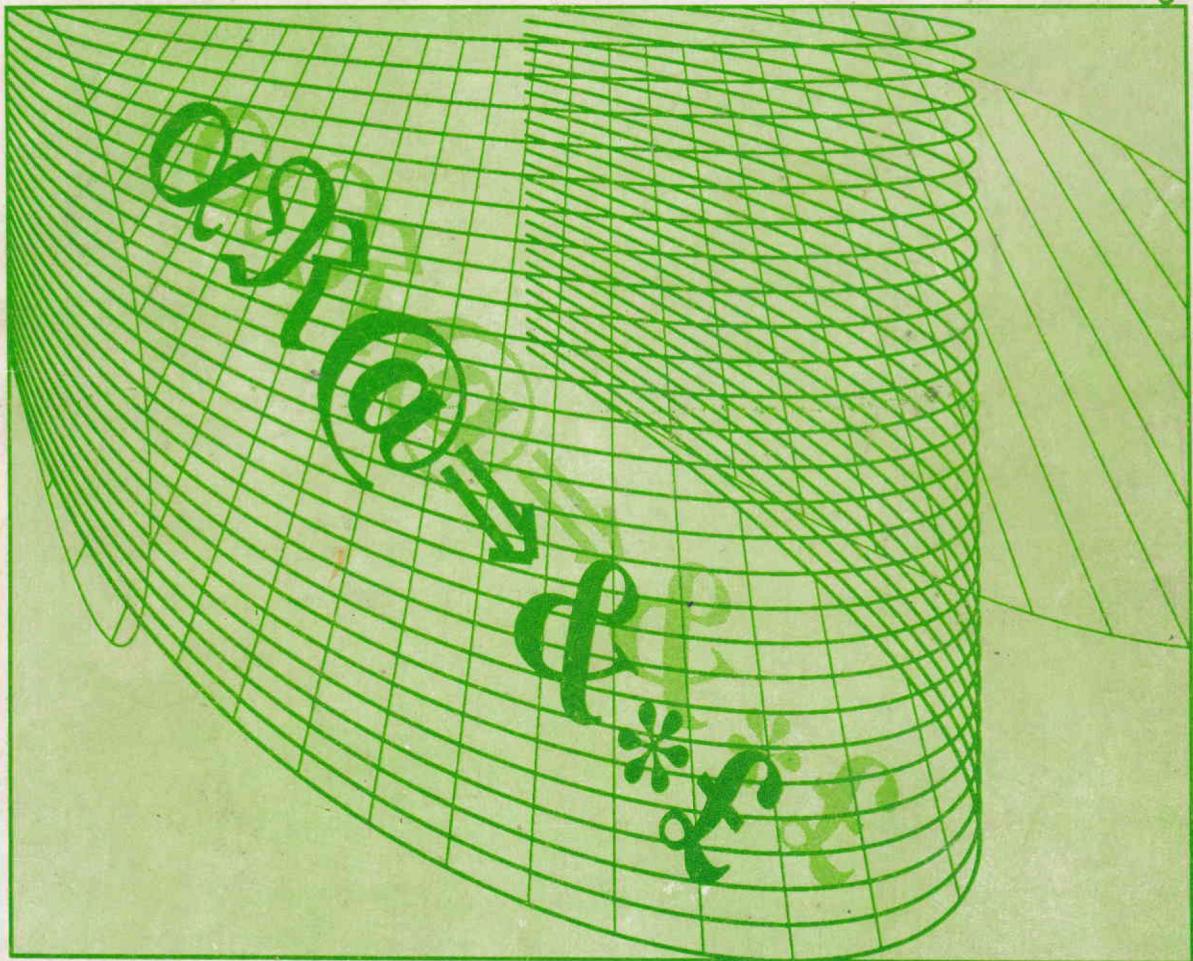


ALGEBRA MODERNA

Sebastian Lazo Q.



UMSA EMI UCB

ALGEBRA MODERNA

UMSA EMI UCB

Sebastian Lazo Q.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Sebastian Lazo Q.", is positioned below the typed name. It features a stylized 'S' at the beginning, followed by a series of loops and strokes.

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio de difusión sin permiso previo del autor.

Propiedad intelectual protegida por el Registro N° 4 - 1 - 807 - 99 del Registro Nacional de Propiedad intelectual del Ministerio de Educación.



Av. Hugo Estrada N° 26 (Miraflores)
Teléfonos: 22 85 93 • 24 25 38
La Paz - Bolivia

PROLOGO

El propósito de esta obra: "ALGEBRA MODERNA" es que los estudiantes de primer año de universidad, de institutos superiores y todos aquellos que deseen adquirir los primeros conocimientos sobre la estructuración de los conceptos matemáticos básicos, puedan conocer las técnicas de la lógica, los conjuntos, las relaciones y funciones, las estructuras algebraicas, la inducción matemática, combinatoria, números complejos y el álgebra de Boole.

El libro está redactado con la claridad necesaria para que los estudiantes puedan asimilar con facilidad parte del lenguaje de las matemáticas actuales. Las definiciones están expuestas con sencillez y van seguidas de ejemplos que facilitan su total comprensión. Al final de cada capítulo se proponen una serie de ejercicios ordenados secuencialmente de acuerdo al grado de dificultad.

Finalmente, deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Ing. R. Gabriel Mejía M. y al Ing. Carlos A. Barroso V. También manifestar mi gratitud a los señores docentes del departamento de Ciencias Exactas de la Universidad Católica Boliviana, de la Escuela Militar de Ingeniería y de la Universidad Mayor de San Andrés, porque en mayor o menor medida aportaron para que esta obra sea una realidad. Es de justicia citar aquí a la Srta. Silvia Rejas, agradeciéndole por su valiosa colaboración con la difícil tarea de transcribir textos de matemática. Asimismo, quiero expresar mi gratitud al personal de la imprenta SOIPA LTDA., en particular a su gerente y a su editor.

EL AUTOR.

CAPÍTULO XXI

"LA VIDA EN LA ALDEA" PODRÍA SER UN TÍTULO
para describir la situación en que se halla
actualmente el trío de la familia. La señora
Lambert es una de las más vivas y alegres
mujeres del país, pero su alegría no responde
a su situación ni a su condición social.

La señora Lamberti ha hecho todo lo
que ha podido para que su hija pueda
vivir en la casa que le pertenece y que posee
en la ciudad, pero su situación es tan
desesperada que teme que su hija la
abandone si sigue en su casa.

Pero la señora Lamberti no es una mujer
que se rinda fácilmente, y cuando ve que
la situación es desesperada, se aferra a la
esperanza de que su hija la ayudará. Es una
señora que ha vivido una vida tranquila
y sin problemas, y que no sabe cómo
debería actuar en esta situación. La
señora Lamberti es una mujer que ha
vivido una vida tranquila y sin problemas,
y que no sabe cómo deberías actuar en esta
situación.

INDICE

CAPITULO I	LÓGICA	
1.	Introducción	1
2.	Proposiciones	1
2.1	Definición	2
2.2	Notaciones y Conectivos lógicos	2
3.	Operaciones proposicionales	3
3.1	Negación	3
3.2	Conjunción	4
3.3	Disyunción	5
3.4	Implicación o condicional	6
3.5	Doble implicación o bicondicional	7
3.6	Disyunción exclusiva	8
4.	Fórmulas proposicionales	8
4.1	Tabla de valores de verdad	9
4.2	Clasificación de fórmulas proposicionales	10
4.2.1	Tautología	10
4.2.2	Contradicción	11
4.2.3	Contingencia	11
4.3	Equivalencia lógica	12
4.4	Ejemplos adicionales	13
5.	Algebra de proposiciones	14
5.1	Leyes lógicas	15
5.2	Simplificación de fórmulas proposicionales	16
6.	Circuitos lógicos	20
6.1	Circuitos en serie y en paralelo	20
6.1.1	Circuitos en serie	20
6.1.2	Circuitos en paralelo	21
7.	Inferencia lógica	24
7.1	Reglas de inferencia	25
8.	Funciones proposicionales y su cuantificación	29
8.1	Funciones proposicionales	29
8.2	Cuantificadores	30
	Ejercicios	33
CAPITULO II	TEORÍA DE CONJUNTOS	
1.	Introducción	47
2.	Concepto y notación de conjunto	47
2.1	Notación de conjuntos numéricos	48
3.	Determinación de un conjunto	48
3.1	Por extensión	48
3.2	Por comprensión	49
4.	Conjuntos especiales	49
4.1	Conjunto unitario	49
4.2	Conjunto vacío	50
4.3	Conjunto universal	50
5.	Relaciones entre conjuntos	51
5.1	Inclusión de conjuntos	51
5.2	Igualdad de conjuntos	52
5.3	Conjunto de partes	52
6.	Operaciones entre conjuntos	53
6.1	Unión de conjuntos	54
6.2	Intersección de conjuntos	54
6.3	Complemento de un conjunto	55
		56

6.5 Diferencia simétrica de conjuntos	57
7. Leyes de operaciones con conjuntos	58
8. Cardinal de un conjunto	61
8.1 Propiedades	62
9. Producto cartesiano	65
10. Partición de un conjunto	68
Ejercicios	70

CAPITULO III RELACIONES

1. Introducción	80
2. Relaciones	80
2.1 Definición	82
3. Dominio, imagen, relación inversa	84
3.1 Dominio de R	84
3.2 Imagen de R	84
3.3 Relación inversa	85
4. Composición de relaciones	87
4.1 Propiedades de la composición de relaciones	88
5. Relaciones definidas en un conjunto	90
5.1 Propiedades de las relaciones	91
5.1.1 Relaciones reflexivas	92
5.1.2 Relaciones no reflexivas	92
5.1.3 Relaciones arreflexivas	93
5.1.4 Relaciones simétricas	93
5.1.5 Relaciones no simétricas	94
5.1.6 Relaciones asimétricas	94
5.1.7 Relaciones transitivas	95
5.1.8 Relaciones no transitivas	96
5.1.9 Relaciones atransitivas	96
5.1.10 Relaciones antisimétricas	97
6. Relaciones de equivalencia	102
6.1 Clases de equivalencia	104
6.2 Conjunto de índices	105
6.3 Conjunto cociente	107
7. Relaciones de orden	115
7.1 Relaciones de orden amplio	115
7.1.1 Relaciones de orden parcial y total	117
7.2 Relaciones de orden estricto	118
7.3 Diagrama de Hasse	119
7.4 Elementos extremos de un conjunto ordenado	122
7.4.1 Primero y último elemento	122
7.4.2 Elementos maximales y minimales	122
7.4.3 Cotas inferiores y superiores	123
7.4.4 Mínima cota superior y máxima cota inferior	123
8. Ejemplos adicionales	125
Ejercicios	128

CAPITULO IV FUNCIONES

1. Introducción	138
2. Funciones	138
2.1 Definición	138
2.2 Definición	139
3. Composición de funciones	141
3.1 Definición	142
4. Clasificación de funciones	143
4.1 Función inyectiva	143

4.2 Función sobreyectiva	144
4.3 Función biyectiva	145
5. Funciones inversas	148
5.1 Definición	149
5.2 Función identidad	149
5.3 Propiedades	149
6. Imagen directa, imagen inversa	150
Ejercicios	153
CAPITULO V LEYES DE COMPOSICIÓN Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	
1. Introducción	158
2. Leyes de composición interna	158
3. Propiedades de las leyes de composición interna	159
3.1 Asociatividad	159
3.2 Conmutatividad	160
3.3 Existencia de elemento neutro	160
3.4 Existencia de inversos en una ley interna con neutro	160
3.5 Regularidad de un elemento respecto de una ley interna	160
3.6 Distributividad de una ley de composición interna respecto de otra	163
4. Ley de composición externa	165
5. Estructuras algebraicas	166
5.1 Estructura de semigrupo	166
5.2 Estructura de grupo	167
5.3 Estructura de anillo	169
5.4 Estructura de cuerpo	172
6. Homomorfismo	175
6.1 Isomorfismo	175
6.2 Homomorfismo de anillos	177
6.3 Núcleo e imagen de un homomorfismo	178
Ejercicios	180
CAPITULO VI INDUCCIÓN MATEMÁTICA	
1. Introducción	185
2. El principio del buen orden	185
3. Principio de inducción matemática	186
4. Método de inducción matemática	186
5. Notación de sumatoria y productoria	189
5.1 Propiedades	190
6. Ejemplos adicionales	193
Ejercicios	198
CAPITULO VII COMBINATORIA	
1. Principios básicos del conteo	203
1.1 Principio de multiplicación	203
1.2 Principio de adición	204
2. Factorial de un número	205
2.1 Propiedades de los factoriales	205
3. Permutaciones	206
3.1 Permutaciones simples	206
3.2 Permutaciones circulares	209
3.3 Permutaciones con repetición	211
4. Variaciones	212
4.1 Variaciones simples	212
4.2 Variaciones con repetición	214
5. Combinaciones	215
5.1 Combinaciones simples	215

5.2 Combinaciones con repetición	218
5.3 Propiedades	220
6. Binomio de Newton	221
6.1 Propiedades	223
Ejercicios	225

CAPITULO VIII NÚMEROS COMPLEJOS Y SUS OPERACIONES

1. Números complejos	236
2. Operaciones fundamentales	237
2.1 Adición	237
2.2 Sustracción	238
2.3 Multiplicación	239
2.4 División	239
2.5 Propiedades	241
3. Módulo y sus propiedades	241
4. Forma polar de un número complejo	242
5. Forma exponencial	243
6. Teorema de D'Moivre	245
7. Raíces de un número complejo	246
8. Exponencial y logaritmación compleja	249
Ejercicios	253

CAPITULO IX ÁLGEBRA BOOLEANA

1. Introducción	265
2. Álgebra de Boole	265
2.1 El principio de dualidad	266
2.2 Propiedades del álgebra de Boole	266
3. Funciones booleanas	267
3.1 Propiedades	268
3.2 Formas normales disyuntiva y conjuntiva	272
4. Redes de puertas lógicas	276
4.1 Función AND	277
4.2 Función OR	277
4.3 Inversor NOT	277
4.4 Función OR-EXCLUSIVE	277
4.5 Funciones NAND y NOR	278
5. Mapas de Karnaugh	280
5.1 Funciones incompletamente especificadas	286
Ejercicios	288

"La vida del hombre debe ser como el agua, clara, armoniosa, dulce, obediente; elevada como la nube, nítida como la nieve de las cumbres, blanca como el torrente, profunda y serena como el lago, diligente y generosa como el arroyo".

Man Cesped

CAPÍTULO I

LÓGICA

I. INTRODUCCIÓN

La lógica es la disciplina que trata de los métodos, modos y formas del razonamiento humano. Ofrece reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido o no.

Una de las metas fundamentales de la lógica es eliminar las ambigüedades del lenguaje ordinario, introduciendo símbolos y conectivos lógicos en la construcción de proposiciones.

Dado que las proposiciones son la base del razonamiento lógico, que consiste en decidir la validez de una idea en base a enunciados que previamente fueron aceptados, veremos a continuación el concepto de proposición, su simbolización y conectivos lógicos. Posteriormente se estudiarán las operaciones proposicionales, leyes lógicas, aplicaciones a circuitos lógicos e inferencia lógica.

2. PROPOSICIONES

Consideremos las siguientes oraciones:

- a) Tome dos aspirinas
- b) ¿Habla usted inglés?
- c) 2 es un número primo
- d) 3 es mayor que 5
- e) El sol saldrá mañana

Se trata de cinco oraciones diferentes, una orden, una interrogativa y tres declarativas.

De las dos primeras no podemos decir que sean verdaderas ni falsas. Mientras, de las tres últimas, que son declarativas, tiene sentido decir que son verdaderas o falsas. A estas oraciones se denomina proposiciones.

2.1. DEFINICIÓN

Una proposición es toda oración o enunciado respecto de la cual se puede decir si es verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. Es decir, toda proposición está asociada a un valor de verdad, la cual puede ser verdadera o bien falsa. Así, si una proposición es verdadera, se dice que su valor de verdad es V y si es falsa, se dice que su valor de verdad es F.

Ejemplo: El valor de verdad de las siguientes proposiciones es:

- | | | |
|----|---|---|
| a) | “El símbolo del agua es H ₂ O” | V |
| b) | “2 es múltiplo de 3” | F |
| c) | “2 es un número primo” | V |

2.2. NOTACIONES Y CONECTIVOS LÓGICOS

A las proposiciones simples o genéricas (llamadas también atómicas) se acostumbran denotar con las letras minúsculas p, q, r,..., Así, por ejemplo,

- p : “21 es divisible por 7”.
q : “ $3^2 - 1 = 2^3$ ”
r : “El hombre es el arquitecto de su propio destino”

A partir de proposiciones simples se pueden generar otras proposiciones simples o compuestas utilizando ciertas constantes proposicionales llamados conectivos lógicos, tales como: el conectivo “no”, se denota “~”; el conectivo “y”, se denota “ \wedge ”; el conectivo “o”, se denota “v”; el conectivo “si..., entonces...”, se denota “ \rightarrow ”; el conectivo “si y sólo si”, se denota “ \leftrightarrow ” y el conectivo “o” excluyente, se denota “v”.

3. OPERACIONES PROPOSICIONALES

Dada una o dos proposiciones, cuyos valores de verdad se conocen, las operaciones entre proposiciones tratan de generar otras proposiciones y caracterizar la proposición resultante a través de su valor de verdad.

Estas son: La negación, conjunción, disyunción, implicación, doble implicación y la disyunción exclusiva.

3.1. NEGACIÓN

La negación de la proposición “p” es la proposición “no p” que se escribe $\sim p$, cuya tabla de valores de verdad es:

P	$\sim P$
V	F
F	V

Ejemplo: La negación de la proposición

p: “ todo estudiante es educado”
 es $\sim p$: “ no todo estudiante es educado”
 o bien $\sim p$: “ hay estudiantes que no son educados”,
 la cual es V, ya que p es F

Ejemplo: La negación de la proposición

q: “ tres es mayor que dos”
 es $\sim q$: “3 no es mayor que dos”
 o bien $\sim q$: “ no es cierto que 3 es mayor que 2”
 como q es V en este caso, $\sim q$ es F.

3.2. CONJUNCIÓN

Se llama conjunción de dos proposiciones, p y q , a la proposición que se obtiene uniéndolas por medio del conectivo “y”, se escribe $p \wedge q$ y se lee “ p y q ”, cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

REGLA

La conjunción de dos proposiciones es verdadera (V) solamente cuando las dos proposiciones componentes son verdaderas, en otro caso es falsa (F).

Ejemplo: La conjunción de las proposiciones

p : “3 es mayor que 2”

q : “3 divide a 6”

es $p \wedge q$: “3 es mayor que 2 y divide a 6”,

la cual es V, ya que las proposiciones p y q son verdaderas

Ejemplo: La proposición compuesta

“2 es un número par y primo”

es la conjunción de las proposiciones simples

p : “2 es un número par”

q : “2 es un número primo”

3.3. DISYUNCIÓN

Se llama disyunción de dos proposiciones, p y q , a la proposición que se obtiene uniéndolas por medio del conectivo “o”, se escribe $p \vee q$ y se lee “ p o q ” (inclusivo), cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

REGLA

La disyunción de dos proposiciones es falsa (F) si las dos proposiciones componentes son falsas, en otro caso es verdadera (V).

Ejemplo: La disyunción de las proposiciones

p : “15 es múltiplo de 5”

q : “15 es múltiplo de 2”

es $p \vee q$: “15 es múltiplo de 5 o de 2”

la cual es V, ya que p es V.

Ejemplo: La proposición compuesta

“Carlos es un buen jugador o es muy afortunado”

es la disyunción de las proposiciones simples

p : “Carlos es un buen jugador”

q : “Carlos es muy afortunado”

luego, la proposición compuesta se simboliza $p \vee q$

3.4. IMPLICACIÓN O CONDICIONAL

Se llama implicación o condicional de dos proposiciones, p y q , a la proposición que se obtiene uniéndolas por medio del conectivo: “ si... entonces... ”, se escribe $p \rightarrow q$ y se lee “ si p , entonces q ” o “ p implica q ”. En el esquema $p \rightarrow q$ llamaremos a la primera proposición (p) antecedente y a la segunda (q) consecuente, cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

REGLA

La implicación de dos proposiciones es falsa (F), solamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, en otro caso es verdadera (V).

Ejemplo: La proposición compuesta

“si un material se calienta entonces se dilata”

es la implicación de las proposiciones

p : “ Un material se calienta” (antecedente)

q : “ El material se dilata” (consecuente)

luego, la proposición compuesta se simboliza $p \rightarrow q$

Ejemplo: Sean las proposiciones:

p : “ Antonio viaja a Europa”

q : “ Antonio perdió sus documentos”,

entonces la proposición $q \rightarrow \neg p$ es:

“ si Antonio perdió sus documentos entonces no viaja a Europa”

3.5. DOBLE IMPLICACIÓN O BICONDICIONAL

Se llama doble implicación o bicondicional de dos proposiciones, p y q , a la proposición que se obtiene uniéndolas por medio del conectivo: "... si y sólo si...", se escribe $p \leftrightarrow q$ y se lee "p si y sólo si q", cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

REGLA

La bicondicional de dos proposiciones es verdadera (V) solamente cuando las dos proposiciones componentes tienen el mismo valor de verdad, en otro caso es falsa (F).

Ejemplo: la proposición compuesta

"A Juan se le otorgará una beca si y sólo si obtiene un promedio mayor a 60 puntos"

es la bicondicional de las proposiciones:

p: "A Juan se le otorgará una beca"

q: "Juan obtiene un promedio mayor a 60 puntos"

luego la proposición compuesta se simboliza $p \leftrightarrow q$

Ejemplo: Sean las proposiciones

p: "Esta ley será aprobada en esta sesión"

q: "Esta ley es apoyada por la mayoría"

luego la proposición $\sim p \leftrightarrow \sim q$ es:

"Esta ley no será aprobada en esta sección si y sólo si no es apoyada por la mayoría"

3.6. DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Se llama disyunción exclusiva de dos proposiciones, p y q , a la proposición que se obtiene uniéndolas por medio del conectivo “o” excluyente, se escribe $p \vee q$ y se lee “ p o q ” en sentido excluyente (p o bien q), cuya tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

REGLA

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es falsa (F) cuando las dos proposiciones componentes tienen el mismo valor de verdad, en otro caso es verdadera (V).

NOTA: Es cierto que $p \vee q$ equivale a la negación de $p \leftrightarrow q$.

Ejemplo : La proposición compuesta

“ la capital de Bolivia es La Paz o Sucre”

es la disyunción exclusiva de las proposiciones:

p: “ La capital de Bolivia es La Paz”

q: “ La capital de Bolivia es Sucre”,

luego la proposición compuesta se simboliza $p \vee q$, pues se excluye la posibilidad de que se cumplan ambas proposiciones.

4. FÓRMULAS PROPOSICIONALES

Una fórmula proposicional es una combinación de proposiciones y conectivos lógicos que simboliza a una proposición compuesta o molecular. Por ejemplo, las siguientes son fórmulas proposicionales:

$$p \wedge (q \vee \neg p), \quad (\neg p \rightarrow q) \wedge r, \quad p \vee (\neg p \rightarrow r)$$

Ejemplo: Simbolizar la siguiente proposición

“ si Pablo no ha venido entonces no ha recibido la carta o no está interesado en el asunto”.

Las proposiciones simples que componen son:

p: “ Pablo ha venido”

q: “ Pablo ha recibido la carta”

r: “ Pablo está interesado en el asunto”

luego, la proposición compuesta se simboliza $\sim p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)$

4.1. TABLA DE VALORES DE VERDAD

El valor de verdad de una fórmula proposicional depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen. Es decir, se debe analizar todas las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones que la componen, las cuales se dan en las primeras columnas. Por tanto, si en una fórmula proposicional intervienen “n” proposiciones simples diferentes, entonces en la tabla de valores de verdad habrá 2^n combinaciones diferentes. Así, para dos proposiciones se tiene $2^2 = 4$ posibles combinaciones de V y F. Para tres, $2^3 = 8$ combinaciones, etc.

Ejemplo: Construir la tabla de verdad de la proposición $\sim p \rightarrow (\sim q \vee \sim r)$.

Como en la proposición dada intervienen 3 proposiciones simples, entonces se analizará $2^3 = 8$ renglones. Esto es:

p	q	r	$\sim p$	\rightarrow	(q \vee r)	$\sim (q \vee r)$
V	V	V	F	V	V	F
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V

```

    graph TD
      A[p] --> B(( ))
      B --> C[q]
      B --> D[r]
      C --> E["~(q ∨ r)"]
      D --> E
  
```

Luego, los valores de verdad de la fórmula proposicional se encuentran en la columna R.

4.2. CLASIFICACIÓN DE FÓRMULAS PROPOSICIONALES

Las fórmulas proposicionales (las proposiciones compuestas) se clasifican, según sus valores de verdad, en Tautología, Contradicción y Contingencia.

4.2.1 TAUTOLOGIA Es una fórmula proposicional que es verdadera para cualquier valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: La tabla de verdad de $[(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow p$, es:

p	q	$(\sim p \rightarrow q)$	\wedge	$\sim q$	\rightarrow	p
V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F

Según la columna “R”, la fórmula dada es una tautología.

4.2.2. CONTRADICCIÓN Es una fórmula proposicional que es falsa para cualquier valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: La tabla de verdad de la fórmula proposicional

$(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, es:

p	q	$(\sim p \rightarrow q)$	\leftrightarrow	$(\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	V	F
V	F	F	V	F
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

Según la columna “R”, la fórmula dada es una contradicción.

4.2.3 CONTINGENCIA Es una fórmula proposicional que no es tautología ni contradicción.

Ejemplo: La tabla de verdad de $(p \leftrightarrow \sim q) \vee \sim(p \wedge q)$, es:

p	q	$(p \leftrightarrow \sim q)$	\vee	$\sim(p \wedge q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

Según la columna “R”, la fórmula dada es una contingencia, ya que no es tautología ni contradicción.

4.3 EQUIVALENCIA LÓGICA

Dos fórmulas proposicionales se dice que son lógicamente equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas, o sus valores de verdad son los mismos en cada renglón. Usaremos el símbolo “ \equiv ” para expresar la equivalencia entre dos fórmulas proporcionales.

Ejemplo: la tabla de verdad de las fórmulas $p \leftrightarrow q$ y $\sim(p \vee q)$ son:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	F

luego, las formulas dadas son equivalentes. Es decir, $p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \vee q)$

4.4 EJEMPLOS ADICIONALES

Ejemplo: Sabiendo que los valores de verdad de las proposiciones p, q, r son, respectivamente, V, F, V, determinar el valor de verdad de

$$\sim[\sim(p \rightarrow \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim p)] \leftrightarrow \sim[r \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)]$$

SOLUCION: Sustituyendo los valores de verdad de las proposiciones:

p = V, q = F y r = V, según las reglas de las operaciones proposicionales, se obtiene el valor de verdad de la proposición dada, como sigue:

$$\sim[\sim(p \rightarrow \sim r) \wedge (\sim q \vee \sim p)] \leftrightarrow \sim[r \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)]$$

$$\sim[\sim(V \rightarrow \sim V) \wedge (\sim F \vee \sim V)] \leftrightarrow \sim[V \rightarrow \sim(\sim V \vee \sim F)]$$

$$\sim[\sim(V \rightarrow F) \wedge (V \vee F)] \leftrightarrow \sim[V \rightarrow \sim(F \vee V)]$$

$$\sim[\sim F \wedge V] \leftrightarrow \sim[V \rightarrow \sim V]$$

$$\sim[V \wedge V] \leftrightarrow \sim[V \rightarrow F]$$

$$\sim V \leftrightarrow \sim F$$

$$F \leftrightarrow V = F$$

Ejemplo: Sabiendo que $\sim(p \wedge \sim q)$ es F y que r es V, obtener el valor de verdad de:

$$[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow \sim(p \vee \sim q)$$

SOLUCIÓN: En primer lugar determinaremos los valores de verdad de las proposiciones simples, p y q. Esto es, si $\sim(p \wedge \sim q)$ es F, entonces $p \wedge \sim q$ es V. Luego, según la regla de la conjunción, p y $\sim q$ son V, de donde q es F. Por tanto, los valores de verdad de las proposiciones p, q y r son, respectivamente, V, F, V.

En consecuencia, el valor de verdad de la proposición dada es:

$$[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow \sim(p \vee \sim q)$$

$$[(\sim V \wedge F) \rightarrow \sim V] \leftrightarrow \sim(V \vee \sim F)$$

$$[(F \wedge F) \rightarrow F] \leftrightarrow \sim(V \vee \sim V)$$

$$[F \rightarrow F] \leftrightarrow \sim F$$

$$V \leftrightarrow V = V$$

Ejemplo: Sean p y q proposiciones cualesquiera, r y s proposiciones tales que $\sim(r \vee \sim s)$ es V. Determinar el valor de verdad de

$$[(\sim p \wedge r) \leftrightarrow (q \vee s)] \rightarrow \sim(p \vee q)$$

SOLUCION: Si $\sim(r \vee \sim s)$ es V, entonces $r \vee \sim s$ es F, de donde r y $\sim s$ son F, y s es V.

Por tanto, tenemos $r = F$, $s = V$, p y q proposiciones cualesquiera.

Luego, la proposición dada resulta

$$[(\sim p \wedge F) \leftrightarrow (q \vee V)] \rightarrow \sim(p \vee q)$$

Según las reglas de la conjunción, disyunción y de la implicación tenemos

$$[F \leftrightarrow V] \rightarrow \sim(p \vee q)$$

$$F \rightarrow \sim(p \vee q) = V$$

Ejemplo: Sabiendo que p es F y que q es una proposición cualesquiera, determinar el valor de verdad de la proposición x .

Tal que $(\sim p \rightarrow x) \rightarrow (p \wedge \sim q)$ sea verdadero.

SOLUCION: Si p es F, entonces la proposición dada resulta

$$= (\sim F \rightarrow x) \rightarrow (F \wedge \sim q)$$

$$= (V \rightarrow x) \rightarrow F$$

Para que esta última expresión resulte verdadero, según la regla de implicación, el antecedente debe ser F, es decir $V \rightarrow x = F$, de donde x debe ser F.

5. ALGEBRA DE PROPOSICIONES

Son operaciones lógicas que se realizan en una fórmula proposicional, aplicando adecuadamente ciertas reglas básicas llamadas leyes lógicas. Es decir, al igual que en álgebra básica donde la simplificación de expresiones algebraicas es muy importante, en lógica también existe la necesidad de simplificar fórmulas proposicionales complejas, a través de ciertas equivalencias llamadas leyes lógicas, que a continuación se listan.

5.1. LEYES LÓGICAS

Son fórmulas proposicionales lógicamente equivalentes, estas son:

- 1) Leyes de idempotencia: $p \wedge p \equiv p$; $p \vee p \equiv p$
- 2) Leyes conmutativas: $p \wedge q \equiv q \wedge p$; $p \vee q \equiv q \vee p$
- 3) Leyes asociativas: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- 4) Leyes de negación: $\sim(\sim p) \equiv p$
 $p \wedge \sim p \equiv F$; $p \vee \sim p \equiv V$
- 5) Leyes de identidad: $p \wedge V \equiv p$; $p \vee F \equiv p$
- 6) Leyes de De Morgan: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- 7) Definición de implicación: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- 8) Leyes distributivas: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- 9) Leyes de absorción: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$; $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
 $p \wedge F \equiv F$; $p \vee V \equiv V$
- 10) Definición de doble implicación: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

5.2. SIMPLIFICACIÓN DE FÓRMULAS PROPOSICIONALES

Se trata de trasformar una fórmula proposicional en otra equivalente a ella pero lo más reducida posible. Para lo cual se debe usar oportuna y correctamente las leyes lógicas. Así mismo, deben especificarse en cada paso la ley o leyes que fueron utilizados.

Ejemplos: En cada uno de los siguientes incisos, simplificar la proposición dada:

a) Simplificar : $p \wedge (q \vee \sim q)$

como $q \vee \sim q \equiv V$ por la ley de negación (L. neg.)

luego se tiene:

$$p \wedge (q \vee \sim q) \equiv p \wedge V$$

$\equiv P$, según la ley de identidad (L. ident.)

b) Simplificar : $\sim q \vee (\sim p \wedge p)$

como $\sim p \wedge p \equiv F$, según la ley de negación (L. neg.)

luego se tiene:

$$\sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F$$

$\equiv \sim q$, según la ley de identidad (L. ident.)

c) Simplificar : $\sim(p \wedge \sim q) \vee q$

Por la ley de De Morgan (L. D M), $\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

luego se tiene:

$$\sim(p \wedge \sim q) \vee q \equiv (\sim p \vee q) \vee q$$

$\equiv \sim p \vee (q \vee q)$, según la ley asociativa (L. asoc.)

$\equiv \sim p \vee q$, según la ley de idempotencia (L. Idem.)

d) Simplificar : $\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge p$

Por la definición de implicación (d. imp.), $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$

luego se tiene:

$$\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge p \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \wedge p$$

Según la Ley de De Morgan (L.D.M.), $\sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge p &\equiv (p \wedge q) \wedge p \\ &\equiv (p \wedge p) \wedge q, \text{ según la Ley asociativa (L.asoc.)} \\ &\equiv p \wedge q, \text{ según la ley idempotencia (L.Idem)}\end{aligned}$$

- e) Simplificar: $q \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

Por definición de implicación (D.Imp.), $\sim p \rightarrow \sim q \equiv p \vee \sim q$

luego se tiene:

$$\begin{aligned}q \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) &\equiv q \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim q), \text{ según la Ley distributiva (L.dist)} \\ &\equiv (q \wedge p) \vee F, \text{ según la ley de negación (L. Neg.)} \\ &\equiv q \wedge p, \text{ según la ley de identidad (L. ident)}\end{aligned}$$

- f) Simplificar: $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q)$

por la definición de implicación (D. Imp), $\sim p \rightarrow q \equiv p \vee q$

luego se tiene:

$$\begin{aligned}(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv p \vee (q \wedge \sim q), \text{ según la Ley distributiva (L. dist.)} \\ &\equiv p \vee F, \text{ según la ley de negación (L. neg.)} \\ &\equiv p, \text{ según la ley de idempotencia (L. Idem)}\end{aligned}$$

- g) Simplificar: $p \vee \sim(p \rightarrow r)$

como $p \rightarrow r \equiv \sim p \vee r$, según definición de implicación (D.Imp.)

luego

$$\begin{aligned}p \vee \sim(p \rightarrow r) &\equiv p \vee \sim(\sim p \vee r) \\ &\equiv p \wedge (\sim p \wedge \sim r), \text{ según la L. de De Morgan (L.D.M)} \\ &\equiv p, \text{ según la Ley de absorción (L. Abs)}\end{aligned}$$

h) Simplificar : $q \vee (p \rightarrow \sim q)$

como $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$, según definición de implicación (D. Imp.)

luego se tiene:

$$q \vee (p \rightarrow \sim q) \equiv q \vee (\sim p \vee \sim q)$$

$\equiv (q \vee \sim q) \vee \sim p$, según la ley asociativa (L. Asoc.)

$\equiv V \vee \sim q$, según la Ley de negación (L. Neg.)

