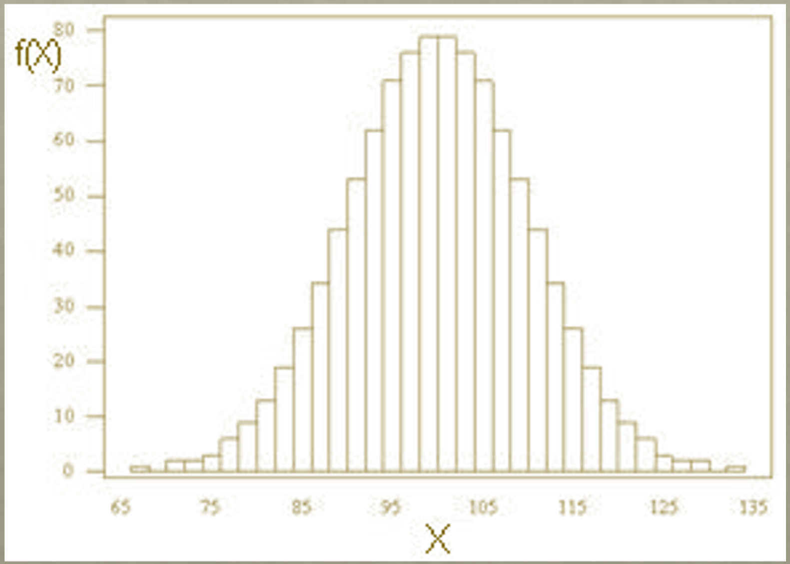
# 5 Métodos numéricos para solución de sistemas y ecuaciones avanzadas

**Objetivo: Aplicar métodos numéricos para la solución numérica de sistemas y ecuaciones avanzadas (derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales).**




**Métodos numéricos para ingenieros. Steven C. Chapra, Raymond P. Canale, editorial McGraw-Hill, quinta edición, México, 2006.**


**Métodos numéricos y computación. Ward Cheney, David Kincaid, sexta edición, Cengage Learning, 2011.**

# 5.1 Derivación e integración numérica

Una función que se desea derivar o integrar, se puede presentar de las siguientes tres formas:

- Una función continua simple: un polinomio, una función exponencial o una función trigonométrica.
- Una función continua complicada que es difícil de diferenciar o integrar directamente.
- Una función tabulada donde los valores de x y *f*(x) están dados como un conjunto discretos de puntos: datos experimentales o de campo.

**Las funciones simples se pueden evaluar analíticamente, sin embargo, cuando las funciones son complicadas o cuando la función es dibujada por datos discretos, se hace uso de métodos aproximados.**

## Derivada

La derivada (o diferenciación) numérica representa la razón de cambio de una variable dependiente con respecto a una variable independiente. De hecho, la definición matemática de la derivada empieza con un cociente de diferencias:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

donde y y f(x) son representaciones de la variable dependiente y x es la variable independiente.

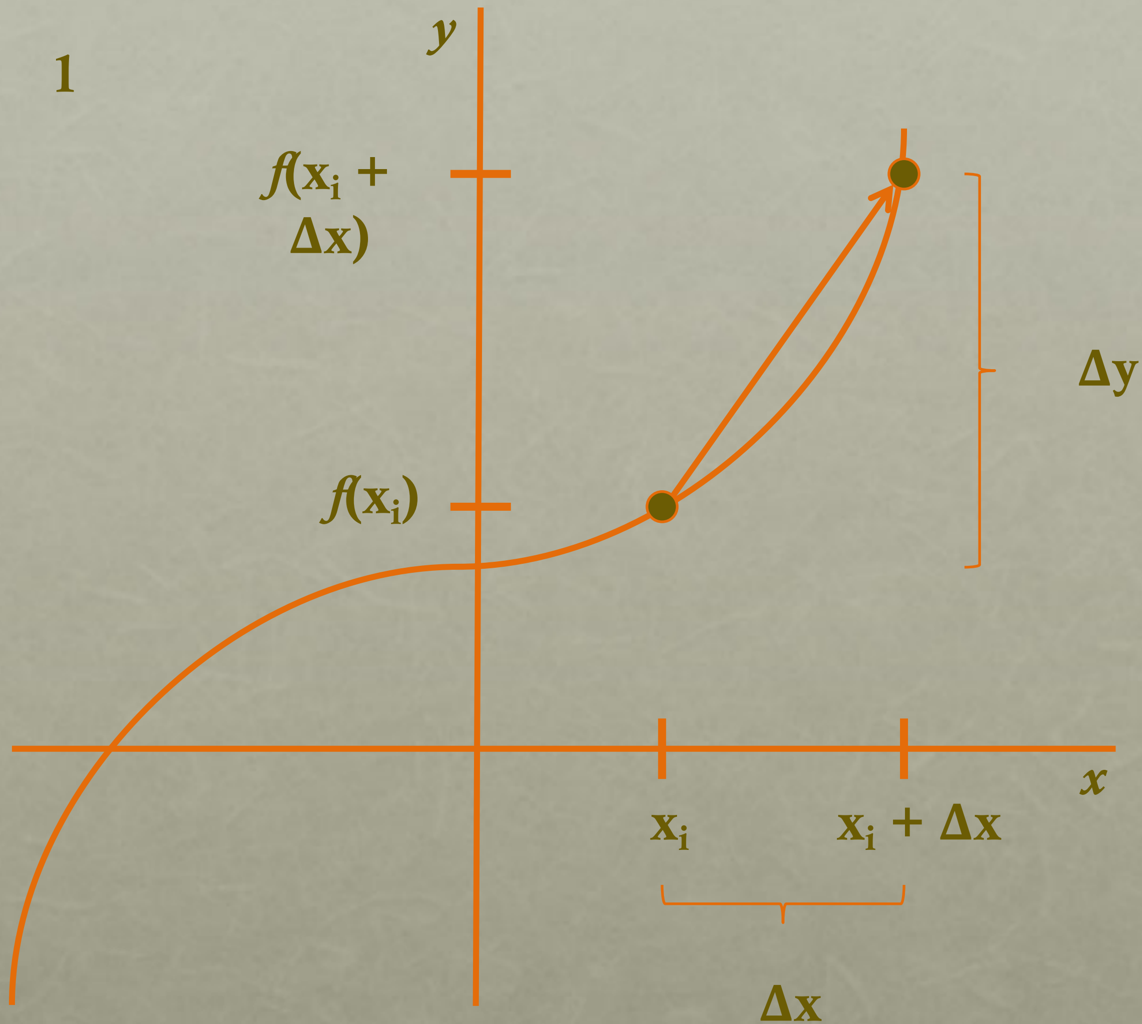
**Cuando $\Delta x$ se aproxima a cero, el cociente de las diferencias se convierte en la definición de derivada:**

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

**donde dy/dx (también conocida como *y´* o *f* ´($x_i$)) es la primera derivada de *y* con resepecto a *x* evaluada en $x_i$ y representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $x_i$.**

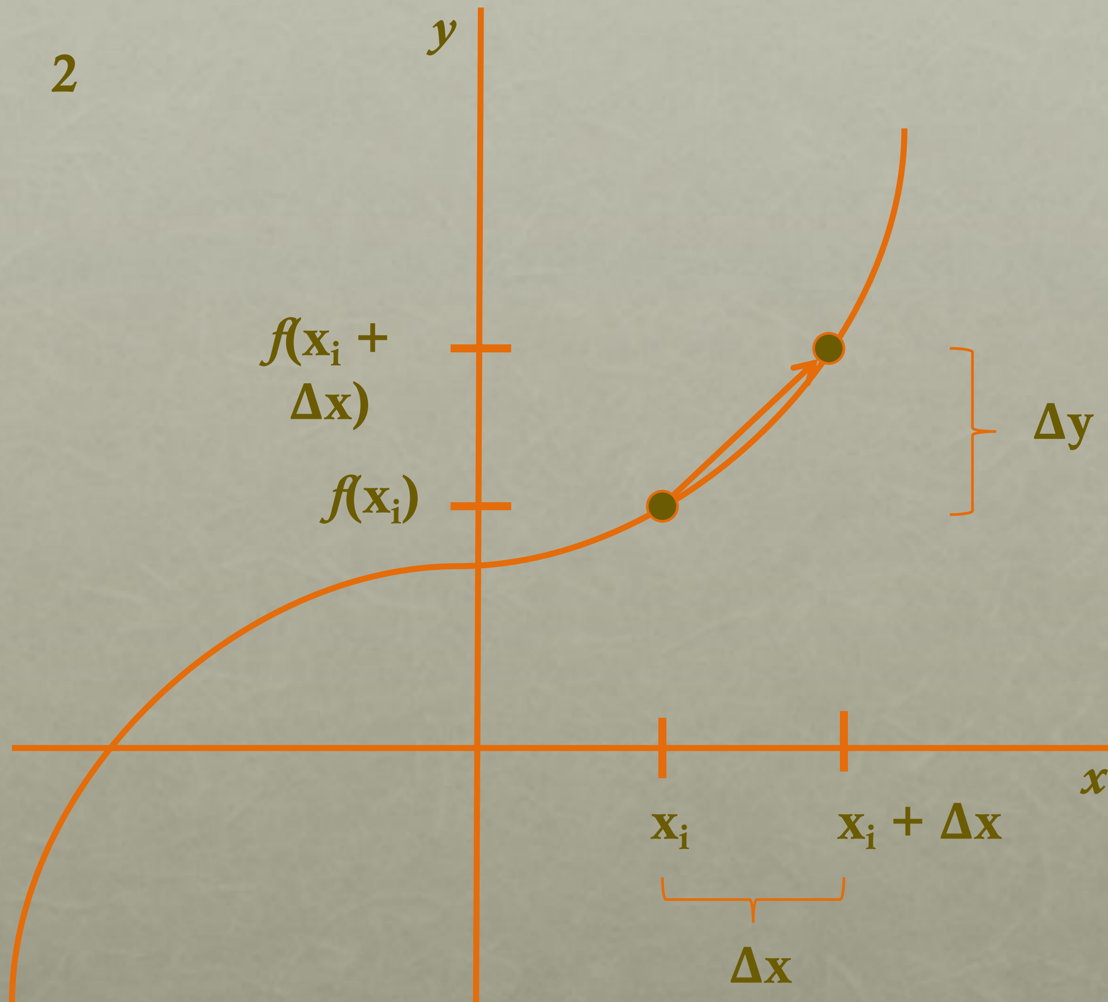
**A continuación se muestra, de forma gráfica, la definición de derivada: cuando $\Delta x$ se aproxima a cero (por diferencias), la aproximación por diferencias se convierte en una derivada.**

