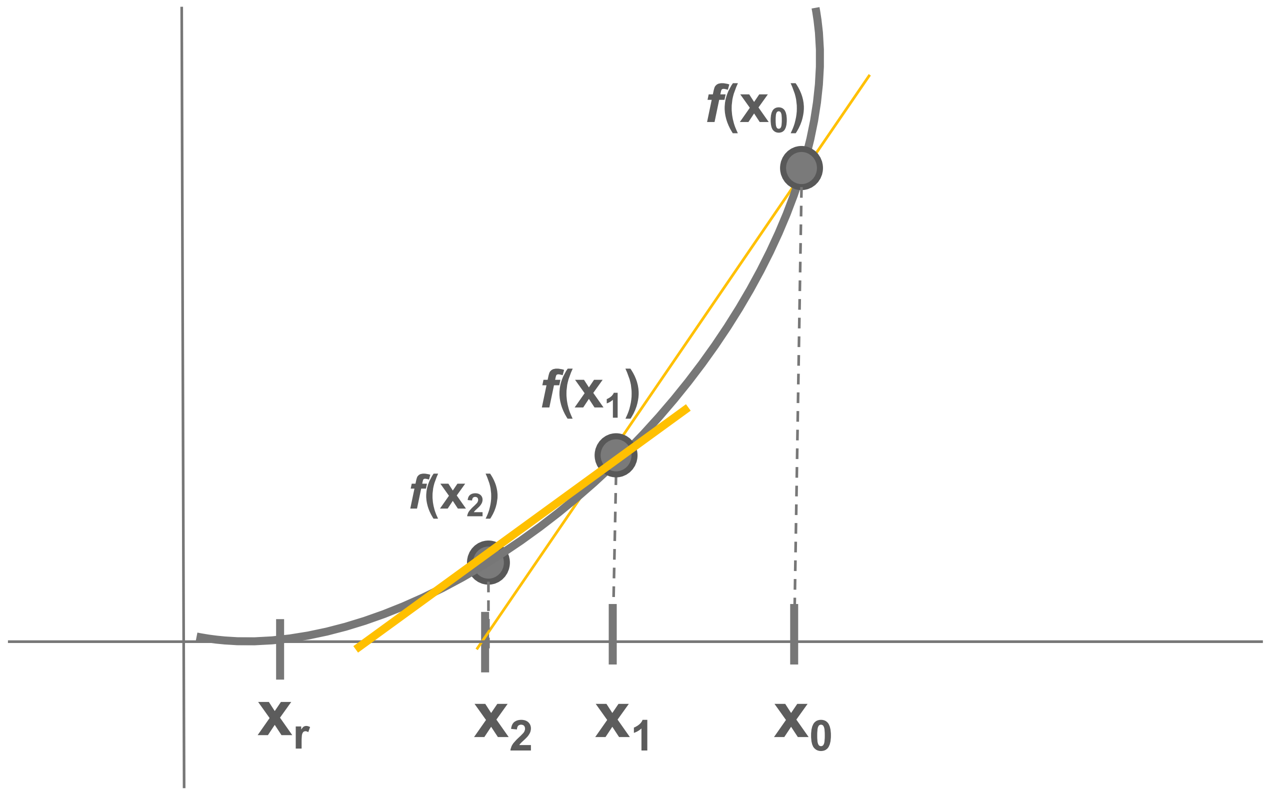
Descripción

La siguiente aproximación x_2 se determina por la intersección con el eje x de la recta que une ambos puntos.



D e s c r i p c i ó n

El nuevo punto (x_2, 0) está más próximo a la raíz x que los anteriores, sin embargo, si no se ha cumplido la condición de error deseado, se pueden seguir calculando los puntos de la sucesión.



Ejemplo 2.13

Utilizar el método de la secante en el intervalo [0, 1] para hallar la raíz aproximada de la ecuación:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Repetir hasta que el valor de $|x_i - x_{i-1}| \leq 0.005$

De la fórmula iterativa del método de la secante:

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right] f(x_i)$$

Ejemplo 2.13

Sustituyendo la función, se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1})}{(e^{-x_i} - x_i) - (e^{-x_{i-1}} - x_{i-1})} (e^{-x_i} - x_i)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$

Ejemplo 2.13

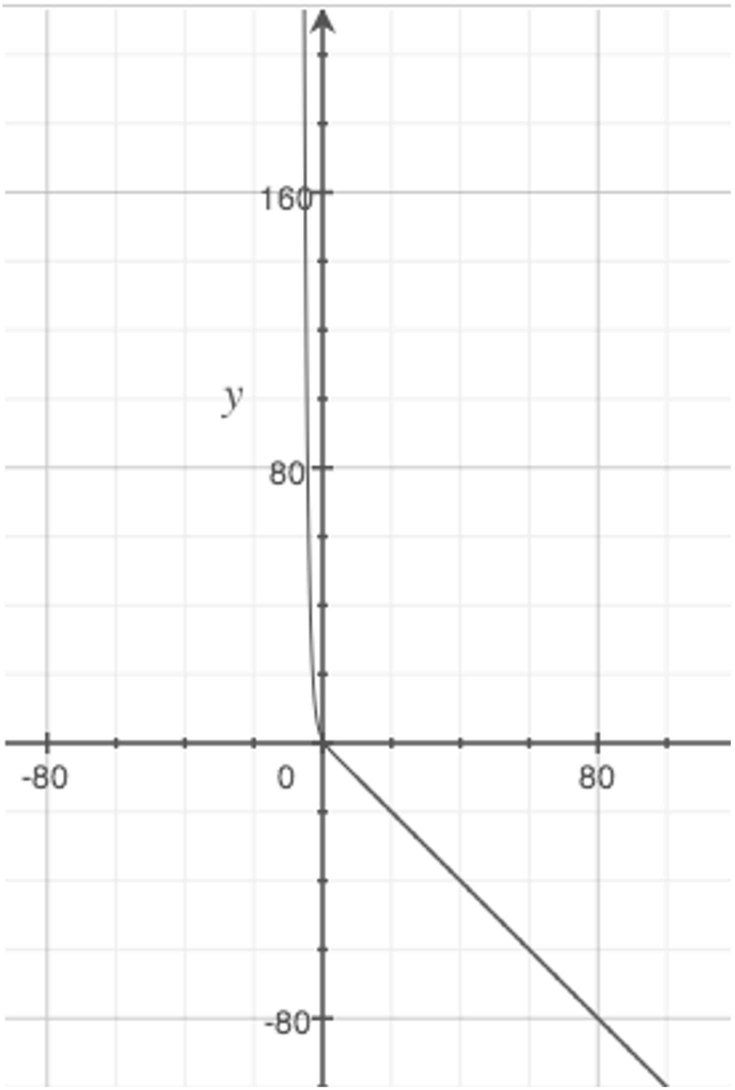
i	x_i	$f(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
0	0	1	-
1	1	-0.632121	1
2	0.6127	-0.070814	0.3873
3	0.563838	0.005182	0.048861
4	0.56717	-0.000042	0.003332