$\equiv V$, según la Ley de absorción (L. Abs.)

i) Simplificar: $p \wedge [q \vee (p \wedge \sim q)]$

$$p \wedge [q \vee (p \wedge \sim q)] \equiv p \wedge [(q \vee p) \wedge (q \vee \sim q)] \quad \text{L.dist}$$

$$\equiv p \wedge [(q \vee p) \wedge V] \quad \text{L.neg}$$

$$\equiv p \wedge (q \vee p) \quad \text{L.ident}$$

$$\equiv p \quad \text{L.abs.}$$

j): simplificar: $\sim (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow q)$

$$\sim (p \wedge q) \wedge (p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \quad \text{L.D'M,D.imp.}$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \wedge q) \quad \text{L.dist}$$

$$\equiv \sim p \vee F \quad \text{L.neg.}$$

$$\equiv \sim p \quad \text{L.ident.}$$

k) Simplificar : $[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$$[(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)] \rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \equiv [p \wedge (\sim q \vee q)] \rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{L.dist.}$$

$$\equiv [p \wedge V] \rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{L.neg.}$$

$$\equiv p \rightarrow (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{L.ident.}$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim p \wedge \sim q) \quad \text{D.imp.}$$

$$\equiv \sim p \quad \text{L.abs.}$$

l): simplificar: $[q \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow \sim(p \wedge q)$

$$\begin{aligned}
 [q \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow \sim(p \wedge q) &\equiv [q \wedge (\sim q \vee \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{L.D'M,} \\
 &\equiv [(q \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{L.dist.} \\
 &\equiv [F \vee (q \wedge \sim p)] \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{L.neg.} \\
 &\equiv (q \wedge \sim p) \rightarrow (\sim p \vee \sim q) && \text{L.ident.} \\
 &\equiv \sim(q \wedge \sim p) \vee (\sim p \vee \sim q) && \text{D.imp.} \\
 &\equiv (\sim q \vee p) \vee (\sim p \vee \sim q) && \text{L. D.M.} \\
 &\equiv (\sim q \vee \sim q) \vee (p \vee \sim p) && \text{L. asoc.} \\
 &\equiv \sim q \vee F && \text{L.idem, L neg.} \\
 &\equiv \top && \text{L. abs.}
 \end{aligned}$$

m) Simplificar: $[\sim p \wedge (q \rightarrow p)] \vee [(\sim p \wedge \sim q) \wedge (q \vee p)]$

$$\begin{aligned}
 [\sim p \wedge (q \rightarrow p)] \vee [(\sim p \wedge \sim q) \wedge (q \vee p)] &\equiv [\sim p \wedge (\sim q \vee p)] \vee [p \vee (\sim q \wedge q)] && \text{D.imp. L.dist} \\
 &\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge p)] \vee [p \vee F] && \text{L.dist., L.neg.} \\
 &\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee F] \vee p && \text{L.neg., L.ident.} \\
 &\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee p && \text{L.ident.} \\
 &\equiv (\sim p \vee p) \wedge (\sim q \vee p) && \text{L.dist.} \\
 &\equiv \top \wedge (\sim q \vee p) && \text{L.neg} \\
 &\equiv \sim q \vee p && \text{L.ident}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Determinar una proposición X, tal que $[(\sim x \rightarrow p) \wedge x] \vee (p \wedge q) \equiv q$

SOLUCION: Simplificando la proposición del primer miembro se tiene

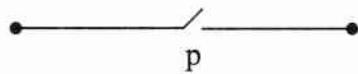
$$\begin{aligned}
 [(\sim x \rightarrow p) \wedge x] \vee (p \wedge q) &\equiv q && \text{D.Imp.} \\
 x \vee (p \wedge q) &\equiv q && \text{L.abs.}
 \end{aligned}$$

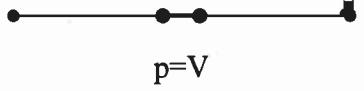
Luego, para que se verifique la equivalencia, la proposición x debe ser q o su equivalente, pues

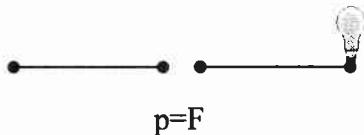
$$q \vee (p \wedge q) \equiv q \quad \text{L. abs.}$$

6. CIRCUITOS LÓGICOS:

Un circuito, con un interruptor, puede estar “abierto” o “cerrado”. Cuando el interruptor está abierto no permite el paso de corriente, mientras que cuando está cerrado sí lo permite. Si asociamos una proposición a cada interruptor, intuitivamente, vemos que en el álgebra de circuitos la V de tal proposición indica el interruptor cerrado y F el interruptor abierto. Así, el circuito lógico que representa a una proposición p es:



Si p es V, se tiene:  $p=V$ pasa la corriente

Si p es F, se tiene:  $p=F$ no pasa la corriente

6.1. CIRCUITOS EN SERIE Y EN PARALELO

Las operaciones proposicionales se pueden representar mediante circuitos lógicos con tantos interruptores como proposiciones que la componen, combinados en serie o en paralelo según el conectivo lógico que une las proposiciones.

6.1.1. CIRCUITOS EN SERIE La conjunción de dos proposiciones ($p \wedge q$) está representada por un circuito lógico en serie. Esto es:

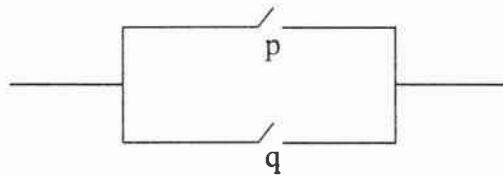


p y q conectados en serie.

Este circuito permite el paso de corriente únicamente si p y q son V (o están cerrados). Así, se obtiene la tabla de verdad de la conjunción de dos proposiciones, p y q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	—
V	F	—
F	V	—
F	F	—

6.1.2. CIRCUITOS EN PARALELO La disyunción de dos proposiciones ($p \vee q$) está representada por un circuito lógico en paralelo. Esto es:



p y q conectados en paralelo.

Este circuito no permite el paso de corriente únicamente si p y q son F (o están abiertos). Por lo cual, la tabla de verdad de la disyunción de dos proposiciones, p y q, es:

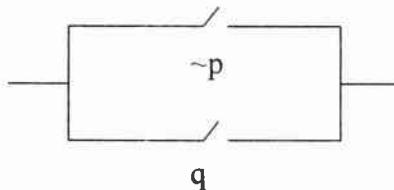
p	q	$p \vee q$
V	V	—
V	F	—
F	V	—
F	F	—

OBSERVACIÓN El conectivo lógico “y” (\wedge) equivale a conexión en serie, mientras el conectivo lógico “o” (\vee) equivale a conexión en paralelo.

Ejemplo: Representar el circuito lógico de $p \rightarrow q$.

Como $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$,

luego el circuito lógico que representa es:

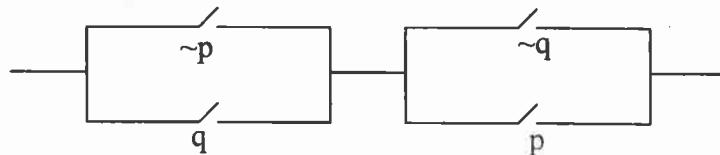


Ejemplo: Representar el circuito lógico de $p \leftrightarrow q$.

Como: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p),$$

luego el circuito lógico que representa es:



Ejemplo: Representar el circuito lógico de $p \underline{\vee} q$.

Como $p \underline{\vee} q \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$

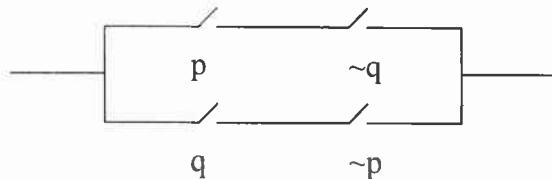
$$\equiv \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

$$\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$$

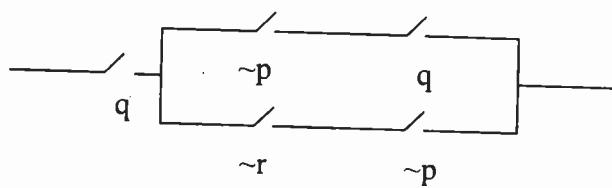
$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \wedge \sim(\sim q \vee p)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p),$$

luego el círculo lógico que representa es:



Ejemplo: Escribir la proposición correspondiente al sgte. circuito y simplificar.



SOLUCION: La proposición correspondiente al circuito dado se obtiene como sigue:

$\sim p$ y q están conectadas en serie, se simboliza por: $\sim p \wedge q$,

$\sim r$ y $\sim p$ están conectados en serie, se simboliza por: $\sim r \wedge \sim p$,

$(\sim p \wedge q)$ y $(\sim r \wedge \sim p)$ están conectados en paralelo, se simboliza:

$(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p)$ y finalmente, q y $[(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p)]$ están conectados en serie, se simboliza por: $q \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p)]$

Simplificando, se obtiene

$$q \wedge [(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim p)] \equiv q \wedge [\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \quad \text{L. dist.}$$

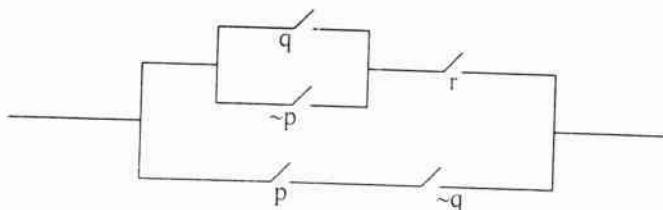
$$\equiv \sim p \wedge [q \wedge (q \vee \sim r)] \quad \text{L. conm. L. asoc}$$

$$\equiv \sim p \wedge q \quad \text{L. abs.}$$

Por tanto, el circuito equivalente será:



Ejemplo: Obtener la proposición correspondiente al siguiente circuito, y simplificar:



SOLUCION: En primer lugar, se determinará la proposición correspondiente al circuito dado. Esto es:

$q \vee \sim p$ están conectados en paralelo, se simboliza: $q \vee \sim p$

$(q \vee \sim p) \wedge r$ están conectados en serie, se simboliza: $(q \vee \sim p) \wedge r$

$p \wedge \sim q$ están conectados en serie, se simboliza: $p \wedge \sim q$

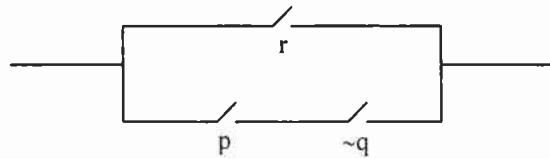
Finalmente, $(q \vee \sim p) \wedge r$ y $(p \wedge \sim q)$ están conectados en paralelo, se simboliza:

$$[(q \vee \sim p) \wedge r] \vee (p \wedge \sim q)$$

Simplificando, se obtiene

$$\begin{aligned} [(q \vee \sim p) \wedge r] \vee (p \wedge \sim q) &\equiv [\sim(p \wedge \sim q) \wedge r] \vee (p \wedge \sim q) && \text{L.D'M.} \\ &\equiv [\sim(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim q)] \wedge [r \vee (p \wedge \sim q)] && \text{L.dist.} \\ &\equiv V \wedge [r \vee (p \wedge \sim q)] && \text{L.neg.} \\ &\equiv r \vee (p \wedge \sim q) && \text{L.Ident.} \end{aligned}$$

Por tanto el circuito equivalente es



7. INFERENCIA LÓGICA

Se debe entender por inferencia lógica a un razonamiento en el que a partir de un conjunto de proposiciones llamadas premisas se obtiene un resultado llamado conclusión. Un razonamiento es válido si, y solamente si, la conjunción de las premisas implica la conclusión, o la conclusión es consecuencia de las premisas. Es decir, si las premisas son todas verdaderas, entonces las conclusiones que se derivan de ellas lógicamente han de ser verdaderas. Sin embargo, si una o más de las premisas es falsa, la conjunción de todas las premisas es falsa; por tanto, la conclusión puede ser verdadera o falsa.

Cuando Q es consecuencia (conclusión) de las premisas P_1, P_2, \dots, P_n , se escribe:

$$\frac{\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{array}}{Q}$$

premisas conclusión

Esto significa que la siguiente implicación es una tautología.

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

7.1 REGLAS DE INFERENCIA

Se le llaman reglas de inferencia a todo argumento universalmente correcto (o formas correctas de razonamiento) que representan métodos generales de razonamiento válido.

Las siguientes son formas correctas de razonamiento:

- 1) MODUS PONENDO PONENS (PP): Es un método (Modus), que afirma (ponens) el consecuente, afirmando (ponendo) el antecedente de la implicación

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

- 2) MODUS TOLLENDO TOLLENS (TT): Es el método (Modus), que negando (tollendo) el consecuente, se puede negar (Tollens) el antecedente de la implicación.

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

- 3) MODUS TOLLENDO PONENS (TP): Es el método (modus), que negando (tollendo) un miembro de una disyunción se afirma (ponens) el otro miembro.

$$\text{a) } \frac{p \vee q}{\sim p} \qquad \text{b) } \frac{p \vee q}{\sim q}$$

$$\frac{\sim q}{p}$$

Ley del silogismo hipotético (SH)

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \end{array}}{p \rightarrow r}$$

Ley de simplificación (LS)

$$\text{a) } \frac{p \wedge q}{p}$$

$$\text{b) } \frac{p \wedge q}{q}$$

Ley de conjunción (LC)

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ \bullet q \end{array}}{p \wedge q}$$

Ley de adición (LA)

$$\frac{p}{p \vee A}$$

Dilema constructivo (DC)

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow t \\ p \vee r \end{array}}{q \vee t}$$

Dilema destructivo (DD)

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow t \\ \sim q \vee \sim t \end{array}}{\sim p \vee \sim r}$$

En las deducciones o demostraciones formales se deberá justificar cada paso de inferencia haciendo referencia a la regla particular de inferencia que permite aquel paso. Se indica esta regla poniendo la abreviatura de su nombre a la derecha del paso de inferencia. Es también necesario indicar los números de las líneas en la inferencia de las que se ha deducido cada paso.

En cada uno de los siguientes ejemplos se demostrará que la conclusión indicada es consecuencia lógica de las premisas dadas.

Ejemplo: Demostrar: $\sim q$

1)	$\sim p \rightarrow r$		
2)	t		
3)	$q \rightarrow \sim r$		
4)	$p \rightarrow \sim t$		
5)	$\sim p$	2,4	TT
6)	r	1,5	PP
7)	$\sim q$	3,6	TT

Luego la conclusión es $\sim q$

Ejemplo: Demostrar : r

1)	$q \rightarrow \sim p$		
2)	$\sim t$		
3)	$p \vee r$		
4)	$\sim q \rightarrow t$		
5)	q	2,4 TT	
6)	$\sim p$	1,5 PP	
7)	r	3,6 TP	

Luego la conclusión es r

Ejemplo: Demostrar: $t \wedge U$

1)	$r \rightarrow \sim p$		
2)	$\sim q \rightarrow S$		
3)	$\sim S \vee U$		
4)	$r \vee t$		
5)	$p \wedge \sim q$		
6)	p	5	LS
7)	$\sim q$	5	LS
8)	$\sim r$	1,6	TT
9)	t	4,8	TP
10)	S	2,7	PP

Ejemplo: Demostrar : D \wedge G

1)	$C \vee D$		
2)	$(B \vee E) \rightarrow F$		
3)	$A \vee B$		
4)	$\sim F \vee G$		
5)	$C \rightarrow \sim A$		
6)	A	3	LS
7)	B	3	LS
8)	$\sim C$	5,6	TT
9)	D	1,8	TP
10)	$B \vee E$	7	L.A

- 11) U 3,10 TP
 12) $t \wedge U$ 9,11 LC

Luego la conclusión es $t \wedge U$

- 11) F 2,10 PP
 12) G 4,11 TP
 13) $D \wedge G$ 9,12 LC

Luego la conclusión es $D \wedge G$

Ejemplo: Demostrar: $x \neq 3 \vee x > 2$.

- 1) $x + 2 \neq 5 \vee 2x = 6$
 - 2) $x = 3 \rightarrow x + 2 = 5$
 - 3) $2x - 2 = 8 \rightarrow 2x \neq 6$
 - 4) $2x - 2 = 8$
-
- 5) $2x \neq 6$ 3,4 PP
 - 6) $x + 2 \neq 5$ 1,5 TP
 - 7) $x \neq 3$ 2,6 TT
 - 8) $x \neq 3 \vee x > 2$ 7 LA

Luego la conclusión es $x \neq 3 \vee x > 2$

Ejemplo: Demostrar: $x < y \wedge y \neq 4$

- 1) $x > y \vee x < 4$
 - 2) $(x < 4 \vee y < 4) \rightarrow (x < y \wedge y \neq 4)$
 - 3) $x > y \rightarrow x = 4$
 - 4) $x \neq 4$
-
- 5) $x \neq y$ 3,4 TT
 - 6) $x < 4$ 1,5 TP
 - 7) $x < 4 \vee y < 4$ 6 LA
 - 8) $x < y \wedge y \neq 4$ 2,7 PP

Luego la conclusión es $x < y \wedge y \neq 4$

Ejemplo: Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vio partir el coche de Andrés. Si Andrés dice la verdad entonces Juan no vio partir el coche de Andrés. Andrés dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado. Por tanto Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen.

Sean las proposiciones

- p: "el reloj está adelantado"
- q: "Juan llegó antes de las diez"
- r: "Juan vio partir el coche de Andrés"
- s: "Andrés dice la verdad"
- t: "Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen"

Luego la demostración es:

1)	$p \rightarrow (q \wedge r)$			
2)	$s \rightarrow \sim r$			
3)	$s \vee t$			
4)	p			
5)	$q \wedge r$	1,4	PP	
6)	q	5	LS	
7)	r	5	LS	
8)	$\sim s$	2,7	TT	
9)	t	3,8	TP	

Por tanto la conclusión es:

t: “Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen”
entonces el razonamiento es válido.

8. FUNCIONES PROPOSICIONALES Y SU CUANTIFICACIÓN

8.1. FUNCIONES PROPOSICIONALES

Una función proposicional en una variable X es toda expresión en la que X representa al sujeto u objeto perteneciente a cierto conjunto. La cual se convierte en proposición para cada especificación de X. Es decir, si P(X) es una expresión que se convierte en proposición al sustituir la variable X por un objeto matemático, se dice que P es una función proposicional. Asimismo hay funciones proposicionales con más de una variable.

Ejemplo: Si nos referimos a los números naturales y, sea la función proposicional P (X): “X es el divisor de 12”, es claro que la expresión : “X es divisor de 12” no es una proposición ya que no podemos decir nada acerca de su verdad o falsedad mientras no se especifique a X. Sin embargo, para cada asignación dada al sujeto X dicha expresión es una proposición.

Es decir, son proposiciones:

- | | |
|-----------------------------|-----------|
| P (2): “2 es divisor de 12” | (V) |
| P (3): “3 es divisor de 12” | (V) |
| P (5): “5 es divisor de 12” | (F), etc. |

Ejemplo: Dada la función proposicional en dos variables.

P (X, Y): “X es mayor que Y”

siendo X y Y números enteros. Entonces para cada particularización de valores de X y Y se tiene las proposiciones:

- | | |
|---------------------------------|-----------|
| P (2,5): “2 es mayor que 5” | (F) |
| P (-2,-5): “-2 es mayor que -5” | (V) |
| P (5,1): “5 es mayor que 1” | (V), etc. |

8.2. CUANTIFICADORES

A partir de funciones proposicionales se puede obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Para ello, introducimos los símbolos \forall y \exists , llamados cuantificadores universal y existencial, respectivamente. Los cuales asociados a la variable x expresan lo siguiente:

$\forall x$, para expresar “para todo x”, o “cualquiera que sea x”

$\exists x$, para expresar “existe algún x, tal que”, o “existe al menos un x, tal que”

Si $p(x)$ es siempre una proposición verdadera, para cualquiera que sea el objeto matemático que sustituye a x, entonces se podrá escribir:

$\forall x: p(x)$, se lee “para todo x, se verifica $p(x)$ ”

Si $p(x)$ es alguna vez una proposición verdadera, al sustituir x por al menos un cierto objeto matemático, entonces se podrá escribir:

$\exists x / p(x)$, se lee “existe algún x, tal que se verifica $p(x)$ ”

La negación de estas funciones proposicionales cuantificadas, para cada caso, son:

$$(\forall x : p(x)) \equiv \exists x / \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x / p(x)) \equiv \forall x : \sim p(x)$$

Ejemplo: Sea la proposición:
 “Todo el que estudia triunfa”
 La traducción equivalente de esta proposición es
 “Cualquiera que sea la persona, si estudia entonces triunfa”
 luego, si $p(x)$: x estudia
 y $q(x)$: x triunfa,
 se tiene $\forall x: p(x) \rightarrow q(x)$,
 la simbolización de la proposición dada.

Ejemplo: La negación de la proposición del ejemplo anterior será:

$$\begin{aligned}\sim(\forall x: p(x) \rightarrow q(x)) &\equiv \exists x / \sim(p(x) \rightarrow q(x)) \\ &\equiv \exists x / \sim(\sim p(x) \vee q(x)) \\ &\equiv \exists x / p(x) \wedge \sim q(x)\end{aligned}$$

que quiere decir:

“existen personas que estudian y no triunfan”

Ejemplo: Consideremos la siguiente proposición general relativa a todos los números primos:
 “Existe algún número primo que es par”
 Si x denota a un número primo cualquiera, y llamando:
 $p(x)$: “ x es par”, $\sim p(x)$: x es impar).

se tiene que $\exists x / p(x)$, se lee “existe algún x , tal que se verifica $p(x)$ ”

o bien “existe algún número primo que es par”

luego, la negación de esta proposición será:

$$\sim(\exists x / p(x)) \equiv \forall x : \sim p(x)$$

se lee “para todo x , se verifica $\sim p(x)$ ”

o bien “todo numero primo es impar”

Ejemplo: Demostrar: $-2(-2)^2 < -2$

Si 1. $\forall x \forall y: (x < -1 \wedge y > 1) \rightarrow xy < x$

2. $\forall z: z < -1 \rightarrow z^2 > 1$

3. $-2 < -1$

Demostración 4. $-2 < -1 \rightarrow (-2)^2 > 1$ 2, z = -2

5. $(-2)^2 > 1$ 3, 4 PP

6. $-2 < -1 \wedge (-2)^2 > 1$ 3, 5 L.C

7. $(-2 < -1 \wedge (-2)^2 > 1) \rightarrow -2(-2)^2 < -2$ 1, x = -2, y = $(-2)^2$

8. $-2(-2)^2 < -2$ 6, 7 PP



Leonardo De Pisa
1175 – 1250

EJERCICIOS

Simbolizar cada una de las proposiciones siguientes:

1. "El gordo Alberto vive para comer y no come para vivir".
2. "La decisión dependerá del juicio o la intuición, y no de quién pagó más".
3. "Si esta planta no crece, entonces necesita más agua o necesita mejor abono".
4. "El juez lo sentencia a Octavio si y solo si el fiscal puede probar su culpabilidad o el testigo no dice la verdad".
5. "Si una sustancia orgánica se descompone, entonces sus componentes se transforman en abono y fertilizan al suelo".
6. Sean p, q y r los siguiente enunciados:

- p : Estudiaré matemática
 q : Iré a mi clase de computación
 r : Estoy de buen humor

Escriba en lenguaje común las oraciones que corresponden a los siguientes enunciados:

$$a) \sim p \wedge q ; \quad b) r \rightarrow (p \vee q) ; \quad c) \sim r \rightarrow (p \vee \sim q) ; \quad d) (\sim p \wedge q) \leftrightarrow r$$

Determinar, por medio de una tabla de verdad, si cada una de las siguientes proposiciones es una tautología, contradicción o contingencia.

$$7. \quad [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow P] \vee (p \wedge q) \qquad \qquad \qquad R: \text{contingencia}$$

8. $[(p \rightarrow \sim q) \wedge p] \vee (\sim p \wedge q)$ R: contingencia
9. $[(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \vee \sim(\sim p \leftrightarrow q)$ R: tautología
10. $\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \vee \sim(p \rightarrow \sim q)$ R: contradicción
11. $\{[p \rightarrow (q \wedge \sim p)] \wedge \sim q\} \leftrightarrow \sim(p \vee q)$ R: tautología
12. $(\sim p \vee \sim r) \leftrightarrow [\sim(p \wedge q) \vee \sim r]$ R: contingencia
13. $[(\sim p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow \sim(p \wedge \sim r)$ R: tautología
14. $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim(p \vee \sim q)]$ R: contradicción
15. $[(r \rightarrow \sim p) \wedge (p \rightarrow \sim q)] \vee [(\sim p \rightarrow r) \wedge (\sim q \rightarrow p)]$ R: tautología

Sean q y s proposiciones cualesquiera, p y r proposiciones tales que $\sim(p \vee \sim r)$ es verdadera. Hallar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

16. a) $\sim(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim(s \vee r)$ R: F
 b) $[(\sim r \wedge q) \vee \sim p] \rightarrow \sim[(p \wedge s) \vee \sim r]$ R: V
17. a) $[p \rightarrow (q \wedge s)] \vee (\sim q \rightarrow r)$ R: F
 b) $[(r \vee q) \rightarrow (p \wedge s)] \rightarrow (\sim q \vee s)$ R: V

Sean p y r proposiciones cualesquiera, q y s proposiciones tales que $\sim(\sim q \wedge s)$ es falsa. Hallar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

18. a) $[(p \vee \sim q) \wedge s] \rightarrow \sim(\sim r \vee s)$ R: F

- b) $[(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim r] \vee \sim(p \vee s)$ R: V
19. a) $[(\sim p \vee s) \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$ R: F
 b) $[(q \rightarrow p) \vee (\sim p \wedge r)] \wedge [(p \rightarrow s) \vee \sim r]$ R: V

Hallar el valor de verdad de las proposiciones p, q, r y s, sabiendo que:

20. a) $(\sim p \rightarrow q) \vee \sim(r \wedge \sim s)$ es falsa
 b) $\sim(r \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \wedge s)$ es verdadera
21. a) $(\sim p \wedge q) \rightarrow (\sim r \rightarrow s)$ es falso
 b) $\sim(r \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim q \vee s)$ es falso
22. a) $\sim(p \vee \sim r) \wedge \sim(q \rightarrow \sim s)$ es verdadera
 b) $\sim[(r \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow s)]$ es verdadera
23. Si las implicaciones $(p \wedge \sim q) \rightarrow q$ y $(p \wedge q) \rightarrow \sim r$ son verdaderas, ¿cuál es el valor de verdad de p y de r? R: F, V

Determinar cuales de las siguientes formulas son lógicamente equivalentes?

24. I: $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$
 II: $(p \rightarrow q) \vee (p \wedge q)$
 III: $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$
25. I: $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \wedge \sim q]$
 II: $[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q] \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$
 III: $[\sim q \wedge (\sim p \vee q)] \leftrightarrow \sim(\sim p \rightarrow q)$

Sabiendo que p es F y que q es una proposición cualquiera, determinar el valor de verdad de la proposición x , tal que:

26. $[x \rightarrow (p \wedge q)] \rightarrow p$ sea F R: F

27. $[x \vee (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ sea V R: V

28. $[(p \rightarrow q) \leftrightarrow x] \vee \sim(p \wedge q)$ sea V R: F

Simplificar las proposiciones siguientes:

29. $(p \leftrightarrow q) \vee (\sim p \vee q)$ R: $\sim p \vee q$

30. $[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \rightarrow p)] \rightarrow (p \wedge \sim q)$ R: $\sim q$

31. $[q \rightarrow (p \wedge r)] \wedge [\sim p \rightarrow (p \wedge r)]$ R: p

32. $[(q \rightarrow p) \wedge (\sim p \rightarrow q)] \rightarrow \sim(p \vee \sim q)$ R: $\sim p$

33. $(q \rightarrow p) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (q \wedge \sim p)]$ R: $\sim p$

34. $[(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \wedge [(\sim p \wedge q) \vee p]$ R: $p \wedge \sim q$

35. $(\sim p \vee q) \rightarrow [p \wedge \sim(p \wedge \sim q)]$ R: p

36. $[q \rightarrow (r \wedge \sim q)] \rightarrow [(q \wedge \sim p) \rightarrow r]$ R: v

37. $[(p \rightarrow r) \wedge \sim p] \vee [(p \vee q) \rightarrow r]$ R: $\sim p \vee r$

38. $\sim(p \rightarrow \sim q) \vee [(p \rightarrow r) \wedge \sim(p \wedge r)]$ R: $q \vee \sim p$

39. $[(p \rightarrow \sim r) \rightarrow p] \wedge [\sim p \rightarrow \sim(p \vee \sim q)]$ R: p

40. $[p \rightarrow (p \wedge \sim q)] \wedge [(p \vee q) \rightarrow p]$ R: $\sim q$

41. $[\sim(p \vee q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)] \rightarrow r$ R: r

42. $[(r \rightarrow p) \rightarrow (p \wedge r)] \rightarrow [(r \vee q) \rightarrow (\sim r \wedge q)]$ R: $\sim r$

43. $[(\sim q \rightarrow r) \wedge \sim(q \wedge \sim r)] \rightarrow [(r \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \sim r)]$ R: $\sim r$

44. $[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \rightarrow [q \wedge \sim(p \rightarrow r)]$ R: $p \wedge q$

45. $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)] \wedge [(q \vee r) \wedge \sim r]$ R: F

46. $[(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)] \vee \sim(\sim p \rightarrow q)$ R: $\sim p \vee \sim q$

47. $[(p \rightarrow \sim r) \rightarrow \sim p] \rightarrow [p \wedge (\sim q \rightarrow r)]$ R: p

48. $[(p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge r)] \wedge [(p \rightarrow \sim q) \rightarrow q]$ R: $p \wedge q$

49. $[(\sim p \leftrightarrow q) \wedge r] \vee [r \wedge (p \vee \sim q)]$ R: r

Determinar una proposición x, tal que:

50. $[\sim x \rightarrow (q \wedge x)] \wedge (p \rightarrow q) \equiv \sim p$ R: $\sim p$

51. $[(x \rightarrow p) \wedge (q \vee \sim x)] \vee (p \wedge \sim x) \equiv q$ R: $\sim q$

52. $[(x \rightarrow q) \rightarrow x] \wedge (\neg q \rightarrow \neg p) \equiv p \wedge q$ R: $p \wedge q$

Construir el circuito lógico que representa a cada una de las proposiciones siguientes:

53. $p \rightarrow q$

54. $p \leftrightarrow q$

55. $p \vee q$

56. $\{ (p \wedge \neg q) \vee [\neg q \vee (\neg p \wedge q)] \} \wedge (p \vee q)$

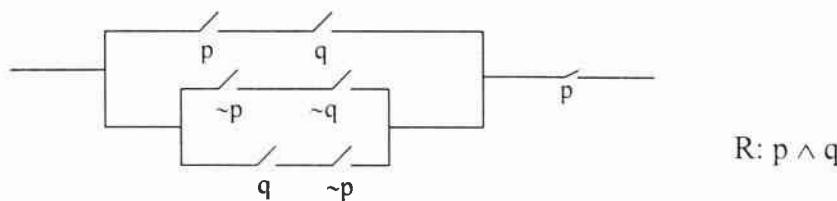
57. $\{ [p \wedge (q \vee r)] \vee (p \wedge \neg r) \} \wedge (\neg p \vee \neg q)$

58. $\{ [(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \vee [(p \wedge q) \vee (\neg r \wedge \neg q)] \} \wedge (p \vee q \vee r)$

59. $\{ [\neg r \wedge (p \vee q)] \vee [(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \} \wedge [\neg p \vee (q \wedge r)]$

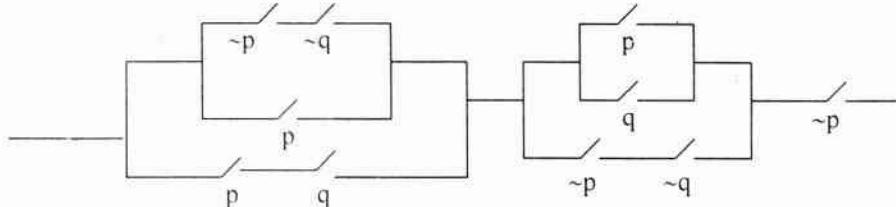
Escribir la proposición que caracteriza a cada uno de los siguientes circuitos lógicos, y simplificar:

60.



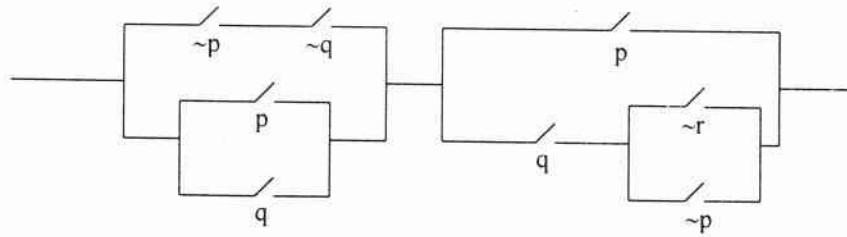
R: $p \wedge q$

61.



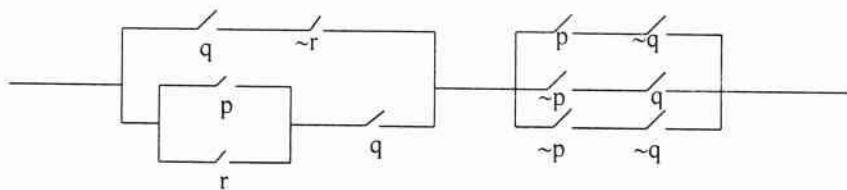
R: $\neg p \wedge \neg q$

62.



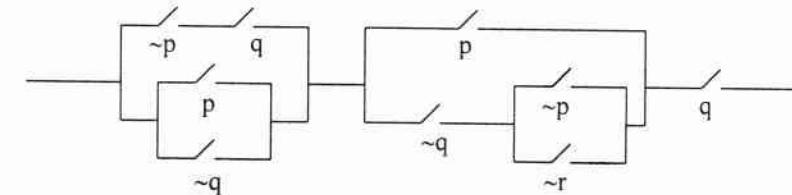
$$R: p \vee \sim p$$

63.



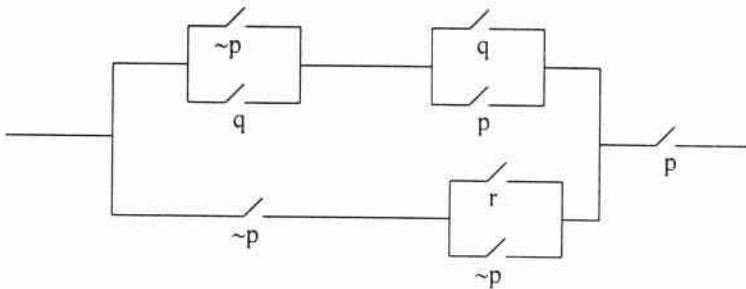
$$R: \sim p \wedge q$$

64.



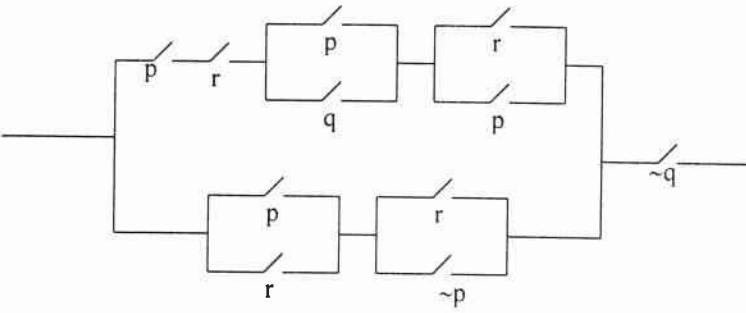
$$R: p \wedge q$$

65.



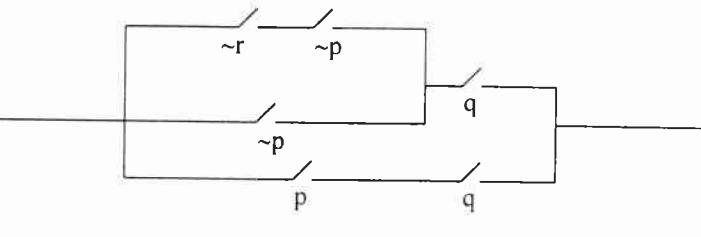
$$R: p \wedge q$$

66.