# Diferenciación matemática



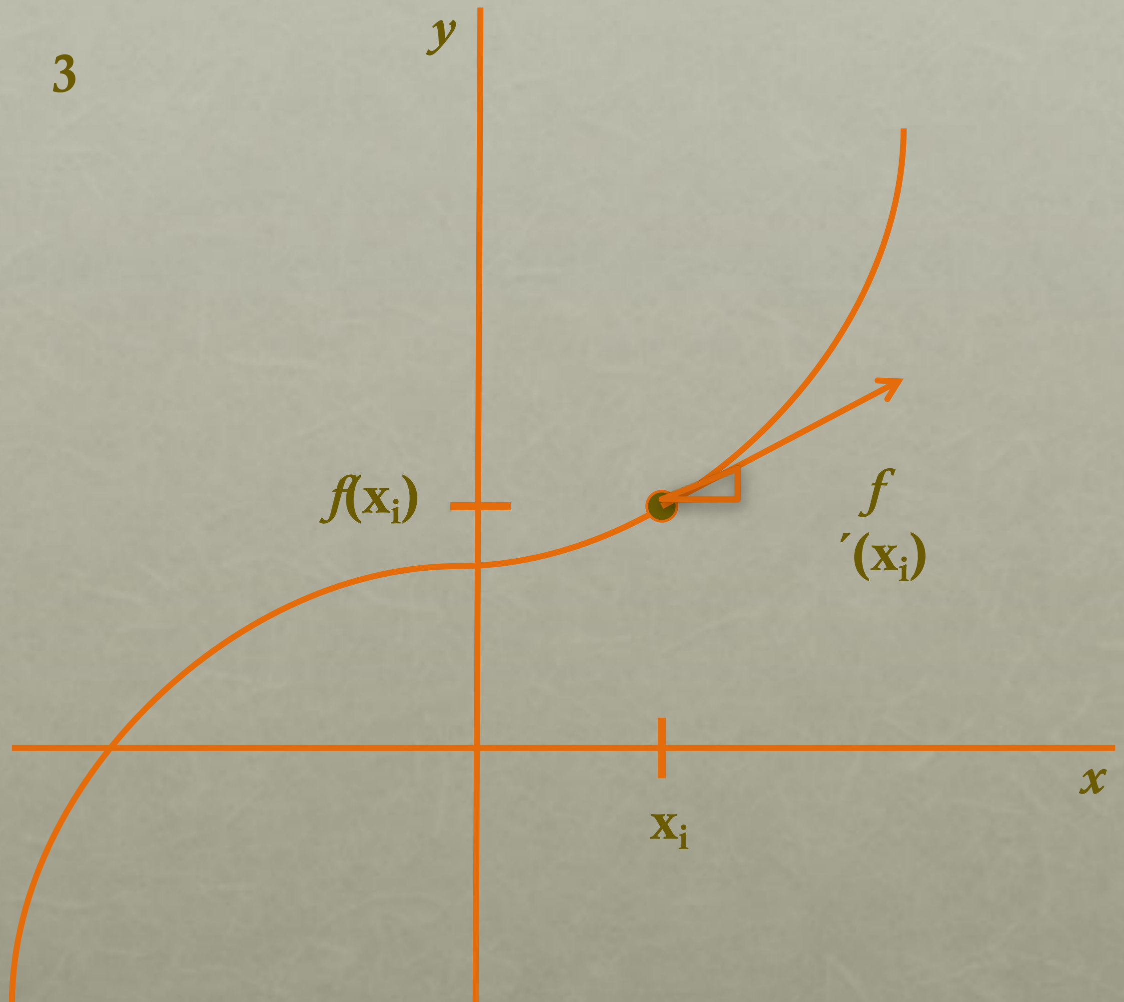
# Diferenciación matemática

**2**



# Derivación matemática

3



## Diferenciación gráfica por áreas iguales

A partir de una tabla de datos (x, y), se obtiene una diferencia simple que proporciona una estimación de la pendiente.

Ya hechos los cálculos se procede a graficarlos como una curva escalonada.

Una vez graficados los datos, se unen los puntos medios de una curva.

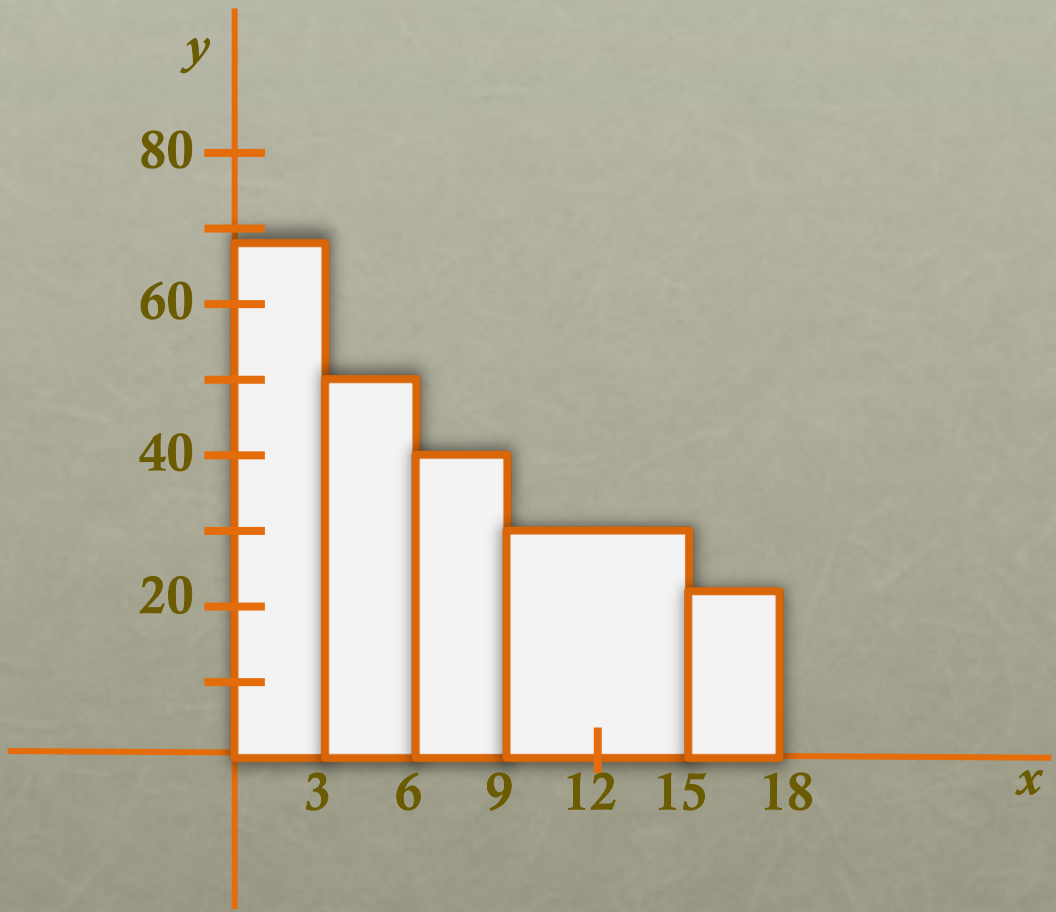
# Diferenciación gráfica por áreas iguales

## Se tiene una tabla de valores x, y y Δy/Δx

| x | y | Δy/Δx |
|---|---|---|
| 0 | 0 | – |
| 3 | 200 | 66.7 |
| 6 | 350 | 50 |
| 9 | 470 | 40 |
| 15 | 650 | 30 |
| 18 | 720 | 23.3 |

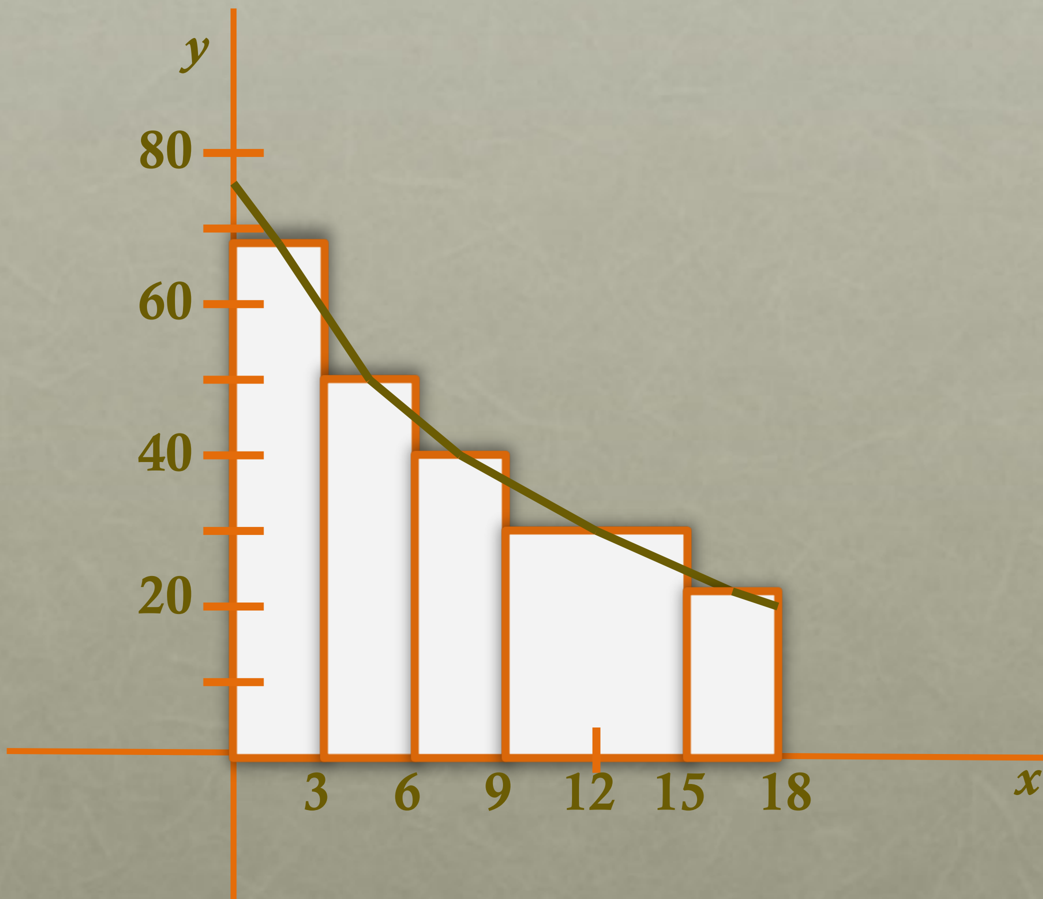
# Diferenciación gráfica por áreas iguales

## Curva escalonada



# Diferenciación gráfica por áreas iguales

## Unión de los puntos medios




| x | dy/dx |
|---|---|
| 0 | 76.50 |
| 3 | 57.5 |
| 6 | 45 |
| 9 | 36.25 |
| 15 | 25 |
| 18 | 21.5 |

## Integral

El proceso inverso a la derivación es la integración que se representa de la siguiente manera

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

esta es la representación de la integral de la función f(x) con respecto a la variable independiente x valuada entre los límites a y b, es decir, desde x = a hasta x = b.