La raíz aproximada es:

$$x^* = x_6 = 0.56717$$

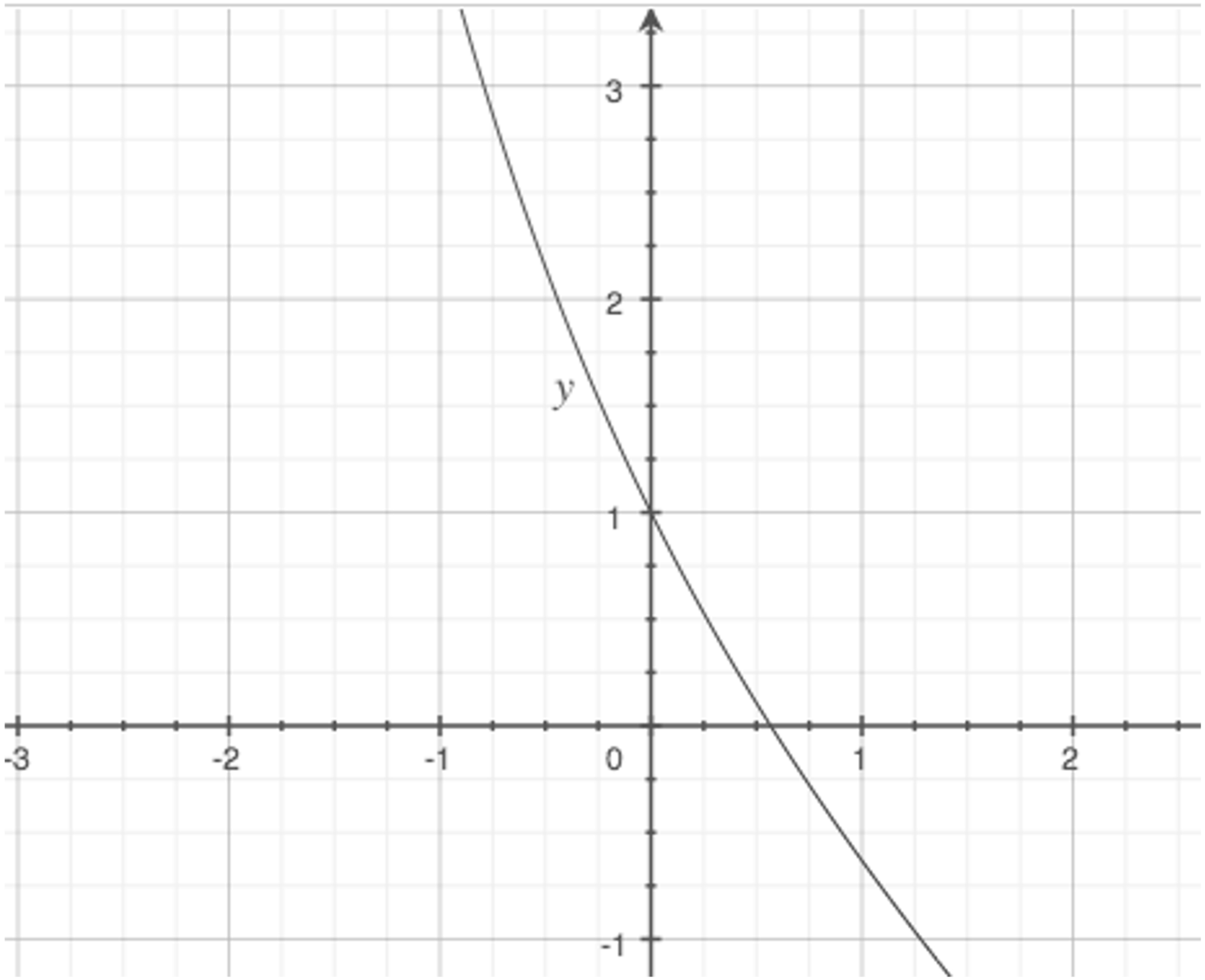
Ejemplo 2.13

$y=e^{-x} - x$



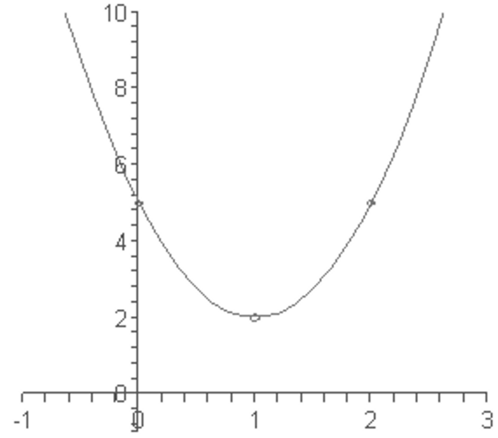
Ejemplo 2.13

$y=e^{-x} - x$



Desventajas del método de la secante

La principal desventaja, igual que en el método de Newton, es que si la función dada no converge a cero (no tiene raíz) el método se repite n veces.