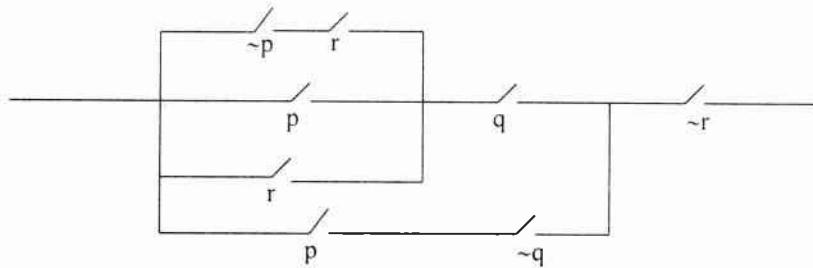
$$R: r \wedge \sim q$$

67.



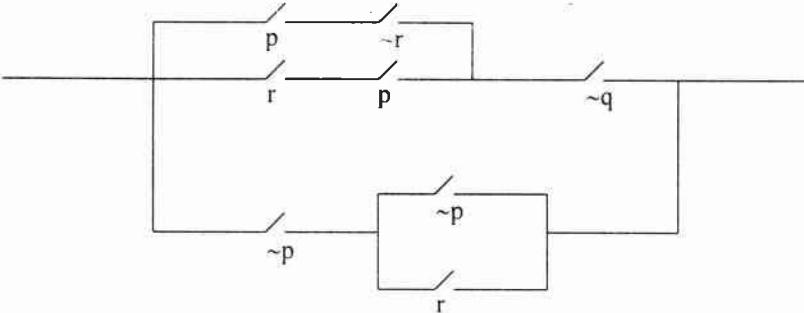
$$R: q$$

68.



$$R: p \wedge \sim r$$

69.



$$R: \sim p \vee \sim q$$

Por medio de una tabla de valores de verdad, justificar la validez de los siguientes razonamientos:

$$\begin{array}{ll} 70. \quad a) \quad p \rightarrow q \\ & \sim p \rightarrow r \\ & \sim r \\ \hline & q \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b) \quad \sim p \vee \sim q \\ & p \\ & r \rightarrow q \\ \hline & \sim r \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 71. \quad a) \quad p \vee \sim q \\ & r \leftrightarrow \sim q \\ & p \vee \sim r \\ \hline & p \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} b) \quad \sim p \rightarrow q \\ & \sim r \rightarrow \sim q \\ & \sim (p \wedge \sim t) \\ & \sim r \\ \hline & t \end{array}$$

En cada uno de los siguientes ejercicios, demostrar la conclusión dada haciendo el uso de las reglas de inferencia.

$$72. \quad a) \quad \text{Demostrar: } u \wedge \sim v \quad b) \quad \text{Demostrar: } G \wedge F$$

- | | | | |
|----|------------------------|----|-----------------------------------|
| 1. | $v \rightarrow \sim p$ | 1. | $C \rightarrow B$ |
| 2. | $p \wedge \sim t$ | 2. | $\sim D \rightarrow (E \wedge F)$ |
| 3. | $s \rightarrow t$ | 3. | $A \wedge \sim B$ |
| 4. | $q \rightarrow u$ | 4. | $(A \wedge E) \rightarrow G$ |
| 5. | $s \vee (q \wedge r)$ | 5. | $C \vee \sim D$ |

73. a) Demostrar: $x = 3 \vee y < 2$ b) Demostrar: $y \neq 2 \wedge y > 2$
- | | | | |
|----|---|----|--|
| 1. | $x = y \vee x < y$ | 2. | $y \neq 2 \rightarrow x \neq 2$ |
| 2. | $(x < 3 \wedge y = x + 1) \rightarrow y \neq 8$ | 2. | $x \neq 5 \vee y \neq 2$ |
| 3. | $x = 3 \vee y = 8$ | 3. | $x = y + 3 \wedge y < 4$ |
| 4. | $x \neq y \wedge y = x + 1$ | 4. | $(y > 2 \wedge y < 4) \rightarrow x > 5$ |
| 5. | $x \neq 3 \rightarrow x \neq y$ | 5. | $x \neq y + 3 \vee x > 2$ |
74. a) Demostrar: $r \vee s$ b) Demostrar: $r \vee s$
- | | | | |
|----|--|----|------------------------|
| 1. | $p \rightarrow \sim C$ | 1. | $p \rightarrow \sim A$ |
| 2. | $A \wedge \sim B$ | 2. | $\sim q \rightarrow B$ |
| 3. | $(\sim p \vee q) \rightarrow (r \wedge t)$ | 3. | $\sim p \rightarrow r$ |
| 4. | $B \vee D$ | 4. | $A \vee \sim B$ |
| 5. | $A \rightarrow (C \vee \sim D)$ | 5. | $q \rightarrow r$ |
75. a) Demostrar: $x \neq 3 \vee y \neq 1$ b) Demostrar: $x = 5 \vee z > 5$
- | | | | |
|----|--|----|---------------------------------|
| 1. | $x = 3 \rightarrow y \neq 3$ | 1. | $x \neq 7 \rightarrow z \neq x$ |
| 2. | $x = y \wedge x \neq y$ | 2. | $x < 6 \vee x = 3$ |
| 3. | $x \neq 5 \vee y < 3$ | 3. | $x = 3 \rightarrow z > x$ |
| 4. | $x = y \rightarrow (x = y + 2 \vee x < 5)$ | 4. | $x < 6 \rightarrow z > x$ |
| 5. | $x = y + 2 \rightarrow x < y$ | 5. | $x = 5 \vee x \neq 7$ |
76. a) Demostrar: $s \vee t$ b) Demostrar: $\sim p \vee q$
- | | | | |
|----|---|----|---|
| 1. | $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim A \vee B)$ | 1. | $(A \wedge B) \rightarrow \sim(r \rightarrow \sim s)$ |
| 2. | $p \rightarrow q$ | 2. | $t \rightarrow \sim s$ |

- | | |
|---|--|
| 3. $B \rightarrow s$
4. $q \rightarrow r$
5. $\sim A \rightarrow s$ | 3. $r \rightarrow t$
4. $p \rightarrow A$
5. $p \rightarrow B$ |
|---|--|

77. a) Demostrar: $x < 6$ b) Demostrar: $x > 4$

- | | |
|--|--|
| 1. $x > y \vee x < 6$
2. $x > y \rightarrow x > 4$
3. $x > 4 \rightarrow x = 5$
4. $x < 6 \rightarrow x = 5$
5. $(x = 5 \vee z > x) \rightarrow y < z$
6. $x > y \rightarrow y \not= z$ | 1. $x > y \vee y = 3$
2. $x > 4 \rightarrow y \not> 1$
3. $x > y \rightarrow x > 4$
4. $x = y \rightarrow y \not> 1$
5. $x > y \vee x = y$
6. $y = 3 \rightarrow y > 1$ |
|--|--|

Demostrar la validez de los siguientes razonamientos:

78. Si la ballena es un mamífero entonces toma oxígeno del aire. Si toma su oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. La ballena es un mamífero y habita en el océano. Por tanto, habita en el océano y no necesita branquias.

79. Si la enmienda no fue aprobada entonces la constitución queda como estaba. Si la constitución queda como estaba, entonces no podemos añadir nuevos miembros al comité. Podemos añadir nuevos miembros al comité o el informe se retrasará un mes. Pero el informe no se retrasará un mes. Por tanto, la enmienda fue aprobada.

80. Negar las siguientes proposiciones:

a) $\forall x: p(x) \vee \sim q(x);$ b) $\exists x / p(x) \vee \sim q(x)$

c) $\forall x: p(x) \rightarrow q(x);$ b) $\exists x / p(x) \leftrightarrow \sim q(x)$

81. Expresar las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas, y retraducirlas al lenguaje común:

- a) El cuadrado de todo número entero es mayor que 1.
- b) Existen números naturales cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente.
- c) Hay jóvenes que no estudian ni trabajan.
- d) Todo el que estudia triunfa.
- e) Ningún cuento de hadas es una historia cierta.
- f) Ninguna cosa es a la vez redonda
- g) Nadie es totalmente juicioso o totalmente estúpido.
- h) Existe algún número real que es menor que su parte entera

82. Deducir las siguientes conclusiones de las premisas dadas, dando una demostración formal completa en la forma típica.

- | | |
|---|--|
| a) Demostrar: $3 + 4 < 3 + 7$ | b) Demostrar: $3 < 5$ |
| 1. $\forall x: x < 2+6 \rightarrow x < 3+7$ | 1. $\forall x: (x < 4 \wedge 4 < 5) \rightarrow x < 5$ |
| 2. $\forall y: y+4 > 2+5 \vee y+4 < 2+6$ | 2. $\forall y: -4 < -y \leftrightarrow y < 4$ |
| 3. $3 + 4 \not> 2 + 5$ | 3. $4 < 5$ |
| | 4. $-4 < -3$ |

EJERCICIOS VARIOS

Sabiendo que p es F y que q y r son proposiciones cualesquiera, determinar el valor de verdad de la proposición x, tal que:

83. $[(\sim p \wedge x) \vee (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow \sim(p \rightarrow r)$ sea V R: F

84. $[(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim(\sim x \rightarrow p)] \vee (q \rightarrow \sim p)$ sea V R: V

85. $[(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (x \vee p)] \rightarrow \sim(r \rightarrow \sim p)$ sea F R: V

Simplificar las siguientes proposiciones:

86. $\{[p \wedge (q \rightarrow r)] \wedge [p \rightarrow (q \wedge \sim r)]\} \vee \{(p \wedge q) \vee [(p \wedge r) \wedge (q \vee \sim r)]\}$ R: $p \wedge q$

87. $[(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim(q \rightarrow p)] \vee \{(p \wedge \sim q) \vee \sim[(p \wedge \sim q) \vee (q \rightarrow p)]\}$ R: q

88. $[q \wedge (s \rightarrow q)] \vee [(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \rightarrow r) \vee (p \leftrightarrow q)]$ R: $\sim q$

89. $\{(p \wedge \sim q) \vee \sim(p \leftrightarrow q) \vee \sim[(q \rightarrow p) \vee (r \rightarrow s)]\} \vee [q \wedge (p \rightarrow q)]$ R: p

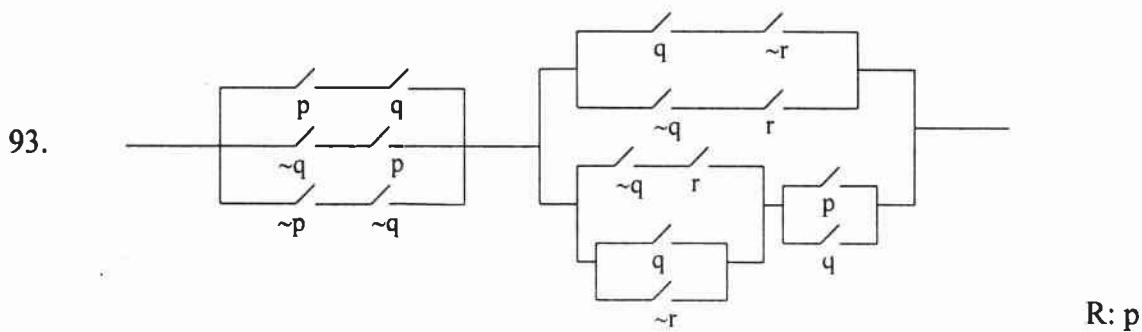
Determinar una proposición x , tal que:

90. $x \rightarrow (p \leftrightarrow x) \equiv p \vee q$ R: $\sim q$

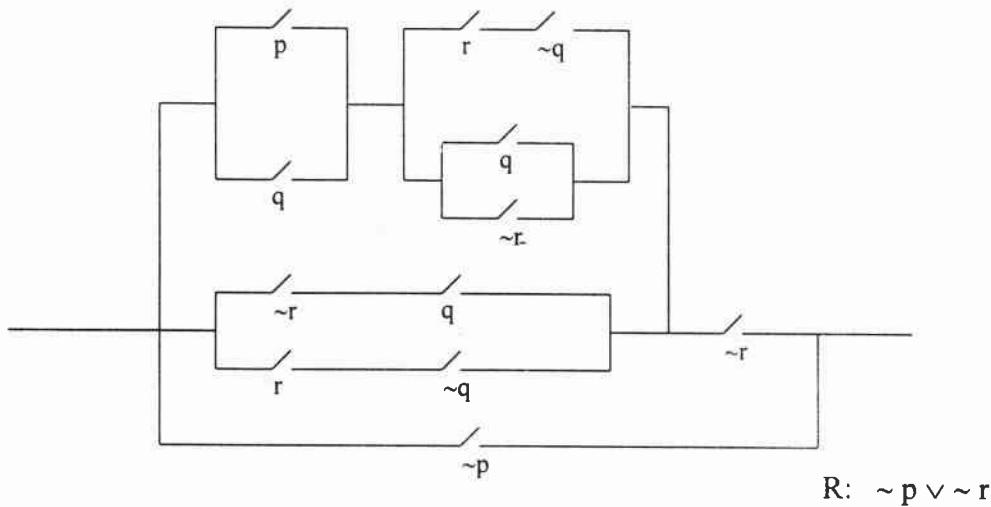
91. $[(p \vee \sim x) \rightarrow x] \wedge (q \vee x) \equiv p \vee \sim q$ R: $\sim q$

92. $[(r \wedge x) \leftrightarrow (x \rightarrow r)] \wedge [q \rightarrow (\sim p \wedge x)] \equiv p \wedge \sim q$ R: p

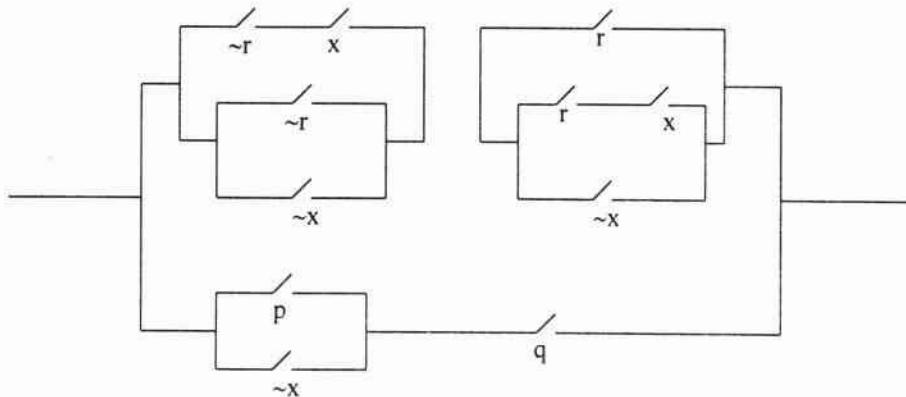
Obtener las proposiciones correspondientes a los siguientes circuitos y simplificar:



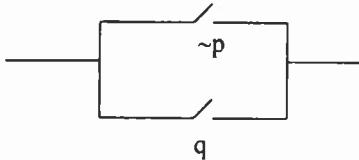
94.



95. Determinar una proposición x , la más simple de manera que el circuito lógico siguiente:



sea equivalente al circuito:



Dar una demostración formal completa para cada uno de los razonamientos siguientes:

96. a) Demostrar: $x < 6 \vee z > 6$ b) Demostrar: $\sim(x = y \vee y \neq 1)$
1. $(x < 7 \wedge x = 5) \rightarrow (z > x \vee y < z)$ 1. $y \neq 1 \rightarrow (y < 1 \vee y = 1)$
2. $x < 6 \rightarrow (x = 5 \wedge x < 7)$ 2. $(x \neq 3 \wedge x \neq 0) \rightarrow x = 0$

3. $x > y \rightarrow \sim(y < z \vee z > x)$ 3. $y \neq 1 \wedge y < 1$
 4. $x > 4 \rightarrow (x = 5 \wedge x < 7)$ 4. $x > 3 \rightarrow x \neq y$
 5. $x > y \rightarrow x > 4$ 5. $x = 3 \rightarrow x \neq y$
 6. $x > y \vee x < 6$ 6. $x \neq 0$

97. a) Demostrar: $\sim(x < y \wedge x = 1)$ b) Demostrar: $\sim(x < y \wedge x \neq 1)$

1. $(x = y \rightarrow y = 0) \rightarrow x = 0$ 1. $(x < 1 \vee xy < 0) \rightarrow y > 1$
 2. $(x = 0 \vee xy = 0) \rightarrow y = 0$ 2. $y > 1 \leftrightarrow x < y$
 3. $x = y \rightarrow x < y$ 3. $(x \neq 2y \vee y > 1) \rightarrow x < 1$
 4. $y = 0 \leftrightarrow x < y$ 4. $x = 2y \rightarrow x < y$

98. a) Demostrar: $5 + 2 < 4 + 3$ b) Demostrar: $3 > 3 + 4$

1. $\forall x: x + 2 > 4 \vee x + 1 < 7$ 1. $\forall x \forall y: x > y \rightarrow y > x + 3$
 2. $\forall y: 5 + y < 4 + 3 \rightarrow 5 + y > 4$ 2. $\forall u \forall v: u - 3 < v \rightarrow 3 + v > u$
 3. $5 + 1 < 7$ 3. $(3 + 3) - 3 < 4$

99. Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

Mi padre me alaba si yo estoy orgulloso de mi mismo. O me va bien en deportes o no puedo estar orgulloso de mi mismo. Si estudio bastante, entonces no me va bien en deportes. Por tanto, si mi padre me alaba, entonces no estudio bastante.

100. Epiménides de Cnosos (siglo VI a. de C.) decía “Todos los cretenses son mentirosos y yo soy cretense, luego miento”.

Alguien a la vista de ello, razona como sigue:

Si Epiménides mintió en lo que dijo, entonces los cretenses no eran mentirosos, luego Epiménides, por ser cretense, no era mentiroso y, consecuentemente, no mintió en lo que dijo. Se llega así, pues, a una contradicción. ¿Este razonamiento es correcto?.

CAPÍTULO II

CONJUNTOS

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian los conceptos básicos de la teoría intuitiva de conjuntos, notaciones, subconjuntos, sus operaciones y sus aplicaciones. Para alcanzar los fines prácticos que nos interesan se completa con bastante cantidad de ejemplos ilustrativos.

2. CONCEPTO Y NOTACIÓN DE CONJUNTO

En el lenguaje corriente, empleamos el vocablo conjunto para referirnos a una pluralidad o colectividad de objetos que se consideran agrupados formando un todo. Por ejemplo, conjunto de alumnos de una clase; conjunto de letras del abecedario; conjunto de escritores nacionales, etc.

De esta noción de pluralidad contrapuesta a la de singularidad ha surgido el concepto matemático de conjunto. Los ejemplos recién mencionados bastan por ahora para tener una idea de dicho concepto. Lo esencial de dichas situaciones es la presencia de elementos o miembros del conjunto, los mismos se les denota usualmente por letras minúsculas como a, b, c, \dots , y los conjuntos se denotan por lo común mediante letras mayúsculas como A, B, C, \dots .

Otros símbolos de uso frecuente son:

“/” para expresar “tal que”

“ \in ” para expresar que un elemento pertenece a un conjunto.

“ $<$ ” para expresar “menor que”.

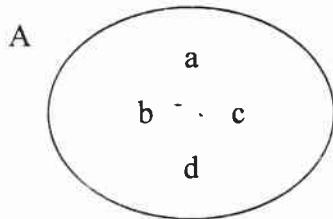
“ $>$ ” para expresar “mayor que”.

Para simbolizar que “ x pertenece a A ” se escribirá $x \in A$, y la negación de ésta se escribirá $x \notin A$.

Ejemplo: Si el conjunto A está formado por los elementos a, b, c y d, escribimos

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Su representación en diagrama de Venn es:



Por tanto, la V o F de cada una de las siguientes expresiones es:

$$a \in A, \text{ es } V \quad b \in A, \text{ es } V \quad c \in A, \text{ es } V \quad d \in A, \text{ es } V$$

$$e \notin A, \text{ es } V \quad \{a\} \in A, \text{ es } F \quad \{b, c\} \in A, \text{ es } F \quad A \notin A, \text{ es } V$$

2.1. NOTACIÓN DE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Las notaciones usuales para caracterizar conjuntos numéricos son las siguientes:

$$\text{Conjunto de los números naturales} \quad N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Conjunto de los números enteros} \quad Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Conjunto de los números racionales} \quad Q = \left\{ \dots, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, 0, 1, 2, \dots \right\}$$

$$\text{Conjunto de los números irracionales} \quad I = \left\{ \dots, \sqrt{2}, \pi, e, \sqrt{3}, \dots \right\}$$

Conjunto de los números reales, que se denota por R , está formado por la unión de los números racionales e irracionales

3. DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Un conjunto puede ser determinado de dos maneras: por extensión y por comprensión

3.1. POR EXTENSIÓN Se dice que un conjunto está determinado por extensión si y solo si se nombran todos los elementos que lo constituyen. En este caso se escriben sus elementos entre dos llaves.

Ejemplo: El conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ está escrito por extensión, ya que se pueden enumerar uno a uno todos los elementos del conjunto.

3.2. POR COMPRENSIÓN Se dice que un conjunto está determinado por comprensión si y solo si se da la propiedad o propiedades que caracterizan a todos los elementos del conjunto.

Ejemplo: El conjunto de los números naturales menores a cinco definido por comprensión puede escribirse $B = \{x \in N / x < 5\}$
Los números naturales menores a 5 son: 1, 2, 3 y 4,
por tanto, la determinación por extensión es: $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Ejemplo: Escribir por extensión: $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 3x\}$
Resolviendo la ecuación $x^2 = 3x$
 $x^2 - 3x = 0$
 $x(x - 3) = 0$
se obtiene $x = 0, x = 3$
Por lo tanto, por extensión resulta: $A = \{0, 3\}$

4. CONJUNTOS ESPECIALES

Llamaremos conjuntos especiales a aquellos conjuntos que se caracterizan por el número de elementos, entre ellos tenemos: conjunto unitario, conjunto vacío, conjunto universal.

4.1. CONJUNTO UNITARIO

Es aquel conjunto que tiene un sólo elemento.

Ejemplo: Los conjuntos $A = \{x / x^2 = 0\}$
 $B = \{x \in N / x^2 = 4\}$
 son unitarios por tener un sólo elemento.
 Estos son: $A = \{0\}$ y $B = \{2\}$

4.2. CONJUNTO VACÍO

El conjunto nulo o vacío es aquél conjunto que carece de elementos, y se denota por \emptyset .

Es decir, $\emptyset = \{ \}$

Ejemplo: los conjuntos

$$A = \{x \in Z / x^2 = -1\}$$

$$B = \{x \in N / x < 0\}$$

Son conjuntos vacíos, por no existir valores de x que satisfagan las condiciones de cada conjunto.

4.3. CONJUNTO UNIVERSAL

El conjunto universal, llamado también universo o referencial, es un conjunto de cuyos elementos se escogen algunos de ellos para formar otros conjuntos. Se denota por U .

Ejemplo: Si el conjunto universal es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 Entonces el conjunto $A = \{x / -2 \leq x \leq 4\}$
 se puede escribir $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 Sin embargo, si $U = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6\}$,
 el conjunto $B = \{x / -2 \leq x \leq 4\}$
 se convierte en $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 Nótese que un cambio en el universo puede cambiar un conjunto

5. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

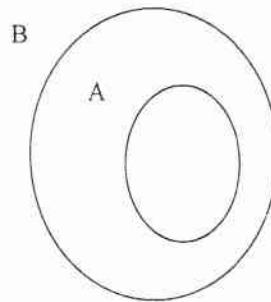
Se sabe que el símbolo \in (pertenencia) se utiliza para relacionar un elemento con un conjunto. Asimismo, se puede relacionar dos conjuntos definidos en un mismo universo. Los cuales se definen a continuación.

5.1. INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

Sean A y B dos conjuntos definidos en un mismo universo. Se dice que A está incluido en B, o que A es un subconjunto de B, si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B; se denota por $A \subset B$, que se lee “A está incluido en B” o bien “B incluye a A” o bien “A es subconjunto de B”

En símbolos: $A \subset B \leftrightarrow \forall x : x \in A \rightarrow x \in B$

Su diagrama de Venn es:



OBSERVACIONES:

- 1) La relación de pertenencia (\in) relaciona un elemento a un conjunto, mientras que la relación de inclusión (\subset) relaciona dos conjuntos.
- 2) El conjunto vacío está incluido en cualquier otro conjunto.
- 3) Todo conjunto está incluido en sí mismo.

Ejemplo: Sean los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$$B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$$

$$C = \{2, 5\}$$

Los valores de verdad de las siguientes proposiciones son:

$C \subset A$,	es V	$2 \subset C$,	es	F
$C \subset B$,	es V	$2 \in C$,	es	V
$A \subset B$,	es F	$5 \in A$,	es	V
$B \subset C$,	es F	$4 \in B$,	es	V
$\emptyset \subset A$,	es V	$C \in A$,	es	F
$A \subset A$,	es V	$\emptyset \in A$,	es	F

5.2. IGUALDAD DE CONJUNTOS

Se dice que dos conjuntos, A y B, son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$. Es decir, si ambos conjuntos están formados por los mismos elementos.

En símbolos: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Ejemplo: Sean los conjuntos:

$$A = \{ x / x^2 - 3x + 2 = 0 \}$$

$$B = \{ x \in N / x < 3 \}$$

resolviendo la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

se tiene $x = 1, x = 2$

por tanto $A = \{ 1, 2 \}$

los números naturales menores a 3 son 1 y 2

luego $B = \{ 1, 2 \}$

En consecuencia, $A = B$, ya que tienen los mismos elementos.

5.3. CONJUNTO DE PARTES

Dado un conjunto A, se entiende por conjunto de partes de A al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, y se denota por $P(A)$.

En símbolos: $P(A) = \{ X / X \subset A \}$

O bien: $X \in P(A) \Leftrightarrow X \subset A$

Es decir, si se consideran todos los subconjuntos de A, ellos dan origen a un nuevo conjunto, que se llama conjunto de partes de A. El número de elementos del conjunto partes de A es 2^n , en donde n es el número de elementos de A.

Ejemplo: Determinar el conjunto dc partes de:

$$A = \{a, b, c\}$$

Como A tiene 3 elementos, entonces el conjunto de partes de A tendrá $2^3 = 8$ elementos, que son todos los subconjuntos de A. Estos son:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A$$

$$\text{Por tanto: } P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

Ahora, desde el punto de vista de la pertenencia y la inclusión, damos los valores de verdad de las siguientes expresiones:

$a \in A$,	es V	$a \in P(A)$,	es F
$\{a\} \in A$,	es F	$\{a\} \in P(A)$,	es V
$a \subset A$,	es F	$\{a\} \subset P(A)$,	es F
$\{a\} \subset A$,	es V	$\{a, b\} \in P(A)$,	es V
$\emptyset \in A$,	es F	$\emptyset \subset P(A)$,	es V
$\emptyset \subset A$,	es V	$\emptyset \in P(A)$,	es V
$A \in A$,	es F	$A \in P(A)$,	es V
$A \subset A$,	es V	$A \subset P(A)$,	es F
$o \in \emptyset$,	es F	$\{\emptyset\} \subset P(A)$,	es V
$\{\{a\}\} \subset P(A)$,	es V	$\{c\} \subset P(A)$,	es F

6. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

En esta sección se analizarán varias operaciones que combinan dos o más conjuntos mediante reglas bien definidas para formar nuevos conjuntos. A esta combinación de conjuntos se le llaman operaciones entre los mismos, y son: unión, intersección, complementación, diferencia, diferencia simétrica y combinaciones de las mismas.

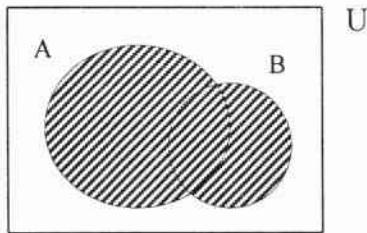
6.1. UNIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, se llama unión de A y B, al conjunto formado por todos los elementos de A o de B. Se denota por $A \cup B$.

En símbolos: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Es decir: $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

Su representación en diagrama de Venn es



donde la parte sombreada es $A \cup B$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{3, 5, 6\}$
 $B = \{1, 2, 3, 7\}$
 $C = \{2, 3, 4, 5\}$,

Entonces se cumple que: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
 $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
 $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

Obsérvese que los elementos que están en ambos conjuntos se cuentan una sola vez en la unión.

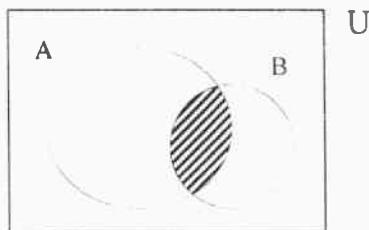
6.2. INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Dado los conjuntos A y B, la intersección de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que son comunes a los dos conjuntos dados, es decir que pertenecen a A y a B. Se denota por $A \cap B$

En símbolo: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

O bien: $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Su representación en diagrama de Venn es



Donde la parte sombreada es $A \cap B$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, e, f\}$
 $B = \{c, d, e, f, g\}$

Los elementos comunes a A y B son e y f, entonces: $A \cap B = \{e, f\}$, y el conjunto de partes de $A \cap B$ es

$$P(A \cap B) = \{\emptyset, \{e\}, \{f\}, \{e, f\}\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$
 $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Estos conjuntos, A y B, no tienen elementos comunes luego la intersección de ambos conjuntos es vacío.

Es decir: $A \cap B = \{\} = \emptyset$,

En consecuencia los conjuntos A y B son disjuntos.

Por tanto, dos conjuntos cuya intersección es vacía se llaman disjuntos.

Es decir: A y B son disjuntos $\leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

6.3. COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Sea A un conjunto definido en un universo U, el complemento de A es el conjunto formado por todos los elementos de U que no pertenecen a A. Se denota por: A^c .

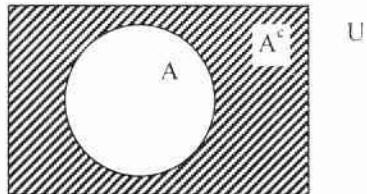
En símbolos: $A^c = \{x \in U / x \notin A\}$

$$A^c = \{x / x \notin A\}$$

o bien

$$x \in A^c \leftrightarrow x \notin A$$

El diagrama de Venn correspondiente es:



Donde la parte sombreada es A^c

Ejemplo: Sean los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

Según la definición, A^c está formado por 2, 6, 8 y B^c por 1, 3, 8.

Es decir, $A^c = \{2, 6, 8\}$,

$$B^c = \{1, 3, 8\}$$

Entonces $A^c \cap B^c = \{8\}$

$$P(A^c \cap B^c) = \{\emptyset, \{8\}\}$$

6.4. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

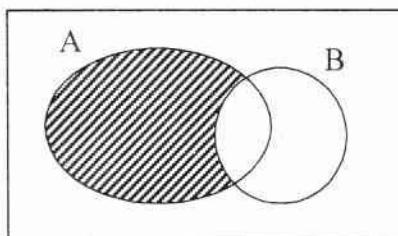
Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. La diferencia de conjuntos $A - B$ es el conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B.

En símbolos : $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

o bien $x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Luego se verifica que: $A - B = A \cap B^c$

El diagrama de Venn correspondiente es:



Donde la parte sombreada es $A - B$

De modo similar se define $B - A$ como sigue:

$$B - A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
 $A = \{a, b, d, e, g, i\}$
 $B = \{a, d, f, g, h, i\}$

Los elementos de A que no están en B son : b, e ,

entonces $A - B = \{b, e\}$

Mientras los elementos de B que no están en A son: f, h ,

luego $B - A = \{f, h\}$

Además: $A^c = \{c, f, h\}$

$$B^c = \{b, c, e\}$$

Entonces $A \cap B^c = \{b, e\}$

$$B \cap A^c = \{f, h\}$$

Obsérvese que $A - B = A \cap B^c$

$$B - A = B \cap A^c$$

6.5. DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS

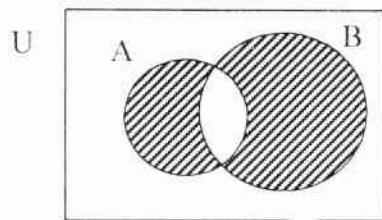
Dados dos conjuntos A y B , cualesquiera de un universo U , la diferencia simétrica entre estos conjuntos es un conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B , pero no a ambos. También se puede definir como la unión de los conjuntos $A - B$ y $B - A$. Se denota por $A \Delta B$.

En símbolos: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

o bien $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

o bien: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

El diagrama de Venn correspondiente es:



Donde la parte sombreada es $A \cap B$

Ejemplo: Sean los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

$$B = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$$

donde $A - B = \{2, 6\}, \quad B - A = \{1, 3\},$

luego $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 6\},$

entonces $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 6\}$

Además $A^c = \{1, 3, 7\}, \quad B^c = \{2, 6, 7\}$

de donde $A \cap B^c = \{2, 6\}$

$$B \cap A^c = \{1, 3\}$$

luego $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \{1, 2, 3, 6\}$

entonces $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = \{1, 2, 3, 6\}$

Por otra parte $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$$A \cap B = \{4, 5, 8, 9\}$$

luego $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 6\}$

Entonces $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 6\}$

7. LEYES DE OPERACIONES CON CONJUNTOS

Para referencia posterior, damos aquí una lista de las leyes más importantes que rigen las operaciones con conjuntos

- 1) Leyes de idempotencia $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- 2) Leyes conmutativas $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- 3) Leyes asociativas $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- 4) Leyes distributivas $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 5) Leyes de absorción $A \cap (A \cup C) = A$, $A \cup (A \cap C) = A$
 $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 6) Leyes de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- 7) Leyes de complemento $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$
 $A \cap B^c = A - B$, $U^c = \emptyset$, $\emptyset^c = U$
- 8) Leyes de identidad $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$

A continuación se detallan los ejercicios ilustrativos para el uso de estas leyes.

Ejemplo: Demostrar: $(A \cup B^c) \cap (A \cup B) = A$

$$(A \cup B^c) \cap (A \cup B) = A \cup (B^c \cap B) \quad \text{L. Dist.}$$

$$= A \cup \emptyset \quad \text{L. Cmp}$$

$$= A \quad \text{L. Idnt.}$$

Ejemplo: Demostrar: $A \cup (B - A) = A \cup B$

$$\begin{aligned}
 A \cup (B - A) &= A \cup (B \cap A^c) && \text{L. Cmp.} \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) && \text{L. Dist.} \\
 &= (A \cup B) \cap U && \text{L. Cmp.} \\
 &= A \cup B && \text{L. Idnt.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Demostrar: $[(A^c \cup B) - A] \cap (A \cup B) = B - A$

$$\begin{aligned}
 [(A^c \cup B) - A] \cap (A \cup B) &= [(A^c \cup B) \cap A^c] \cap (A \cup B) && \text{L.Cmp.} \\
 &= [A^c] \cap (A \cup B) && \text{L. Abs.} \\
 &= (A^c \cap A) \cup (A^c \cap B) && \text{L. Dist.} \\
 &= \emptyset \cup (A^c \cap B) && \text{L. Cmp.} \\
 &= A^c \cap B && \text{L. Idnt.} \\
 &= B - A && \text{L. Cmp.}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Demostrar: $(A^c - B^c) \cup [B - (B - A)] = B$

$$\begin{aligned}
 (A^c - B^c) \cup [B - (B - A)] &= [A^c \cap (B^c)^c] \cup [B - (B \cap A^c)] && \text{L. Cmp.} \\
 &= [A^c \cap B] \cup [B \cap (B \cap A^c)^c] && \text{L. cmp.} \\
 &= (A^c \cap B) \cup [B \cap (B^c \cup (A^c)^c)] && \text{L. D'M.} \\
 &= (A^c \cap B) \cup [B \cap (B^c \cup A)] && \text{L. cmp.} \\
 &= (A^c \cap B) \cup [B \cap B^c] \cup (B \cap A) && \text{L. dist:} \\
 &= (A^c \cap B) \cup [\emptyset \cup (B \cap A)] && \text{L. cmp.} \\
 &= (A^c \cap B) \cup (B \cap A) && \text{L. Idnt.} \\
 &= B \cap (A^c \cup A) && \text{L.dist.} \\
 &= B \cap U && \text{L. cmp.} \\
 &= B && \text{L.ident}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Demostrar: $[A \Delta (B - A)] - B = A - B$

$$\begin{aligned}
 [A \Delta (B - A)] - B &= [A \Delta (B \cap A^c)] \cap B^c && \text{L. cmp.} \\
 &= \{[A \cap (B \cap A^c)^c] \cup [(B \cap A^c) \cap A^c]\} \cap B^c && \text{D.dif.simt} \\
 &= \{[A \cap (B^c \cup A)] \cup [B \cap (A^c \cap A^c)]\} \cap B^c && \text{L.DM,L.asoc} \\
 &= \{[A] \cup [B \cap A^c]\} \cap B^c && \text{L.abs, L.idmp} \\
 &= \{(A \cup B) \cap (A \cup A^c)\} \cap B^c && \text{L.dist.} \\
 &= \{(A \cup B) \cap U\} \cap B^c && \text{L.comp.} \\
 &= (A \cup B) \cap B^c && \text{L.ident.} \\
 &= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) && \text{L. dist.} \\
 &= (A - B) \cup \emptyset && \text{L. comp} \\
 &= A - B && \text{L. ident.}
 \end{aligned}$$

Nótese que en cada ejemplo se han demostrado la igualdad de dos conjuntos, y en cada paso de la demostración se anotan las leyes que fueron aplicadas.