Por lo tanto, la integración numérica es el valor total o la sumatoria de f(x) dx sobre el intervalo [a,b]

## Integración a partir de puntos discretos

**Por ejemplo, si se tiene una función continua complicada como la siguiente:**

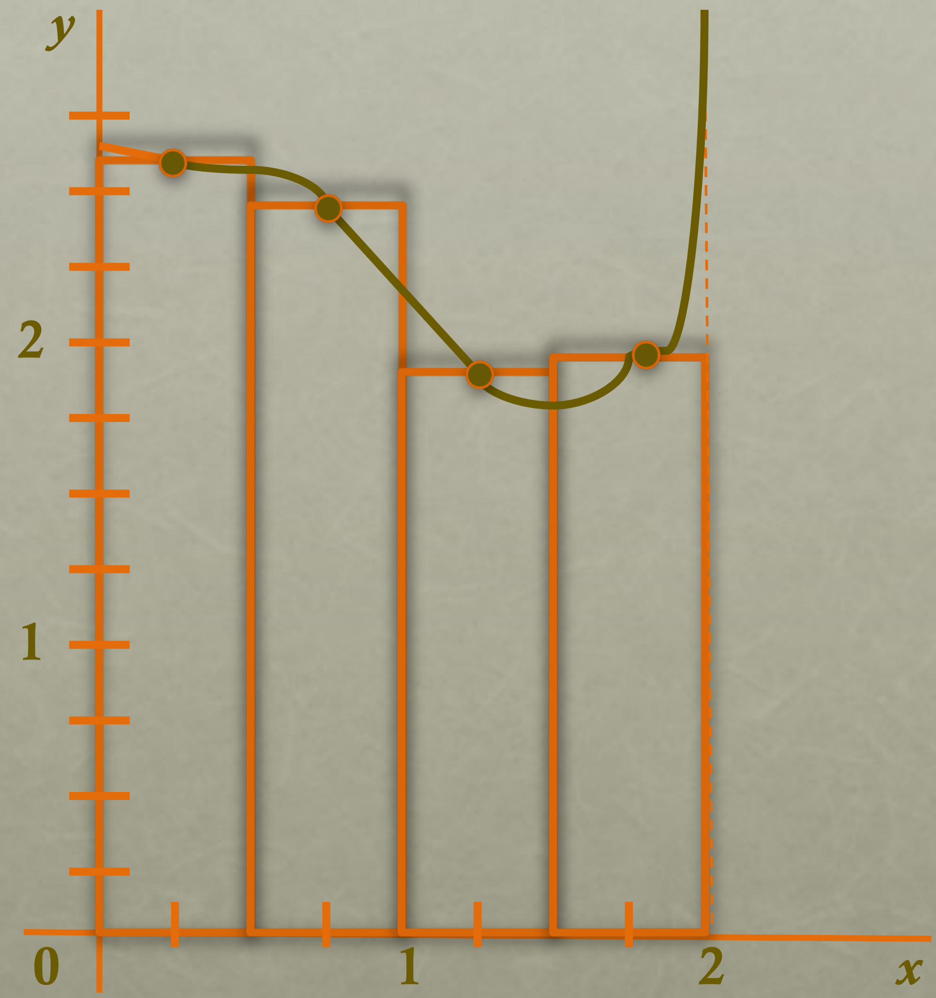
$$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + x^{3/2})}{\sqrt{1 + 0.5 \operatorname{sen} x}} e^{0.5x}\, dx$$

## Integración a partir de puntos discretos (cont.)

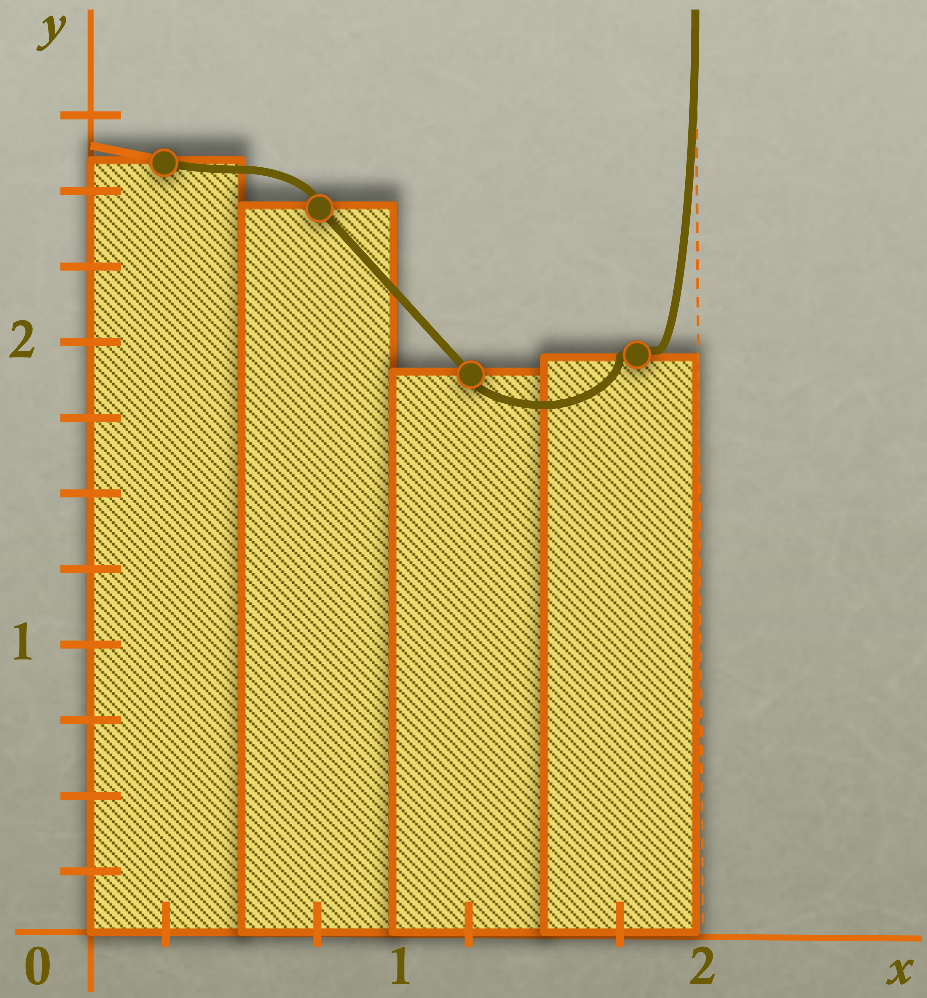
**Se puede generar una tabla de valores discretos f(x) a partir de la función:**

| x | *f*(x) |
|---|---|
| 0.25 | 2.599 |
| 0.75 | 2.414 |
| 1.25 | 1.945 |
| 1.75 | 1.993 |

# Integración a partir de puntos discretos (cont.)



# Integración a partir de puntos discretos (cont.)



**La diferenciación y la integración numérica están estrechamente relacionadas, de manera inversa. Por ejemplo, para una función que depende del tiempo, y(t), la derivada determina su velocidad:**

$$v(t) = (d/dt)\, y(t)$$

**Por otro lado, si se tiene la velocidad en función del tiempo, la integración determina su posición:**

$$y(t) = \int_0^t v(t)\, dt$$

**Las técnicas numéricas de integración y diferenciación utilizan datos de puntos discretos. Como la mayoría de la información ya se encuentra tabulada, es compatible con muchos de los métodos numéricos existentes.**

**A pesar de que las funciones continuas no están originalmente en forma discreta, resulta sencillo emplear las ecuaciones dadas para genera una tabla de valores.**

## 5.1.1 Diagrama de rombos para diferenciación

**Se conoce como jerarquía de clases al orden o clasificación degfhggh**

## 5.1.2 Diferenciación de Taylor

**El teorema de Taylor y, en específico, la fórmula la serie de Taylor es de gran valor en el estudio de los métodos numéricos.**

**En esencia, la serie de Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y de sus derivadas en otro punto.**

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{n}(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n + R_n \qquad (1)$$

**$R_n$ es un término residual para considerar todos los términos desde el n + 1 hasta el infinito y equivale a:**

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \qquad (2)$$

**Donde ξ es un valor que se encuentra en algún punto entre $x_{i+1}$ y $x_i$.**

**La ecuación (1) se puede simplificar definiendo un tamaño de paso o incremento $h = x_{i+1} - x_i$, expresando la ecuación como:**

$$f(x_i+1) \approx f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f^{2}(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{3}(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{n}(x_i)}{n!}h^n + R_n \qquad (3)$$

**Y el término residual queda de la siguiente manera:**

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (4)$$

**Si se trunca la ecuación (3) de la serie de Taylor después del término con la primera derivada, se obtiene:**

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + R$$

**Si, de la ecuación anterior se despeja la primera derivada, se obtiene:**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{R}{h} \qquad (5)$$

**Donde**

$$\frac{R}{h} = \frac{f''(\xi)}{2!} h = O(h)$$

**O(h) significa que el error de truncamiento es de grado h. Por ejemplo, si el error es O(h) y el incremento se reducirc a la mitad, entonces el error también se reducirá a la mitad. Por otro lado, si el error es O($h^2$) y el incremento se reduce a la mitad, entonces el error se reducirá una cuarta parte. En otras palabras, el error en la aproximación de la derivada es proporcional al tamaño del incremento.**