Ejercicio 2.3

En el intervalo [-2.6, -2.4] y utilizando el método de la secante, hallar la raíz aproximada de la ecuación:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

hasta que el valor de $|x_i - x_{i-1}| \leq 0.01$

Tarea

Programar 2 métodos para la resolución de ecuaciones no lineales:

- **Algoritmo de bisección**
- **Método de Newton-Raphson**
- **Método de la secante**

Para cualquier ejercicio visto en clase. Los datos se leen desde archivo.

2.3 Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Muchos de los problemas que surgen en la práctica involucran la resolución de un sistema lineal.

Por ejemplo, el cálculo de estructuras reticulares definidas por vigas, modelos económicos, el color básico de cada pixel de una pantalla, cálculo de tensiones en los nudos de una red de tensión continua, la solución de un circuito eléctrico, etc.

En este subtema se van a estudiar los aspectos numéricos que se presentan al resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n = c_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2n} x_n = c_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3n} x_n = c_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \ldots + a_{nn} x_n = c_n
\end{array}
$$

es decir, sistemas de n ecuaciones con n incógnitas, donde a_{ij} son los coeficientes, c_i son números reales determinados (términos independientes) y x_n son las incógnitas que dan solución al sistema.

Un sistema lineal de n x n se puede representar mediante matrices:

$$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{2n} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} + \dots + a_{3n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \quad \dots \\ a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \dots + a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}$$

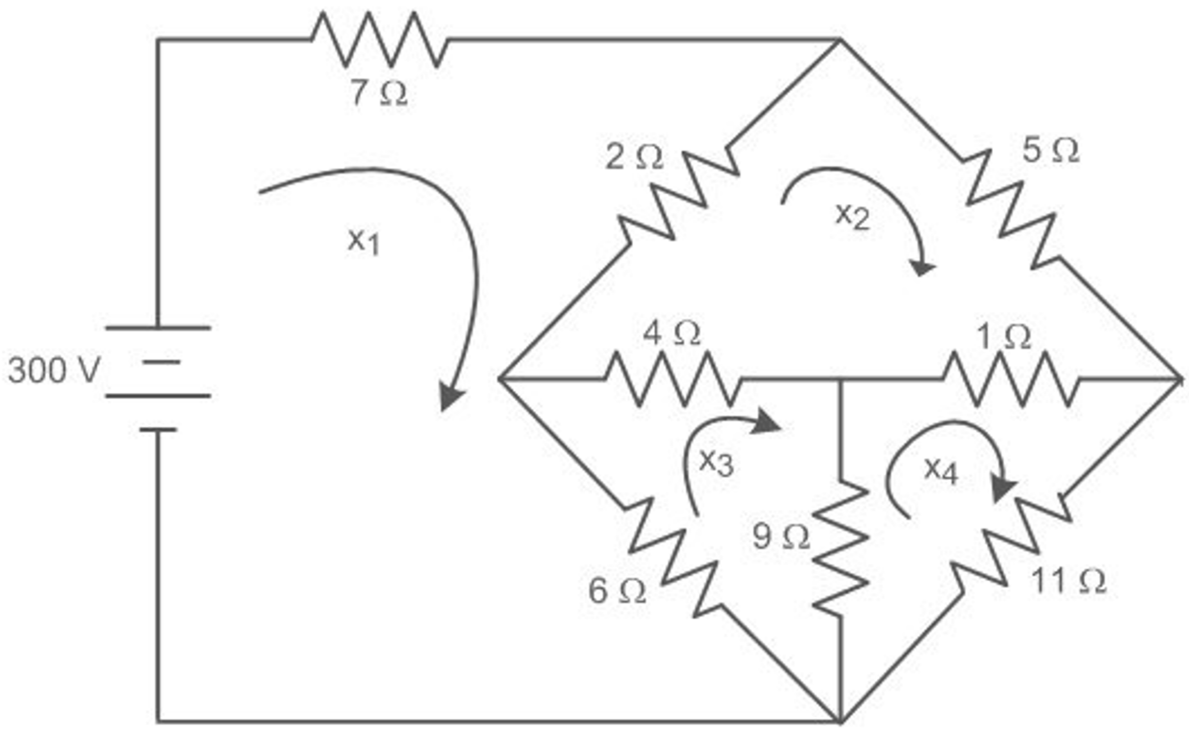
Si se denota A a la matriz de coeficientes, x al vector solución y C al vector de términos independientes, el sistema de ecuaciones se reduce a la expresión:

$$Ax = C$$

Un sistema lineal de n x n también se puede representar mediante su matriz orlada:

$$\left[\begin{array}{l|l}
a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n} & c_1 \\
a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{2n} & c_2 \\
a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{3n} & c_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \quad \ldots & \ldots \\
a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \ldots + a_{nn} & c_n
\end{array}\right]$$

Por ejemplo, una red eléctrica simple contiene una serie de resistencias y una sola fuente de fuerza electromotriz (batería).



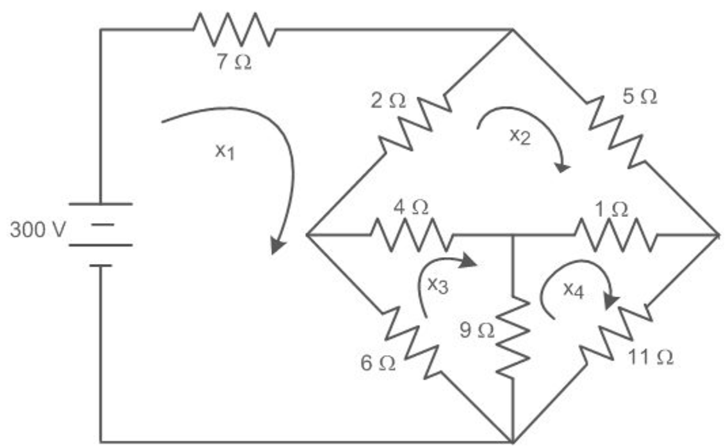
Utilizando las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm, el comportamiento de la red se puede describir como un sistema de ecuaciones lineales. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son las corrientes en espiras, entonces se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
15x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= 300\\
-2x_1 + 12x_2 - 4x_3 - x_4 &= 0\\
-6x_1 - 4x_2 + 19x_3 - 9x_4 &= 0\\
- x_2 - 9x_3 + 21x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Sistemas de ecuaciones como el anterior u otros con cientos de incógnitas se pueden resolver utilizando los métodos desarrollados en este tema.