8. CARDINAL DE UN CONJUNTO

Sea A un conjunto finito definido en un conjunto universal U. Se llama "cardinal de A" al número de elementos de A y se denota por $\eta(A)$.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$
 $B = \{0, 1, 2, \{0,1\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$
 $C = \{\} = \emptyset$

Entonces el cardinal de cada conjunto es:

$$\begin{aligned}
 \eta(A) &= 5, \text{ pues consta de cinco elementos} \\
 \eta(B) &= 6, \text{ pues consta de seis elementos} \\
 \eta(C) &= \eta(\emptyset) = 0, \text{ pues carece de elementos}
 \end{aligned}$$

8.1. PROPIEDADES

Sean A, B, C tres conjuntos dados, entonces:

- 1) $\eta(A - B) = \eta(A) - \eta(A \cap B)$
- 2) $\eta(A \Delta B) = \eta(A \cup B) - \eta(A \cap B)$
- 3) $\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$
- 4) $\eta(A \cup B \cup C) = \eta(A) + \eta(B) + \eta(C) - \eta(A \cap B) - \eta(A \cap C) - \eta(B \cap C) + \eta(A \cap B \cap C)$

Ejemplo: Sean los conjuntos: $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$A = \{x \in U / x^3 = x\}$$

$$B = \{x / x^2 \in U\}$$

$$C = \{x \in U / 0 \leq x < 7\}$$

Hallar $\eta(A - B)$, $\eta(A \Delta B)$, $\eta(B^c \Delta C^c)$ y $\eta(A \cup B \cup C)$

SOLUCIÓN: Tales conjuntos por extensión se convierten en

$$A = \{-1, 0, 1\}, \quad \eta(A) = 3$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}, \quad \eta(B) = 6$$

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \eta(C) = 7$$

$$\text{Entonces} \quad B^c = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \eta(B^c) = 6$$

$$C^c = \{-2, -1, 7, 8, 9\} \quad \eta(C^c) = 5$$

$$\text{luego} \quad A \cap B = \{-1, 0, 1\} \quad \eta(A \cap B) = 3$$

$$A \cap C = \{0, 1\} \quad \eta(A \cap C) = 2$$

$$B \cap C = \{0, 1, 2, 3\} \quad \eta(B \cap C) = 4$$

$$B^c \cap C^c = \{7, 8, 9\} \quad \eta(B^c \cap C^c) = 3$$

$$A \cap B \cap C = \{0, 1\} \quad \eta(A \cap B \cap C) = 2$$

Por tanto se tiene

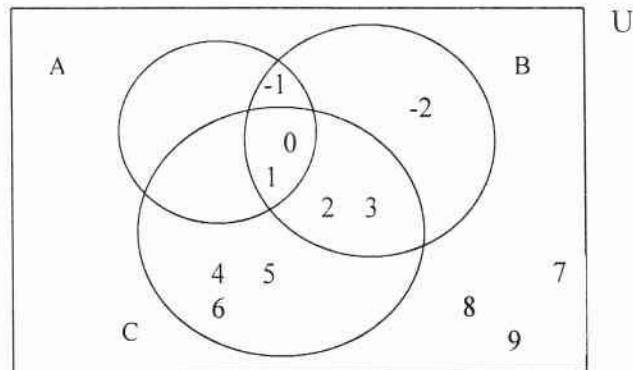
$$\eta(A - B) = \eta(A) - \eta(A \cap B) = 3 - 3 = 0$$

$$\eta(A \Delta B) = \eta(A \cup B) - \eta(A \cap B) = \eta(A) + \eta(B) - 2\eta(A \cap B) = 3 + 6 - 2(3) = 3$$

$$\eta(B^c \Delta C^c) = \eta(B^c \cup C^c) - \eta(B^c \cap C^c) = \eta(B^c) + \eta(C^c) - 2\eta(B^c \cap C^c) = 6 + 5 - 2(3) = 5$$

$$\eta(A \cup B \cup C) = \eta(A) + \eta(B) + \eta(C) - \eta(A \cap B) - \eta(A \cap C) - \eta(B \cap C) + \eta(A \cap B \cap C) = 3 + 6 + 7 - 3 - 2 - 4 + 2 = 9$$

Estos resultados se pueden observar en el siguiente diagrama de Venn.



Ejemplo: En una encuesta a 120 electores sobre sus candidatos favoritos, se determinó que:

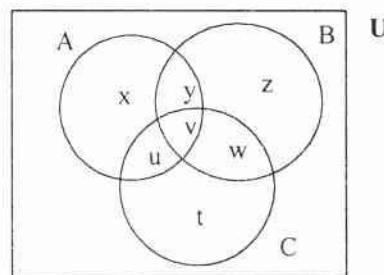
66 electores tienen preferencia por el candidato A, 50 por candidato B, 50 por C, 27 por los candidatos A y C, 30 por A y B, 21 por B y C, y 20 no tienen preferencia por ninguno de los tres candidatos.

- a) Cuántos electores tiene preferencia por los tres candidatos?
- b) Cuántos prefieren a los candidatos A o B, pero no a C?
- c) Cuántos prefieren a dos de los candidatos?

SOLUCION: Sean los conjuntos :

- U: universo de electores
- A: electores que tienen preferencia por el candidato “A”
- B: electores que tienen preferencia por “B”
- C: electores que tienen preferencia por “C”

En diagrama de Venn:



PRIMER METODO:

Según el problema: $\eta(A) = 66$, $\eta(B) = 50$, $\eta(C) = 50$

$$\eta(A \cap C) = 27, \eta(A \cap B) = 27, \eta(B \cap C) = 21$$

$$\eta(A \cup B \cup C) = 100$$

Luego, aplicando las propiedades de cardinalidad de conjuntos y las leyes que rigen las operaciones con conjuntos se obtienen:

a) los electores que tienen preferencia por los 3 candidatos son $v = \eta(A \cap B \cap C)$

$$\text{como } \eta(A \cup B \cup C) = \eta(A) + \eta(B) + \eta(C) - \eta(A \cap B) - \eta(A \cap C) - \eta(B \cap C) + \eta(A \cap B \cap C)$$

$$100 = 66 + 50 + 50 - 30 - 27 - 21 + v$$

$$\text{de donde } v = 12$$

b) los electores que prefieren A o B pero no C, son :

$$x + y + z = \eta((A \cup B) - C)$$

$$= \eta(A \cup B) - \eta((A \cup B) \cap C)$$

$$= [\eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)] - \eta((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B) - [\eta(A \cap C) + \eta(B \cap C) - \eta(A \cap B \cap C)]$$

$$= 66 + 50 - 30 [27 + 21 - 12]$$

$$= 50$$

c) electores que prefieren a dos de los candidatos son:

$$y + u + w = [\eta(A \cap B) - v] + [\eta(A \cap C) - v] + [\eta(B \cap C) - v]$$

$$= \eta(A \cap B) + \eta(A \cap C) + \eta(B \cap C) - 3v$$

$$= 30 + 27 + 21 - 3(12)$$

$$= 42$$

SEGUNDO METODO

De la representación en diagrama de Venn, se obtienen:

Por los candidatos A, B o C $X + Y + Z + U + V + W + T = 100 \quad (1)$

Por el candidato A $X + Y + U + V = 66 \quad (2)$

Por el candidato B $Y + Z + V + W = 50 \quad (3)$

Por el candidato C $U + V + W + T = 50 \quad (4)$

$$\text{Por los candidatos A y C} \quad U + V = 27 \quad (5)$$

$$\text{Por los candidatos A y B} \quad Y + V = 30 \quad (6)$$

$$\text{Por los candidatos B y C} \quad V + W = 21 \quad (7)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

$$\text{5 en 2: } X + Y + (U + W) = 66; \quad \text{6 en 3: } (Y + V) + Z + W = 50$$

$$X + Y + 27 = 66 \quad 30 + Z + W = 50$$

$$X + Y = 39 \quad (8) \quad Z + W = 20 \quad (9)$$

$$\text{7 en 4} \quad (V + W) + U + T = 50$$

$$21 + U + T = 50$$

$$U + T = 29 \quad (10)$$

$$\text{8,9 y 10 en 1: } (X + Y) + (Z + W) + (U + T) + V = 100$$

$$39 + 20 + 29 + V = 100$$

$$\underline{V = 12}$$

$$\text{de 5, 6 y 7 se obtienen: } U = 15; Y = 18; W = 9$$

$$\text{luego de 8, 9 y 10 se obtienen: } T = 14; X = 21; Z = 11$$

$$\text{Por tanto: a) } V = 12 \text{ electores}$$

$$\text{b) } X + Y + Z = 50 \text{ electores}$$

$$\text{c) } U + Y + W = 42 \text{ electores}$$

9. PRODUCTO CARTESIANO

Producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados (x, y) tal que la primera componente x pertenece a A y la segunda y a B. Se denota por $A \times B$.

$$\text{En símbolos} \quad A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

$$\text{O bien} \quad (x, y) \in A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

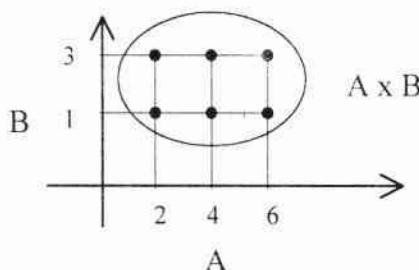
$$\text{Si } B = A, \text{ entonces} \quad A \times A = A^2 = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in A\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$
 $B = \{1, 3\}$

El producto cartesiano $A \times B$ es :

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3)\}$$

Gráficamente se puede representar como sigue:



En la abscisa se anotan los elementos del primer conjunto y en la ordenada los elementos del segundo conjunto.

Por tanto el producto cartesiano no es commutativo. Es decir: $A \times B \neq B \times A$

Si A y B son finitos, el cardinal del producto cartesiano resulta:

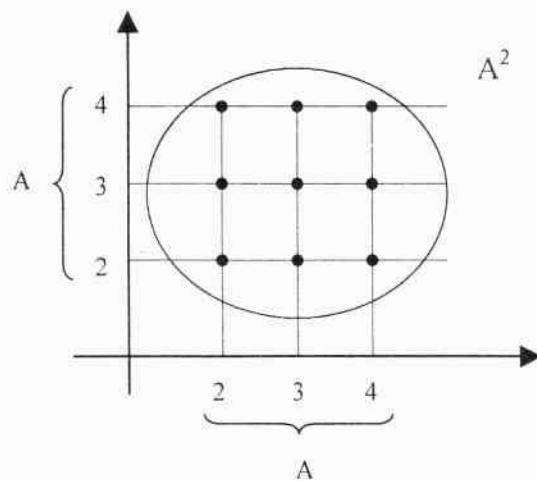
$$\eta(A \times B) = \eta(B \times A) = \eta(A) \eta(B)$$

Ejemplo: Sea $A = \{2, 3, 4\}$

$$\text{Entonces } A \times A = A^2 = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

$$\text{De donde } \eta(A \times A) = \eta(A^2) = 3 \cdot 3 = 9$$

La representación cartesiana de A^2 es:



Ejemplo: Sean A y B los intervalos de números reales

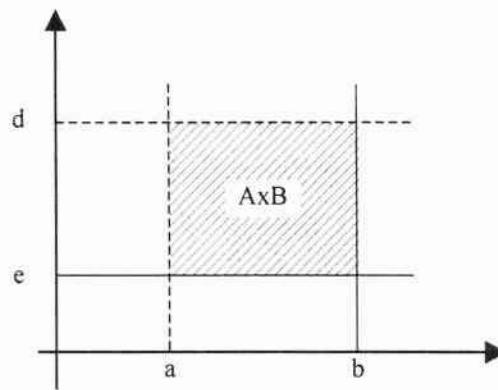
$$A = \{x \in R / a < x \leq b\} =]a, b]$$

$$B = \{y \in R / c \leq y < d\} = [c, d[$$

Entonces se tiene

$$AxB =]a, b] \times [c, d[= \{(x, y) \in R^2 / a < x \leq b \wedge c \leq y < d\}$$

Su representación cartesiana es



Ejemplo: Sean los conjuntos

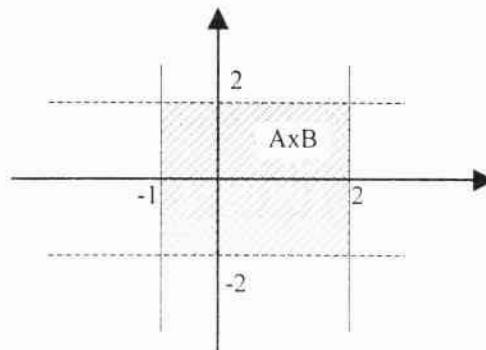
$$A = \{x \in R / -1 \leq x \leq 2\} = [-1, 2]$$

$$B = \{y \in R / -2 < y < 2\} =]-2, 2[$$

Entonces se tiene

$$AxB = \{(x, y) \in R^2 / -1 \leq x \leq 2 \wedge -2 < y < 2\}$$

Su representación cartesiana es



Ejemplo: Demostrar: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

SOLUCION: Sea (x, y) el par ordenado que pertenece al producto cartesiano $(A \cup B) \times C$. Es decir:

$$\begin{aligned} (x, y) \in [(A \cup B) \times C] &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \vee (x, y) \in (B \times C) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in [(A \times C) \cup (B \times C)] \end{aligned}$$

Hemos aplicado, sucesivamente: definición de producto cartesiano, definición de unión de conjuntos, distributividad de proposiciones, definiciones de producto cartesiano y de unión de conjunto.

Luego se concluye que

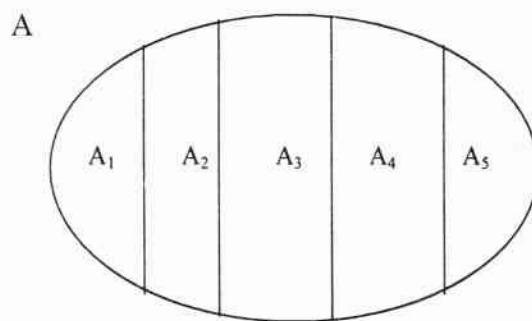
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

10. PARTICIÓN DE UN CONJUNTO

Una partición de un conjunto A no vacío es una colección de los subconjuntos no vacíos A_1, A_2, \dots , de A tales que:

- 1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (mutuamente disjuntos)
- 2) $A_1 \cup A_2 \cup \dots = A$ (la unión es A)

A los subconjuntos A_i se les llama celdas o bloques de la partición. Por ejemplo, el siguiente diagrama muestra una partición de un conjunto A en cinco bloques.



Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Consideremos los siguientes subconjuntos de A

$$A_1 = \{a, c, e, f, g, h\}, \quad A_2 = \{a, c, e, g\}$$

$$A_3 = \{a, b, c, d\}, \quad A_4 = \{b, d\}, \quad A_5 = \{f, h\}$$

Entonces $\{A_1, A_3\}$ no es una partición ya que $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$.

Por otra parte, $\{A_3, A_5\}$ no es una partición ya que $A_3 \cup A_5 \neq A$.

Pero $\{A_1, A_4\}$ si es una partición de A, pues $A_1 \cap A_4 = \emptyset$

y $A_1 \cup A_4 = A$. Asimismo, $\{A_2, A_4, A_5\}$ es una partición de A.



Gottfried Wilhelm, Baron von
Leibniz (1646 – 1716)

EJERCICIOS

1. Escribir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos

$$A = \{ x \in N / 1 < x \leq 7 \}$$

$$B = \{ x \in N / -1 \leq x < 9 \}$$

$$C = \{ x \in Z / (x + 1)^2 = 4 \}$$

$$D = \{ x / x^2 = 2x \}$$

$$E = \{ x / x^3 = x \}$$

2. Escribir por extensión los conjuntos:

$$A = \{ x \in U / -3 < x \leq 3 \} \quad y \quad B = \{ x \in U / x^2 \in U \}$$

para los casos en que: a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3. Si A, B y U son los conjuntos del ejercicio anterior, hallar para cada inciso:

$$A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A \Delta B \text{ y } A^c \Delta B^c.$$

4. Sean los conjuntos: $A = \{0, \emptyset\}$

$$B = \{-1, 0, 1\}$$

$$C = \{a, b, c, d\}$$

$$D = \{a, e, i, o, u\}$$

Determinar:

- a) el número de elementos o el cardinal de los conjuntos $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ y $P(D)$.
- b) los conjuntos $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ y $P(D)$.
- c) los conjuntos $P(A \cap B)$, $P(P(A \cap B))$, $P(A) \cap P(B)$
- d) los valores de verdad de las siguientes expresiones:

$$\emptyset = \{0\}, \quad \text{es } \underline{\hspace{2cm}} \quad 0 \in \emptyset, \quad \text{es } \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\emptyset \in \emptyset, \quad \text{es } \underline{\hspace{2cm}} \quad \emptyset \subset \emptyset, \quad \text{es } \underline{\hspace{2cm}}$$

$\phi \in A,$	es _____	$\phi \subset A,$	es _____
$\phi \in \{\phi\},$	es _____	$\phi \subset \{\phi\},$	es _____
$A \in A,$	es _____	$A \subset A,$	es _____
$\{0\} \in P(B),$	es _____	$\{0\} \subset P(B),$	es _____
$\phi \in P(A),$	es _____	$\phi \subset P(A),$	es _____
$\{\phi\} \in P(A),$	es _____	$\{\phi\} \subset P(A),$	es _____
$\{a,b\} \in P(C),$	es _____	$\{a,b\} \subset P(C),$	es _____
$B \in P(B),$	es _____	$B \subset P(B),$	es _____
$D \notin P(D),$	es _____	$\{D\} \subset P(D),$	es _____

5. Dados los conjuntos :

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A = \{a, c, d, f, h\}, \quad B = \{b, c, e, f\}, \quad C = \{a, c, d, e\}$$

Hallar: a) $A^c, B^c, C^c.$

b) $A \cap B^c, B \cap A^c, (A-B) \cup (B-A)$

c) $(A \Delta B)-A, \quad P[(A \Delta B) \cap A^c]$

d) $P[(A-B) \cap (B \cap A^c)], \quad P[P((A-B) \cap (B \cap A^c))]$

6. Determinar los elementos de A y B sabiendo que el universo es

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad A \Delta B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad y \quad B^c = \{1, 4, 7\}$$

7. Determinar los elementos de A, B y del universo U sabiendo que

$$A \cup B = \{a, b, c, e, f, g, h\}, \quad A \cap B = \{a, e\} \quad y \quad B^c = \{c, d, g, i\}$$

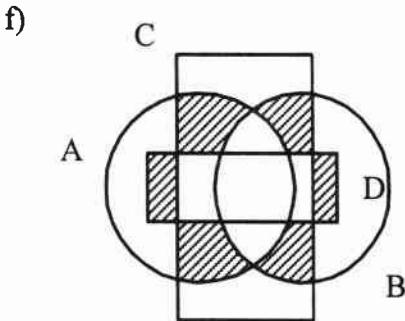
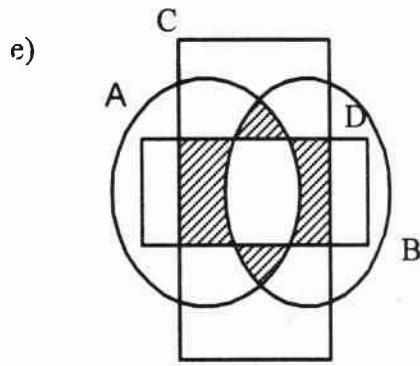
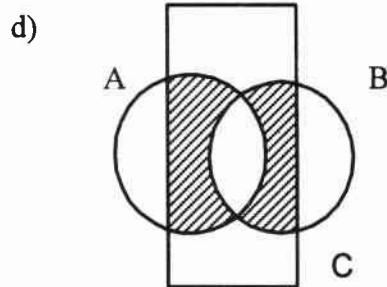
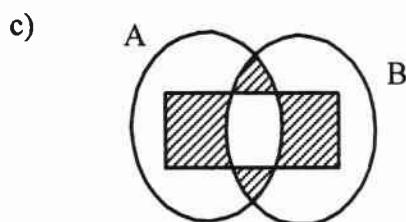
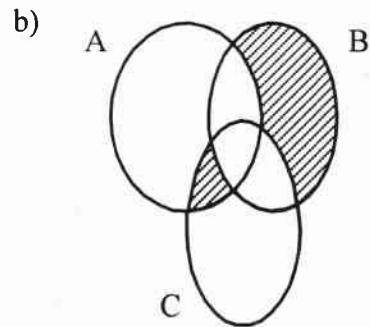
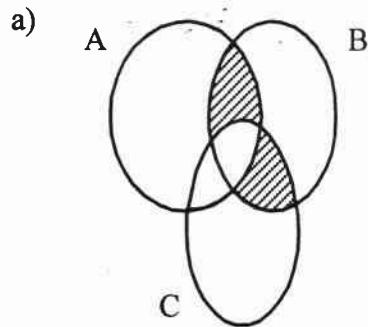
8. Si $A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{d, x, y\} \quad y \quad C = \{a, y, z\}.$

¿Cuántos subconjuntos no vacíos tiene el conjunto $(A \cap B) \cup C?$

¿Cuántos el conjunto $A \cap (B \cup C)$

R: 15, 3

9. Determinar la expresión que representa la parte sombreada en cada uno de los siguientes diagramas:



10. Dados tres conjuntos A, B y C tales que satisfacen los enunciados siguientes:

1ro. $A \subset B \subset C$, 2do. Si $X \in C \rightarrow X \in A$

Determinar, cual de los siguientes enunciados es falso?

a) $A \cap B = C$, b) $A \cup B = C$, c) $A \cap B \neq A$, d) $C - B = \emptyset$

11. Sean A y B dos conjuntos en un universo, tales que se verifica:

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$$

Determinar, cuál de los siguientes enunciados es falso?

- a) $A^c \cap B = B$, b) $A^c \cap B = A^c$, c) $A \cap B = \emptyset$, d) $A \subset B^c$

Usando leyes o propiedades de conjuntos, demostrar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

12. $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

13. $[(A - B) \cup B] - A = B - A$

14. $A - (A - B) = A \cap B$

15. $B - [A - (A - B)] = B - A$

16. $(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$

17. $[A - (B - C)] \cup C = (A - B) \cup C$

18. $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

19. $[A - (B \cup C)] \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) = A$

20. $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

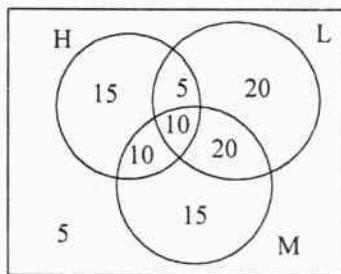
21. $(A \cup B) - (A \Delta B) = A \cap B$

22. $(A \cap B) \Delta (B \cap C) = (A \Delta C) \cap B$

23. $(A \cup B) \Delta (B \cup C) = (A \Delta C) \cap B$

24. $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$
25. $A \subset B \wedge A \subset C \Leftrightarrow A \subset (B \cap C)$
26. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
27. $P[(A \cap B) \cup C] = P(A \cup C) \cap P(B \cup C)$
28. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
29. $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
30. Si A y B denotan dos conjuntos cualesquiera, simplificar
 $\{(A \cup B) \cap [(B - A) \cup (A \cap B)]\} \cap [A \cup (A \cup B)^c]$ R: $A \cap B$
31. Si $A \subset B$ y $A \cap C = \emptyset$, simplificar
 $[(A \cap C^c) - B] \cup [B \cup (A - C)]$ R: B
32. Sean los conjuntos $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
 $A = \{x \in U / 2^x \in U\}$
 $B = \{x \in U / 1 < x < 7\}$
 $C = \{x \in U / \sqrt{x} \in U\}$
 Hallar: $\eta(B - A)$, $\eta(A \Delta C)$, $\eta(B^c \Delta C^c)$ y $\eta[(A \cup C) \cap B]$. R: 3,4,7 y 3
33. Sabiendo que: $A \subset C$, $B \subset C$, $\eta(C) = 100$, $\eta(A \cup B) = 70$,
 $\eta(A \cap B) = 20$ y $\eta(B) - \eta(A) = 2$. Hallar:
 a) $\eta[(C - A) \cap B]$, b) $\eta[(C - B) \cap A]$ R: 26 ; 24

34. Sean los conjuntos, A y B, tales que $A \Delta B$ tiene 10 elementos y $A \cup B$ tiene 25 elementos. Cuántos elementos tiene $A \cap B$?
35. Dados los conjuntos, A y B, tales que $A \cup B$ tiene 18 elementos y $A \cap B$ tiene 7 elementos. Cuántos elementos tiene $A \Delta B$?
36. En una encuesta a 100 estudiantes a cerca de los hábitos de lectura, se determinó los resultados que se muestran en un diagrama de Venn.



donde:

- H: estudiantes que leen historia
 L: estudiantes que leen Literatura
 M: estudiantes que leen Matemática

Determinar el número de estudiantes que leen:

- a) Historia
- b) solamente Historia
- c) Historia y Matemática
- d) Historia y Matemática pero no leen Literatura
- e) Literatura o Matemática pero no leen Historia
- f) ninguna

37. En cierta competencia, todos los alumnos gustan de Aritmética, algunos de Física y otros de Química.

Si 350 gustan de Aritmética y Física, y 470 de Química o Aritmética, cuántos no gustan de Física? R: 120

38. Supongo que Alvaro toma huevos o tocino (o ambos) para su desayuno cada mañana durante el mes de enero. Si come tocino 26 mañanas y huevos 17 mañanas. ¿Cuántas mañanas come huevos y tocino? R: 12

39. Un grupo de 70 personas ejecutan trabajos manuales utilizando tres materiales: barro, madera y cartulina.

Se sabe que todos utilizan barro, 29 utilizan madera, 40 cartulina y 11 emplean los tres materiales. Cuantos utilizan únicamente barro? R: 12

40. De 33 personas que viajaron a Europa, 15 visitaron Francia, 16 visitaron Inglaterra, 16 visitaron Suiza, 5 visitaron Francia y Suiza, 5 visitaron Inglaterra y Suiza, y 2 los tres países.

- a) Cuántos visitaron únicamente Francia? R: 6
b) Cuántos visitaron Inglaterra o Suiza pero no Francia? R: 18
c) Cuántos visitaron Francia y Suiza pero no Inglaterra? R: 3

41. Una mesera tomó una orden de 57 hamburguesas: 22 con cebolla, 29 con mostaza y 25 con salsa de tomate. De éstas, 10 tenían sólo cebolla y 15 sólo mostaza; 7 de las hamburguesas tenía sólo cebolla y mostaza y 3 los tres ingredientes. Realice un diagrama de Venn y determine:

- a) Cuántas hamburguesas llevaban salsa y mostaza solamente? R: 4
b) Cuántas sólo llevaban salsa? R: 16
c) Cuántas hamburguesas llevaban cebolla o mostaza, pero no salsa? R: 32

42. Un ingeniero que dirige la construcción de un edificio de tres plantas, distribuye el personal de la siguiente manera: 43 trabajan en la primera planta, 58 en la tercera planta, 16 en la primera y segunda planta, 22 en la primera y tercera planta, 7 trabajan en las tres plantas. Si 52 trabajan en una sola planta y 37 en dos plantas a la vez pero no en las tres, Cuántos trabajan

- a) en la primera y segunda, pero no en la tercera, R: 9
b) en la segunda o tercera pero no en la primera, R: 53
c) únicamente en la primera? y R: 12
d) cuántos trabajan en total? R: 96

43. Un Club deportivo consta de 85 socios, de los cuales 43 practican fútbol, 46 basket, 41 tenis, 45 practican sólo un deporte y 5 practican los tres deportes.
 Cuántos socios del Club practican exactamente dos deportes? R: 35

44. Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$
 Hallar: a) $A \times B$, b) $B \times A$, c) $A \times A$, d) $B \times B$

45. Sean los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x < 3\}$
 $B = \{y \in \mathbb{R} / -2 < y < 2\}$
 Determinar y representar: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ y $B \times B$

EJERCICIOS VARIOS

46. Sean A y B dos conjuntos incluidos en un mismo conjunto universal.
 Cuál de las siguientes expresiones es incorrecto?
 a) $A \cap B^c \subset A$, b) $A \Delta B \subset A \cup B$, c) $(A \cap B)^c \subset A \Delta B$, d) $B \cap A^c \subset A \Delta B$
47. Sean A , B y C tres conjuntos no vacíos incluidos en un mismo conjunto universal. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:
 a) Si $A \subset (B \cup C) \wedge A \cap C = \emptyset \rightarrow A \subset B$
 b) Si $A \subset B^c \wedge C \subset A \rightarrow B \cap C = \emptyset$
 c) Si $(A \cap B)^c = A \Delta B \wedge A \cap B \cap C \neq \emptyset \rightarrow C \subset (A \cup B)$
 d) Si $(A \cup B) \subset A \Delta B \wedge (A \cup B) \cap C \neq \emptyset \rightarrow A \cap B \cap C \neq \emptyset$
48. Si A y B denotan dos conjuntos cualesquiera, determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones
 a) Si $\eta(A) = 3$, $\eta(B) = 4$ y $\eta(A \cup B) = 5$, entonces $\eta(P(A \cap B)) = 4$
 b) Si $\eta(A) = 2$, $\eta(B) = 3$, entonces el número máximo de elementos de $P(A) \cup P(B)$ es 12.

c) Si $A \cap B^c \neq \emptyset$, $\eta(A) = 3$ y $\eta(B) = 4$, entonces $\eta(P(B \cap A^c)) = 2$

Si A y B denotan dos conjuntos cualesquiera, demostrar las siguientes igualdades:

49. $(B - A) \Delta (C - A) = (B \Delta C) - A$

50. $(A - B)^c \Delta (A - C)^c = (A \Delta B) \cap A$

Simplificar las expresiones siguientes:

51. $\{(A \cup B) - (C - A)\} \cap [(A \cap B) - (A - C)]\} \cup (B - C)^c \quad R: B^c \cup C$

52. $\{[(A \cup B) \cap (B - C)^c] \cup [C - (A^c \cap B)]^c\} - (C - B) \quad R: B \cup C^c$

53. $\{[C \cup (B - A^c)] \cap [B - (C \cup A)^c]^c\} \cup B \quad R: B \cup C$

54. $\{[(A - B^c) \cup (B^c - A)] - B\} \cup \{B - [(A \cap B) \cup (A \cup B)^c]\} \quad R: A^c$

55. $[(A \cup B^c) \Delta (B - A)]^c \cup [(A \cap B)^c - (B - A)] \quad R: B^c$

56. $\{[(A^c \cap B) \Delta (A - B)]^c \cap [(A - B)^c - (A \cup B)]\} \Delta A^c \quad R: B - A$

57. $\{[(A^c - B) \cup (B^c - A^c)]^c \cup [A \Delta (A^c \cup B)^c]\} \Delta (B - A)^c \quad R: (A \cap B)^c$

58. En un certamen científico escolar 34 estudiantes recibieron premios por sus proyectos científicos. Se dieron 14 premios a proyectos de biología, 13 a proyectos de química y 21 a proyectos de física. Si 3 estudiantes recibieron premios en las tres áreas. ¿Cuántos recibieron premios exactamente en: a) una sola área?. b) dos áreas?

R: 23, 8

59. Para estudiar la calidad de un producto se consideran tres tipos de defectos A, B y C, como los más importantes. Se analizaron 120 productos con los siguientes resultados:

49 productos tienen el defecto A,

48 productos tienen el defecto B,

49 productos tienen el defecto C,

61 productos tienen exactamente un solo tipo de defecto,

7 productos tienen los tres tipos de defectos, y el resto de los productos no presentan ningún tipo de defectos. Determinar:

a) Cuántos productos tienen dos tipos de defectos?

b) Cuántos productos no tienen defectos?

R: 32; 20

60. En una encuesta a 180 estudiantes se halló que: 62 se comportan bien, 125 son inteligentes, 144 son habladores, 106 son habladores e inteligentes, 22 estudiantes se comportan bien y no son inteligentes, 13 se comportan bien y no son habladores, 15 se comportan bien y son habladores, pero no son inteligentes.

a) Cuántos de los 180 estudiantes entrevistados no son inteligentes, no son habladores ni se comportan bien? R: 10

b) Cuántos estudiantes se comportan bien o son inteligentes, pero no habladores?

R:26

“Tal como le había iluminado toda su vida, también ahora el entendimiento iluminó ese instante de la existencia de Juan Gaviota. Tenían razón, él era capaz de volar más alto”.

R. Bach

CAPÍTULO III

RELACIONES

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos proponemos precisar en términos matemáticos el concepto y la definición de la relación. Asimismo, desarrollaremos distintas propiedades de las relaciones que nos permitirán advertir que ciertas relaciones referentes a cuestiones muy distintas pueden sin embargo tener caracteres análogos. Por último, estudiaremos dos tipos de relaciones especialmente importantes: las relaciones de equivalencia y de orden.

2. RELACIONES

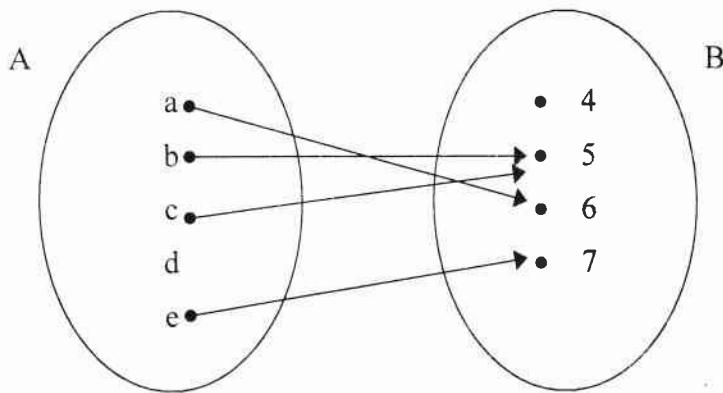
En la matemática, como en otras ciencias, constantemente se habla de diversas relaciones entre dos objetos: en geometría se trata de relaciones de congruencia y de semejanza; en álgebra, de relaciones de igualdad o desigualdad numérica; en teoría de conjuntos, de relaciones de pertenencia y de inclusión. Por esto, es necesario formular la noción general de relaciones entre objetos. Una manera de lograr esto es mediante una regla, fórmula o propiedad. Así, por ejemplo, consideremos el conjunto A de las materias que puede cursar un estudiante en un semestre, y el conjunto B formado por los créditos de las materias sin laboratorio, es decir:

$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad y \quad B = \{4, 5, 6, 7\}$$

Es claro que los elementos de A quedan asociados con los del conjunto B mediante la propiedad.

$$P(x, y) : "x tiene crédito y"$$

Es decir, una relación R consiste en todos los pares ordenados (x, y) $A \times B$ tales que x tiene crédito y . Esto es, si en un semestre determinado y para un estudiante en particular queda establecido el siguiente esquema (diagrama de Venn).