**La siguiente ecuación se le conoce con el nombre de diferencia finita dividida y generalmente se representa como:**

$$f'(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i) \qquad (6)$$

**o**

$$f'(x) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \qquad (7)$$

**Donde $\Delta f_i$ se le conoce como la primera diferencia hacia delante y a h se le llama el tamaño de paso o incremento, esto es, la longitud del intervalo sobre el cual se realiza la aproximación. Se le llama diferencia hacia delante, porque usa los datos en i e i + 1 para estimar la derivada.**

**Al término $\Delta f_i/h$ se le conoce como primera diferencia finita dividida.**

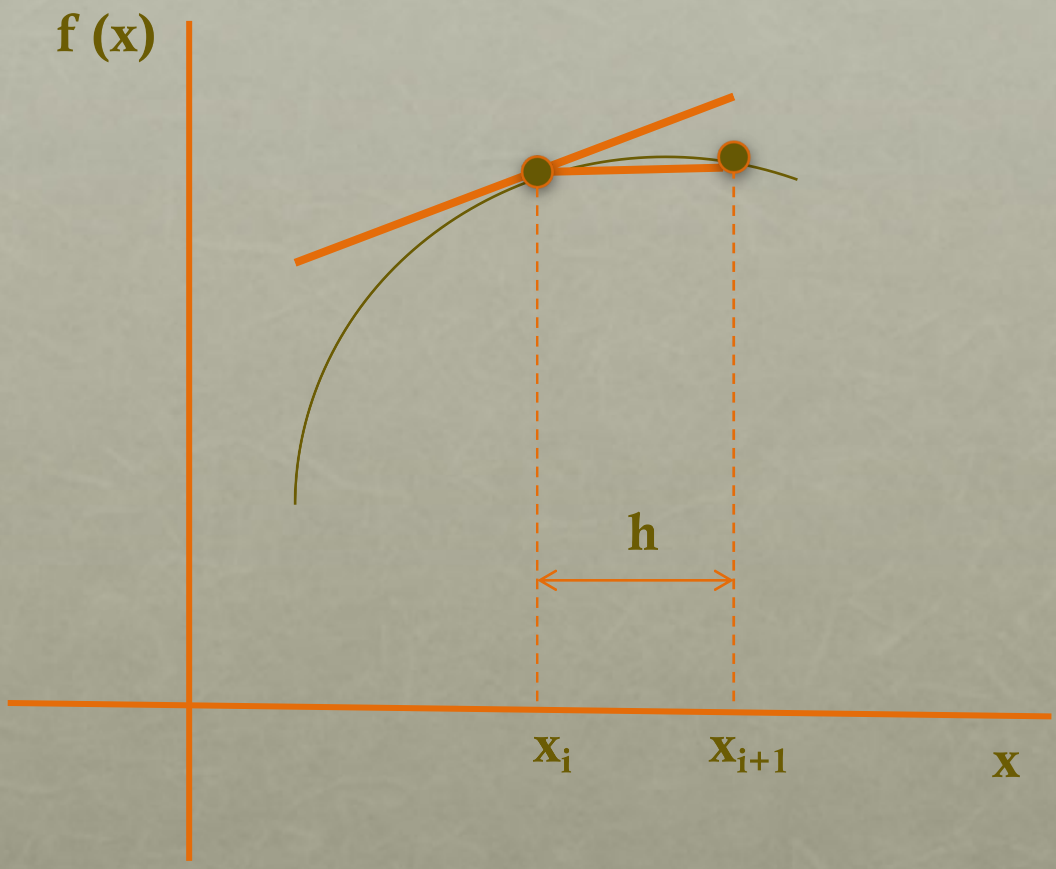
**Esta diferencia dividida hacia delante es solo una de las diferencias que pueden desarrollarse a partir de la serie de Taylor para la aproximación de derivadas numéricas.**

**Por ejemplo, las aproximaciones de la primera derivada utilizando diferencias hacia atrás o diferencias centrales, se pueden desarrollar de una manera similar a la ecuación (1).**

**Las diferencias hacia atrás usan valores en $x_{i-1}$ y $x_i$, mientras que las diferencias centrales utilizan valores igualmente espaciados alrededor del punto donde la derivada está estimada. Es posible desarrollar aproximaciones más exactas de la primera derivada incluyendo términos de orden más alto de la serie de Taylor.**

**Finalmente, todas las versiones anteriores se pueden desarrollar para derivadas de segundo orden, de tercer orden y de órdenes superiores.**

# Diferencia finita divida de la primera derivada hacia adelante



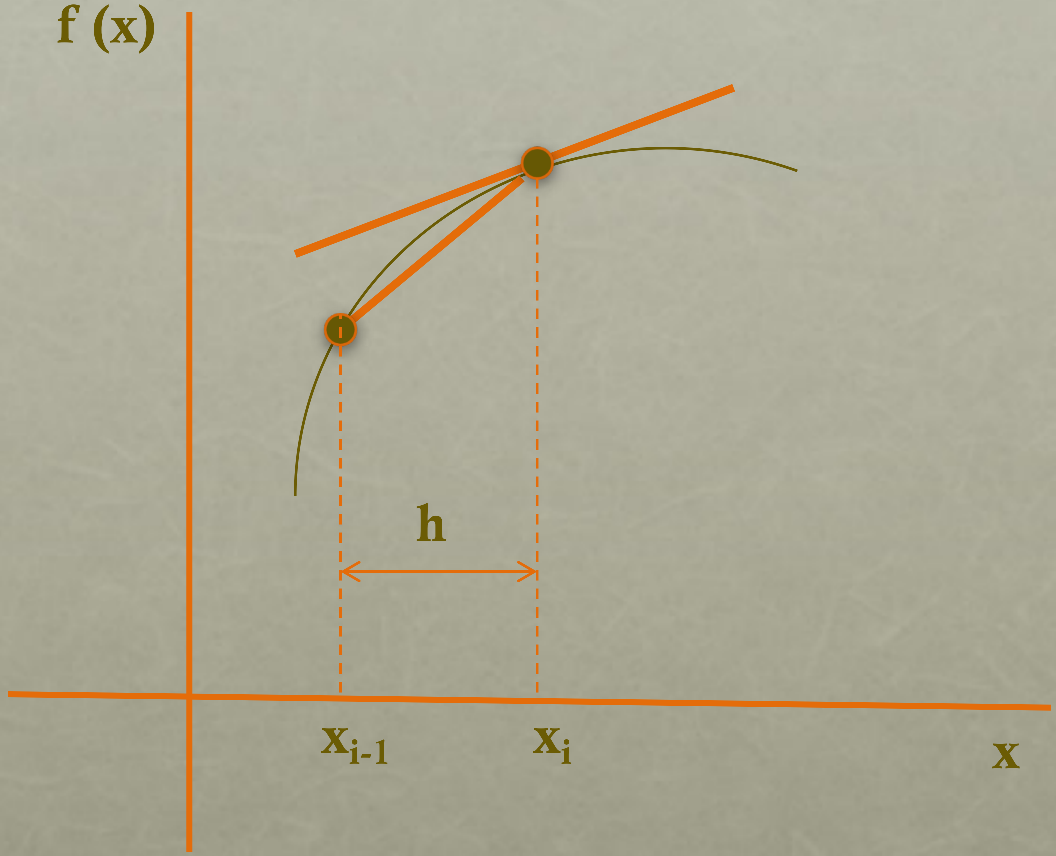
## Aproximación de la primer derivada con diferencias hacia atrás

La serie de Taylor se expande hacia atrás para calcular un valor anterior sobre la base del valor actual para obtener la fórmula

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\nabla f_1}{h} \qquad (8)$$

Donde O(h) es el error y a $\nabla f_1$ se le conoce como primer diferencia dividida hacia atrás.

# Diferencia finita divida de la primera derivada hacia atrás



## Aproximación de la primer derivada con diferencias centradas

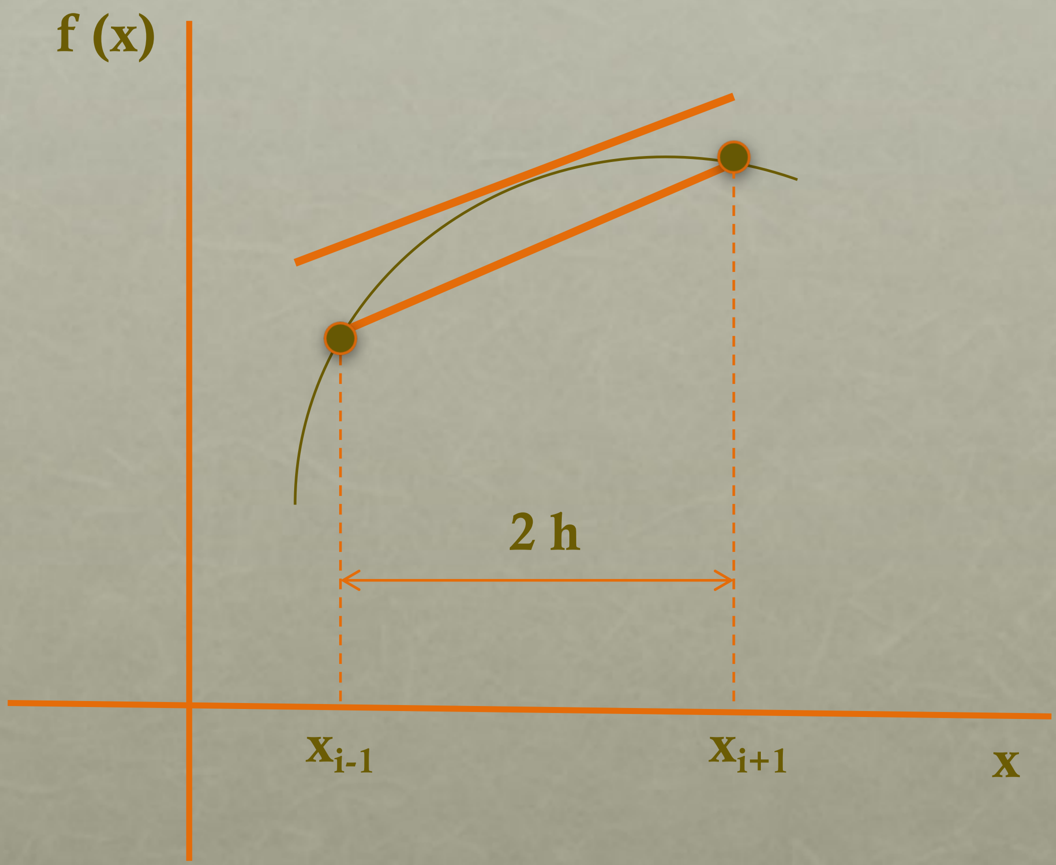
**La siguiente ecuación es una representación de las diferencias centradas de la primera derivada.**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \tag{9}$$