El conjunto de soluciones (vector solución) del sistema anterior es:

$x_1 = 26.5$ $\quad$ $x_2 = 9.35$ $\quad$ $x_3 = 13.3$ $\quad$ $x_4 = 6.13$



Existen diversos métodos para resolver ecuaciones lineales:

- **Eliminación de Gauss**
- **Eliminación de Gauss con pivotamiento**
- **Eliminación de Gauss-Jordan**
- **Factorización de LU**
- **Descomposición de LU**
- **Matriz inversa**
- **Jacobi**
- **Gauss-Seidel**
- **Relajación**
- **Refinamiento iterativo**

Método de eliminación Gaussiana o eliminación de Gauss

Este método para resolver un sistema lineal de ecuaciones de n x n, dado por la ecuación matricial Ax = C se basa en la transformación del sistema original en otro de la forma

$$M\,Ax = M\,C$$

de modo que la matriz M A sea triangular superior. Una vez hecho lo anterior se resuelve el sistema triangular MAx = MC.

Este método se suele ocupar cuando la matriz A no tiene inversa, debido a:

$$Ax = C \rightarrow x = A^{-1} C$$

Empero, aunque la matriz a evaluar posea su inversa, en la mayoría de las aplicaciones es aconsejable resolver el sistema con el vector de incógnitas x en lugar de calcular la inversa.

D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

- Consiste en dos etapas o procesos: eliminación progresiva y sustitución regresiva.

- En la etapa de eliminación progresiva se realizan las operaciones con las filas de la matriz orlada con el fin de conseguir una matriz orlada equivalente de la forma:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
b_{11} & + b_{12} & + & \ldots + & b_{1\,n-1} & + b_{1n} & & d_1 \\
0 & + b_{22} & + & \ldots + & b_{2\,n-1} & + b_{2n} & & d_2 \\
0 & + \;0 & + & \ldots + & b_{3\,n-1} & + b_{3n} & & d_3 \\
 & & & & \ldots & & & \\
0 & + \;0 & + & \ldots + & b_{n-1\,n-1} & + b_{n-1\,n} & & d_{n-1} \\
0 & + \;0 & + & \ldots + & 0 & + b_{nn} & & d_n
\end{array}\right]$$

Descripción

- **El sistema lineal de ecuaciones resultante es Bx = D, donde B es una matriz triangular superior.**

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
b_{11} & + & b_{12} & + & \ldots & + & b_{1\ n-1} & + & b_{1n} & & & d_1 \\
0 & + & b_{22} & + & \ldots & + & b_{2\ n-1} & + & b_{2n} & & & d_2 \\
0 & + & 0 & + & \ldots & + & b_{3\ n-1} & + & b_{3n} & & & d_3 \\
 & & & & & \ldots & & & & & & \\
0 & + & 0 & + & \ldots & + & b_{n-1\ n-1} & + & b_{n-1\ n} & & & d_{n-1} \\
0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & b_{nn} & & & d_n
\end{array}
$$

Descripción

- **La etapa de sustitución regresiva resuelve el sistema lineal de ecuaciones despejando el valor de la incógnita x_n de la última ecuación:**

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
b_{11} & + & b_{12} & + & \dots & + & b_{1\ n-1} & + & b_{1n} & & & d_1 \\
0 & + & b_{22} & + & \dots & + & b_{2\ n-1} & + & b_{2n} & & & d_2 \\
0 & + & 0 & + & \dots & + & b_{3\ n-1} & + & b_{3n} & & & d_3 \\
 & & & & \dots & & & & & & & \\
0 & + & 0 & + & \dots & + & b_{n-1\ n-1} & + & b_{n-1\ n} & & & d_{n-1} \\
0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + & b_{nn} & & & d_n
\end{array}
$$

$$x_n = d_n / b_{nn}$$

D e s c r i p c i ó n

- Con el valor del paso anterior se obtiene x_n, se sustituye en la penúltima ecuación y se obtiene x_{n-1}:

$$
\begin{array}{lllllll}
b_{11} & + b_{12} & + & \ldots + & b_{1\ n-1} & + b_{1n} & \mid d_1 \\
0 & + b_{22} & + & \ldots + & b_{2\ n-1} & + b_{2n} & \mid d_2 \\
0 & + \ 0 & + & \ldots + & b_{3\ n-1} & + b_{3n} & \mid d_3 \\
 & & & \ldots & & & \\
0 & + \ 0 & + & \ldots + & b_{n-1\ n-1} & + b_{n-1\ n} & \mid d_{n-1}
\end{array}
$$

$$x_{n-1} = (d_{n-1} - (b_{n-1n} * x_n)) / b_{n-1\ n-1}$$

- Con el valor de x_{n-1} se calcula x_{n-2} de la antepenúltima ecuación y así sucesivamente.