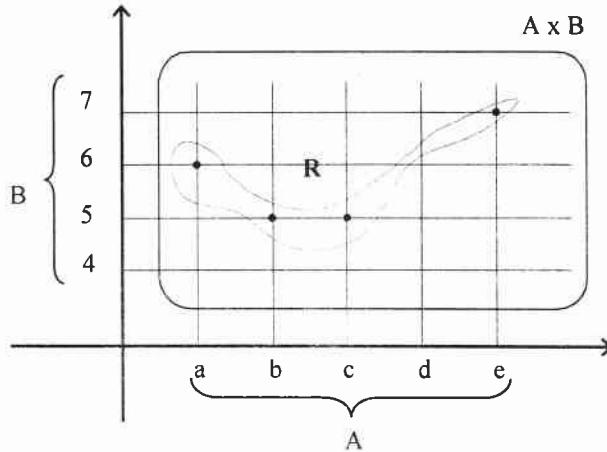
entonces la relación o correspondencia es el conjunto de pares ordenados

$$R = \{(a, 6), (b, 5), (c, 5), (e, 7)\}$$

Nótese, que la materia d no tiene ningún correspondiente en B, consideramos que la materia tiene laboratorio y su crédito es mayor a los citados en B.

Nótese también que la relación establecida es sencillamente un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, es decir, $R \subset A \times B$.

En gráfico cartesiano se tiene:



Es claro que la relación establecida no es única ya que se puede establecer otras relaciones (correspondencias) entre los conjuntos A y B.

Ahora consideremos los conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{a, b, c\} \text{ y} \quad R \subset A \times B,$$

$$\text{siendo} \quad R = \{(1, b), (2, b), (3, c)\}$$

En este caso R es una relación que no se puede describir mediante una regla, fórmula o propiedad, pues se trata simplemente de un subconjunto de $A \times B$ elegido arbitrariamente.

Por tanto, una relación o correspondencia entre dos elementos pertenecientes, respectivamente, a dos conjuntos dados, A y B , se puede definir como sigue:

2.1 DEFINICIÓN Sean A y B dos conjuntos. Una relación R de A en B es cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Es decir:

$$R \text{ es una relación de } A \text{ en } B \Leftrightarrow R \subset A \times B.$$

Se dice que " x está relacionado con y por R " y se escribe $x R y$ si $(x, y) \in R$.

Si $(x, y) \notin R$, si puede escribir $x \not R y$, y se lee "x no está relacionado con y por R".

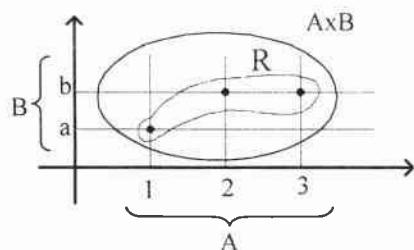
Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$

Entonces $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

luego, $R = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

es una relación de A en B , ya que $R \subset A \times B$

En gráfico cartesiano se tiene

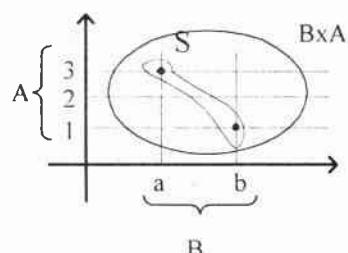


Sin embargo $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

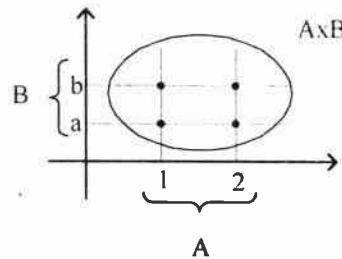
luego, $S = \{(a, 3), (b, 1)\}$

es una relación de B en A , pues $S \subset B \times A$,

y en gráfico cartesiano se tiene



Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$
 El producto cartesiano $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$



Las relaciones que es posible definir entre estos conjuntos, o son subconjuntos de $A \times B$, son las siguientes:

- $R_1 = \emptyset$
- $R_2 = \{(1, a)\}$
- $R_3 = \{(1, b)\}$
- $R_4 = \{(2, a)\}$
- $R_5 = \{(2, b)\}$
- $R_6 = \{(1, a), (1, b)\}$
- $R_7 = \{(1, a), (2, a)\}$
- $R_8 = \{(1, a), (2, b)\}$
- $R_9 = \{(1, b), (2, a)\}$
- $R_{10} = \{(1, b), (2, b)\}$
- $R_{11} = \{(2, a), (2, b)\}$
- $R_{12} = \{(1, a), (1, b), (2, a)\}$
- $R_{13} = \{(1, a), (1, b), (2, b)\}$
- $R_{14} = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}$
- $R_{15} = \{(1, b), (2, a), (2, b)\}$
- $R_{16} = A \times B$

Observación En general, si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces $A \times B$ tiene nm elementos, y el conjunto de pares de $A \times B$ tiene 2^{nm} elementos, es decir, existen 2^{nm} subconjuntos de $A \times B$, o lo que es lo mismo, es posible definir 2^{nm} relaciones en A y B .

3. DOMINIO, IMAGEN, RELACIÓN INVERSA

Si $R \subset A \times B$ es una relación de A en B , existen dos importantes conjuntos asociados a esta relación: dominio e imagen de R . A continuación se darán las definiciones de estos conjuntos y de la relación inversa.

3.1 DOMINIO DE R El dominio de R , que se escribe $D(R)$, es el conjunto de elementos en A que están relacionados con algún elemento en B . En otras palabras, el $D(R)$ es un subconjunto de A y es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares $(x, y) \in R$. Es decir

$$D(R) = \{x \in A / (x, y) \in R\}$$

3.2 IMAGEN DE R El Imagen (rango o recorrido) de R , que se escribe $I(R)$, es el conjunto de elementos en B que son los segundos elementos de los pares $(x, y) \in R$, esto es, todos los elementos en B que están relacionados con algún elemento en A . Es decir

$$I(R) = \{y \in B / (x, y) \in R\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Se define la siguiente relación R (divisor) de A en B :

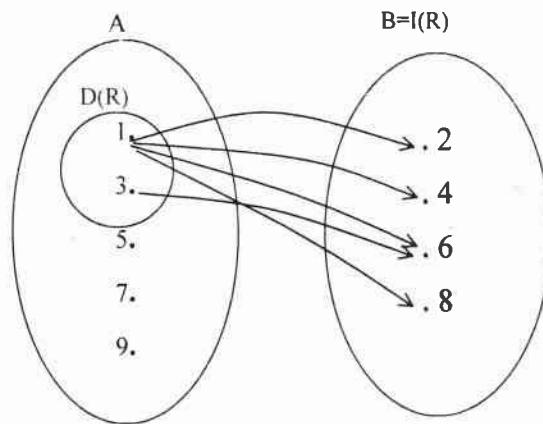
$$x R y \Leftrightarrow x | y$$

la relación es un subconjunto de $A \times B$, y pertenecen a ella los pares ordenados (x, y) tales que $x | y$, x divide a y , es decir

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (3, 6)\}$$

Entonces $D(R) = \{1, 3\}$ y $I(R) = \{2, 4, 6, 8\}$

En diagrama se tiene



Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Se define la siguiente relación R (mayor que) de A en B :

$$x R y \Leftrightarrow x > y$$

la relación es un subconjunto de $A \times B$ y está formado por los pares ordenados (x, y) tales que $x > y$. Pero ningún elemento de A es mayor que ninguno de B . En este caso se obtiene la relación vacía \emptyset . Es decir

$$R = \{\} = \emptyset$$

Por tanto, $D(R) = \emptyset$ y $I(R) = \emptyset$

3.3 RELACIÓN INVERSA La relación inversa (recíproca) de la relación R de A en B es la relación R^{-1} de B en A que se define como

$$R^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in R\}$$

O bien $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$

Se define $R \subset A \times B$ mediante

$$x R y \Leftrightarrow x + y = 6$$

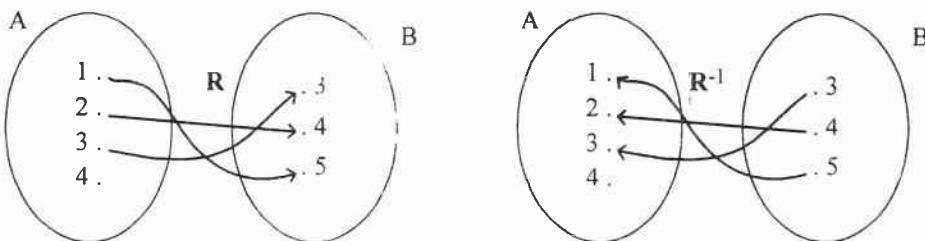
la relación R de A en B está formada por los pares ordenados (x, y) tales que $x + y = 6$, esto es

$$R = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3)\}$$

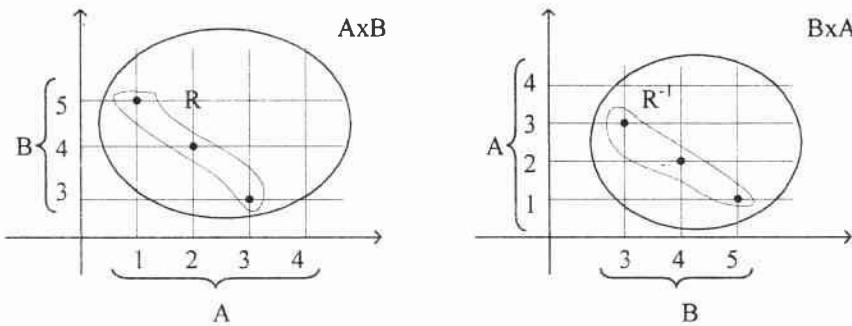
luego la relación inversa es

$$R^{-1} = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3)\}$$

En diagrama de Venn se tiene



La representación gráfica cartesiana de estas relaciones R y R^{-1} es:



Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 5\}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$$

Se define la relación $R \subset A \times B$ mediante

$$x R y \Leftrightarrow 3 | x + y$$

- Definir A , B y R por extensión
- Representar en forma cartesiana $A \times B$ y R
- Determinar R^{-1}

SOLUCIÓN: a) El conjunto A está formado por los naturales mayores a 1 y menores o iguales a 5. $A = \{2, 3, 4, 5\}$

y B tiene como elementos a los enteros que satisfacen la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-2)(x-1) = 0$$

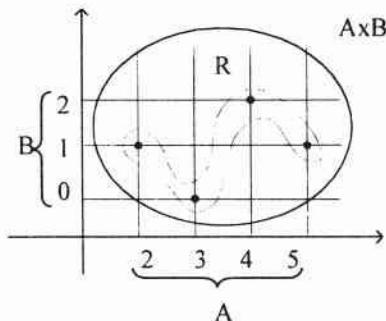
estos son $x = 0, x = 2$ y $x = 1$, entonces

$$B = \{0, 1, 2\}$$

la relación R de A en B está formada por los pares ordenados (x, y) tales que $x + y$ sea divisible por 3.

$$R = \{(2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 1)\}$$

b) la representación en forma cartesiana de $A \times B$ y R es:



c) la relación inversa R^{-1} de B en A es

$$R^{-1} = \{(1, 2), (0, 3), (2, 4), (1, 5)\}$$

4. COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sea R una relación de A en B, y S una relación de B en C. Es decir

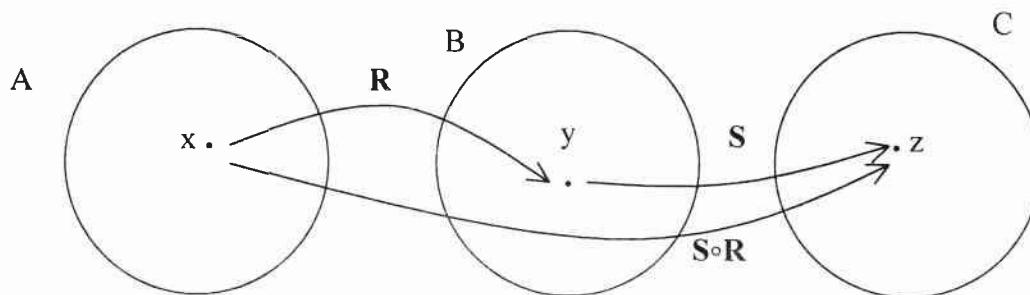
$$R \subset A \times B \quad y \quad S \subset B \times C$$

A partir de estas relaciones se puede definir una relación de A en C, llamada composición entre R y S, mediante

$$S \circ R = \{(x, z) / \exists y \in B \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

O bien $(x, z) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists y \in B \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S$

Así, la relación $S \circ R$ asocia a un elemento de $D(R)$ con uno de $I(S)$. En diagrama de Venn se tiene



Ejemplo: Sean los conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3\}, \quad B = \{-1, 2, 4\} \quad \text{y} \quad C = \{0, 3, 5, 7\}$$

Se definen las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$ mediante

$$x R y \Leftrightarrow y = 2x, \quad \text{y} \quad S z \Leftrightarrow z = y + 1$$

- a) Determinar R y S por extensión
- b) Definir la composición $S \circ R \subset A \times C$ por extensión
- c) Determinar el dominio y la imagen de las tres relaciones

SOLUCIÓN: a) La relación $R \subset A \times B$ está formada por los pares ordenados (x, y)

tales que $y = 2x$, esto es

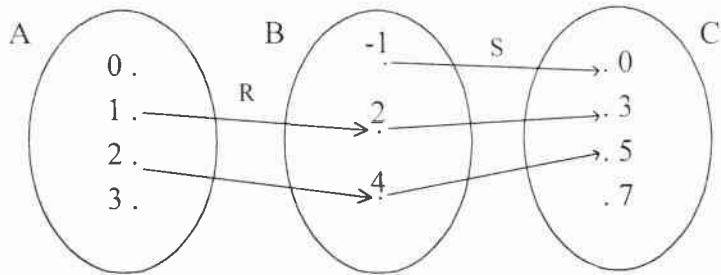
$$R = \{(1, 2), (2, 4)\},$$

la relación $S \subset B \times C$ tiene como elementos a los pares ordenados (y, z)

tales que $z = y + 1$, esto es

$$S = \{(-1, 0), (2, 3), (4, 5)\}$$

b) La relación compuesta $S \circ R \subset A \times C$ está determinada así:



luego se tiene $S \circ R = \{(1, 0), (2, 3)\}$

d) El dominio y la imagen de las relaciones R , S y $S \circ R$ son:

$$D(R) = \{1, 2\}, I(R) = \{2, 4\}$$

$$D(S) = \{-1, 2, 4\}, I(S) = \{0, 3, 5\}$$

$$D(S \circ R) = \{1, 2\} \text{ y } I(S \circ R) = \{3, 5\}$$

4.1 PROPIEDADES DE LA COMPOSICIÓN DE RELACIONES Sean R , S y T relaciones entre ciertos conjuntos. La composición de relaciones admite las siguientes propiedades:

$$\text{i)} \quad (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

$$\text{ii)} \quad (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$$

Demostración de la propiedad ii)

Sean las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$. En efecto

$$\begin{aligned} (z, x) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (x, z) \in S \circ R && \text{def. de inversa} \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S && \text{def. de comp. de relaciones} \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B \wedge (y, x) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in S^{-1} && \text{def. de inversa} \\ &\Leftrightarrow \exists y \in B \wedge (z, y) \in S^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1} && \text{Ley conmutativa} \\ &\Leftrightarrow (z, x) \in R^{-1} \circ S^{-1} && \text{def. de comp. de relaciones} \end{aligned}$$

Por tanto, resulta $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

La demostración de la propiedad i) queda como ejercicio.

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$C = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$$

Se definen las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$ mediante

$$x R y \Leftrightarrow y = x^2 + 2, \quad y S z \Leftrightarrow z = 2y - 3$$

a) Determinar R , S y $S \circ R$ por extensión

b) Determinar R^{-1} , S^{-1} , $(S \circ R)^{-1}$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$ por extensión

SOLUCIÓN: a) Si la relación $R \subset A \times B$ está definida como

$$R = \{(x, y) / y = x^2 + 2\},$$

$$\text{por extensión} \quad R = \{(-1, 3), (0, 2), (1, 3)\}$$

Si la relación $S \subset B \times C$ está definida como

$$S = \{(y, z) / z = 2y - 3\},$$

$$\text{por extensión} \quad S = \{(2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 7)\}$$

$$\text{Sabiendo que} \quad S \circ R = \{(x, z) / \exists y \in B \wedge (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$$

$$\text{Entonces} \quad S \circ R = \{(-1, 3), (0, 1), (1, 3)\}$$

b) Según la definición de la relación inversa, se tiene

$$R^{-1} = \{(3, -1), (2, 0), (3, 1)\}$$

$$S^{-1} = \{(1, 2), (3, 3), (5, 4), (7, 5)\}$$

$$(S \circ R)^{-1} = \{(3, -1), (1, 0), (3, 1)\}$$

Según la definición de la composición de relaciones, se tiene

$$R^{-1} \circ S^{-1} = \{(z, x) / \exists y \in B \wedge (z, y) \in S^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1}\}$$

$$R^{-1} \circ S^{-1} = \{(1, 0), (3, -1), (3, 1)\}$$

Nótese, que se verifica $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

5. RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea R una relación de A en B . Si A y B son iguales, se dice que $R \subset A \times A$ es una relación definida en A . En adelante nos limitaremos a este caso.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$

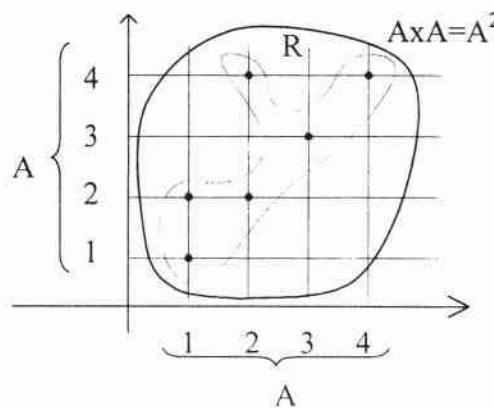
Se define la relación $R \subset A \times A$ mediante

$$x R y \Leftrightarrow y = x \vee y = 2x$$

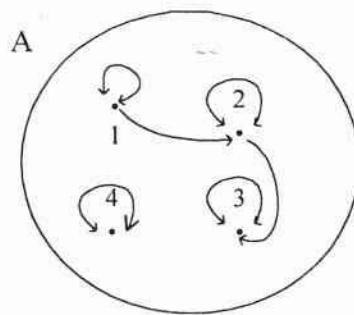
$$\text{es decir, } R = \{(x, y) / y = x \vee y = 2x\}$$

$$\text{Entonces } R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 4)\}$$

El diagrama cartesiano de esta relación es



El diagrama de Venn es



Ejemplo: En el conjunto \mathbb{R} de números reales se define la relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$$

Así, la relación R es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, y está formada por los pares ordenados (x, y) de números reales que satisfacen a

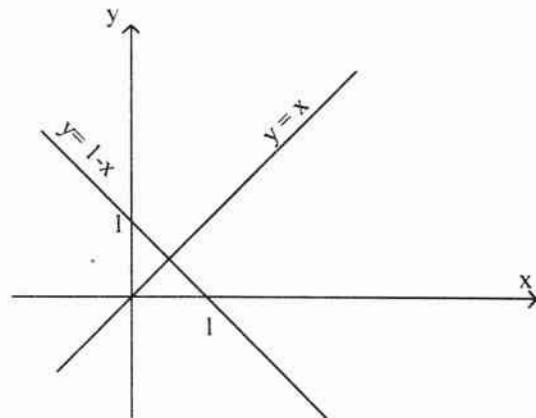
$$x^2 - x = y^2 - y$$

o bien $(x - y)(x + y - 1) = 0$

es decir, $y = x \vee y = 1 - x$

Entonces $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x \vee y = 1 - x\}$

luego, el gráfico cartesiano de esta relación es



5.1 PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Sea R una relación definida en A , es decir, $R \subset A^2$. Estas relaciones generalmente satisfacen ciertas propiedades que expondremos en esta sección.

5.1.1 RELACIONES REFLEXIVAS Una relación R en un conjunto A se denomina reflexiva si cada elemento x de A está relacionado consigo mismo. Es decir,

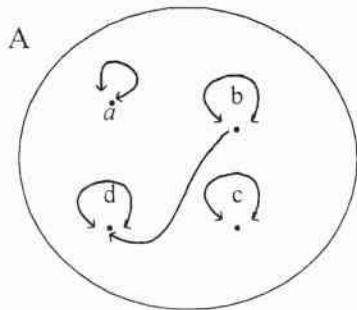
$$R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x R x$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, d)\}$$

Entonces R es una relación reflexiva, ya que cada elemento de A relacionado consigo mismo.

En diagrama de Venn se tiene



5.1.2 RELACIONES NO REFLEXIVAS Se dice que una relación R en un conjunto A es no reflexiva si existe algún elemento de A que no está relacionado consigo mismo. Es decir,

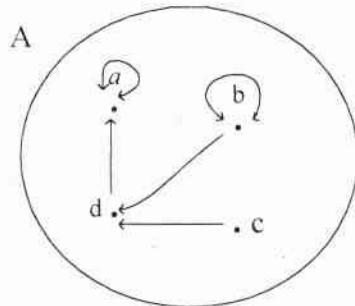
$$R \text{ es no reflexiva} \Leftrightarrow \exists x / x \in A \wedge x \not R x$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, d), (d, a), (b, d)\}$$

Entonces R es una relación no reflexiva, pues existen dos elementos de A que no están relacionados consigo mismo. Esto es, $c \in A$ pero $c \not R c$ y $d \in A$ pero $d \not R d$.

En diagrama de Venn se tiene



5.1.3 RELACIONES ARREFLEXIVAS Una relación R, definida en un conjunto A, es arreflexiva si ningún elemento de A está relacionado consigo mismo. Es decir,

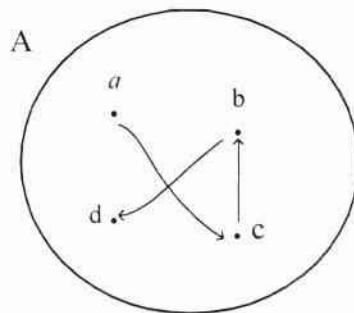
$$R \text{ es arreflexiva} \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x R x$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea

$$R = \{(a, c), (b, d), (c, b)\}$$

Entonces R es una relación arreflexiva, ya que ningún elemento de A está relacionado consigo mismo.

En diagrama de Venn se tiene



5.1.4 RELACIONES SIMÉTRICAS Una relación R en un conjunto A es simétrica si cualquiera que sea el par (x, y) que pertenece a la relación, entonces el par (y, x) también pertenece. Es decir,

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \forall x \forall y \in A : x R y \Rightarrow y R x$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

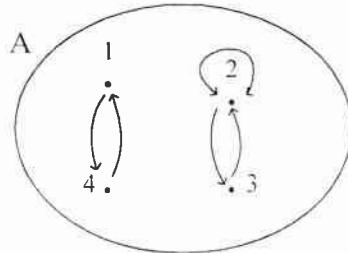
$$R = \{(1, 4), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Entonces R es una relación simétrica, ya que cada elemento en R tiene su simétrico, es decir, son verdaderas las siguientes afirmaciones:

$$1 R 4 \Leftrightarrow 4 R 1$$

$$2 R 3 \Leftrightarrow 3 R 2$$

En diagrama de Venn se tiene



Además se tiene

$$R^{-1} = \{(4, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (1, 4)\} = R$$

Observe que si R es simétrica, R y R^{-1} son iguales. En diagrama de Venn esto quiere decir que siempre que haya una flecha de x a y , hay otra de y a x .

5.1.5 RELACIONES NO SIMÉTRICAS Una relación R , definida en un conjunto A , es no simétrica si existe algún par (x, y) en la relación, pero su transpuesta (y, x) no pertenece a ella. Es decir,

$$R \text{ es no reflexiva} \Leftrightarrow \exists x \exists y / x R y \wedge y \not R x$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

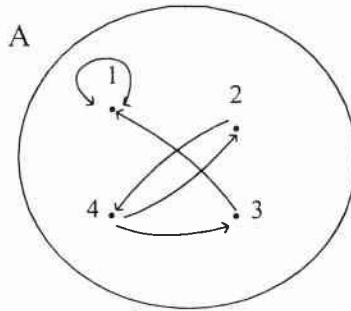
$$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

Entonces R no es simétrica, ya que

$$3 R 1 \wedge 1 \not R 3$$

$$4 R 3 \wedge 3 \not R 4$$

En diagrama de Venn se tiene



5.1.6 RELACIONES ASIMÉTRICAS Se dice que una relación R en un conjunto A es asimétrica si un par (x, y) pertenece a la relación, entonces su transpuesta (y, x) no pertenece a ella. Es decir,

$$R \text{ es no asimétrica} \Leftrightarrow \forall x \forall y : x R y \Rightarrow y \not R x$$

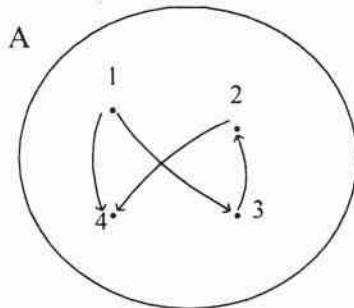
Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$R = \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 2)\}$$

Entonces R es una relación asimétrica, pues ningún par ordenado en R tiene su simétrico, es decir, se verifican las siguientes afirmaciones:

$$\begin{array}{ll} 1 R 3 \Rightarrow 3 \not R 1 & ; \\ 2 R 4 \Rightarrow 4 \not R 2 & ; \\ 3 R 2 \Rightarrow 2 \not R 3 & \end{array}$$

En diagrama de Venn se tiene



5.1.7 RELACIONES TRANSITIVAS Una relación R , definida en un conjunto A , es transitiva si, cualesquiera que sean los pares ordenados (x, y) y (y, z) que pertenecen a la relación, entonces el par ordenado (x, z) también pertenece a ella. Es decir,

$$R \text{ es transitiva} \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea

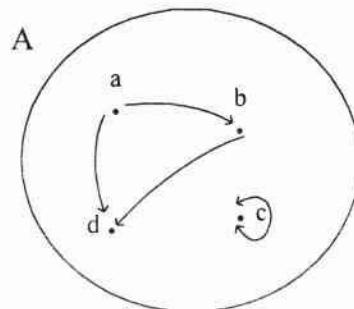
$$R = \{(a, b), (a, d), (b, d), (c, c)\}$$

Entonces R es una relación transitiva, pues se verifican las siguientes afirmaciones:

$$a R b \wedge b R d \Rightarrow a R d, \text{ es V}$$

$$c R c \wedge c R c \Rightarrow c R c, \text{ es V}$$

En diagrama de Venn se tiene



5.1.8 RELACIONES NO TRANSITIVAS La relación R en un conjunto A se dice que es no transitiva si existen pares (x, y) y (y, z) que pertenecen a R pero el par (x, z) no pertenece a ella. Es decir,

$$R \text{ es no transitiva} \Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z / x R y \wedge y R z \wedge x \not R z$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea

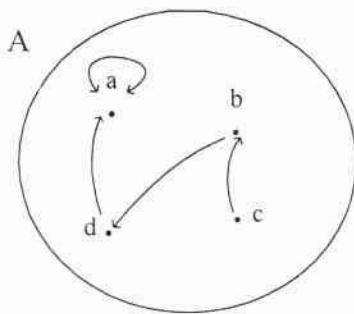
$$R = \{(a, a), (b, d), (c, b), (d, a)\}$$

Entonces R es una relación no transitiva, ya que

$$b R d \wedge d R a \text{ pero } b \not R a$$

$$c R d \wedge d R b \text{ pero } c \not R d$$

En diagrama de Venn se tiene



5.1.9 RELACIONES ATRANSITIVAS Una relación R en un conjunto A se llama atransitiva si, cualesquiera que sean los pares (x, y) y (y, z) que pertenecen a la relación, entonces el par (x, z) no pertenece a ella. Es decir,

$$R \text{ es atransitiva} \Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z : x R y \wedge y R z \Rightarrow x \not R z$$

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea

$$R = \{(a, d), (b, c), (c, b), (d, b)\}$$

Entonces R es una relación no transitiva, ya que

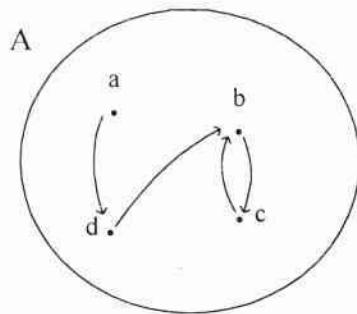
$$a R d \wedge d R b \Rightarrow a \not R b, \text{ es V}$$

$$b R c \wedge c R b \Rightarrow b \not R b, \text{ es V}$$

$$c R b \wedge b R c \Rightarrow c \not R c, \text{ es V}$$

$$d R b \wedge b R c \Rightarrow d \not R c, \text{ es V}$$

En diagrama de Venn se tiene



5.1.10 RELACIONES ANTISIMÉTRICAS Dada una relación R en un conjunto A se denomina antisimétrica si todo par (x, y) y su transpuesta (y, x) pertenecen a la relación, entonces x es igual a y . Es decir,

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow \forall x \forall y : x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$$

Entonces R es una relación antisimétrica, ya que se verifican las siguientes proposiciones, para todo par de elementos diferentes en R :

$$1 R 2 \wedge 2 R 1 \Rightarrow 1 = 2, \text{ es F.}$$

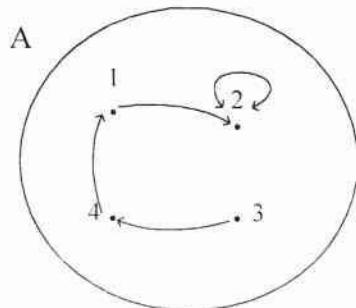
$$3 R 4 \wedge 4 R 3 \Rightarrow 3 = 4, \text{ es F.}$$

$$4 R 1 \wedge 1 R 4 \Rightarrow 4 = 1, \text{ es F.}$$

Son verdaderas porque los antecedentes son F. es decir.

$2 R 1, 4 R 3$ y $1 R 4$ son F.

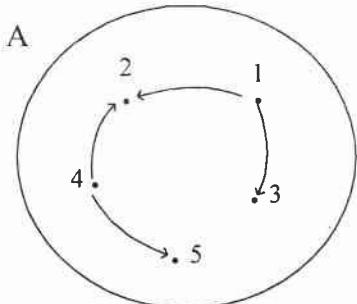
En diagrama de Venn se tiene



Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea
 $R = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 5)\}$

- a) Formar el diagrama de R.
- b) Clasificar R.

SOLUCIÓN: a) El diagrama que corresponde a R es



- b) La relación R cumple las siguientes propiedades
 - i) Como ningún elemento en A está relacionado consigo mismo, la relación es arreflexiva.
 - ii) La relación es asimétrica porque para todo par (x, y) que pertenece a la relación, se observa que su transpuesta (y, x) no pertenece a ella.

Es decir, son V las siguientes proposiciones:

$$1 R 2 \Rightarrow 2 \not R 1 \quad ; \quad 1 R 3 \Rightarrow 3 \not R 1$$

$$4 R 2 \Rightarrow 2 \not R 4 \quad ; \quad 4 R 5 \Rightarrow 5 \not R 4$$

- iii) Ya que no es posible encontrar elementos x, y, z en A tal que $x R y \wedge y R z$, se concluye que R es transitiva. Es decir, que la implicación $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ resulta V porque el antecedente es F.
- iv) La relación es antisimétrica, pues para todo par (x, y) en R se verifica

que: $1 R 2 \wedge 2 R 1 \Rightarrow 1 = 2$, es V

$$1 R 3 \wedge 3 R 1 \Rightarrow 1 = 3, \text{ es V}$$

$$4 R 2 \wedge 2 R 4 \Rightarrow 4 = 2, \text{ es V}$$

$$4 R 5 \wedge 5 R 4 \Rightarrow 4 = 5, \text{ es V}$$

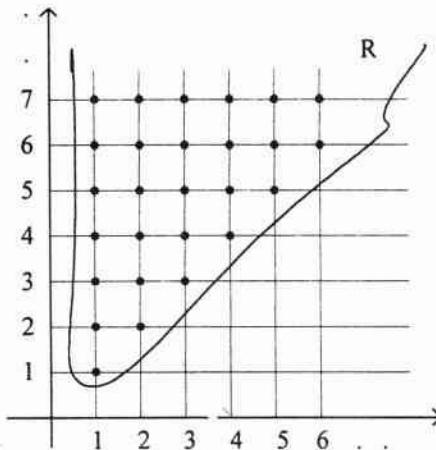
Son verdaderas porque los antecedentes son F, ya que $2 R 1, 3 R 1, 2 R 4$ y $5 R 4$ son F.

Ejemplo: Sea $A = \mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales y sea

$$R = \{(x, y) \in A^2 / x \leq y\}$$

- a) Representar R.
- b) Clasificar R.

SOLUCIÓN: a) La representación cartesiana de R es



b) Las propiedades que cumple R son:

- i) Si $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq x \Rightarrow x R x$, R es reflexiva
- ii) Si $x R y \Rightarrow x \leq y$, no necesariamente se sigue que $y \leq x$ (salvo si $x=y$), por lo cual R es no simétrica.
- iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x R z$, R es transitiva.
- iv) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, R es antisimétrica.

Ejemplo: En \mathbb{Z} , conjunto de los enteros se define R mediante

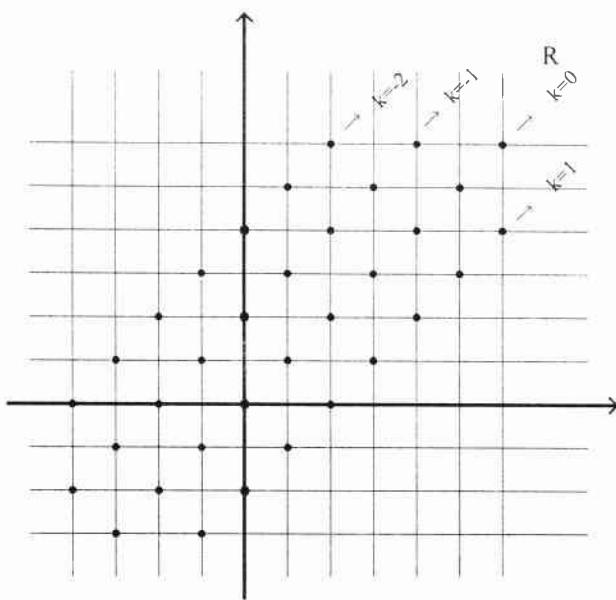
$$x R y \Leftrightarrow 2 | x - y$$

- a) Representar R.
- b) Clasificar R.

SOLUCIÓN: a) La relación R se puede escribir como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x - y = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Esta relación está representada por los puntos (x, y) tal que $x - y = 2k$ o $y = x - 2k$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$.



b) Las propiedades que cumple son:

- i) Si $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2|x-x$, o $x-x=2k$ si $k=0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x R x$, R es reflexiva.
- ii) Si $x R y \Rightarrow 2|x-y$, o $x-y=2k$ para cierto $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y-x=2(-k) \Rightarrow 2|y-x \Rightarrow y R x$, la relación es simétrica.
- iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow 2|x-y \wedge 2|y-z$, o $x-y=2k_1 \wedge y-z=2k_2$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Sumando estas ecuaciones, se obtiene

$x-z=2(k_1+k_2)$, como $k_1+k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2|x-z \Rightarrow x R z$, la relación es transitiva.

- iv) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow 2|x-y \wedge 2|y-x$, no necesariamente se sigue que $x=y$, ya que existen enteros diferentes como 6 y 2 tal que $2|6-2 \wedge 2|2-6$, es decir, $6 R 2 \wedge 2 R 6 \Rightarrow 6=2$ es F.