**El error de truncamiento es del orden de $h^2$ en contraste con las aproximaciones anteriores (de orden de h). Por lo tanto, la diferencia centrada es una representación más exacta de la derivada.**

**Si, por ejemplo, disminuimos el tamaño del incremento a la mitad, usando diferencias hacia atrás o hacia delante, el error de truncamiento se reducirá aproximadamente a la mitad, mientras que con diferencias centradas el error se reducirá a la cuarta parte.**

# Diferencia centradas de la primera derivada



## Ejemplo 5.1

**Utilizando aproximaciones con diferencias finitas hacia delante y hacia atrás de O(h) y una aproximación de diferencia central de O($h^2$), estimar la primera derivada de:**

**f(x) = □0.1x4 □ 0.15x3 □ 0.5x2 □ 0.25x + 1.2**

**En el punto x = 0.5, utilizando un incremento de h = 0.5. La derivada se calcula directamente como:**

**f'(x) = □0.4x3 □ 0.45x2 □ 1.0x □ 0.25**

**El valor real de la derivada es f'(0.5) = □0.9125.**

**Ejemplo 5.1**

**Para h = 0.5, se determinan los valores de la función en los puntos x, $x_{i-1}$ y $x_{i+1}$:**

$x_{i-1} = 0$ $\qquad f(x_{i-1}) = 1.2$

$x_i = 0.5$ $\qquad f(x_i) = 0.925$

$x_{i+1} = 1.0$ $\qquad f(x_{i+1}) = 0.2$

**Utilizando la ecuación (6) se calcula la derivada por diferencias divididas hacia delante:**

$$f'(0.5) = \frac{0.2 - 0.925}{0.5 - 0} = -1.45$$

**Como se posee el valor real se puede calcular el error relativo porcentual:**

$$e = \frac{|\,-0.9125 - (-1.45)\,|}{-0.9125} = 58.9\ \%$$

## Ejemplo 5.1

**Para h = 0.5, los valores de la función en los puntos x, $x_{i-1}$ y $x_{i+1}$ son:**

$x_{i-1} = 0$ $\qquad f(x_{i-1}) = 1.2$

$x_i = 0.5$ $\qquad f(x_i) = 0.925$

$x_{i+1} = 1.0$ $\qquad f(x_{i+1}) = 0.2$

**Utilizando la ecuación (8) se calcula la derivada por diferencias divididas hacia atrás:**

$$f'(0.5) = \frac{0.925 - 1.2}{0.5 - 0} = -0.55$$

**Como se posee el valor real se puede calcular el error relativo porcentual:**

$$e = \frac{-0.9125 - (-0.55)}{-0.9125} = 39.72\ \%$$

## Ejemplo 5.1

**Para $h = 0.5$, los valores de la función en los puntos $x$, $x_{i-1}$ y $x_{i+1}$ son:**

$x_{i-1} = 0$ $\qquad f(x_{i-1}) = 1.2$

$x_i = 0.5$ $\qquad f(x_i) = 0.925$

$x_{i+1} = 1.0$ $\qquad f(x_{i+1}) = 0.2$

**Utilizando la ecuación (9) se calcula la derivada por diferencias centrales:**

$$f'(0.5) = \frac{0.2 - 1.2}{1 - 0} = -1$$

**Como se posee el valor real se puede calcular el error relativo porcentual:**

$$e = \frac{-0.9125 - (-1)}{-0.9125} = 9.58\ \%$$

## Ejercicio 5.1

**Utilizando aproximaciones con diferencias finitas hacia delante y hacia atrás de O(h) y una aproximación de diferencia central de O($h^2$), estimar la primera derivada de:**

**f(x) = □0.1x4 □ 0.15x3 □ 0.5x2 □ 0.25x + 1.2**

**En el punto x = 0.5, utilizando un incremento de h = 0.25. La derivada se calcula directamente como:**

**f'(x) = □0.4x3 □ 0.45x2 □ 1.0x □ 0.25**

**El valor real de la derivada es f'(0.5) = □0.9125.**

## 5.1.3 Reglas de Simpson de 1/3 y 3/8

**Las reglas de Simpson permiten obtener una aproximación muy exacta de una integral (con una segmentación fina), utilizando polinomios de orden superior para conectar los puntos de una tabla dada.**

## Fórmulas de integración de Newton-Cotes

Las fórmulas de Newton-Cotes son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación (polinomio de interpolación) que es fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad \text{(x)}$$

donde $f_n(x)$ es un polinomio de la forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Algunas de las fórmulas de Newton-Cotes son: Regla del trapecio, regla de Simpson de 1/3, regla de Simpson de 3/8, regla de Boole, regla del punto medio, regla abierta de Newton-Cotes de dos puntos, entre otras.

## Regla de Simpson de 1/3

**Las regla de Simpson de 1/3 resulta cuando se sustituye en la ecuación de la integral, un polinomio de segundo grado:**

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad (1)$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_2(x)\,dx \qquad (2)$$

**Recordando, los polinomios de Lagrange se obtienen por la fórmula:**

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad 0 \leq i \leq n$$

**Y, el polinomio de interpolación de Lagrange está dado por:**

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x)$$

**Si se considera, para la ecuación (2), que $a = x_0$, $b = x_2$ y $f_2(x)$ representa un polinomio de Lagrange de segundo orden, entonces la integral queda de la siguiente forma:**

$$I = \int \left[ \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) \right] dx$$

**Después de resolver la integral se tiene:**

$$I = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right] \qquad (3)$$

**con $h = (b - a)/2$.**

**A la ecuación anterior se le conoce como regla de Simpson 1/3.**

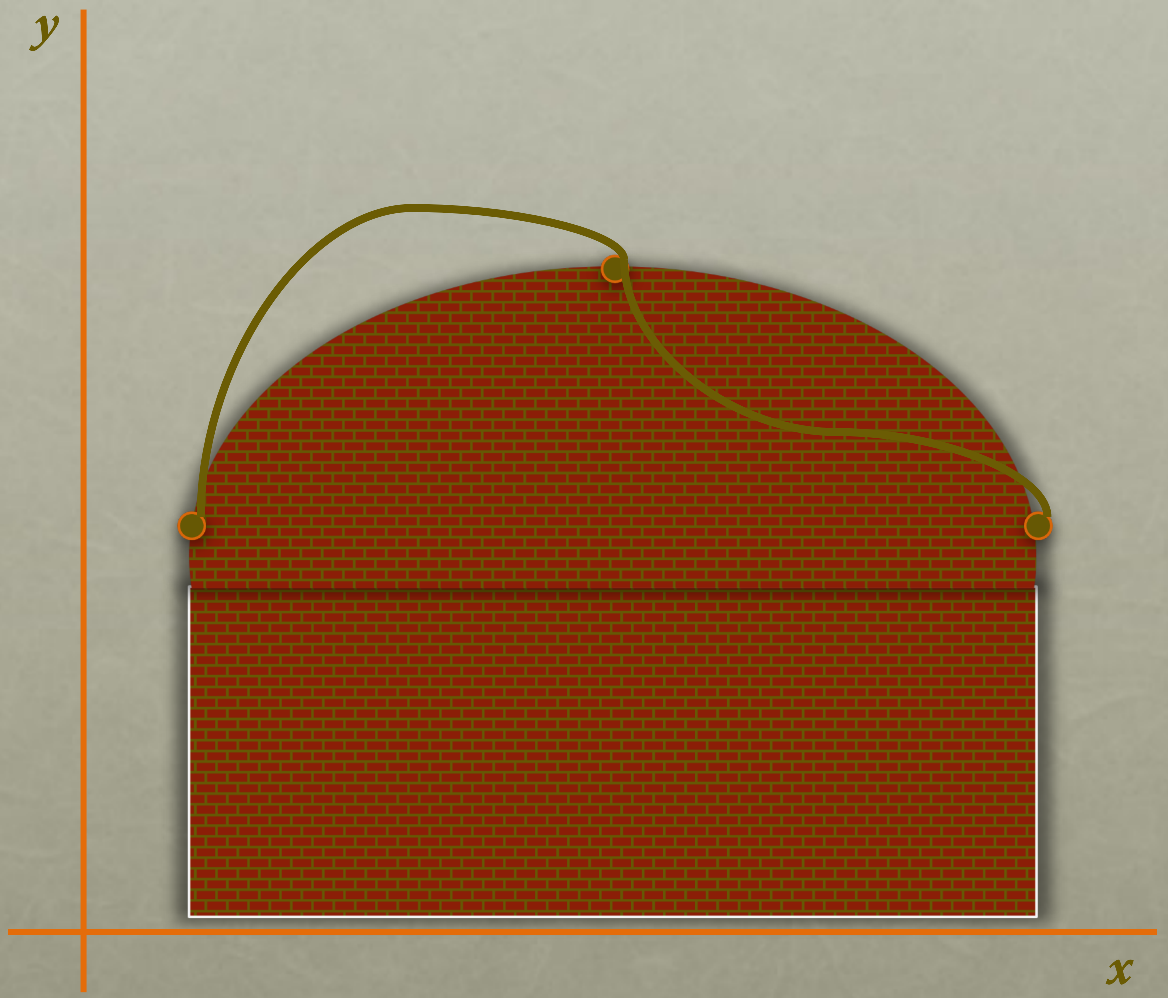
**La regla de Simpson 1/3 también se puede expresar de la siguiente manera:**

$$I = \underbrace{(b - a)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}_{\text{altura promedio}} \qquad (4)$$

**donde $a = x_0$, $b = x_2$ y $x_1$ es el punto a la mitad entre a y b, es decir:**

$$x_1 = \frac{(b + a)}{2}$$

# Gráfica de la regla de Simpson 1/3



**La regla de Simpson 1/3 (de un segmento) tiene un error de truncamiento de:**

$$E = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad (5)$$

**También es posible sustituir el valor de h = (b – a)/2.**

**De la ecuación (5), ξ esta en algún lugar en el intervalo [a,b]. El error de la regla de Simpson 1/3 es proporcional a la cuarta derivada, por lo que es muy exacta, es decir, alcanza una precisión de tercer orden aún cuando se basa en sólo tres puntos, por lo tanto, proporciona resultados exactos para polinomios cúbicos aun cuando se obtiene una parábola.**