Ejemplo 2.14

Utilizando el método de eliminación de Gauss, encontrar la solución numérica al sistema lineal de ecuaciones:

$$x_1 + x_2 - x_3 = -1$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -9$$

Ejemplo 2.14

Eliminación progresiva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Utilizando como fila pivote la primera y el elemento $a_{11} = 1$ como pivote, se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes para las filas restantes:

$$F_2 = F_2 - (2^*F_1)$$
$$F_3 = F_3 - (3^*F_1)$$

Ejemplo 2.14

Al sustituir las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Ahora se utiliza como fila pivote la segunda y como elemento pivote $a_{22} = -5$, se obtiene la siguiente ecuación equivalente para la fila tres:

$$F_3 = F_3 - (0.2 * F_2)$$

Ejemplo 2.14

Al sustituir la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -7.2 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha conseguido la matriz triangular superior se puede obtener el valor de la última incógnita (x_3) simplemente despejando y, una vez obtenido el valor de x_3 se sustituye en F_2 y se obtiene x_2. Al final se sustituyen x_2 y x_3 en F_1 y se obtiene x_1, completando el vector solución.

Ejemplo 2.14

Sustitución regresiva:

Se despejan las incógnitas desde la última hasta la primera ecuación para obtener el vector solución.

$$x_3 = \frac{-7.2}{-1.8} = 4$$

$$x_2 = \frac{(6) - (4)(4)}{-5} = 2$$

$$x_1 = \frac{-1 + 1(4) - 1(2)}{1} = 1$$

Vector solución

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Desventajas del método de eliminación de Gauss

El algoritmo de Gauss fracasa ante algunos sistemas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O genera una solución más compleja:

$$\begin{bmatrix} e & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma Ax = C combina las etapas de eliminación progresiva y sustitución regresiva del método de Gauss para obtener una matriz diagonal ($a_{ij} = 0$ para $i \neq j$).

El resultado final de este tipo de eliminación (la matriz diagonal) genera la solución del sistema de ecuaciones (el vector solución) de manera directa.

D e s c r i p c i ó n

- **Se realizan k pasos, donde, en cada uno, se restan múltiplos de la fila k a las demás filas, de tal modo que el coeficiente x_k es cero en todas las filas excepto en la k – ésima fila.**

- **Después de recorrer todas las filas, la matriz resultante sera una matriz diagonal y, por tanto, el vector solución se calcula de manera directa.**

- **Se utiliza la variable x_k en las ecuaciones f_{K+1}**

D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

- **Por lo tanto, la ecuación Ax = C quedaría reducida a:**

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{(1)} \\ c_2^{(2)} \\ c_3^{(3)} \\ \\ c_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Donde cada elemento $a_{ii}^{(i)}$ es el obtenido en la i-ésima transformación del sistema lineal inicial en su equivalente.

D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

- El vector solución se obtiene utilizando la ecuación:

$$x_k = \frac{c_i^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}} \quad \text{para } i = 1, , \ldots, n$$

Si la matriz diagonal resultante es igual a la matriz identidad, el vector solución se obtiene de manera directa:

$$x_k = c_i^{(i)}, \text{ para } i = 1, , \ldots, n$$

Ejemplo 2.15

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 21 \\ 17 \\ 14 \end{bmatrix}$$

aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan

Ejemplo 2.15

Utilizando como fila pivote a F_1 y como elemento pivote $a_{11} = 1$, se obtiene:

$$F_1 = (1/1) * F_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 21 \\ 17 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Las ecuaciones restantes quedan en función de F_1, obteniendo una nueva matriz de coeficientes:

$$F_2 = F_2 - (2 * F_1)$$
$$F_3 = F_3 - (1 * F_1)$$
$$F_4 = F_4 - (3 * F_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Utilizando como fila pivote a F_2 y como elemento pivote $a_{22} = -1$, se obtiene:

$$F_2 = (1/-1) * F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 7 \\ -16 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Las ecuaciones restantes quedan en función de F_2, obteniendo una nueva matriz de coeficientes:

$$F_1 = F_1 - (1 * F_2)$$
$$F_3 = F_3 - (2 * F_2)$$
$$F_4 = F_4 - (-1 * F_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 9 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Utilizando como fila pivote a F_3 y como elemento pivote $a_{33} = 3$, se obtiene:

$$F_3 = (1/3) * F_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 3 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Las ecuaciones restantes quedan en función de F_3, obteniendo una nueva matriz de coeficientes:

$$F_1 = F_1 - (2 * F_3)$$
$$F_2 = F_2 - (-1 * F_3)$$
$$F_4 = F_4 - (-3 * F_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Utilizando como fila pivote a F_4 y como elemento pivote a_{44} = -2, se obtiene:

$$F_4 = (1/-2) * F_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

Las ecuaciones restantes quedan en función de F_4, obteniendo una nueva matriz de coeficientes:

$$F_1 = F_1 - (1 * F_4)$$
$$F_2 = F_2 - (0 * F_4)$$
$$F_3 = F_3 - (0 * F_4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.15

El vector solución se obtiene de manera directa del sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vector solución

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Desventajas del método de eliminación de Gauss - Jordan

El método de Gauss-Jordan comparte las desventajas con el método de Gauss, es decir, fracasa ante algunos sistemas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Llegar a la solución se puede volver más complejo con ciertos tipos de sistemas:

$$\begin{bmatrix} e & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.4

Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones aplicando el método de Gauss

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.5

Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones aplicando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Tarea

Programar los métodos eliminación de Gauss y eliminación de Gauss Jordan para la resolución de ecuaciones lineales.

Para cualquier ejercicio visto en clase. Las matrices se leen desde archivo.

Método de LU

Si una matriz A se puede descomponer como el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, el sistema de ecuaciones lineales Ax = C queda expresado de la forma:

$$LUx = C$$

Donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz diagonal superior.