Por lo cual, la relación es no antisimétrica.

Ejemplo: En \mathbb{R} , vamos a considerar la relación binaria R definida mediante

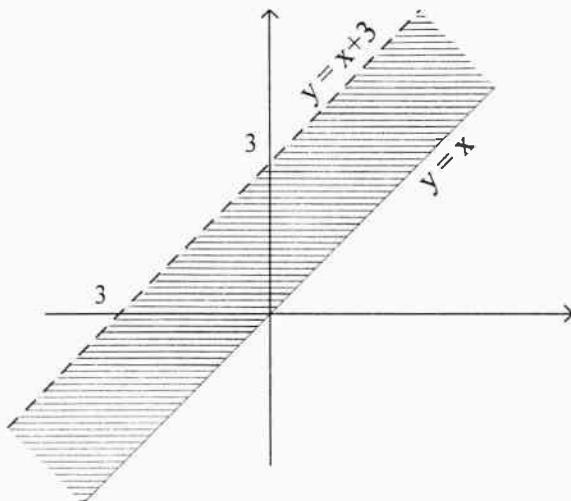
$$x R y \Leftrightarrow x \leq y < x+3$$

- a) Representar R
- b) Clasificar R .

SOLUCIÓN: a) La relación R se puede escribir como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x \wedge y < x + 3\}$$

Entonces su representación gráfica será:



b) Según se puede comprobar, se verifica que:

- i) Si $x \in R \Rightarrow x \leq x < x + 3 \Rightarrow x R x$ para todo $x \in R$, la relación es reflexiva.
- ii) Si $x R y \Rightarrow x \leq y < x + 3$, no necesariamente se sigue que $y \leq x < y + 3$, ya que esto se verifica solamente para $x=y$. Por tanto la relación es no simétrica.
- iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x \leq y < x + 3 \wedge y \leq z < y + 3$
 $\Rightarrow x \leq z < x + 6 \Rightarrow x R z$ para algunos $x, y, z \in R$

Como $1 R 1 \wedge 1 R 2 \Rightarrow 1 R 2$ es V

$3 R 4 \wedge 4 R 5 \Rightarrow 3 R 5$ es V, etc.

Pero $\exists x \exists y \exists z / x R y \wedge y R z \wedge x \not R z$

Como $3 R 4 \wedge 4 R 6$ pero $3 \not R 6$

o $2 R 4 \wedge 4 R 5$ pero $2 \not R 5$

Por tanto, la relación es no transitiva.

- iv) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x \leq y < x + 3 \wedge y \leq x < y + 3 \Rightarrow x = y$, la relación es antisimétrica.

6. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria R , definida en un conjunto A , es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Generalmente una relación de equivalencia se denota por " \sim "; para indicar que x está relacionado con y ($x R y$) se escribe " $x \sim y$ " y se lee " x es equivalente a y ".

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

Entonces R es una relación de equivalencia, ya que se verifica que:

- i) $\forall x \in A$ se cumple $x \sim x$ (o $x R x$), es decir, $1 \sim 1, 2 \sim 2, 3 \sim 3$ y $4 \sim 4$ son V, luego la relación es reflexiva.
- ii) Si $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (si $x R y \Rightarrow y R x$), es decir, si un par ordenado pertenece a la relación, su transpuesta también pertenece.

$$1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 1 \text{ es V}$$

luego la relación es simétrica.

- iii) Si $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$, es decir

$$1 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 1 \sim 2 \quad \text{es V}$$

$$1 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1 \quad \text{es V}$$

$$1 \sim 2 \wedge 2 \sim 2 \Rightarrow 1 \sim 2 \quad \text{es V}$$

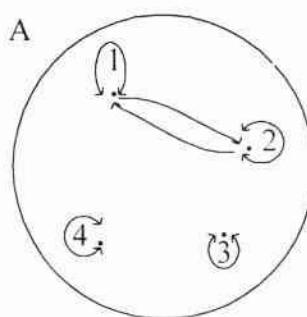
$$2 \sim 1 \wedge 1 \sim 1 \Rightarrow 2 \sim 1 \quad \text{es V}$$

$$2 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 2 \quad \text{es V}$$

$$2 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 2 \sim 1 \quad \text{es V}$$

luego la relación es transitiva.

El diagrama de Venn es



Ejemplo: Consideremos en \mathbb{Z} la relación binaria " \sim " definida mediante

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ es múltiplo de } 3.$$

- a) Probar que es de equivalencia.
- b) Representar la relación " \sim ".

SOLUCIÓN: a) La relación \sim se puede escribir como

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y = 3k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

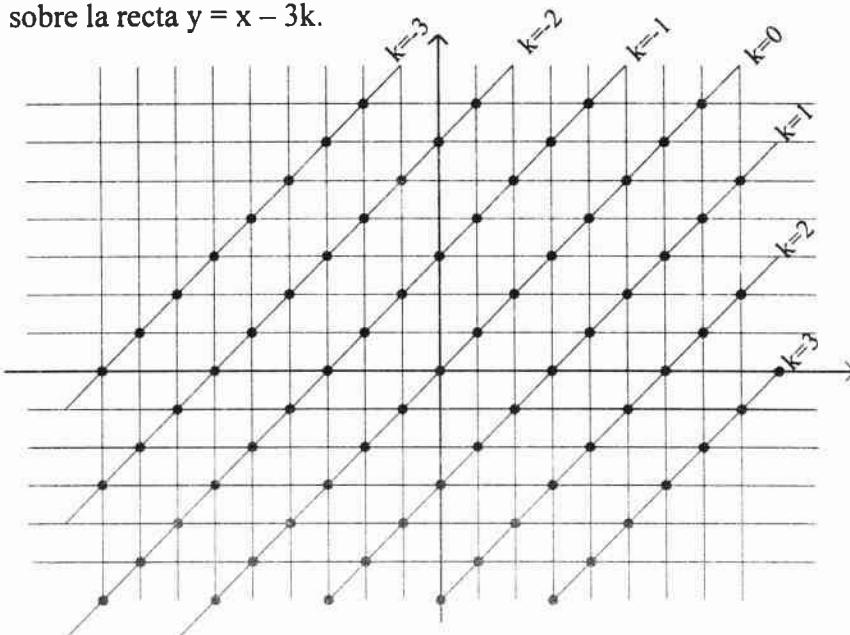
$$\text{o bien } \sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Luego, para probar que " \sim " es de equivalencia se debe verificar que:

- i) Si $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - x = 0 = 3(0)$, es múltiplo de 3 $\Rightarrow x \sim x$, la relación es reflexiva.
- ii) Si $x \sim y \Rightarrow x - y = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x = 3(-k), -k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim x$, la relación es simétrica.
- iii) Si $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x - y = 3k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \wedge y - z = 3k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow x - z = 3(k_1 + k_2), k_1 + k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim z$, la relación es transitiva.

Por tanto, la relación \sim es de equivalencia.

- b) Para cada $k \in \mathbb{Z}$ se determina el siguiente conjunto discreto de puntos sobre la recta $y = x - 3k$.



6.1 CLASES DE EQUIVALENCIA

Sea " \sim " una relación de equivalencia definida en un conjunto $A \neq \emptyset$ y sea $a \in A$. La clase de equivalencia de a (que contiene a a) se define como el conjunto de todos los x de A tales que sean equivalentes al a . Se denota esta clase de equivalencia por K_a , $[a]$ o a .

$$K_a = \{x \in A / a \sim x\}$$

Nótese que como \sim es reflexiva, $a \sim a$ para todo $a \in A$ de modo que $a \in K_a$. Por tanto, K_a nunca es vacía. Obsérvese asimismo que todas las clases de equivalencia son subconjunto de A , y son disjuntos dos a dos.

Teorema Si b pertenece a la clase de equivalencia de a , entonces la clase de equivalencia de b y la de a son idénticas, es decir,

$$b \in K_a \Rightarrow K_b = K_a$$

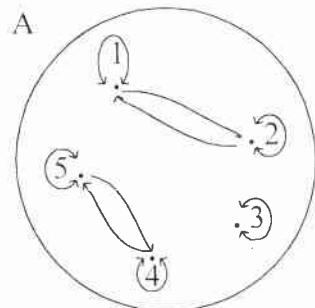
Este teorema muestra que una clase de equivalencia queda determinada por cualquiera de sus elementos, llamado representante de la clase. Asimismo se puede afirmar que dos elementos son equivalentes si y solo si estos elementos son miembros de la misma clase de equivalencia.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea \sim una relación de equivalencia en A definida como sigue

$$\sim = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (4, 5), (5, 4)\}$$

- a) Representar la relación en un diagrama de Venn.
- b) Determinar las clases de equivalencia.

SOLUCIÓN: a) El diagrama de Venn es



- b) La clase de equivalencia de **1** es el conjunto de todos los elementos de A que son equivalentes a **1**. Esto es

$$K_1 = \{1, 2\}$$

Asimismo, la clase de equivalencia de 2 es $K_2 = \{1, 2\}$,

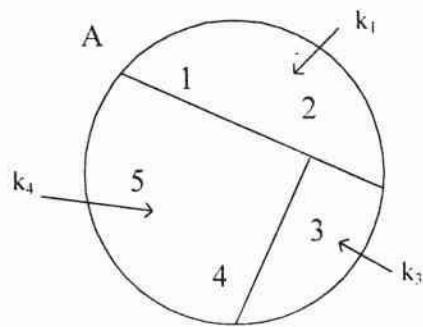
de donde $K_1 = K_2 = \{1, 2\}$

Análogamente se obtiene que

$$K_4 = K_5 = \{4, 5\}$$

Entonces, en este caso, los representantes de cada clase son: 1, 3 y 4.

Por tanto, se tiene tres clases de equivalencia, K_1 , K_3 y K_4 , que son subconjuntos de A. Las cuales forman una partición de A como sigue:



Obsérvese que $K_1 \cap K_3 = K_1 \cap K_4 = K_3 \cap K_4 = \emptyset$ y $K_1 \cup K_3 \cup K_4 = A$.

Nótese también que si dos elementos de A son equivalentes, estos pertenecen a la misma clase de equivalencia.

Entonces, el conjunto de todas las clases de equivalencia con respecto a \sim es una partición de A. Es decir, que una relación de equivalencia sobre un conjunto A produce una partición de dicho conjunto.

6.2 CONJUNTO DE ÍNDICES

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto dotado de una relación de equivalencia. Se denomina conjunto de índices a un conjunto formado por los representantes de cada clase de equivalencia. Es decir,

$$I = \{a \in A / K_a \text{ es una clase de equivalencia en } A\}$$

Así, en el ejemplo anterior el conjunto de índices es

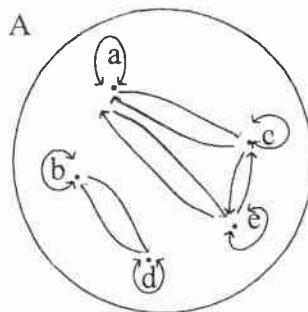
$$I = \{1, 3, 4\}$$

Ejemplo: En el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ se define una relación de equivalencia mediante:

$$\sim = \{(a,a), (a,c), (a,e), (b,b), (b,d), (c,a), (c,c), (c,e), (d,b), (d,d), (e,a), (e,c), (e,e)\}$$

Hallar las clases de equivalencia y conjunto de índices.

SOLUCIÓN: El diagrama de Venn es



Entonces, la clase de equivalencia de a , de c y de e son idénticas, esto es

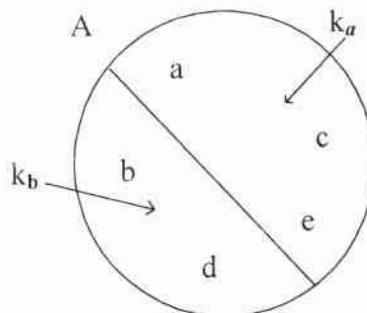
$$K_a = K_c = K_e = \{a, c, e\}$$

Asimismo, las clases de equivalencia de b y de d son iguales, esto es

$$K_b = K_d = \{b, d\}$$

El representante de la primera clase puede ser a , c o e , digamos a . Mientras el representante de la segunda clase puede ser b o d , escogemos b . Por tanto, se tiene dos clases de equivalencia, K_a y K_b , y el conjunto de índices es $I = \{a, b\}$.

El diagrama de Venn de A y las clases de equivalencia son



Nótese que las clases de equivalencia forman una partición de A .

6.3 CONJUNTO COCIENTE

Sea \sim una relación de equivalencia en un conjunto A. El conjunto de todas las clases de equivalencia de los elementos de A se llama conjunto cociente de A por \sim , se escribe A/\sim . Es decir,

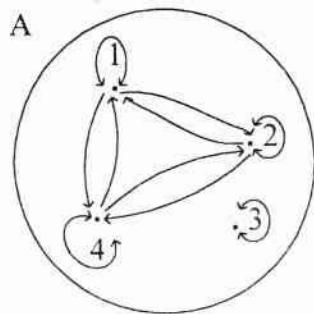
$$A/\sim = \{K_a / a \in I\}$$

Obsérvese que las clases de equivalencia son, por una parte, subconjuntos de A, y por otra, elementos del conjunto A/\sim .

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea \sim una relación de equivalencia definida como
 $\sim = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$

Hallar: las clases de equivalencia, el conjunto de índices y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: El diagrama de Venn es



Luego, la clase de equivalencia de los elementos 1, 2 y 4 son idénticas, es decir,

$$K_1 = K_2 = K_4 = \{1, 2, 4\}$$

la clase de equivalencia de 3 es

$$K_3 = \{3\}$$

Entonces, se tiene dos clases de equivalencia,

$$\{1, 2, 4\} \text{ y } \{3\}$$

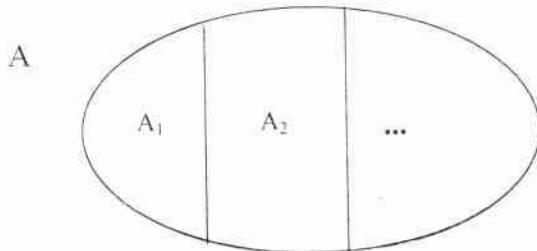
Si escogemos a 1 como representante de la primera clase y 3 es el único representante de la segunda clase, el conjunto de índices es

$$I = \{1, 3\}$$

El conjunto cociente, que está formado por todas las clases de equivalencia es

$$A / \sim = \{ K_1, K_3 \} = \{ \{1, 2, 4\}, \{3\} \}$$

Teorema Toda partición de un conjunto A permite definir en éste una relación de equivalencia " \sim " en la que las clases de equivalencia son los bloques de la partición.



Si $\{A_1, A_2, \dots\}$ es una partición de A, entonces según el teorema cada A_i es una clase de equivalencia de A. En donde la relación de equivalencia se define como sigue:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son miembros del mismo bloque}$$

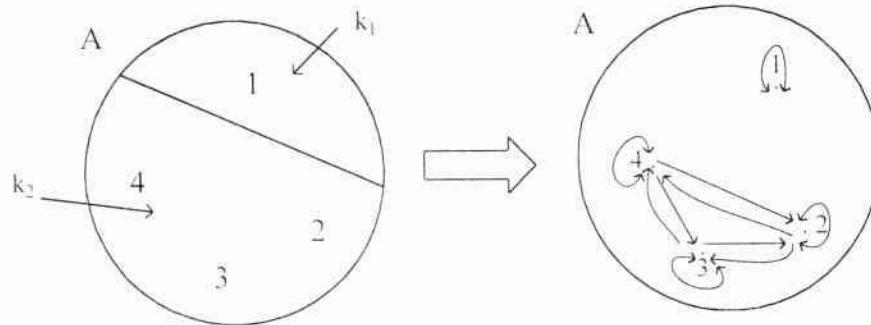
Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, y sea $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ una partición de A.

Determinar la relación de equivalencia correspondiente \sim en A.

SOLUCIÓN: Ya que las clases de equivalencia de los elementos de A son los bloques de la partición, se tiene

$$K_1 = \{1\}, \quad K_2 = \{2, 3, 4\}$$

En diagrama de Venn es



A partir de la definición de la clase de equivalencia y el hecho de que \sim es una relación de equivalencia, se tiene que

$$\sim = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

tal como se muestra en el segundo diagrama de Venn.

Ejemplo: Sea $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Se define una relación R en A mediante

$$x R y \Leftrightarrow 3 | x - y, \text{ (3 divide } x - y)$$

- Demuestre que R es de equivalencia.
- Determine las clases de equivalencia.
- Determine el conjunto cociente A / \sim .

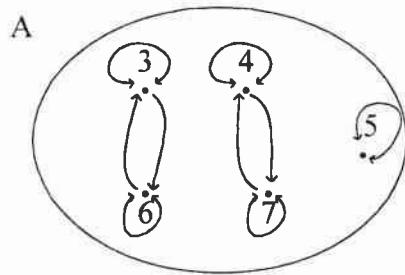
SOLUCIÓN: La relación R puede escribirse como

$$R = \{(x, y) \in A^2 / 3 | x - y\}$$

Por extensión se tiene

$$R = \{(3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (3,6), (6,3), (4,7), (7,4)\}$$

El diagrama de Venn correspondiente es



- La relación R cumple las siguientes propiedades:

- $\text{Si } x \in A \Rightarrow 3 | x - x \Rightarrow x R x, \text{ para todo } x \in A.$

Es decir, cada elemento de A está relacionado consigo mismo, la relación es reflexiva.

- $\text{Si } x R y \Rightarrow 3 | x - y \Rightarrow 3 | y - x \Rightarrow y R x, \text{ para todo } (x, y) \in R.$

Así, tenemos $3 R 6 \Rightarrow 6 R 3$ es V

$4 R 7 \Rightarrow 7 R 4$ es V

la relación R es simétrica.

- $\text{Si } x R y \wedge y R z \Rightarrow 3 | x - y \wedge 3 | y - z \Rightarrow 3 | x - z \Rightarrow x R z$

Es decir, $3 R 3 \wedge 3 R 6 \Rightarrow 3 R 6$ es V

$4 R 7 \wedge 7 R 4 \Rightarrow 4 R 4$ es V

la relación R es transitiva.

Por tanto, R es de equivalencia y se denota por \sim .

- b) La clase de equivalencia de los elementos 3 y 6 son idénticas,

$$K_3 = K_6 = \{3, 6\}$$

la clase de equivalencia de los elementos 4 y 7 son iguales,

$$K_4 = K_7 = \{4, 7\}$$

la clase de equivalencia de 5 es

$$K_5 = \{5\}$$

- c) El conjunto cociente es

$$A / \sim = \{K_3, K_4, K_5\} = \{\{3, 6\}, \{4, 7\}, \{5\}\}$$

El conjunto de índices $I = \{3, 4, 5\}$

Ejemplo: En \mathbb{Z} se define una relación de equivalencia \sim mediante

$$x \sim y \Leftrightarrow 5 | x - y \quad (5 \text{ divide } x - y)$$

- a) Determine las clases de equivalencia.
 b) Determine el conjunto de índices.
 c) Determine el conjunto cociente \mathbb{Z} / \sim .

SOLUCIÓN: La relación \sim puede escribirse como

$$\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / 5 | x - y\}$$

Esto significa que dos enteros son equivalentes si y sólo si la diferencia de éstos es divisible por 5, o es múltiplo de 5.

- a) La clase de equivalencia de 0 es

$$K_0 = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\} = \{5k / k \in \mathbb{Z}\}$$

la clase de equivalencia de 1 es

$$K_1 = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ...\} = \{5k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$$

la clase de equivalencia de 2 es

$$K_2 = \{..., -8, -3, 2, 7, 12, ...\} = \{5k + 2 / k \in \mathbb{Z}\}$$

La clase de equivalencia de 3 es

$$K_3 = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\} = \{5k + 3 / k \in \mathbb{Z}\}$$

La clase de equivalencia de 4 es

$$K_4 = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots \} = \{ 5k + 4 / k \in \mathbb{Z} \}$$

Asimismo, tenemos que

$$K_0 = \dots = K_{-10} = K_{-5} = K_5 = \dots$$

$$K_1 = \dots = K_{-9} = K_{-4} = K_6 = \dots$$

$$K_2 = \dots = K_{-8} = K_{-3} = K_7 = \dots$$

.

.

.

Por tanto, existen cinco clases de equivalencia K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 , que forman una partición de \mathbb{Z} .

- b) El conjunto de índices es

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

- c) El conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/\sim = \{ K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 \}$$

Ejemplo: En \mathbb{R} se define una relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow |x - 1| = |y - 1|$$

- a) Demuestre que R es de equivalencia.
- b) Representar R.
- c) Determine las clases de equivalencia.
- d) Determine el conjunto de índices y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: La relación R puede escribirse como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x - 1| = |y - 1|\}$$

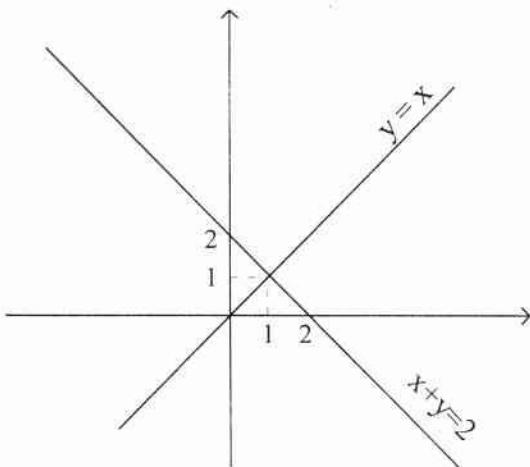
- a) La relación R cumple las siguientes propiedades:
 - i) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - 1| = |x - 1| \Rightarrow x R x$, la relación es reflexiva.
 - ii) Si $x R y \Rightarrow |x - 1| = |y - 1| \Rightarrow |y - 1| = |x - 1| \Rightarrow y R x$, la relación es simétrica.
 - iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow |x - 1| = |y - 1| \wedge |y - 1| = |z - 1| \Rightarrow |x - 1| = |z - 1| \Rightarrow x R z$, la relación es transitiva.

Por tanto, la relación R es de equivalencia y se denota por \sim .

- b) La relación \sim es el conjunto de puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tales que $|x-1|=|y-1|$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (y-1)^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x+y=2.$$

$$\text{Así, } \sim = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \vee x+y=2\}$$



- c) La clase de equivalencia de un elemento $a \in \mathbb{R}$ es

$$\begin{aligned} K_a &= \{x \in \mathbb{R} / x \sim a\} = \{x \in \mathbb{R} / x = a \vee x = 2 - a\} \\ &= \{a, 2 - a\}, \text{ para todo } a \geq 1. \end{aligned}$$

- d) El conjunto de índices es $I = [1, \infty[$

El conjunto cociente es $\mathbb{R} / \sim = \{K_a / a \in [1, \infty[\}$

Ejemplo: En \mathbb{Z}^2 se define una relación R mediante

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x = a$$

- a) Demuestre que R es de equivalencia.
- b) Determine las clases de equivalencia
- c) Determine el conjunto de índices y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: a) La relación R es de equivalencia sí y sólo sí cumple las propiedades:

- i) Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \Rightarrow x = x \Rightarrow (x, y) R (x, y)$, R es reflexiva.
- ii) Si $(x, y) R (a, b) \Rightarrow x = a \Rightarrow a = x \Rightarrow (a, b) R (x, y)$, R es simétrica.
- iii) Si $(x, y) R (a, b) \wedge (a, b) R (u, v) \Rightarrow x = a \wedge a = u \Rightarrow x = u \Rightarrow (x, y) R (u, v)$, R es transitiva.

Por tanto, la relación R es de equivalencia y se denota por \sim .

- b) La clase de equivalencia de un elemento $(a, 0) \in \mathbb{Z}^2$ es

$$K_{(a,0)} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / (a, 0) \sim (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / a = x\}$$

- c) El conjunto de índices es

$$I = \{(a, 0) / a \in \mathbb{Z}\}$$

El conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}^2 / \sim = \{K_{(a,0)} / a \in \mathbb{Z}\}$$

Ejemplo: En \mathbb{R}^2 se define una relación R mediante

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x + y = a + b$$

- d) Demuestre que R es de equivalencia.
e) Determine las clases de equivalencia
f) Determine el conjunto de índices y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: a) La relación R es de equivalencia si y sólo sí cumple las propiedades:

- i) Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x + y = x + y \Rightarrow (x, y) R (x, y)$, R es reflexiva.
- ii) Si $(x, y) R (a, b) \Rightarrow x + y = a + b \Rightarrow a + b = x + y \Rightarrow (a, b) R (x, y)$, R es simétrica.
- iii) Si $(x, y) R (a, b) \wedge (a, b) R (u, v) \Rightarrow x + y = a + b \wedge a + b = u + v \Rightarrow x + y = u + v$
 $\Rightarrow (x, y) R (u, v)$, R es transitiva.

Por tanto, la relación R es de equivalencia y se denota por \sim .

- b) La clase de equivalencia de un elemento $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$ es

$$K_{(a,0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (a, 0) \sim (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a = x + y\}$$

- c) El conjunto de índices es $I = \{(a, 0) / a \in \mathbb{R}\}$

$$\text{El conjunto cociente es } \mathbb{R}^2 / \sim = \{K_{(a,0)} / a \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo: En \mathbb{R}^2 se define una relación R mediante

$$(x, y) R (a, b) \Leftrightarrow x - y = a - b$$

- a) Probar que R es de equivalencia.
b) Obtener las clases de equivalencia
c) Determinar un conjunto de índices y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: a) La relación R es de equivalencia, ya que se verifica que:

- i) Si $(x, y) \in R^2 \Rightarrow x = y \Rightarrow (x, y) R (x, y)$, R es reflexiva.
- ii) Si $(x, y) R (a, b) \Rightarrow x = a \wedge y = b \Rightarrow (a, b) R (x, y)$, R es simétrica.
- iii) Sí $(x, y) R (a, b) \wedge (a, b) R (u, v) \Rightarrow x = a \wedge y = b \wedge u = a \wedge v = b \Rightarrow x = u \wedge y = v \Rightarrow (x, y) R (u, v)$, R es transitiva.

b) La clase de equivalencia de un elemento $(a, b) \in R^2$ es

$$\begin{aligned} K_{(a,b)} &= \{(x, y) \in R^2 / (x, y) R (a, b)\} = \{(x, y) \in R^2 / x = a \wedge y = b\} \\ &= \{(x, y) \in R^2 / x = y\}, \text{ donde } k = a = b \end{aligned}$$

Esta clase de equivalencia es una hipérbola para todo $k \in R$.

c) Un conjunto de índices es $I = \{(a, b) \in R^2 / b = |a|\}$

El conjunto cociente es $R^2 / \sim = \{K_{(a,b)} / (a, b) \in I\}$

Ejemplo: Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2\}$. En $P(A)$ se define la siguiente relación mediante

$$X R Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$$

- a) Muestre que es una relación de equivalencia.
- b) Describa sus clases de equivalencia.
- c) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN: a) La relación R es de equivalencia, ya que se verifica que:

- i) Si $X \in P(A) \Rightarrow X \cap B = X \cap B \Rightarrow X R X$, R es reflexiva.
- ii) Si $X R Y \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow Y \cap B = X \cap B \Rightarrow Y R X$, R es simétrica.
- iii) Sí $X R Y \wedge Y R Z \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \wedge Y \cap B = Z \cap B \Rightarrow X \cap B = Z \cap B \Rightarrow X R Z$, R es transitiva.

b) Las clases de equivalencia son

$$\begin{aligned} K_\emptyset &= \{X \in P(A) / X \cap B = \emptyset\}, \quad K_{\{1\}} = \{X \in P(A) / X \cap B = \{1\}\} \\ K_{\{2\}} &= \{X \in P(A) / X \cap B = \{2\}\}, \quad K_{\{1,2\}} = \{X \in P(A) / X \cap B = \{1, 2\}\} \end{aligned}$$

c) Un conjunto de índices es $I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

El conjunto cociente es $P(A) / \sim = \{K_\emptyset, K_{\{1\}}, K_{\{2\}}, K_{\{1,2\}}\}$

7. RELACIONES DE ORDEN

Es frecuente en matemática y en la actividad corriente tener que considerar conjuntos cuyos elementos aparecen en cierto orden; tales como, por ejemplo, el conjunto de días de la semana, el conjunto de tareas que deben realizarse para construir una casa, el conjunto de números naturales, etc. Ahora estableceremos con toda generalidad el concepto de conjunto ordenado, destacando las propiedades que reflejan la esencia matemática de dicha noción de orden.

Cuando queremos referirnos a un orden cualquiera sin precisar a cual, usaremos el término genérico "preceder". Así, una relación definida en un conjunto por

$$x R y \Leftrightarrow "x precede a y" \quad (x, y \text{ son comparables})$$

se dice que es de orden amplio o estricto, y en cada caso, es de orden parcial o total, según se cumplan las propiedades que se citan a continuación.

7.1 RELACIONES DE ORDEN AMPLIO

Una relación R en un conjunto A se llama relación de orden amplio, o simplemente relación de orden, si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es decir,

- i) Sí $x \in A \Rightarrow x R x$
- ii) Sí $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$
- iii) Sí $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea R una relación definida por $x R y \Leftrightarrow x \leq y$

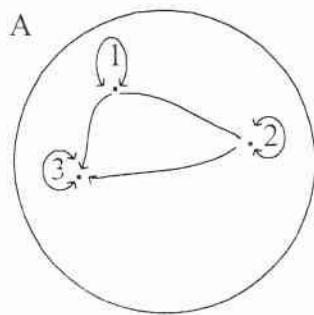
Entonces la relación R es de orden amplio, ya que cumple las propiedades:

- i) Si $x \in A \Rightarrow x \leq x \Rightarrow x R x$, R es reflexiva.
- ii) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, R es antisimétrica.
- iii) $x R y \wedge y R z \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x R z$, R es transitiva.

La relación R por extensión se tiene

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

El diagrama de Venn es



Obsérvese que todos los elementos de A son comparables dos a dos por la relación de "menor o igual".

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea R una relación definida por

$$x R y \Leftrightarrow x | y$$

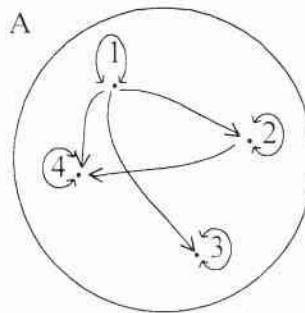
Entonces R es una relación de orden amplio, ya que cumple las propiedades:

- i) Si $x \in A \Rightarrow x | x \Rightarrow x R x$, R es reflexiva.
- ii) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x | y \wedge y | x \Rightarrow x = y$, R es antisimétrica.
- iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x | y \wedge y | z \Rightarrow x | z \Rightarrow x R z$, R es transitiva.

La relación R por extensión se tiene

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$$

El diagrama de Venn es



Obsérvese que existen elementos de A que no son comparables por la relación de "divisor". Esto Es, $3 \text{ y } 4 \in A$ pero $3|4$ y $4|3$ son F.

7.1.1 RELACIONES DE ORDEN PARCIAL Y TOTAL

Sea R una relación de orden amplio definida en un conjunto A.

- 1) Cuando todos los elementos de A son comparables dos a dos, el orden se llama total.

Es decir, si

$$x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$$

Por ejemplo, la relación del ejemplo anterior, en donde ésta se define por "menor o igual" (\leq), es de orden amplio y total, ya que todos los elementos de A son comparables por dicha relación.

- 2) Cuando existen pares de elementos de A que no son comparables, el orden se llama parcial. Es decir,

$$\exists x, \exists y / x \not R y \wedge y \not R x$$

Por ejemplo, la relación del ejemplo anterior, en donde ésta se define por "divisor", es de orden amplio y parcial, ya que existen elementos como 2 y 3 de A tales que $2|3$ y $3|2$ son F.

Por tanto, la palabra "parcial" en estos conjuntos significa que algunos elementos podrían no ser comparables.

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c\}$. En $P(A)$ se define la relación de inclusión por

$$X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

Entonces la relación de inclusión es de orden amplio y parcial, ya que cumple las propiedades:

- i) Si $X \in P(A) \Rightarrow X \subset X \Rightarrow X R X$, R es reflexiva.
- ii) Si $X R Y \wedge Y R X \Rightarrow X \subset Y \wedge Y \subset X \Rightarrow X = Y$, R es antisimétrica.
- iii) Si $X R Y \wedge Y R Z \Rightarrow X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z \Rightarrow X R Z$, R es transitiva.

Por otra parte, este orden amplio es parcial, pues existen pares de conjuntos de $P(A)$ que no son comparables por la relación de inclusión.

Por ejemplo $\{a\}$ y $\{b\}$ ya que $\{a\} \subset \{b\}$ y $\{b\} \subset \{a\}$ son F.

Ejemplo: En \mathbb{Z} la relación "menor o igual" es de orden amplio y total. Pues, si $xRy \Leftrightarrow x \leq y$, entonces:

- i) Si $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \leq x \Rightarrow x R x$, R es reflexiva.
- ii) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$, R es antisimétrica.
- iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x R z$, R es transitiva.

Pero este orden amplio es total, ya que todos los enteros son comparables dos a dos por la relación de "menor o igual". O sea, si

$$x \neq y \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x \Rightarrow x R y \vee y R x$$

7.2 RELACIONES DE ORDEN ESTRICTO

Una relación R definida en un conjunto A se llama relación de orden estricto si es arreflexiva, asimétrica y transitiva. Es decir,

- i) Sí $x \in A \Rightarrow x \not R x$
- ii) Sí $x R y \Rightarrow x \not R y$
- iii) Sí $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Al igual que el orden amplio, el orden estricto puede ser parcial o total. Es decir, el orden estricto es parcial si existe por lo menos algún par de elementos de A que no son comparables por dicha relación, en caso contrario el orden estricto es total.

Ejemplo: En \mathbb{N} la relación de "menor" es de orden estricto y total, pues dicha relación, definida por $x R y \Leftrightarrow x < y$, cumple las propiedades:

- i) Sí $x \in A \Rightarrow x \neq x \Rightarrow x \not R x$. R es arreflexiva.
- ii) Sí $x R y \Rightarrow y \neq x \Rightarrow y \not R x$, R es asimétrica.
- iii) Sí $x R y \wedge y R z \Rightarrow x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z \Rightarrow x R z$, R es transitiva.

Por otra parte, si $x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x \Rightarrow x R y \vee y R x$, es decir, todos los números naturales son comparables dos a dos por la relación de "menor".

Ejemplo: Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea R una relación dada por
 $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$

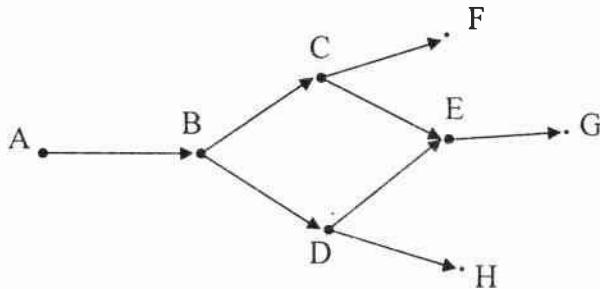
Entonces la relación R es de orden estricto y parcial, pues cumple las propiedades:

- i) Sí $x \in A \Rightarrow x \not R x$, cada elemento de A no está relacionado consigo mismo. R es arreflexiva.
- ii) Sí $x R y \Rightarrow y \not R x$, es decir, si $a R b \Rightarrow b \not R a$, $a R c \Rightarrow c \not R a$ son V. R es asimétrica.
- iii) Sí $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$, es decir, si $a R b \wedge b R d \Rightarrow a R d$, si $a R c \wedge c R d \Rightarrow a R d$ son V. R es transitiva.

Por otra parte, existen pares de elementos de A que no están relacionados por R , tales como b y $c \in A$, ya que $b R c$ y $c R b$ son F.