## Ejemplo 5.2

**Utilizando la siguiente ecuación de la regla de Simpson 1/3:**

$$I = (b - a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

**integrar la función:**

$$f(x) = 400x^5 - 900x^4 + 675x^3 - 200x^2 + 25x + 0.2$$

**desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$.**

**El valor exacto de la integral es 1.640533**

## Ejemplo 5.2

**Se obtienen los valores $f(x)$ para x = 0, x = 0.4 y x = 0.8 se tiene:**

$$f(0) = 0.2 \qquad f(0.4) = 2.456 \qquad f(0.8) = 0.232$$

**Sustituyendo los valores de f(x) en la ecuación de Simpson 1/3 se tiene:**

$$I = 0.8\,\frac{0.2 + 4(2.456) + 0.232}{6} = 1.367467$$

## Ejemplo 5.2

**El error estimado se puede calcular por medio de la fórmula de error matemático:**

$$E = V_{real} - V_{aproximado}$$

$$E = 1.640533 - 1.367467 = 0.2730667$$

## Regla de Simpson de 1/3 de aplicación múltiple

**La regla de Simpson se mejora al dividir el intervalo de integración en varios segmentos del mismo tamaño:**

$$h = \frac{b - a}{n}$$

**La integral total se puede representar como:**

$$I = \int_{x(0)}^{x(2)} f(x)\,dx + \int_{x(2)}^{x(4)} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x(n-2)}^{x(n)} f(x)\,dx$$

**Al sustituir la regla de Simpson 1/3 en cada integral se obtiene:**

$$I = 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

$$+ \ldots + 2h \frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

**O, utilizando la fórmula (4):**

$$I = \underbrace{(b - a)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3\,n}}_{\text{altura promedio}}$$

# Gráfica de la regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple


**La regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple solo se puede utilizar cuando el número de segmentos es par.**

## Ejercicio 5.2

**Utilizando la siguiente ecuación de la regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple:**

$$I = (b-a)\,\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_1) + 2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_1) + f(x_n)}{3\,n}$$

**integrar la función:**

$$f\,(x) = 400\,x^5 - 900\,x^4 + 675\,x^3 - 200\,x^2 + 25\,x + 0.2$$

**desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$ para $n = 4$. Obtener el error producido, teniendo en cuenta que el valor exacto de la integral es 1.640533.**

## Regla de Simpson de 3/8

Es posible ajustar un polinomio de Lagrange de tercer grado a cuatro puntos e integrarlo:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_3(x)\,dx \qquad (6)$$

para obtener

$$I = \frac{3h}{8}\,[f(x_0) + 3\,f(x_1) + 3\,f(x_2) + f(x_3)]$$

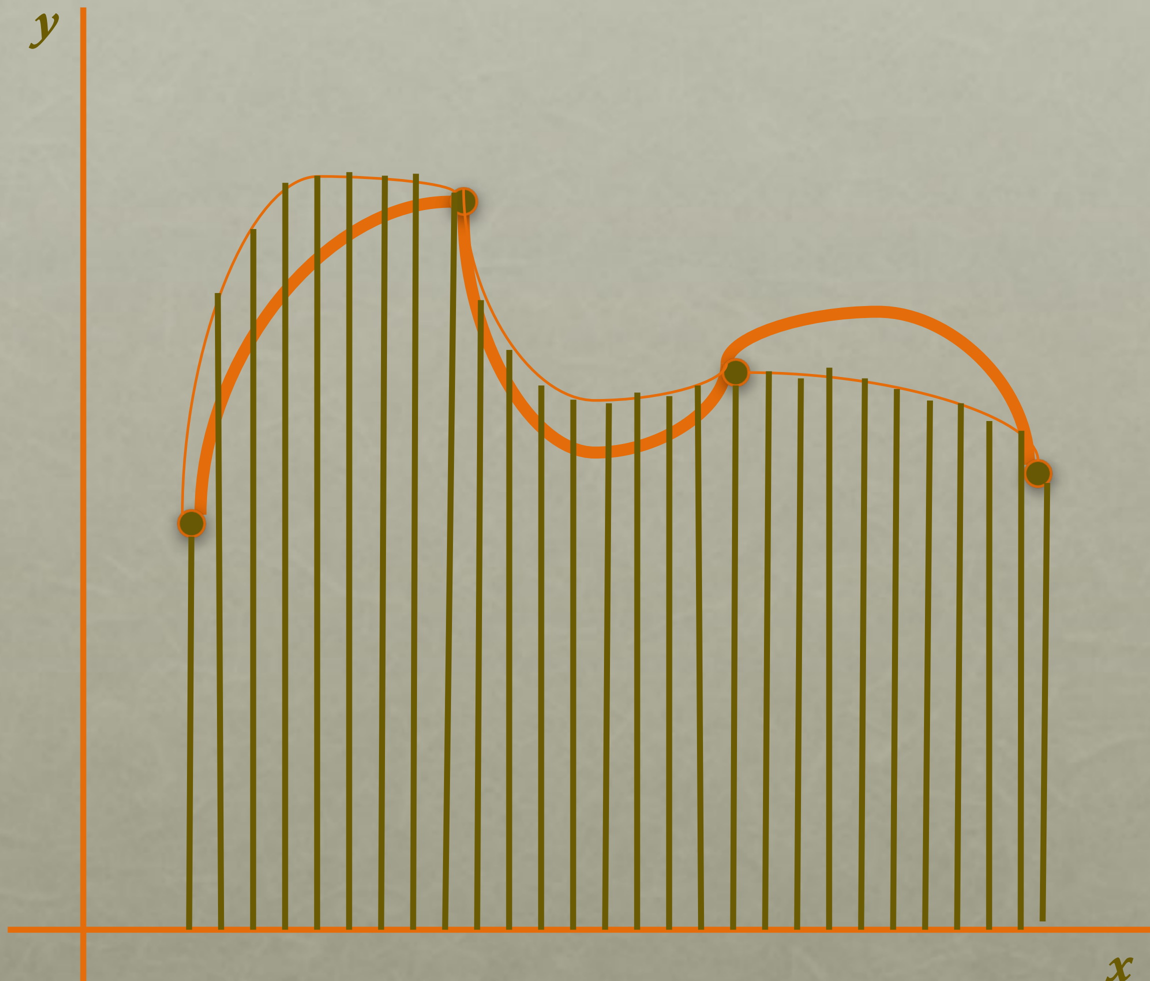
donde $h = (b - a)/3$. Esta es la tercera fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes.

**La regla anterior también se puede expresar de la siguiente manera:**

$$I = \underbrace{(b - a)}_{\text{ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}_{\text{altura promedio}}$$

**Como se puede observar, los dos puntos interiores tienen pesos de 3/8 (tres octavos) y los puntos extremos tienen pesos de 1/8 (un octavo)**

## Gráfica de la regla de Simpson 3/8




**La regla de Simpson 3/8 requiere de 4 valores tabulados (puntos equidistantes) para realizar la aproximación.**

**La regla de Simpson 3/8 tiene un error dado por la siguiente expresión:**

$$E = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad (7)$$

**También se puede sustituir el valor de $h = (b - a)/3$.**

**Como el denominador del error de la regla de Simpson 1/3 es mayor que el de 3/8, se puede asegurar que esta última es más exacta.**

## Ejemplo 5.3

**Integrar, mediante la regla de Simpson 3/8, la función:**

$$f\,(x) = 400\,x^5 - 900\,x^4 + 675\,x^3 - 200\,x^2 + 25\,x + 0.2$$

**desde a = 0 hasta b = 0.8.**

**Recordar que la regla de Simpson 3/8 requiere cuatro puntos equidistantes dentro del rango a integrar.**

**El valor de la integral exacta es 1.640533.**

**Ejemplo 5.3**

**Es necesario obtener 2 puntos dentro del rango a integrar, ya que se requieren 4 puntos para la regla de Simpson 3/8.**

**f(0) = 0.2**
**f(0.2667) = 1.432724**
**f(0.5333) = 3.487177**
**f(0.8) = 0.232**

**Ya que se obtienen los valores de las funciones en los puntos equidistantes, se sustituyen en la ecuación:**

$$I = (b - a)\,\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

$$I = 0.8\,\frac{0.2 + 3(1.432724) + 3(3.487177) + 0.232}{8} = 1.519170$$

## Ejemplo 5.3

**El error que se obtiene con la regla de Simpson 3/8 es:**

$$E = 1.640533 - 1.519170 = 0.123630$$

**A continuación se presenta una tabla comparativa con los resultados obtenidos con cada una de las reglas de Simpson vistas.**

| Regla de Simpson | Error obtenido |
|---|---|
| 1/3 | 0.2730667 |
| 1/3 (aplicación múltiple) | 0.017067 |
| 1/8 | 0.1213630 |

**Generalmente, es preferible usar la regla de Simpson 1/3 debido a que alcanza una exactitud de tercer orden con tres puntos en lugar de los cuatro puntos requeridos en la regla de 3/8.**

**Empero, y como se pudo comprobar en la diapositiva anterior, la regla de Simpson 1/3 con segmentación múltiple logra una mejor exactitud en el resultado final y no depende de un número exacto de puntos, lo cual es muy útil en la práctica.**

## 5.2 Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales

La siguiente ecuación permite calcular la velocidad *v* de un paracaidista en caída como una función del tiempo *t* (basada en la segunda ley de Newton):

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} v \qquad (1)$$

donde g es la constante de gravitación universal, m la masa del paracaidista y c el coeficiente de resistencia o arrastre.

**Ecuaciones como la anterior (que se componen de una función y de su(s) derivada(s)) se conocen como ecuación de razón de cambio o, mejor conocidas como, ecuaciones diferenciales.**

**En la ecuación (1), *v* es el término que se está derivando y se conoce como variable dependiente. *v* está en función de la variable independiente *t*. Este tipo de ecuación (con una variable independiente) se conoce como ecuación diferencial ordinaria (EDO). Existen ecuaciones con dos o más variables independientes, estas se conocen como ecuaciones diferenciales parciales (EDP).**

Las ecuaciones diferenciales también se pueden clasificar por su orden con base en su derivada mayor, es decir, la ecuación (1) es una EDO de primer orden ya que la derivada mayor es la primera derivada. Por ejemplo, la siguiente es una ecuación diferencial que describe la posición x de un sistema masa-resorte con amortiguamiento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (2)$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento y k es una constante del resorte. Como se puede observar, la ecuación (2) es una EDO de segundo orden (porque la derivada mayor es la segunda derivada).