D
e
s
c
r
i
p
c
i
ó
n

- **Primero se generan las matrices L (matriz triangular inferior) y U (matriz triangular superior), poniendo a la matriz A en función de las matrices L y U.**

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 + 0 + 0 \\ l_{21} + 1 + 0 \\ l_{31} + l_{32} + 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} u_{11} + u_{12} + u_{13} \\ 0 + u_{22} + u_{23} \\ 0 + 0 + u_{33} \end{bmatrix}}$$

Descripción

- **Para obtener los valores de L y U se factoriza la matriz A. Existen diferentes métodos para factorizar:**
  - **Doolittle: La diagonal de la matriz L es la identidad.**
  - **Crout: La diagonal de la matriz U es la identidad.**
  - **Cholesky: Verifica los determinantes (> 0) para poder realizar $U = L^T$.**

- **Una vez obtenidas las matrices L y U se procede a resolver el sistema Ly = C para obtener el vector y para, posteriormente, resolver el sistema Ux = y para obtener el vector solución (x).**

D e s c r i p c i ó n

- **Por lo tanto, para resolver el sistema Ax = C es necesario resolver los dos sistemas triangulares de ecuaciones lineales Ly = C y Ux = y.**

- **El sistema Ly = C representa un sistema triangular de ecuaciones cuyas incógnitas están en el vector y (incógnitas auxiliares). Este vector z permite resolver el sistema Ux = y.**

Ejemplo 2.16

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de descomposición de LU, aplicando el método de factorización de Doolitle:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.16

Se descompone la matriz A en las matrices triangulares inferior (L) y superior (U), por el método de Doolittle.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.16

Se debe cumplir LU = A. Operando de manera matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.16

Se extraen cada una de las filas y se obtienen los valores por igualdad:

Fila 1

$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fila 2

$$\begin{bmatrix} l_{21}u_{11} \\ l_{21}u_{12} + u_{22} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Fila 3

$$\begin{bmatrix} l_{31}u_{11} \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.16

De las matrices anteriores se obtienen los coeficientes de las matrices L y U.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 13/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 5/13 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.16

Se resuelve el sistema Ly = C

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vector auxiliar

$$y = \begin{bmatrix} 14 \\ -18 \\ 5/13 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.16

Se resuelve el sistema Ux = y

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 13/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 5/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -18 \\ 5/13 \end{bmatrix}$$

Vector solución

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Seidel

Este es un método iterativo que produce una solución de vectores aproximados x^0, x^1, x^2, …, para un sistema de ecuaciones lineales de la forma Ax = C. El procedimiento numérico está diseñado para que la sucesión de vectores llegue a converger a la solución real.

El proceso se detiene cuando se ha alcanzado suficiente precisión, por lo tanto, se necesita cumplir con un margen de error.

D e s c r i p c i ó n

- **Se posee un sistema de ecuaciones lineales Ax = C.**

$$
\left[\begin{array}{l|l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ \ldots + a_{1n}\, x_n & c_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + \ \ldots + a_{2n}\, x_n & c_1 \\
a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + \ \ldots + a_{3n}\, x_n & c_1 \\
\qquad \qquad \ldots. & \\
a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + \ \ldots + a_{nn}\, x_n & c_1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\ldots (1) \\
\ldots (2) \\
\ldots (3) \\
\ldots \\
\ldots (n)
\end{array}
$$

Descripción

- **Se despeja x_1 de la ecuación 1, x_2 de la ecuación 2, x_3 de la ecuación 3 y así sucesivamente hasta x_n de la ecuación n**

$$x_1^{i+1} = \frac{c_1 - a_{12}\, x_2^i - a_{13}\, x_3^i - \ldots - a_{1n}\, x_n^i}{a_{11}}$$

$$x_2^{i+1} = \frac{c_2 - a_{21}\, x_1^i - a_{23}\, x_3^i - \ldots - a_{2n}\, x_n^i}{a_{22}}$$

$$x_3^{i+1} = \frac{c_3 - a_{31}\, x_2^i - a_{32}\, x_3^i - \ldots - a_{3n}\, x_n^i}{a_{33}}$$

$$\ldots$$

$$x_n^{i+1} = \frac{c_n - a_{n1}\, x_2^i - a_{n2}\, x_3^i - \ldots - a_{nn-1}\, x_{n-1}^i}{a_{nn}}$$

D e s c r i p c i ó n

- **Las ecuaciones anteriores son las fórmulas que se deben aplicar para calcular el vector solución en cada iteración.**

- **Para poder aplicar el método por primera vez es necesario poseer un vector aproximado x*.**

- **Lo más conveniente es que los valores comiencen en cero, lo cual facilita el trabajo ya que reduce el cálculo de las primeras soluciones. Aplicando el vector x* = {0, 0, 0,…, 0}:**

$$x_1^1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Descripción

- **Ahora se despeja x_2 de la ecuación 2 y se sustituye el valor x_1 obtenido y los otros valores de x con el vector aproximado, obteniendo:**

$$x_2^1 = \frac{b_2 - a_{21}\, x_1^0}{a_{22}}$$

- **Ahora se despeja x_3 de la ecuación 3 y se sustituyen los valores x_1 y x_2 obtenidos y los otros valores de x con el vector aproximado, obteniendo:**

$$x_3^1 = \frac{b_3 - a_{31}\, x_1^0 - a_{32}\, x_2^0}{a_{33}}$$

D e s c r i p c i ó n

- **Una vez que tenemos x_3, se despeja x_4 de la ecuación 4 y así sucesivamente hasta obtener x_n.**

- **Ya que se han despejado las n ecuaciones se tiene la primera iteración.**

- **Con los nuevos valores obtenidos se aplican los pasos anteriores para obtener otro vector de soluciones aproximado.**

D e s c r i p c i ó n

- **El método iterativo se puede finalizar cuando la aproximación cumpla con el error proporcionado, es decir:**

$$| x^i - x^{i-1} | < \text{Error}$$

- **A partir de la segunda iteración, se puede calcular el error obtenido.**

D e s c r i p c i ó n

- **Para que un sistema sea convergente se debe cumplir que la matriz de coefientes sea diagonalmente dominante, para ello se aplica la siguiente expresión:**

$$|aij| > \Sigma_{i \neq j} |aij|$$

Si la matriz no es diagonalmente dominante se pueden permutar las filas de la matriz.