7.3 DIAGRAMA DE HASSE

Consideremos un sistema ferroviario con diversos ramales como se indica en el siguiente esquema, donde los puntos A, B, C, D, E, F, G y H representan las diversas estaciones.



Si un tren sale de la estación A , pasará antes por la estación B que por C o D , de manera que podemos decir, por ejemplo: A es anterior a B , ésta es anterior a cualquiera de las demás, C es anterior a F , E y G , pero no es anterior a D (ni a H) ni es D anterior a C (ni a F). Por tanto, el esquema en consideración representa al conjunto de estaciones ordenadas por la relación de "anterioridad". Esquemas o diagramas como éste se llaman de Hasse.

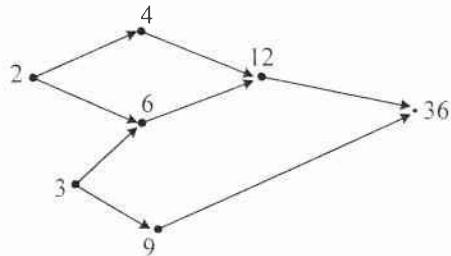
Dada cualquier relación de orden (estricto o no) podemos representar un conjunto ordenado mediante un diagrama, llamado de Hasse, similar al del sistema ferroviario.

Obsérvese que en el ejemplo considerado, los subconjuntos de estaciones $\{A, B, C, F\}$, $\{A, B, C, E, G\}$, $\{A, B, D, E, G\}$ Y $\{A, B, D, H\}$, así como cualesquiera de los subconjuntos de éstos, constituyen cadenas respecto a la relación de "anterioridad", esto es, sobre cada uno de esos subconjuntos la relación citada induce un orden total.

Ejemplo: Sea $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$ y sea R una relación de divisor definida por $x R y \Leftrightarrow x | y$

Entonces esta relación es de orden amplio y parcial, pues cumple las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por otra parte, existen pares de elementos de A que no están relacionados por la relación de "divisor".

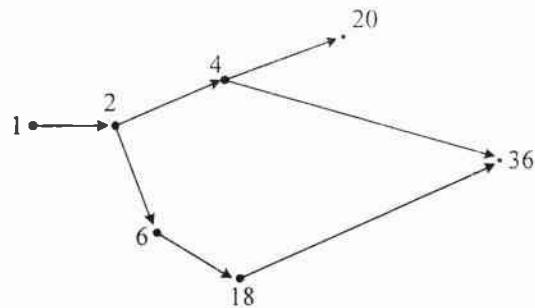
El diagrama de Hasse correspondiente es



Donde, cada uno de los subconjuntos: $\{2, 4, 12, 36\}$, $\{2, 6, 12, 36\}$, $\{3, 6, 12, 36\}$ y $\{3, 9, 36\}$ constituyen una cadena respecto a la relación de "divisor". Es decir, cada uno de estos subconjuntos son totalmente ordenados por la relación citada. Sin embargo, el conjunto A queda parcialmente ordenado por la misma relación.

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 4, 6, 18, 20, 36\}$ y sea R una relación de divisor, definida por $x R y \Leftrightarrow x | y$

Es fácil comprobar que esta relación es de orden amplio y parcial. El correspondiente diagrama de Hasse es



Entonces los subconjuntos totalmente ordenados por la relación de "divisor" (cadenas) son:

$$\{1, 2, 4, 20\}, \{1, 2, 4, 36\} \text{ y } \{1, 2, 6, 18, 36\}$$

Por otra parte, el conjunto A resulta parcialmente ordenado por la misma relación.

Ejemplo: En $A = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$, consideramos la relación de inclusión definida por

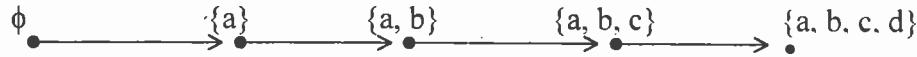
$$X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

Entonces esta relación es de orden amplio y total, pues

- i) Si $x \in A \Rightarrow X \subset X \Rightarrow X R X$, R es reflexiva.
- ii) Si $X R Y \wedge Y R X \Rightarrow X \subset Y \wedge Y \subset X \Rightarrow X = Y$, R es antisimétrica.
- iii) Si $X R Y \wedge Y R Z \Rightarrow X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z \Rightarrow X R Z$, R es transitiva.

Además, en cada par de elementos cualesquiera de A, uno de ellos está incluido en el otro.

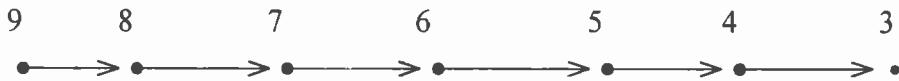
El correspondiente diagrama de Hasse es



Obsérvese, que el diagrama de Hasse muestra una sola cadena. esto significa que todos los elementos de A son comparables por la relación de inclusión y que es un conjunto totalmente ordenado por la misma relación.

Ejemplo: En $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se considera la relación de "mayor" definida por $x R y \Leftrightarrow x > y$

Entonces R es una relación de orden estricto y total, pues todos los elementos de A son comparables por dicha relación. Así, el diagrama de Hasse correspondiente es:



Por tanto, el conjunto A resulta totalmente ordenado por la relación de "mayor".

7.4. ELEMENTOS EXTREMOS DE UN CONJUNTO ORDENADO

Sea A un conjunto ordenado por una relación de orden R (estricto o no), y se denota por (A, R) .

7.4.1. PRIMERO Y ULTIMO ELEMENTO

Un elemento $x \in A$ se llama primer elemento de A si precede a todos los demás. Es decir

$$x \in A \text{ es el primer elemento} \Leftrightarrow c \in A \Rightarrow x R c$$

Un elemento $y \in A$ se llama último elemento si todo elemento de A precede a y . Es decir

$$y \in A \text{ es el último elemento} \Leftrightarrow c \in A \Rightarrow c R y$$

7.4.2. ELEMENTOS MINIMALES Y MAXIMALES

Un elemento $m \in A$ se llama minimal si no existe un elemento distinto que lo preceda (antecede). Es decir

$$m \in A \text{ es minimal} \Leftrightarrow \forall c \in A : c R m \Rightarrow m = c$$

Un elemento $n \in A$ se llama maximal si no existe en A un elemento distinto que lo siga. Es decir

$$n \in A \text{ es maximal} \Leftrightarrow \forall c \in A : n R c \Rightarrow n = c$$

7.4.3. COTAS INFERIORES Y SUPERIORES

Un elemento $a \in A$ es una cota inferior del subconjunto $X \subset A$ si precede a todo elemento de X . Es decir

$$a \in A \text{ es cota inferior de } X \subset A \Leftrightarrow c \in X \Rightarrow a R c$$

Un elemento $b \in A$ es una cota superior del subconjunto $X \subset A$ si sigue a todo elemento de X . Es decir

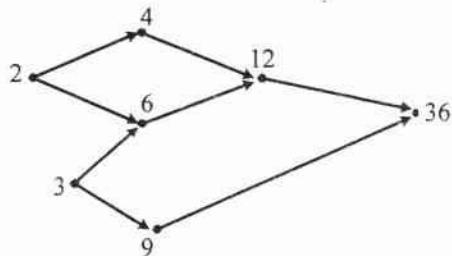
$$b \in A \text{ es cota superior de } X \subset A \Leftrightarrow c \in X \Rightarrow c R b$$

7.4.4 MÍNIMA COTA SUPERIOR Y MÁXIMA COTA INFERIOR

Un elemento $s \in A$ se llama mínima cota superior (supremo) del subconjunto $X \subset A$ si es el primer elemento del conjunto de las cotas superiores.

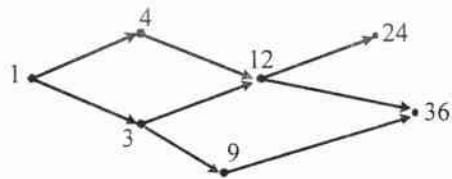
Un elemento $i \in A$ se llama máxima cota inferior (ínfimo) del subconjunto $X \subset A$ si es el último elemento del conjunto de las cotas inferiores.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$ ordenado por la relación de "divisor", que es de orden amplio y parcial, cuyo diagrama de Hasse es



Si $B = \{2, 4, 6, 12\}$ es un subconjunto de A , entonces se tiene que: El primer elemento y el minimal de B son 2, el último elemento y el maximal es 12, cota inferior y el ínfimo son 2, cotas superiores son 12 y 36, y el supremo es 12.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1, 3, 4, 9, 12, 24, 36\}$ ordenado por la relación de divisor, la cual es de orden amplio y parcial, y cuyo diagrama de Hasse es



El primer elemento de A es 1, ya que es el único elemento que es divisor de todos los demás, pero éste también es el minimal, cota inferior y el ínfimo. Carece de último elemento, de cota superior y el supremo, pero tanto 24 como 36 son maximales.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ordenado por la relación de "menor", que es de orden estricto y total, y cuyo diagrama de Hasse es



El primer elemento y minimal de A es 1, el último elemento y maximal es 7. Como tanto $1 < 1$ y $7 < 7$ son F, entonces carece de cota inferior, ínfimo, cota superior y supremo.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ordenado por la relación de "menor o igual", que es de orden amplio y total, y cuyo diagrama de Hasse es



El primer elemento de A es 1, que es también minimal, cota inferior e ínfimo. Análogamente, el último elemento 7, que a su vez es maximal, cota superior y supremo.

8. EJEMPLOS ADICIONALES

Ejemplo: Sean A, B conjuntos con $\eta(A) = 4$. Si existen 4096 relaciones de A en B, determinar $\eta(B)$.

SOLUCIÓN: Como el producto cartesiano $A \times B$ tiene $\eta(A) \cdot \eta(B) = 4n$ elementos, donde $n = \eta(B)$, el número de relaciones de A en B es

$$2^{4n} = 4096$$

de donde $n = 3$

Ejemplo: La relación vacía, $R = \emptyset$, definida en un conjunto $A \neq \emptyset$ verifica las propiedades:

- i) Si $x \in A \Rightarrow x R x$ es V, ya que el consecuente de la implicación es V.
La relación vacía es arreflexiva.
- ii) Si $x R y \Rightarrow y R x$ es V, ya que el antecedente de la implicación es F.
La relación vacía es simétrica.
- iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$ es V, pues el antecedente de la implicación es F. La relación vacía es transitiva.
- iv) Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$ es V, pues el antecedente de la implicación es F. La relación vacía es antisimétrica.

Ejemplo: Dado un conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde $\eta(A^2) = n^2$, de modo que hay 2^{n^2} relaciones sobre A. ¿Cuántas de ellas son reflexivas?

SOLUCIÓN: Si escribimos $A^2 = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{(x_i, x_i) / 1 \leq i \leq n\}$ y

$A_2 = \{(x_i, x_j) / i \neq j \wedge i \geq 1, j \leq n\}$, se tiene $\eta(A_1) = n$ y

$$\eta(A_2) = \eta(A^2) - \eta(A_1) = n^2 - n.$$

Una relación R sobre A es reflexiva si y solo si $A_1 \subset R$, así, la unión de

A_1 con cada uno de los 2^{n^2-n} subconjuntos de A_2 es una relación reflexiva.

Es decir

$$\forall B \subset A_2 : R = A_1 \cup B \text{ es una relación reflexiva.}$$

Por tanto, existen 2^{n^2-n} relaciones reflexivas sobre A.

Ejemplo: Dado un conjunto $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, en donde se puede definir 2^{n^2} relaciones binarias. ¿Cuántas de estas relaciones son simétricas?

SOLUCIÓN: Al igual que en el ejemplo anterior escribimos $A^2 = A_1 \cup A_2$, donde

$$A_1 = \{(x_i, x_j) / 1 \leq i \leq n\} \text{ y } A_2 = \{(x_i, x_j) / i \neq j \wedge i \geq 1, j \leq n\}$$

Como $\eta(A_2) = n^2 - n = n(n-1)$, un entero par, el conjunto A_2 contiene

$\frac{n^2 - n}{2}$ subconjuntos $\{b_{ij}\}$ de la forma $\{(x_i, x_j), (x_j, x_i)\}$ donde

$1 \leq i < j \leq n$. Así, asociando tales elementos en A_2 se tiene

$$A_2^* = \{b_{ij} / 1 \leq i \leq j \leq n\}, \quad \eta(A_2^*) = \frac{n^2 - n}{2}$$

Una relación R sobre A es simétrica si y solo si $R = B_1 \cup B_2$, donde B_1 , es

uno de los 2^n subconjuntos de A_1 y B_2 es uno de los $2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$ subconjuntos de A_2^* .

Por tanto, existen $2^n \cdot 2^{\frac{1}{2}(n^2-n)} = 2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$ relaciones simétricas sobre A .

Ejemplo: Si R y S son dos relaciones transitivas en A , demuestre que $R \cap S$ es transitiva.

SOLUCIÓN: Como R y S son dos relaciones transitivas, entonces se tiene

$$\begin{aligned} x(R \cap S)y \wedge y(R \cap S)z &\Rightarrow (x, y) \in (R \cap S) \wedge (y, z) \in (R \cap S) \\ &\Rightarrow (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R \wedge (y, z) \in S \\ &\Rightarrow xRy \wedge xSy \wedge yRz \wedge ySz \\ &\Rightarrow (xRy \wedge yRz) \wedge (xSy \wedge ySz) \\ &\Rightarrow xRz \wedge xSz \Rightarrow (x, z) \in R \wedge (x, z) \in S \\ &\Rightarrow (x, z) \in (R \cap S) \Rightarrow x(R \cap S)z \end{aligned}$$

Por tanto, la relación $R \cap S$ también es transitiva.

Ejemplo: Sean R y S dos relaciones de orden amplio y parcial definidas en los conjuntos A y B, respectivamente. Es decir, (A, R) y (B, S) son dos conjuntos parcialmente ordenados por dichas relaciones. En $A \times B$ se define una relación T mediante

$$(x,y) T (a,b) \Leftrightarrow xRa \wedge ySb$$

Demuestre que T es de orden amplio y parcial.

SOLUCIÓN: Considerando que R y S son de orden amplio y total, se tiene

- i) Si $(x,y) \in A \times B \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \Rightarrow xRx \wedge ySb$
 $\Rightarrow (x,y) T (x,y)$, T es reflexiva.
- ii) Si $(x,y) T (a,b) \wedge (a,b) T (x,y) \Rightarrow xRa \wedge ySb \wedge aRx \wedge bSy$
 $\Rightarrow (xRa \wedge aRx) \wedge (ySb \wedge bSy)$
 $\Rightarrow x = a \wedge y = b \Rightarrow (x, y) = (a, b)$

T es antisimétrica.

- iii) Si $(x,y) T (a,b) \wedge (a,b) T (u,v) \Rightarrow xRa \wedge ySb \wedge aRu \wedge bSv$
 $\Rightarrow (xRa \wedge aRu) \wedge (ySb \wedge bSv)$
 $\Rightarrow x R u \wedge y S v$
 $\Rightarrow (x, y) T (u, v)$, T es transitiva.

Si $\exists x \exists a / x \not R a \wedge a \not R x \wedge \exists y \exists b / y \not S b \wedge b \not S y$

$$\Rightarrow \exists (x,y) \exists (a,b) / (x,y) \not T (a,b) \wedge (a,b) \not T (x,y)$$

"La preparación profesional es el más seguro de los bienes de la vida, saber algo con perfección, es poseer en sí mismo, la hacienda del porvenir. La vida ha dejado de ser la ciencia de los sabios, para ser el arte de los preparados".

Man Césped

EJERCICIOS

1. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x \in N / 1 < x \leq 6\}$, y sea R una relación de A en B definida por

$$x R y \Leftrightarrow x > y - 2$$

- a) Definir R por extensión.
- b) Representar $A \times B$ y R .
- c) Determinar R^{-1} .

2. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, y sea R una relación de A en B definida por

$$x R y \Leftrightarrow x + y \text{ es par.}$$

- a) Determinar R y R^{-1} por extensión.
- b) Representar $A \times B$ y R .
- c) Determinar dominio e imagen de R .

3. Dados los conjuntos $A = \{x \in Z / (x^2 - 2)^2 = x^2\}$

$$B = \{x \in N / 1 < x \leq 5\}$$

$$B = \{x \in Z / -3 < x \leq 3\}$$

y las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$ se definen mediante

$$x R y \Leftrightarrow x + y \text{ es múltiplo de } 5, \quad y R z \Leftrightarrow 3 | y+z$$

- a) Definir R y S por extensión.
- b) Definir la composición $S \circ R \subset A \times C$ por extensión.
- c) Determinar el dominio y la imagen de las tres relaciones.
- d) Determinar $(S \circ R)^{-1}$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$.

4. En $A = \{2, 3, 6, 7, 9\}$ se define una relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow x | y$$

- a) Determinar R por extensión.
 b) Obtener el gráfico cartesiano de A^2 y R.
 c) Mostrar R en un diagrama de Venn.
5. En R se definen las siguientes relaciones:
- a) $x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
 b) $x R y \Leftrightarrow (x-1)^2 = (y+1)^2$
 c) $x R y \Leftrightarrow |x| = |y-2|$

Obtener los gráficos cartesianos de estas relaciones.

6. Determine todas las relaciones posibles en cada uno de los siguientes conjuntos:
 a) $A = \emptyset$, b) $B = \{1\}$, c) $C = \{1, 2\}$

En cada uno de los siguientes ejercicios, determine las propiedades que cumple la relación R definida en $A = \{a, b, c, d, e\}$.

7. Si $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)\}$ R: reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica.
 8. Si $R = \{(a,b), (b,d), (c,e), (e,c)\}$ R: arreflexiva, no simétrica, atransitiva, no antisimet.
 9. Si $R = \{(a,d), (b,e), (c,c), (e,b), (d,a)\}$ R: no reflexiva, simétrica, no transit., no antisimet.
 10. Si $R = \{(a,b), (a,d), (c,b), (e,d)\}$ R: arreflexiva, asimétrica, transitiva, antisimétrica.
 11. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la siguiente relación

$$x R y \Leftrightarrow 3 \mid x + y$$

- a) Definir R por extensión.
 b) Formar el diagrama de R.
 c) Clasificar R.
- R: no reflexiva, simétrica, no transitiva, no antisimet.

12. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define una relación por

$$x R y \Leftrightarrow 3 | x - y$$

- a) Definir R por extensión.
- b) Formar el diagrama de R .
- c) Probar que la relación es de equivalencia.
- d) Determinar las clases de equivalencia $R : \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3\}$
- e) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

13. En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se considera la siguiente relación

$$x R y \Leftrightarrow |x - 2| = |y - 2|$$

- a) Definir R por extensión, y formar su diagrama.
- b) Demuestre que la relación es de equivalencia.
- c) Obtener las clases de equivalencia.
- d) Determine la correspondiente partición de A . $R : \{\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}\}$

14. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$, y sea $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$ una partición de A . Determinar la relación de equivalencia correspondiente en A .

15. El conjunto $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$ es una partición de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinar la relación de equivalencia correspondiente en A .

16. En \mathbb{Z} se considera la siguiente relación

$$x R y \Leftrightarrow 3 | x - y$$

- a) Probar que es de equivalencia.
- b) Determinar las clases de equivalencia $R : \{3k/k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+1/k \in \mathbb{Z}\}, \{3k+2/k \in \mathbb{Z}\}$
- c) Determinar un conjunto de índices y el conjunto cociente.

17. En \mathbb{Z} se define la siguiente relación, mediante

$$x R y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$$

- a) Demuestre que es de equivalencia.
 b) Obtener las clases de equivalencia
 c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

$$R : K_a = \{a, 1-a\}$$

$$R : I = \{a \in \mathbb{Z} / a \geq 1\}$$

18. En \mathbb{Z} se define la relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow (x+1)^2 = (y+1)^2$$

- a) Demuestre que es de equivalencia.
 b) Determine las clases de equivalencia
 c) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

$$R : K_a = \{a, -a-2\}$$

$$R : I = \{a \in \mathbb{Z} / a \geq -1\}$$

19. En \mathbb{R} se considera la siguiente relación

$$x R y \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

- a) Probar que es de equivalencia., y representar R.
 b) Obtener las clases de equivalencia.
 c) Obtener un conjunto de índices y la partición de R .

$$R : K_a = \{a, -a\}$$

$$R : I = [0, \infty[$$

20. En \mathbb{R} se considera la siguiente relación

$$x R y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$$

- a) Demuestre que es de equivalencia, y representarla.
 b) Determine las clases de equivalencia
 c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

$$R : K_a = \{a, -1-a\}$$

$$R : I = [-\frac{1}{2}, \infty[$$

21. En \mathbb{R} se define la relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow x^2 + 3y = y^2 + 3x$$

- a) Probar que es de equivalencia., y representarla.
 b) Obtener las clases de equivalencia.
 c) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

$$R : K_a = \{a, 3-a\}$$

$$R : I = [\frac{3}{2}, \infty[$$

22. En \mathbb{R} se define una relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow |2x - 1| = |2y - 1|$$

- a) Demuestre que es de equivalencia, y representar R.

$$R : K_a = \{a, 1-a\}$$

- b) Determine las clases de equivalencia

$$R : I = [\frac{1}{2}, \infty[$$

- c) Determine un conjunto de índices y la partición de R .

23. En $A = [-1, 1]$ se considera la siguiente relación

$$x R y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

- a) Probar que es de equivalencia, y representarla.

$$R : K_a = \{a, -a\}$$

- b) Obtener las clases de equivalencia

$$R : I = [0, 1[$$

- c) Obtener un conjunto de índices y la partición de A.

24. En $A = [-1, 5]$ se define la relación R por

$$x R y \Leftrightarrow (x - 2)^2 = (y - 2)^2$$

- a) Demuestre que es de equivalencia, y representarla.

$$R : K_a = \{a, 1-a\}$$

- b) Determine las clases de equivalencia

$$R : I = [2, 5[$$

- c) Determine un conjunto de índices y la partición de A.

25. En \mathbb{R}^2 se define la relación binaria R mediante

$$(x,y) R (a,b) \Leftrightarrow y = b$$

- a) Probar que es de equivalencia.

$$R : K_{(0, b)} = \{(x,y) / y=b\}$$

- b) Determinar las clases de equivalencia

$$R : I = \{(0,b) / b \in \mathbb{R}\}$$

- c) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

26. En \mathbb{N}^2 se considera la siguiente relación

$$(x,y) R (a,b) \Leftrightarrow x + y = a + b$$

- a) Muestre que es una relación de equivalencia.

$$R : K_{(a, 0)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / x+y=a\}$$

- b) Obtener las clases de equivalencia

$$R : I = \{(a,0) / a \in \mathbb{N}\}$$

- c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

27. En \mathbb{Z}^2 se define la siguiente relación

$$(x,y) R (a,b) \Leftrightarrow x + b = y + a$$

- a) Demuestre que es una relación de equivalencia.
- b) Determine las clases de equivalencia $R : K_{(a,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / y = x - a\}$
- c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente. $R : I = \{(a,0) / a \in \mathbb{Z}\}$

28. En \mathbb{Z}^2 se considera la siguiente relación, definida por

$$(x,y) R (a,b) \Leftrightarrow x - b = y - a$$

- a) Muestre que es una relación de equivalencia.
- b) Obtener las clases de equivalencia $R : K_{(0,0)} = \mathbb{Z}^2$
- c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente. $R : I = \{(0,0)\}$

29. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3\}$. En $P(A)$ se define la siguiente relación mediante

$$X R Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$$

- a) Muestre que es una relación de equivalencia.
- b) Describa sus clases de equivalencia.
- c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

30. Sean R y S relaciones definidas en un conjunto A . Si R y S son reflexivas, demuestre que $R \cap S$ y $R \cup S$ son reflexivas.

31. Sean R y S relaciones definidas en un conjunto A . Si R y S son transitivas, demuestre que $R \cap S$ es transitiva.

32. Sea R una relación definida en un conjunto A . Demuestre que la relación $R \cup R^{-1}$ es simétrica.

33. En $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ se considera la relación de "mayor" definida por

$$x R y \Leftrightarrow x > y$$

- a) Probar que la relación es de orden estricto y total.
 b) Encuentre su diagrama de Hasse.

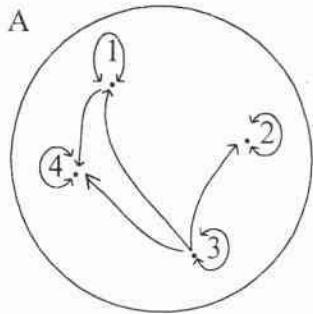
34. Sea $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 24\}$ y sea R una relación definida sobre A , mediante

$$x R y \Leftrightarrow x | y$$

- a) Probar que es de orden amplio y parcial.
 b) Trace el correspondiente diagrama de Hasse.
 c) Determine los elementos minimales y maximales.

R: 1; 18, 24

35. El diagrama dirigido de una relación R sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ es como sigue:



- a) Verifique que R es una relación de orden amplio y parcial.
 b) Encuentre su diagrama de Hasse.
 c) Determine los elementos minimales y maximales.

R: 1; 2,4

36. Definir por extensión la relación de divisor en el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$, y determinar, si existe: último elemento, minimales, maximales, una cota superior y una inferior.

37. Sea $A = \{1, 2, 3\}$, y sea R una relación de inclusión sobre A .

- a) Probar que es una relación de orden amplio y parcial.
 b) Encuentre su diagrama de Hasse.
 c) Determine maximales y minimales.

EJERCICIOS VARIOS

38. Para cada una de las siguientes proposiciones acerca de las relaciones sobre un conjunto A , $\eta(A) = n$, determine si la proposición es V o F. Si es falsa, de un contraejemplo.

- a) Si R es una relación reflexiva en A , entonces $\eta(R) \geq n$.
- b) Si R es una relación en A y $\eta(R) \geq n$, entonces R es reflexiva.
- c) Si R y S son relaciones en A y $R \subset S$, entonces S es reflexiva $\Rightarrow R$ es reflexiva.
- d) Si R y S son relaciones en A y $R \subset S$, entonces R es reflexiva $\Rightarrow S$ es reflexiva.

39. Demuestre que, si R y S son relaciones de equivalencia en A , entonces $R \cap S$ es una relación de equivalencia en A .

40. Sea el conjunto $A = \{2, 3, 6, 12, 15\}$. En A se definen las siguientes relaciones

$$x R y \Leftrightarrow 2 | x - y \quad x S y \Leftrightarrow 3 | x - y$$

- a) Probar que las relaciones R , S y $R \cap S$ son de equivalencia.
- b) Obtener la partición correspondiente a R , S y $R \cap S$.

41. Sean R y S relaciones en un conjunto A . Si R y S son asimétricas, demuestre o refute que $R \cap S$ y $R \cup S$ son asimétricas.

42. Sean R y S relaciones en un conjunto A . Si R y S son antisimétricas, pruebe o refute que $R \cap S$ y $R \cup S$ son antisimétricas.

43. ¿Qué tiene de incorrecto el siguiente argumento?

Sea A un conjunto y R una relación sobre A . Si R es simétrica y transitiva, entonces R es reflexiva.

44. Para $\eta(A) = 5$, ¿Cuántas relaciones R sobre A existen? ¿Cuántas de estas relaciones son simétricas?

45. En \mathbb{N}^2 se considera la siguiente relación, definida mediante

$$(x,y) R (a,b) \Leftrightarrow x \cdot b = y \cdot a$$

- a) Probar que es de equivalencia.
- b) Obtener las clases de equivalencia $R: K_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / ay = bx\}$
- c) Obtener un conjunto de índices y la partición de \mathbb{N}^2 . $R: I = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 / \text{MCD}(a,b) = 1\}$

46. En \mathbb{N}^2 se define la siguiente relación, mediante

$$(x,y) R (a,b) \Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot y$$

- a) Demuestre que es de equivalencia.
- b) Determine las clases de equivalencia $R: K_{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 / by = ax\}$
- c) Obtener un conjunto de índices y la partición de \mathbb{N}^2 . $R: I = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 / b \leq a \wedge \text{MCD}(a,b) = 1\}$

47. Sea A un conjunto no vacío y B un subconjunto fijo de A. En $P(A)$ se define la siguiente relación, mediante

$$X R Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$$

- a) Probar que es de equivalencia.
- b) Determine las clases de equivalencia, un conjunto de índices y el conjunto cociente.

48. En \mathbb{N} se define la siguiente relación, mediante

$$x R y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2^n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}$$

- a) Verifique que la relación es de equivalencia.
- b) Determine las clases de equivalencia

49. Sean R y S dos relaciones de equivalencia definidas en los conjuntos A y B, respectivamente. En $A \times B$ se define una relación T mediante

$$(x,y) T (a,b) \Leftrightarrow x R a \wedge y S b$$

Demuestre que la relación T es de equivalencia.

50. En Z se define la relación R mediante

$$x R y \Leftrightarrow x - y \text{ es un entero par no negativo}$$

Demuestre que es de orden amplio y parcial.



Federico Guillermo Bessel
(1784 – 1846)

CAPÍTULO IV

FUNCIONES

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo nos concentraremos en un tipo especial de relación llamado función, o relación funcional. Las funciones intervienen en el álgebra, la trigonometría, el cálculo y en las ciencias de la computación. Sin embargo, aquí se estudiarán las funciones desde el punto de vista de la teoría de conjuntos (incluyendo las funciones finitas); también se estudiarán sus propiedades básicas y luego se explicarán algunos tipos especiales de funciones.

2. FUNCIONES

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función f de A en B, que se escribe $f: A \rightarrow B$ y se lee " f es una función o aplicación de A en B", es un subconjunto de $A \times B$ tal que todo $x \in A$ está relacionado a un solo elemento $y \in B$. Es decir, en una función no se tienen dos pares ordenados distintos con la misma primera componente. Así, pues, toda función f es una relación especial de A en B.

Dado un par $(x, y) \in f$ se escribe $y = f(x)$ y se dice que y es la imagen de x por f , o que y es el valor de f en x, o bien que f transforma x en y.

2.1 DEFINICIÓN f es una función o aplicación de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B, que satisface las siguientes condiciones:

- i) $\forall x \in A, \exists y \in B / (x, y) \in f$
- ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

2.2 DEFINICIÓN Para la función $f : A \rightarrow B$, A es el dominio de f y B es el codominio de f . El subconjunto de B formado por los elementos imágenes de todos los miembros de A, se llama "imagen de f ", y se denota por $I(f)$.

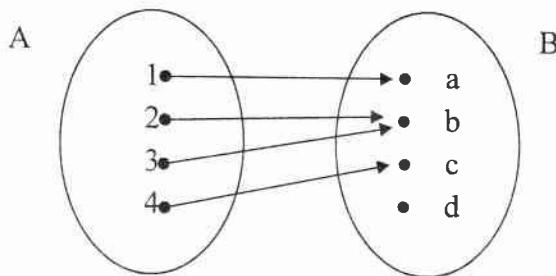
Ejemplo: Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ y sea

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$$

Entonces f es una función, ya que ningún elemento de A aparece como primer elemento de dos pares ordenados diferentes. Así, se tiene

$$f(1) = a \quad f(2) = b \quad f(3) = b \quad f(4) = c$$

El diagrama correspondiente es

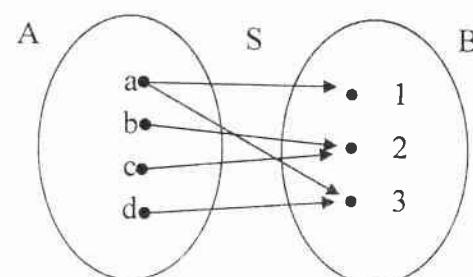
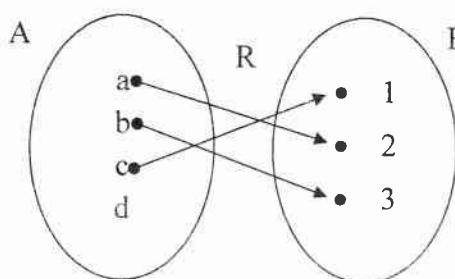


El dominio de f es $D(f) = A$, el codominio de f es $\text{Cod}(f) = B$ y la imagen de f es $I(f) = \{a, b, c\}$. Obsérvese que el elemento $b \in B$ aparece como segundo elemento de dos diferentes pares ordenados de f . Esto no causa conflicto con la definición de una función. Por tanto, dos elementos diferentes de A pueden tener la misma imagen en B.

Ejemplo: Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y sean las relaciones

$$R = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\} \quad S = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$$

Entonces el diagrama correspondiente para cada relación es



Ninguna de estas relaciones es una función de A en B, por diferentes causas. La relación R no es una función de A en B, ya que el $Df \neq A$. Sin embargo, R es una función del conjunto $\{a, b, c\}$ en B.

La relación S no es una función, ya que contiene dos pares ordenados $(a, 1)$ y $(a, 3)$, donde sus primeros elementos son iguales para imágenes diferentes, lo que hace que no se cumpla con la definición de una función.

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

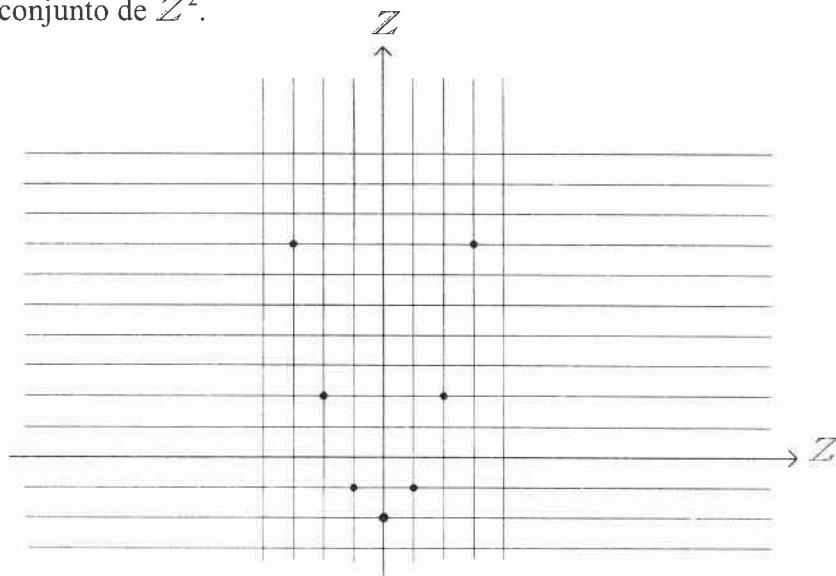
$$f(x) = x^2 - 2$$

Esto es, f consta de todos los pares ordenados de la forma $(x, x^2 - 2)$ para $x \in \mathbb{Z}$. Entonces cada $x \in \mathbb{Z}$ aparece como el primer elemento de algún par, por lo tanto $Df = \mathbb{Z}$. Asimismo, si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, se tiene

$$y = f(x) = x^2 - 2 \quad , \quad z = f(x) = x^2 - 2$$

$$\text{entonces } y = z$$

Por tanto, f es una función; la representación cartesiana es un subconjunto de \mathbb{Z}^2 .

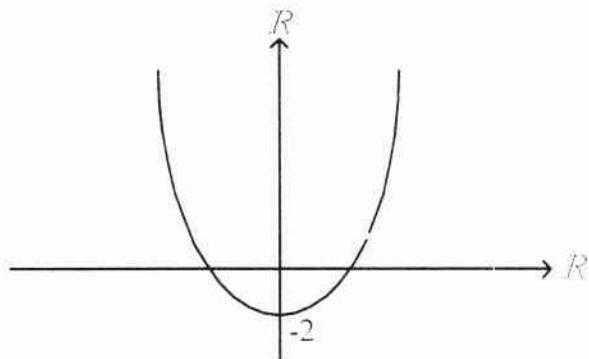


No es posible representar completamente a f , por ser \mathbb{Z} un conjunto infinito; sin embargo, la representación de algunos puntos nos sugiere el comportamiento de dicha función.