**Si, por ejemplo, se tiene como función un polinomio de cuarto grado:**

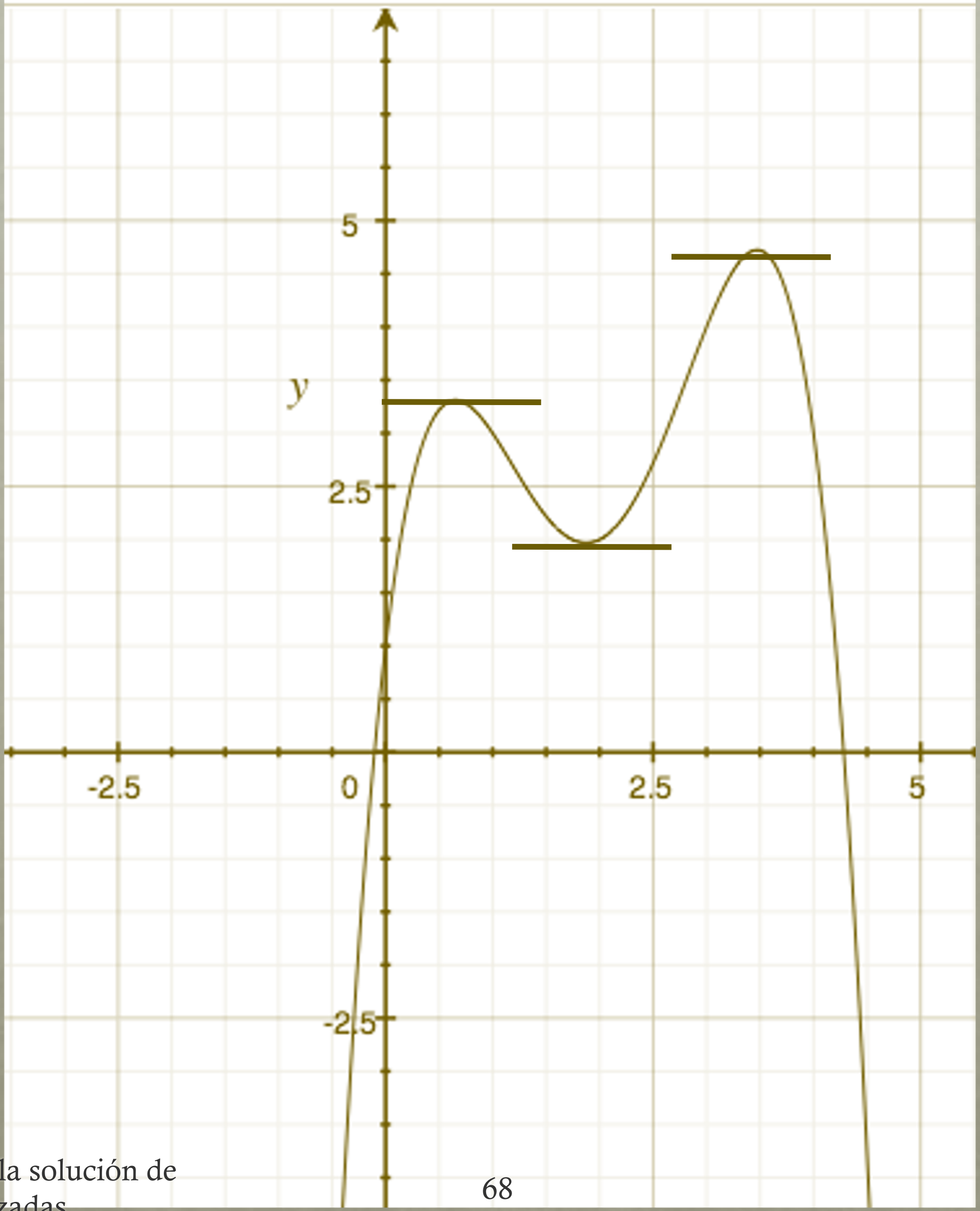
$$y = -0.5\,x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1 \qquad (3)$$

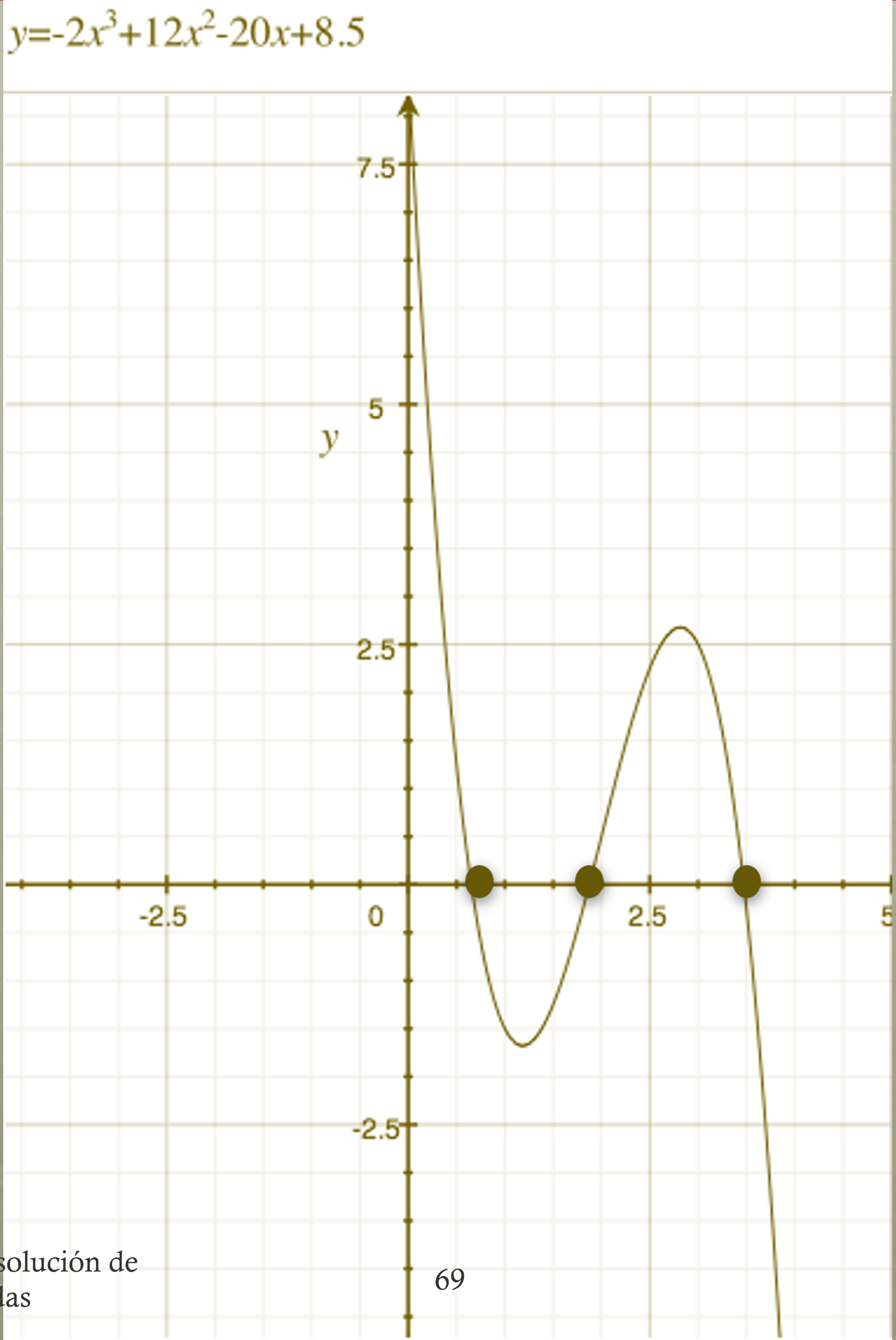
**y se deriva con respecto a la variable independiente *x*, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria (EDO):**

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \qquad (4)$$

**La ecuación (4) describe la razón de cambio de *y* con respecto a *x* (la pendiente) para cada valor de x.**

$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$




$y$=-2$x^3$+12$x^2$-20$x$+8.5
7.5
5
y
2.5
-2.5
0
2.5
-2.5
5

## 5.2.1 Método de Euler y Euler modificado

**El método de Euler permite calcular la aproximación de la pendiente de una ecuación sobre un intervalo, a partir de la pendiente al inicio del intervalo (un punto conocido) para generar la curva aproximada.**

**Si se tiene una ecuación ordinaria de la forma:**

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

**Se puede utilizar la siguiente ecuación para resolver la EDO:**

$$y_{i+1} = y_{i+1} + \varphi\, h \qquad (1)$$

**donde la pendiente estimada $\varphi$ se usa para extrapolar desde un valor anterior $y_i$ a un nuevo valor $y_{i+1}$ en una distancia h. Si esta fórmula se aplica paso a paso en valores posteriores de y, se podría aproximar la trayectoria de la solución.**

**La primera derivada ofrece una estimación de la pendiente en un punto x:**

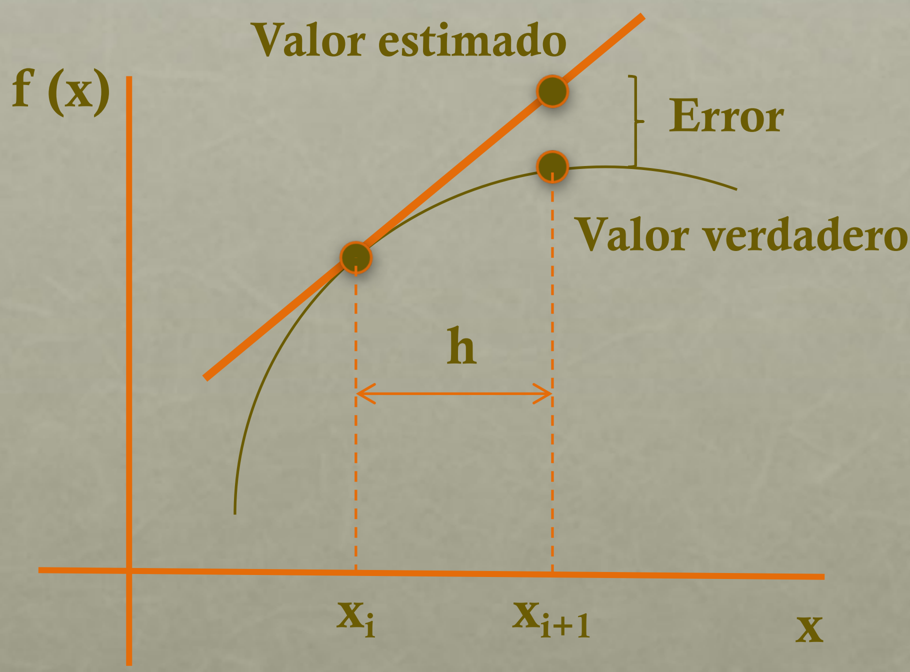
$$\varphi = f(x_i, y_i) \qquad (2)$$

**donde $f(x_i, y_i)$ es la ecuación diferencial evaluada en $x_i$ y $y_i$. Si se sustituye la ecuación (2) en (1), se tiene:**

$$y_{i+1} = y_{i+1} + f(x_i, y_i)\, h \qquad (3)$$

**A la fórmula anterior se le conoce como** método de Euler **(o de Euler-Cauchy o de punto pendiente)**

**El método de Euler predice un nuevo valor de y utilizando la pendiente (primera derivada en el valor x) para extrapolar linealmente sobre un tamaño de paso h.**