Ejemplo 2.17

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Gauss-Seidel, tomando como vector inicial:

$$x = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Hasta que:

$$| x^i - x^{i-1} | < 0.03$$

Ejemplo 2.17

Matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Se verifica:

$$|6| > |-1|+|3|$$
$$|5| > |-1|+|2|$$
$$|-4| > |1|+|-1|$$

Como se cumplen las relaciones, se dice que la matriz diagonal es estrictamente dominante.

Ejemplo 2.17

Como la matriz es diagonal dominante, se cumplen las condiciones suficientes para que el método de Gauss-Seidel sea convergente.

Las ecuaciones iterativas quedan de la siguiente manera:

$$x_1^{i+1} = \frac{7 + x_2^i - 3x_3^i}{6}$$

$$x_2^{i+1} = \frac{6 + x_1^i - 2x_3^i}{5}$$

$$x_3^{i+1} = \frac{8 - x_1^i - x_2^i}{-4}$$

Ejemplo 2.17

Tabla de datos:

i	x_1^i	x_2^i	x_3^i	$\lvert x^i - x^{i-1} \rvert$
0	0	0	0	-
1	1.166667	1.433333	-1.35	1.433333
2	2.080556	2.156111	-0.940833	0.913889
3	1.996435	1.975620	-1.006986	0.180491
4	1.999430	2.002680	-0.999472	0.027060

Ejemplo 2.17

La solución aproximada del sistema de ecuaciones es:

$$x^4 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.99943 \\ 2.00268 \\ -0.999472 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.6

Mediante el método de LU y utilizando la factorización de Doolittle, resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}}_{C}
$$

Ejercicio 2.7

Considerando el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & -8 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.5

Calcular la solución mediante el método iterativo de Gauss-Seidel tomando como vector solución inicial el vector

$$x = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

iterando hasta que se cumpla la condición $| x^i - x^{i-1} | < 0.01$

Tarea

Programar los métodos de LU y Gauss-Seidel para la resolución de ecuaciones lineales, para cualquier ejercicio visto en clase.

Las matrices se deben leer desde archivo.

2.4 Interpolación numérica

Se ha determinado, de manera experimental, la viscosidad del agua a diferentes temperaturas:

Temperatura	0°	5°	10°	15°
Viscosidad	1.792	1.519	1.308	1.140

A partir de esta tabla, ¿cómo se puede estimar un valor razonable para la viscosidad a una temperatura de 8°?

Los métodos de interpolación polinomial permiten crear polinomios que tomen valores conocidos (los valores de la tabla) para proporcionar valores intermedios aceptables para las temperaturas no tabuladas.

Para los valores de la tabla anterior el valor del polinomio en el punto 8° es de 1.386

Cuando en un conjunto o tabla de valores, se busca el resultado de la función para un determinado valor de una variable que no figura explícitamente en la tabla de valores, se realiza una tarea de interpolación.

Existen diferentes tipos de interpolaciones:

- **Lagrange**
- **Newton**
- **Newton-Greggory**
- **Stirling**
- **Hermite**
- **Con funciones Spline**

En este tema se definirán algunas de ellas.

Dada una tabla de n + 1 puntos (x_i, y_i) que se corresponde con la tabla de datos

$$x \{x_0\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$$
$$y \{y_0\ y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$$

La tabla representa n + 1 puntos en el plano cartesiano y se quiere encontrar una curva polinomial que pase por todos ellos.

Por tanto, se busca un polinomio p(x) con el menor grado posible que verifique

$$p(x_i) = y_i \qquad 0 \leq i \leq n$$

Se dice que el polinomio p(x) es un polinomio interpolador de los datos (x_i, y_i). Los puntos x_i se llaman nodos.

Interpolación de Lagrange

El polinomio de interpolación p(x) asociado a una tabla de valores de n + 1 puntos (x_i, y_i), con $0 \leq i \leq n$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que pasa por dichos puntos, suponiendo que las n + 1 abscisas son distintas.

El polinomio de interpolación de Lagrange permite interpolar funciones arbitrarias en un conjunto de nodos fijos x_0, x_1, … x_n.

Primero se define un sistema de n + 1 polinomios especiales de grado n conocidos como polinomios cardinales. Estos se denotan por l_0, l_1, …, l_n y tienen la propiedad:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Una vez definidos los polinomios cardinales se puede interpolar cualquier función *f* por la forma de interpolación polinominial de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f(x_i)$$

El polinomio p(x) tiene como grado máximo n.

En conclusión, p_n es el polinomio de interpolación para la función *f* en los nodos x_0, x_1, …, x_n. A continuación se describe la fórmula para el polinomio l_i:

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad 0 \leq i \leq n$$

Es decir, $l_i(x)$ es el producto de n factores lineales:

$$l_i(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\right)\cdots\left(\frac{x - x_{i-1}}{x_0 - x_{i-1}}\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_0 - x_{i+1}}\right)\cdots\left(\frac{x - x_n}{x_0 - x_n}\right)$$

Donde, los denominadores son sólo números; la variable x se presenta únicamente en los numeradores y, por tanto, l_i es un polinomio de grado n.