## Ejemplo 5.4

**Integrar, mediante el método de Euler, la siguiente ecuación:**

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

**desde x = 0 hasta x = 4 con un tamaño de paso h = 0.5. La condición inicial en x = 0 y en y = 1.**

## Ejemplo 5.4

**Utilizando la ecuación (3):**

$$y_{i+1} = y_{i+1} + f(x_i,y_i)\ h$$

**Sustituyendo los valores correspondientes, se tiene:**

$$y(0.5) = y(0) + f(0,1)0.5$$

$$f(0,1) = \frac{dy}{dx} = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

$$y(0.5) = 1 + (8.5)*(0.5) = 5.25$$

**Ejemplo 5.4**

**Hay que repetir los cálculos anteriores hasta llegar a x = 4 con pasos h = 0.5**

$$y(1) = y(0.5) + f(0.5, 5.25)0.5$$
$$f(0.5, 5.25) = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5 = 1.25$$
$$y(1) = 5.25 + (1.25)*(0.5) = 5.875$$

---

$$y(1.5) = y(1) + f(1, 5.875)0.5$$
$$f(1, 5.875) = -2(1)^3 + 12(1)^2 - 20(1) + 8.5 = -1.5$$
$$y(1.5) = 5.875 + (-1.5)*(0.5) = 5.125$$

---

$$y(2) = y(1.5) + f(1.5, 5.125)0.5$$
$$f(1.5, 5.125) = -2(1.5)^3 + 12(1.5)^2 - 20(1.5) + 8.5 = -1.25$$
$$y(2) = 5.125 + (-1.25)*(0.5) = 4.5$$

## Ejemplo 5.4

$$y(2.5) = y(2) + f(2, 4.5)0.5$$
$$f(2, 4.5) = -2(2)^3 + 12(2)^2 – 20(2) + 8.5 = 0.5$$
$$y(2.5) = 4.5 + (0.5)*(0.5) = 4.75$$

---

$$y(3) = y(2.5) + f(2.5, 4.75)0.5$$
$$f(2.5, 4.75) = -2(2.5)^3 + 12(2.5)^2 – 20(2.5) + 8.5 = 2.25$$
$$y(3) = 4.75 + (2.25)*(0.5) = 5.875$$

---

$$y(3.5) = y(3) + f(3, 5.875)0.5$$
$$f(3, 5.875) = -2(3)^3 + 12(3)^2 – 20(3) + 8.5 = 2.5$$
$$y(3.5) = 5.875 + (2.5)*(0.5) = 7.125$$

---

$$y(4) = y(3.5) + f(4, 3.5)0.5$$
$$f(4, 3.5) = -2(3.5)^3 + 12(3.5)^2 – 20(3.5) + 8.5 = -0.25$$
$$y(4) = 7.125 + (-0.25)*(0.5) = 7$$

## Ejemplo 5.4

**La solución exacta está dada por la ecuación**

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

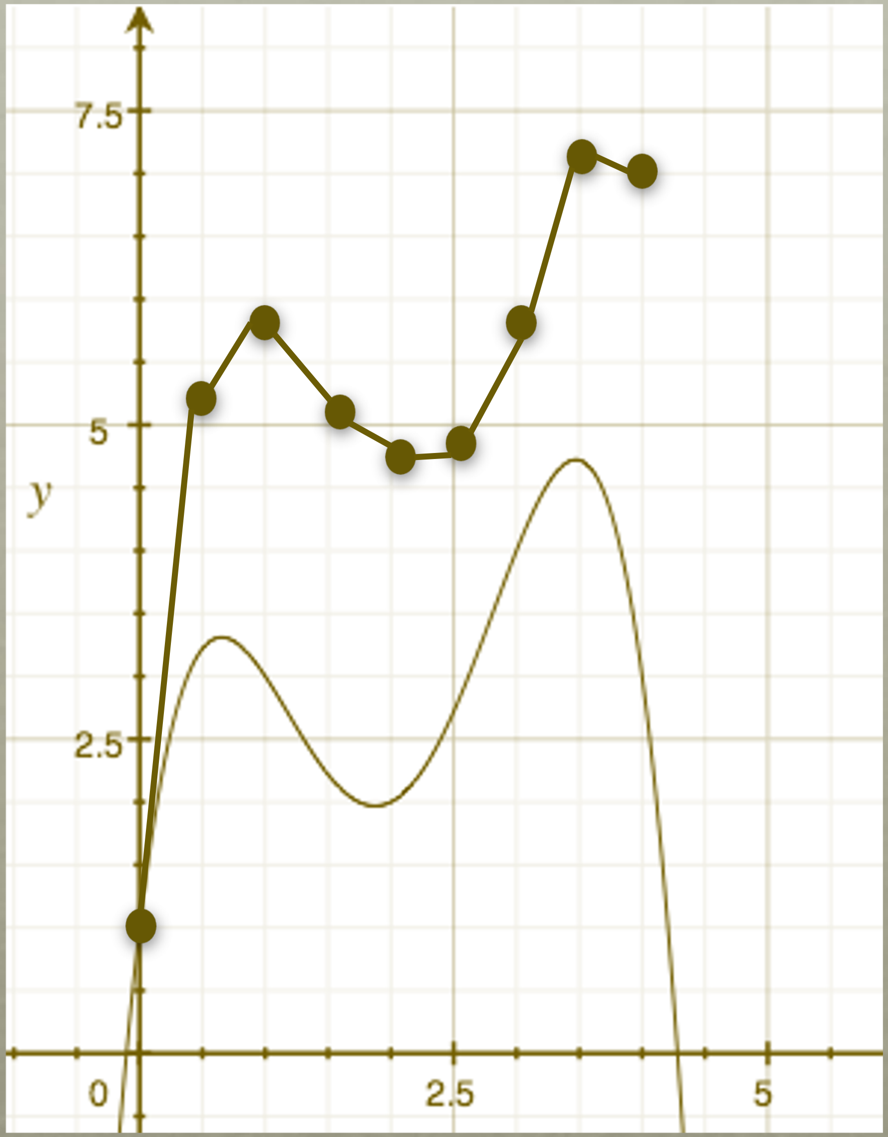
| x | y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.5 | 3.21875 |
| 1 | 3 |
| 1.5 | 2.21875 |
| 2 | 2 |
| 2.5 | 2.71875 |
| 3 | 4 |
| 3.5 | 4.71875 |
| 4 | 3 |

## Ejemplo 5.4

**Si se comparan los valores aproximados con los valores reales se obtiene:**

| x | y | y´ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 0.5 | 3.21875 | 5.25 |
| 1 | 3 | 5.875 |
| 1.5 | 2.21875 | 5.125 |
| 2 | 2 | 4.5 |
| 2.5 | 2.71875 | 4.75 |
| 3 | 4 | 5.875 |
| 3.5 | 4.71875 | 7.125 |
| 4 | 3 | 7 |

## Ejemplo 5.4



## Ejercicio 5.3

**Integrar la ecuación anterior, mediante el método de Euler, reduciendo el tamaño de paso.**

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

**desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con un tamaño de paso $h = 0.25$. La condición inicial en $x = 0$ es $y = 1$.**

**Obtener la gráfica original y la gráfica aproximada a partir de los valores obtenidos, recordando que la solución exacta está dada por la ecuación:**

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

**Truncar en dos decimales.**

## 5.2.2 Método de Runge-Kutta

**Los métodos nombrados en honor de Carl Runge y Wilhelm Kutta logran una exactitud igual a la serie de Taylor sin necesidad del cálculo de derivadas de orden superior.**

**Los métodos nombrados en honor de Carl Runge y Wilhelm Kutta logran una exactitud igual a la serie de Taylor sin necesidad del cálculo de derivadas de orden superior.**

## 5.3 Solución de ecuaciones en derivadas parciales

**El concepto de jerarquía designa una forma de organización de**

## 5.3.1 Método explícito

**Se conoce como jerarquía de clases al orden o clasificación de abstracciones en una estructura de árbol, es decir, un conjunto de clases que describen,**

## 5.3.2 Condiciones de frontera

**Se conoce como jerarquía de clases al orden o clasificación de abstracciones en una estructura de árbol, es decir, un conjunto de clases que describen,**

## 5.3.3 Problema del valor inicial

**Se conoce como jerarquía de clases al orden o clasificación de abstracciones en una estructura de árbol, es decir, un conjunto de clases que describen,**

## 5.4 Desarrollo de programas en lenguaje orientado a objetos para implementar los métodos de este tema

**Para realizar un programa es necesario analizar el problema a resolver. Para ello es importante conocer el funcionamiento del proceso a programar así como el objetivo del mismo (¿a dónde queremos llegar?).**

**Una vez entendido el funcionamiento de los diferentes métodos numéricos vistos en clase, es posible automatizarlos para obtener el resultado de manera eficiente.**

**Tema 5: Aplicar métodos numéricos para la solución numérica de sistemas y ecuaciones avanzadas.**

- **Subtema 5.1: Describir las diversas técnicas de derivación e integración de funciones algebraicas.**
- **Subtema 5.2: Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.**
- **Subtema 5.3: Explicar las técnicas de derivación parcial de ecuaciones.**
- **Subtema 5.4: Elaborar programas en lenguaje orientado a objetos que sean capaces de resolver los diversos métodos numéricos.**