Ejemplo 2.18

Calcular el polinomio interpolador de Lagrange para la siguiente tabla de valores

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -7 & -6 & 0 \\ 1 & -23 & 54 & -954 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 2.18

Se tiene la tabla de valores:

$$(x_k, y_k) = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -23 \\ -6 & 54 \\ 0 & -954 \end{pmatrix}$$

Los polinomios de Lagrange se obtienen por la fórmula:

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad 0 \leq i \leq 3$$

Ejemplo 2.18

$$l_0(x) = \frac{(x-(-7))\,(x-(-6))\,(x-0)}{(5-(-7))\,(5-(-6))\,(5-0)} = \frac{1}{660}\,x\,(x+6)\,(x+7)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-5)\,(x-(-6))\,(x-0)}{((-7)-5)\,((-7)-(-6))\,((-7)-0)} = -\frac{1}{84}\,(x-5)\,(x+6)\,x$$

Ejemplo 2.18

$$l_2(x) = \frac{(x - 5)\,(x - (-7))\,(x - 0)}{((-6) - 5)\,((-6) - (-7))\,((-6) - 0)} = -\frac{1}{66}\,(x - 5)\,(x + 7)\,x$$

$$l_3(x) = \frac{(x - 5)\,(x - (-7))\,(x - (-6))}{(0 - 5)\,(0 - (-7))\,(0 - (-6))} = \frac{1}{210}\,(x - 5)\,(x + 7)\,(x + 6)$$

Ejemplo 2.18

El polinomio de interpolación de Lagrange es:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, l_k(x)$$

$$\begin{aligned} p(x) = {} & (1)\ ((1/660)\ x\ (x + 6)\ (x + 7)) + \\ & (-23)\ ((-1/84)\ (x - 5)\ (x + 6)\ x) + \\ & (54)\ ((-1/66)\ (x - 5)\ (x + 7)\ x) + \\ & (-954)\ ((1/210(x - 5)\ (x + 7)\ (x + 6)) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.18

El polinomio resultante se obtiene realizando los productos y adiciones de la ecuación anterior. El resultado del polinomio anterior es:

$$p_3(x) = \frac{62\,x^3}{11} + \frac{421\,x^2}{11} - \frac{1554\,x}{11} - 954$$

Interpolación de Newton

Cuando el valor de $n = 0$ existe el polinomio p_0, polinomio de grado ≤ 0, que es una función constante y se puede elegir de modo que $p_0(x_0) = y_0$. Para un polinomio de grado $k-1$, se obtiene el polinomio p_{k-1} de grado $\leq k-1$, en el que se verifica que $p_{k-1}(x_i) = y_i$, donde $0 \leq i \leq k-1$.

El polinomio p_k se puede construir de la siguiente manera:

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c\,(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

Interpola los mismos datos que p_{k-1}, puesto que

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i \qquad (0 < i < k-1)$$

El coeficiente c se calcula sabiendo que $y_k = p_k(x_k)$:

$$y_k = p_{k-1}(x_k) + c\,(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})$$

Todos los polinomios $p_0, p_1, \ldots, p_n$ poseen la propiedad de que cada p_k se obtiene añadiendo un término a p_{k-1}, por lo que al final del proceso iterativo p_k estará formado por una suma de términos. Cada polinomio p_k tiene la forma:

$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{j-1}(x - x_j)$$

Para $j-1 > 0$, el valor del producto $\prod_{j=0}^{j-1}(x - x_j) = 1$.

Los $p_k(x)$ polinomios de interpolación de Newton son:

$$p_0(x) = c_0$$
$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$
$$p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$
$$\dots$$
$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})$$

Los coeficientes c_i tienen la forma:

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

Ejemplo 2.19

Interpolación de Newton

Calcular el polinomio interpolador de Newton para la siguiente tabla de valores

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 & -7 & -6 & 0 \\ 1 & -23 & -54 & -954 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 2.19

Se tiene la tabla de valores:

$$(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -23 \\ -6 & -54 \\ 0 & -954 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes y el polinomio de Newton se obtienen a partir de:

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i \prod_{j=0}^{j-1} (x - x_j)$$

Ejemplo 2.19

$$c_0 = 1$$

$$p_0(x) = 1$$

$$c_1 = \frac{(-23 - 1)}{(-7 - 5)} = 2$$

$$p_1(x) = 1 + 2\,(x - 5)$$

$$c_2 = \frac{-54 - (1 + 2\,(-6 - 5))}{(-6 - 5)\,(\,-6 - (-7))} = 3$$

$$p_2(x) = 1 + 2\,(x - 5) + 3\,(x - 5)(x + 7)$$

$$c_3 = \frac{-954 - (\,1 + 2(0 - 5) + 3\,(0 - 5)(0 + 7))}{(0 - 5)\,(\,0 - (-7))\,(0 - (-6))} = 4$$

$$p_3(x) = 1 + 2(x - 5) + 3\,(x - 5)(x + 7) + 4\,(x - 5)(x + 7)(x + 6)$$

Ejemplo 2.19

El polinomio de interpolación de Newton es:

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{3} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$p_3(x) = 1 + 2(x - 5) + 3(x - 5)(x + 7) + 4(x - 5)(x + 7)(x + 6)$$

$$\boxed{p_3(x) = 4x^3 + 35x^2 - 84x - 954}$$

Ejercicio 2.8

Encontrar el polinomio de menor grado que interpola la tabla de valores

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 \\ 10 & 146 & 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

por el método de interpolación de Lagrange

Ejercicio 2.9

Calcular el polinomio interpolador de Newton para la siguiente tabla de valores

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 23 \end{Bmatrix}$$

Tarea

Programar las interpolaciones numéricas de Lagrange y Newton, para cualquier ejercicio visto en clase.

Los valores de las tablas se leen desde archivo.

2.5 Desarrollo de programas en lenguaje estructurado para la implementación de los métodos de este tema

Para realizar un programa es necesario conocer el funcionamiento del proceso a programar así como el objetivo del mismo.

Una vez entendido el funcionamiento de los diferentes métodos numéricos vistos en clase, es posible automatizarlos para obtener el resultado casi inmediato.

Objetivos Tema 2: Aplicar diferentes métodos de soluciones numéricas considerando y minimizando los errores y la convergencia

- **Tema 2.1:** Describir el concepto de aproximación numérica y los tipos de errores que existen.

- **Tema 2.2:** Manejar diferentes métodos para la resolución de ecuaciones algebraicas.

- **Tema 2.3:** Utilizar diferentes métodos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

- **Tema 2.4:** Obtener un resultado utilizando diversas técnicas de interpolación.

- **Tema 2.5**: Elaborar programas que implementen los métodos numéricos vistos.