Ejemplo: Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = x^2 - 2$$

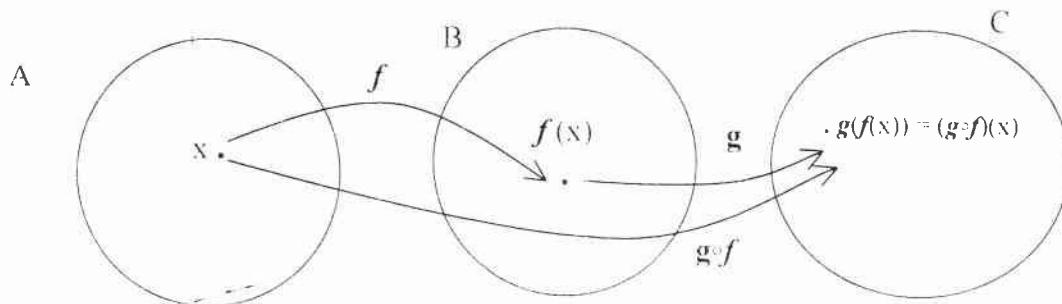
Su representación es un subconjunto continuo de \mathbb{R}^2 , consiste en una parábola del plano.



Obsérvese que las funciones f (del ejemplo anterior) y g son diferentes, aunque están igualmente definidas. Es decir, aunque se mantenga la ley de correspondencia o asignación, al variar el dominio o codominio, la función cambia.

3. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ dos funciones tales que el codominio de f coincide con el dominio de g (o bien $I(f) = D(g)$): puede entonces definirse una nueva función $g \circ f$ de A en C llamada función compuesta de f y g , como se muestra en el siguiente diagrama.



3.1 DEFINICIÓN La composición de las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ es la función $g \circ f: A \rightarrow C$ definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in A$$

Dadas las funciones $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$, se cumple la asociatividad de la composición.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

donde la igualdad significa que ambos miembros representan la misma función de A en D.

Por otra parte, la composición de funciones no es conmutativa, es decir

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Ejemplo: Sean $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{-4, -5, -6, -7\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, y sean

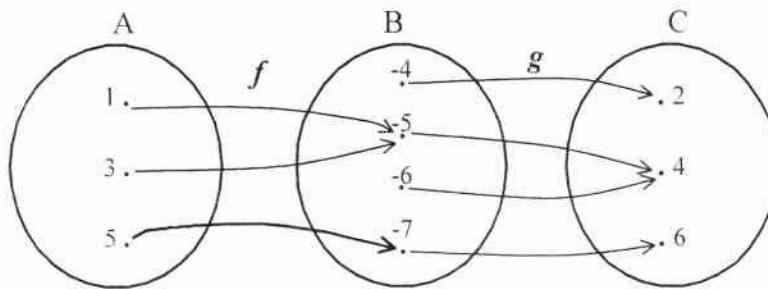
$f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ definidas por

$$f = \{(1, -5), (3, -5), (5, -7)\}, \quad g = \{(-4, 2), (-5, 4), (-6, 6), (-7, 6)\}$$

Entonces resulta

$$g \circ f = \{(1, 4), (3, 4), (5, 6)\}$$

El diagrama correspondiente es



Obsérvese que la función $g \circ f$ existe, ya que $I(f) \subset B$. Sin embargo, la función $f \circ g$ no existe porque $I(g) \notin A$.

Ejemplo: Sean las funciones

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } f(x) = x^2 - 2x$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal que } g(x) = 2x - 1$$

Entonces, las funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$ se definen por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x) - 1 = 2x^2 - 4x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x - 1)^2 - 2(2x - 1) = 4x^2 - 8x + 3$$

4. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

4.1 FUNCIÓN INYECTIVA Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es inyectiva, o uno a uno si cada elemento $y \in B$ es imagen de un solo elemento $x \in A$. Es decir.

$$f: A \rightarrow B \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Una manera alternativa de expresar esta condición es

$$f: A \rightarrow B \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ejemplo: Sean $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 3, 5, 8\}$, y sean

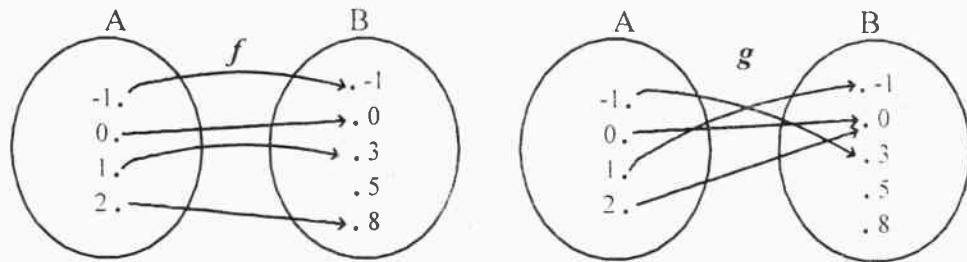
$$f: A \rightarrow B \quad \text{y} \quad g: A \rightarrow B, \quad \text{tales que}$$

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = x^2 - 2x$$

$$\text{Entonces} \quad f = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 3), (2, 8)\}$$

$$g = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0)\}$$

En diagrama se tiene



La función f es inyectiva, pues cada elemento de B es imagen de un solo elemento de A . Si bien el elemento $5 \in B$ no es imagen de ningún elemento de A , esto, no quita el carácter de inyectividad de f .

Es claro que la función g no es inyectiva, ya que existe un elemento de B que es imagen de dos elementos de A . Esto es

$$g(0) = g(2) = 0$$

Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$$

la función f es inyectiva porque,

si $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{x_1 - 1}{2x_1 + 1} = \frac{x_2 - 1}{2x_2 + 1}$$

$$(x_1 - 1)(2x_2 + 1) = (x_2 - 1)(2x_1 + 1)$$

$$2x_1 x_2 + x_1 - 2x_2 - 1 = 2x_1 x_2 + x_2 - 2x_1 - 1$$

$$3x_1 = 3x_2$$

entonces $x_1 = x_2$

4.2 FUNCIÓN SOBREYECTIVA Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es una función sobreyectiva, si y solo si todo elemento del codominio B es imagen de por lo menos un elemento de A . Esto significa que f es sobreyectiva cuando el conjunto de imágenes es B . Así, se define

$$f: A \rightarrow B \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B. \exists x \in A / f(x) = y$$

o bien $f: A \rightarrow B \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow I(f) = B$

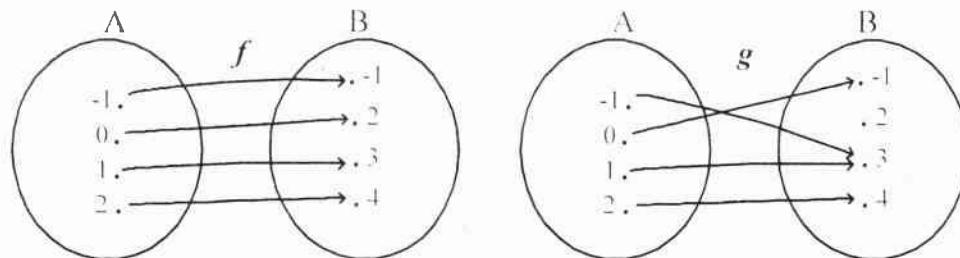
Ejemplo: Sean $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, y sean

f y g funciones de A en B , tales que

$$f = \{(-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$

$$g = \{(-1, 3), (0, 1), (1, 3), (2, 4)\}$$

En diagrama se tiene



Donde, $I(f) = \{1, 2, 3, 4\}$ y $I(g) = \{1, 3, 4\}$

La función f es sobreyectiva, pues $I(f) = B$ o todo elemento de B es imagen de por lo menos un elemento de A . Mientras, la función g no es sobreyectiva porque $I(g) \neq B$, es decir, existe un elemento de B que no es imagen de ningún elemento de A , o bien sobra un elemento de B .

Ejemplo: Sea $f: R \rightarrow R$ una función tal que

$$f(x) = (x - 1)^3 + 1$$

la función es sobreyectiva, pues

$$y = (x - 1)^3 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y - 1} + 1$$

entonces $\forall y \in R, \exists x = \sqrt[3]{y - 1} + 1$ tal que

$$f(x) = f(\sqrt[3]{y - 1} + 1) = (\sqrt[3]{y - 1} + 1 - 1)^3 + 1 = y$$

4.3 FUNCIÓN BIYECTIVA Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Se dice que f es una función biyectiva, si f es inyectiva y sobreyectiva (o una correspondencia biunívoca entre A y B). Esto significa que para todo $y \in B$ hay exactamente un solo $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Es decir,

$$f: A \rightarrow B \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva y sobreyectiva.}$$

La negación de biyectividad es

$$f: A \rightarrow B \text{ no es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ no es inyectiva o } f \text{ no es sobreyectiva.}$$

Ejemplo: Sea $f: [-1, \infty[\rightarrow [-2, \infty[$ una función tal que

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

Para que f sea biyectiva es suficiente probar que es inyectiva y sobreyectiva.

i) Sean $x_1, x_2 \in [-1, \infty[$ tales que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\therefore x_1^2 + 2x_1 - 1 = x_2^2 + 2x_2 - 1$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = 0$$

$$(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

o bien $x_1 + x_2 + 2 = 0$

Esta última ecuación se cumple solamente para $x_1 = x_2 = -1$ que está en Df , en consecuencia, f es inyectiva.

ii) f es sobreyectiva, pues

$$y = x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{y+2}$$

entonces $\forall y \in [-2, \infty[, \exists x = -1 + \sqrt{y+2}$ tal que

$$f(x) = f(-1 + \sqrt{y+2}) = (-1 + \sqrt{y+2})^2 + 2(-1 + \sqrt{y+2}) - 1 = y$$

Por tanto, f es biyectiva.

Ejemplo: Sea $f: R \rightarrow R$ una función tal que

$$f(x) = 2e^{-x} - 1$$

Para determinar si f es biyectiva se tiene

i) Sean x_1 y $x_2 \in R$ tales que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2e^{-x_1} - 1 = 2e^{-x_2} - 1$$

$$2e^{-x_1} = 2e^{-x_2}$$

$$e^{-x_1} = e^{-x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

en consecuencia es inyectiva.

ii) f no es sobreyectiva, ya que

$$y = 2e^{-x} - 1 \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{y+1}{2}\right)$$

se observa que no todo elemento del codominio ($y \in R$) es imagen de algún elemento del dominio. Es decir, $I(f) =]-1, \infty[\neq \text{Cod}(f) = R$.

Por tanto, f no es biyectiva.

Ejemplo: Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son biyectivas, demuestre que $g \circ f: A \rightarrow C$ es biyectiva.

SOLUCIÓN: De acuerdo con la definición de biyectividad debemos probar que $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva.

i) Sean x_1 y $x_2 \in A$ tales que

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

según la definición de composición

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

Por ser g inyectiva se tiene

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Por ser f inyectiva resulta

$$x_1 = x_2$$

En consecuencia, $g \circ f$ es inyectiva.

ii) Según la definición, $g \circ f$ es sobreyectiva si para todo $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. En efecto,

como $g: B \rightarrow C$ es sobreyectiva,

$$\forall z \in C, \exists y / g(y) = z$$

Dado que $y \in B$, por ser $f: A \rightarrow B$ sobreyectiva

$$\exists x \in A / f(x) = y$$

de donde $(g \circ f)(x) = (g(f(x))) = g(y) = z$

Entonces, $\forall z \in C, \exists x \in A / (g \circ f)(x) = z$

En consecuencia, $g \circ f$ es biyectiva.

Ejemplo: Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son funciones tales que $g \circ f: A \rightarrow C$ es inyectiva, demuestre que f es inyectiva.

SOLUCIÓN: Sean x_1 y $x_2 \in A$ tales que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

la imagen de este elemento de B por g es

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

Por definición de composición se tiene

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

Por ser $g \circ f$ inyectiva resulta

$$x_1 = x_2$$

En consecuencia, f es inyectiva.

Ejemplo: Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son funciones tales que $g \circ f: A \rightarrow C$ es sobreyectiva, demuestre que g es sobreyectiva.

SOLUCIÓN: Por ser $g \circ f$ sobreyectiva se tiene

$$\forall z \in C, \exists x \in A / (g \circ f)(x) = z$$

Por definición de composición $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$, donde $f(x) = y \in B$

Entonces $\forall z, \exists y \in B / g(y) = g(f(x)) = z$

Por tanto, g es sobreyectiva.

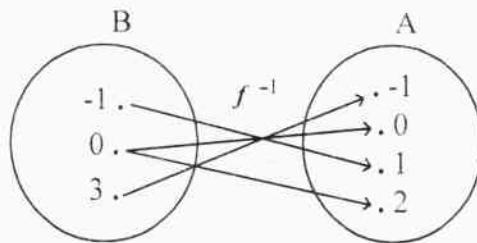
5. FUNCIONES INVERSAS

Toda función $f: A \rightarrow B$ es una relación. Entonces la relación inversa f^{-1} es un subconjunto bien definido de $B \times A$. Sin embargo, f^{-1} no es necesariamente una función de B en A . Por ejemplo, sean $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 3\}$, y sea $f: A \rightarrow B$ una función tal que $f(x) = x^2 - 2x$, es decir,

$$f = \{(-1, 3), (0, 0), (1, -1), (2, 0)\}$$

$$\text{Entonces } f^{-1} = \{(3, -1), (0, 0), (-1, 1), (0, 2)\}$$

Se ve que f^{-1} no es una función de B en A , ya que $(0, 0)$ y $(0, 2)$ pertenecen a f^{-1} . Es decir, que un elemento del dominio de f^{-1} tiene dos imágenes diferentes de A .



5.1 DEFINICIÓN Sea $f: A \rightarrow B$ una función. Entonces f^{-1} es una función de B en A ($f^{-1}: B \rightarrow A$) si y solo si f es biyectiva.

Ejemplo: Sea $f: R \rightarrow R$ una función biyectiva definida por

$$f(x) = 2x - 3$$

Entonces, de $y = 2x - 3$ se obtiene $x = \frac{y+3}{2} = f^{-1}(y)$

$$\text{de donde } f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

luego se tiene que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2\left(\frac{x+3}{2}\right) - 3 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 3) = \left(\frac{2x - 3 + 3}{2}\right) = x$$

Ejemplo: Sea $f: R \rightarrow R^+$ una función biyectiva definida por

$$f(x) = 2 e^{-2x}$$

Entonces de $y = 2 e^{-2x}$ se obtiene $x = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y}{2}\right) = f^{-1}(y)$

$$\text{En consecuencia } f^{-1}: R^+ \rightarrow R \text{ es } f^{-1}(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

5.2 FUNCIÓN IDENTIDAD La función que asigna a cada elemento de A el mismo elemento, se llama función identidad en A . Es decir,

$$I_A: A \rightarrow A \text{ tal que } I_A(x) = x$$

5.3 PROPIEDADES

1:) Sea $f: A \rightarrow B$ una función cualquiera, y sean $I_A: A \rightarrow A$ y $I_B: B \rightarrow B$ las funciones identidad en A y en B , respectivamente. Entonces se tiene

$$I_B \circ f = f \quad y \quad f \circ I_A = f$$

Es decir,

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$$

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

2:) Sea $f: A \rightarrow B$ una función invertible, tal que $f^{-1}: B \rightarrow A$, entonces

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad y \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

$$\text{Si } B = A, \text{ resulta } f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$$

3:) Sea $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones invertibles. Entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

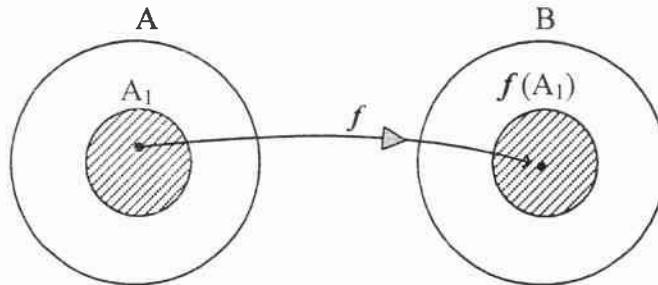
6. IMAGEN DIRECTA, IMAGEN INVERSA

Sea $f: A \rightarrow B$ y $A_1 \subset A$, se llama imagen de A_1 por f el conjunto de las imágenes de todos los elementos de A_1 . Es decir,

$$f(A_1) = \{y \in B / \exists x \in A_1 \wedge f(x) = y\}$$

$$\text{o bien } y \in f(A_1) \Leftrightarrow \exists x \in A_1 / y = f(x)$$

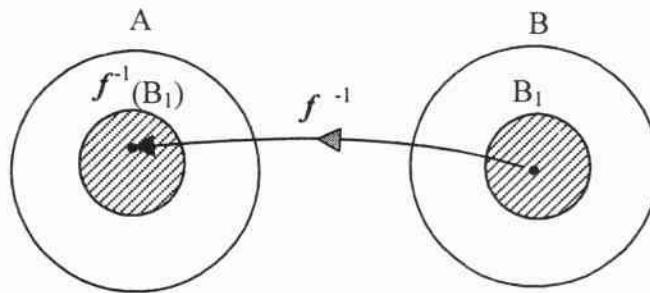
Para toda función f se tiene $f(\emptyset) = \emptyset$.



Sea $f: A \rightarrow B$ y $B_1 \subset B$. Se llama imagen inversa de B_1 por f el conjunto de los $x \in A$ tales que $f(x) \in B_1$. Es decir,

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A / f(x) \in B_1\}$$

$$\text{o bien } x \in f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow f(x) \in B_1$$



Ejemplo: Sean $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea

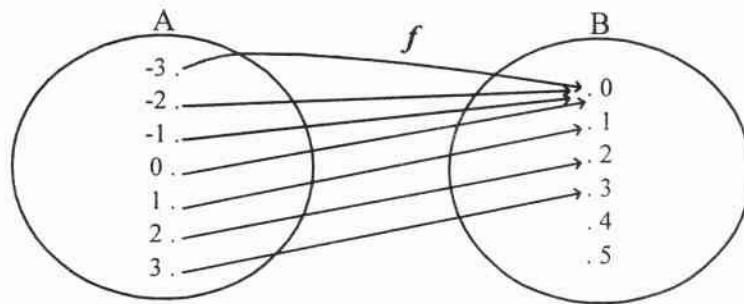
$$f: A \rightarrow B \quad \text{tal que} \quad f(x) = \frac{x+|x|}{2}$$

Entonces la imagen de:

$$A_1 = \{-3, -2, -1\} \subset A \quad \text{es} \quad f(A_1) = \{0\} \subset B$$

$$A_2 = \{0\} \subset A \quad \text{es} \quad f(A_2) = \{0\} \subset B$$

$$A_3 = \{1, 2, 3\} \subset A \quad \text{es} \quad f(A_3) = \{1, 2, 3\} \subset B$$



La imagen inversa de:

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \subset B \quad \text{es} \quad f^{-1}(B_1) = \{1, 2, 3\} \subset A$$

$$B_2 = \{3, 4, 5\} \subset B \quad \text{es} \quad f^{-1}(B_2) = \{3\} \subset A$$

$$B_3 = \{4, 5\} \subset B \quad \text{es} \quad f^{-1}(B_3) = \{\} = \emptyset$$

Ejemplo: Sea $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2 - 3$

Entonces las imágenes inversas de los siguientes subconjuntos del codominio son:

a) $f^{-1}(-\infty, -3] = \{x \in R / f(x) \in (-\infty, -3]\}$

pero $f(x) \in]-\infty, -3[\Leftrightarrow x^2 - 3 < -3$
 $\Leftrightarrow x^2 < 0$, que es F.

entonces $f^{-1}(-\infty, -3) = \emptyset$

b) $f^{-1}([-3, 3]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [-3, 3]\}$

esto es, $f(x) \in [-3, 3] \Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 3 \leq 3$
 $\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 6$
 $\Leftrightarrow x^2 \leq 6$
 $\Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{6}$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$
 $\Leftrightarrow x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

resulta, $f^{-1}([-3, 3]) = [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$

c) $f^{-1}(3, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in (3, \infty)\}$

se tiene, $f(x) \in (3, \infty) \Leftrightarrow x^2 - 3 > 3$
 $\Leftrightarrow x^2 > 6$
 $\Leftrightarrow |x| > \sqrt{6}$
 $\Leftrightarrow x > \sqrt{6} \vee x < -\sqrt{6}$
 $\Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, \infty)$

luego, $f^{-1}(3, \infty) =]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, \infty)$

Ejemplo: Sean $f: A \rightarrow B$ y los subconjuntos $B_1 \subset B, B_2 \subset B$.

Demuestre que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

En efecto $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in (B_1 \cup B_2)$
 $\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$
 $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$
 $\Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2))$

En consecuencia, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

EJERCICIOS

1. Sean $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, 2, 5, 7\}$, y sean las relaciones

$$R = \{(-1, -1), (1, -1), (2, 2), (3, 7)\} \quad S = \{(-1, 7), (1, -1), (2, -1), (2, 2), (3, 5)\}$$

- a) Determine si cada una de estas relaciones es una función o no.
 b) Si es una función determine su imagen.

2. Sea $A = \{-2, -1, 1, 3\}$ y $B = \{-2, 1, 3, 6\}$. y sea $f: A \rightarrow B$ tal que

$$f(x) = x^2 - 3$$

Representar y clasificar f .

3. Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que $f(x) = x^2 - 2x$

Representar y clasificar f .

R: biyectiva

4. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función tal que $f(x) = 2x + 1$

Representar y clasificar f .

R: inyectiva

5. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = 2x + 1$

Representar y clasificar f .

R: biyectiva

Para cada una de las siguientes funciones $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, determine cuáles de ellas son inyectivas y cuales son sobreyectivas. Si la función no es sobreyectiva, determine la imagen $I(f)$.

6. a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = 2 - x$

7. a) $f(x) = x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 + 2x$

8. a) $f(x) = x^3 - 1$ b) $f(x) = (x+1)^3 - 1$

9. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $C = \{w, x, y, z\}$, y sea $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ dadas por

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\} \quad y \quad g = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$$

Hallar: $g \circ f$, $I(f)$, $I(g)$ y $I(g \circ f)$

10. Sean $f: R \rightarrow R$ y $g: R \rightarrow R$ definidas por

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x+1}{2}$$

Hallar: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $f_{(2)}$, $g_{(2)}$, $(f \circ g)_{(2)}$, $(g \circ f)_{(2)}$

11. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, y $f: A \rightarrow A$ dada por

$$f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$$

Determinar $f \circ f$, $f \circ f \circ f$, $f \circ f \circ f \circ f$

12. Sea $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = \frac{2x-1}{2}$

Hallar: $(f \circ f)(x)$, $(f \circ f \circ f)(x)$, $(f \circ f \circ f \circ f)(x)$

13. Sea $f: R \rightarrow R^+$ tal que $f(x) = 2e^{-\frac{x}{2}}$, y sea $g: R^+ \rightarrow R$

$$\text{tal que } g(x) = -\frac{3}{2} \ln\left(\frac{2x}{3}\right)$$

- a) Determinar si f y g son biyectivas.
- b) Si f y g son invertibles, hallar sus inversas.

14. Sea $f: N \rightarrow N$ tal que $f(x) = 2x$. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$g: A \rightarrow N$ definida por $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$

Hallar $f \circ g$.

15. Sea $f, g, h: Z \rightarrow Z$ definidas por

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 2x, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es impar} \\ 1 & \text{si } x \text{ es par} \end{cases}$$

- Hallar:
- a) $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $g \circ h$, $f \circ (g \circ h)$, $(f \circ g) \circ h$
 - b) $f \circ f \circ f \circ f$, $g \circ g \circ g \circ g$, $h \circ h \circ h \circ h$

16. Sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) Demuestre que f es biyectiva.

b) Determine f^{-1} .

17. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, y sea $f: A \rightarrow B$

definida por $f = \{(0, 6), (1, 6), (2, 7), (3, 5), (4, 8), (5, 8)\}$.

Hallar la imagen inversa para cada uno de los subconjuntos del codominio:

$$B_1 = \{5, 7\}, B_2 = \{7, 9\}, B_3 = \{6, 8\}, B_4 = \{7, 8\}, B_5 = \{7, 8, 9\}$$

18. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea $f: A \rightarrow A$ definida por

$$f = \{(1, 4), (2, 1), (3, 4), (4, 2), (5, 3)\}$$

Hallar: $f^{-1}(2), f^{-1}(4), f^{-1}(5), f^{-1}(\{4, 5\}), f^{-1}(\{1, 2, 3\}), f^{-1}(\{3, 4, 5\})$

19. Sea $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = x^2 - 2$. Determinar la imagen inversa para

cada uno de los siguientes subconjuntos del codominio:

$$B_1 =]-\infty, -2], B_2 = [-2, 2], B_3 =]2, \infty[\quad R: \{-2\}; [-2, 2];]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$$

20. Sean $f: R \rightarrow R$ y $g: R \rightarrow R$ definidas por

$$f(x) = 3x - 2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^3 + 1$$

Hallar: $f^{-1}, g^{-1}, f \circ g, g^{-1} \circ f^{-1}, (f \circ g)^{-1}$

21. Sean $f: R \rightarrow]-1, 1[$ definida por $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$

a) Probar que es biyectiva.

b) Hallar $f^{-1}(x)$

$$R : \frac{x}{1+|x|}$$

22. Sea $f: A \rightarrow B$, y sean $A_1, A_2 \subset A$, demuestre que

a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

23. Sea $f: A \rightarrow B$, y sean $B_1, B_2 \subset B$, demuestre que

a) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

d) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$

24. Sean $f, g : R \rightarrow R$ tales que $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ y $g^{-1}(x) = \frac{2x-1}{3}$

Hallar $(f^{-1} \circ g)(x)$ R : x

25. Sean $f, g : R \rightarrow R$ tales que $f(x) = \frac{4x-3}{2}$ y $(f \circ g)(x) = \frac{6x-2}{3}$

Hallar $g(x)$. R : $\frac{12x+5}{12}$

26. Sean $f, g : R \rightarrow R$ tales que $(g \circ f)(x) = \frac{3x-4}{2}$, $g(x) = \frac{2x-6}{3}$

Hallar $f(x)$. R: $\frac{9x}{4}$

27. Demuestre que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

28. Demuestre que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ son funciones sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

29. Sean las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Demuestre que, si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

30. Sean las funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Demuestre que, si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

31. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, y sea $h : A \times C \rightarrow B \times D$ tal que
$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

Demuestre que h es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.



Blaise Pascal (1623 – 1662)

CAPÍTULO V

LEYES DE COMPOSICIÓN Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1. INTRODUCCIÓN

Por aritmética se sabe que la suma es una operación binaria en el conjunto \mathbb{N} de los números naturales. Es decir, la suma de dos elementos de \mathbb{N} da como resultado un tercer elemento de \mathbb{N} denominado suma. Así, en símbolos se tiene

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \in \mathbb{N}$$

Esta idea también se cumple para la operación de multiplicación, pues el producto de dos números naturales es otro número natural. Así, se dice que la suma y la multiplicación son operaciones binarias en \mathbb{N} .

A continuación se precisa este concepto de operación binaria desde el punto de vista de una función la cual se conoce como una ley de composición interna.

Posteriormente se definen las leyes de composición externa y estructuras algebraicas, con vistas a su utilización en la estructura de espacio vectorial.

2. LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA

Una ley de composición interna en un conjunto no vacío A es una operación binaria que asocia a cada par ordenado de elementos de A un único elemento de A . Dicho brevemente, una ley de composición interna definida en un conjunto no vacío A es toda función de $A \times A$ en A .

En símbolos $* \text{ es una ley interna en } A \Leftrightarrow * : A \times A \Rightarrow A$

Es decir $a \in A \wedge b \in A \Rightarrow a*b \in A$

Por ejemplo, la adición es una ley interna en el conjunto A de los números enteros pares, pues, la suma de dos números enteros pares es otro número entero par. Pero, esta

operación no es una ley interna en el conjunto B de los números enteros impares, ya que la suma de dos números enteros impares no es un entero impar.

Es decir, si $a \in A \wedge b \in A \Rightarrow a+b \in A$

esto significa, si $2 \in A \wedge 4 \in A \Rightarrow 2+4=6 \in A$

Pero, si $a \in B \wedge b \in B \Rightarrow a+b \notin B$

esto es, si $3 \in B \wedge 5 \in B \Rightarrow 3+5=8 \notin B$

Ejemplo: La tabla adjunta, que define una cierta operación binaria o ley interna en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$,

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

debe leerse así: Para cada par ordenado (x, y) de $A \times A$ se encuentra $x * y$ en la intersección de la fila x y la columna y . Por ejemplo

$$b * c = d , \quad c * d = b , \quad d * b = a , \quad d * d = c , \quad \text{etc.}$$

El hecho de que $*$ sea una ley interna en el conjunto A , se dice que el conjunto A es cerrado con respecto a la operación $*$.

3. PROPIEDADES DE LAS LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA

Consideremos a $*$ una ley de composición interna en el conjunto A , es decir,

$$*: A \times A \rightarrow A$$

3.1 ASOCIATIVIDAD

Una ley interna $*$ en A es asociativa si $(a*b)*c = a*(b*c)$ para cualesquiera a, b y $c \in A$.

3.2 CONMUTATIVIDAD

Una ley de composición interna $*$ en A es conmutativa si se verifica que $a*b = b*a$ para todo $a, b \in A$.

3.3 EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO

Un conjunto A está dotado de elemento neutro con respecto a una ley interna $*$ sobre A si existe un elemento $e \in A$ con la propiedad de que $e * a = a * e = a$ para todo $a \in A$.

3.4 EXISTENCIA DE INVERSOS EN UNA LEY INTERNA CON NEUTRO

Sea un conjunto A que posee el elemento neutro e con respecto a una ley interna $*$. Un elemento $a' \in A$ se dice que es inverso de $a \in A$ si $a * a' = a' * a = e$

Teoremas

I : El elemento neutro, si existe, de un conjunto A con respecto a una ley interna $*$ sobre A es único.

II : Sea $*$ una ley interna sobre un conjunto A . Si un elemento $a \in A$ admite inverso respecto de la ley $*$, entonces dicho inverso es único.

3.5 REGULARIDAD DE UN ELEMENTO RESPECTO DE UNA LEY INTERNA

La regularidad de un elemento $a \in A$ respecto de cierta ley interna $*$ en A consiste en que es simplificable a izquierda y a derecha en los dos miembros de una igualdad.

Es decir, $a \in A$ es regular respecto de $*$ si

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c \quad y \quad b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

Ejemplo: En el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros se define * por medio de

$$a * b = 2a + 2b$$

Estudiar las propiedades y la existencia de elementos regulares.

SOLUCIÓN: El problema consiste en analizar las propiedades de * en \mathbb{Z} .

i) Asociatividad: Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, entonces por definición de * se tiene

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (2a + 2b) * c \\ &= 2(2a + 2b) + 2c = 4a + 4b + 2c \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (2b + 2c) \\ &= 2a + 2(2b + 2c) = 2a + 4b + 2c \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2) resulta $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, la ley * no es asociativa

ii) Comutatividad: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Aplicando la ley * y la comutatividad de la adición en \mathbb{Z} , se verifica

$$a * b = 2a + 2b = 2b + 2a = b * a$$

iii) Existencia de neutro: Si existe $e \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $a \in \mathbb{Z}$, entonces debe verificarse $a * e = a$

Por la ley *, resulta $2a + 2e = a$

Resulta entonces que no existe neutro e en \mathbb{Z} , ya que $e = -\frac{a}{2} \notin \mathbb{Z}$

iv) Elementos de \mathbb{Z} que admiten inverso respecto de *.

Si $a \in \mathbb{Z}$ admite inverso, entonces debe existir $a' \in \mathbb{Z}$, tal que

$$a * a' = e$$

Luego, los elementos de \mathbb{Z} no admiten inverso porque no existe neutro.

v) Elementos regulares: Sea $a \in \mathbb{Z}$ entonces

$$a * b = a * c$$

$$2a + 2b = 2a + 2c$$

$$2b = 2c$$

$$b = c$$

Por ser $*$ una ley conmutativa en \mathbb{Z} , también se verifica

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

Luego, todos los enteros son regulares o simplificables respecto de $*$.

Ejemplo: Estudiar las propiedades de $* : \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $a * b = a + b - 2ab$

SOLUCIÓN: Estamos interesados en analizar las propiedades de esta ley de composición en \mathbb{Q} .

i) Asociatividad: Sean $a, b, y c \in \mathbb{Q}$, luego se tiene

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b - 2ab) * c \\ &= (a + b - 2ab) + c - 2(a + b - 2ab)c \\ &= a + b + c - 2ab - 2ac - 2bc + 4abc \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - 2bc) \\ &= a + (b + c - 2bc) - 2a(b + c - 2bc) \\ &= a + b + c - 2bc - 2ab - 2ac + 4abc \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta $(a * b) * c = a * (b * c)$, la ley $*$ es asociativa en \mathbb{Q} .

ii) Conmutatividad: Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$, se tiene

$$a * b = a + b - 2ab = b + a - 2ba = b * a$$

Por lo que $*$ es una ley conmutativa en \mathbb{Q} .

iii) Existencia de neutro: Si e es neutro en A respecto de $*$, entonces

$$\text{debe verificarse } a * e = a, \text{ para todo } a \in \mathbb{Q}.$$

Por la definición de $*$, se obtiene

$$a + e - 2ae = a$$

$$e(1 - 2a) = 0$$

$$e = 0, \quad \text{si } a \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } a = \frac{1}{2}, \text{ se tiene } a * e = \frac{1}{2} * 0 = \frac{1}{2} + 0 - 2\left(\frac{1}{2}\right)0 = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $e = 0$ es neutro en \mathbb{Q} respecto de $*$.

iv) Elementos de \mathbb{Q} que admiten inverso respecto de $*$.

Si $a \in \mathbb{Q}$ admite inverso, entonces debe existir $a' \in \mathbb{Q}$, tal que

$$a * a' = e$$

es decir $a + a' - 2aa' = 0$

$$a' (1 - 2a) = -a$$

Luego, si $a \neq \frac{1}{2}$, resulta $a' = \frac{a}{2a-1}$

Es decir, todos los racionales distintos de $\frac{1}{2}$ admiten inverso respecto de $*$.

v) Elementos regulares: Sea $a \in \mathbb{Q}$, entonces se tiene

$$a * b = a * c$$

$$a + b - 2ab = a + c - 2ac$$

$$b(1 - 2a) = c(1 - 2a)$$

Si $a \neq \frac{1}{2}$, resulta $b = c$

Por tanto, todos los racionales distintos de $\frac{1}{2}$ son regulares respecto de $*$.

3.6 DISTRIBUTIVIDAD DE UNA LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA RESPECTO DE OTRA

Sean $*$ y \circ dos leyes de composición interna en un mismo conjunto A . La ley \circ se dice distributiva a izquierda respecto de $*$ si

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \text{ para cualesquiera } a, b, c \in A$$

y se dice distributiva a derecha respecto de $*$ si

$$(b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a) \text{ para todo } a, b, c \in A$$

Si se verifican la distributividad a izquierda y a derecha, se dice simplemente que \circ es distributiva respecto a $*$.

Ejemplo: En el conjunto $B = \mathbb{Q} - \{0\}$, números racionales menos el cero, se definen las leyes de composición interna \circ y $*$ mediante

$$a \circ b = 2ab \quad y \quad a * b = \frac{a+b}{2}$$

Investigar las distributividades de \circ respecto de $*$.

SOLUCIÓN: Como $a \circ (b * c) = 2a(b*c)$

$$= 2a \left(\frac{b+c}{2} \right) = ab + ac \quad (1)$$

$$(a \circ b)*(a \circ c) = \frac{(a \circ b) + (a \circ c)}{2}$$

$$= \frac{2ab + 2ac}{2} = ab + ac \quad (2)$$

Entonces de (1) y (2) resulta

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$$

luego \circ es distributiva a izquierda respecto de $*$.

Asimismo, la distributividad a derecha se verifica, pues la ley interna \circ es conmutativa. Por tanto, se dice simplemente que \circ es distributiva respecto de $*$.

Ejemplo: En el conjunto R de los números reales se definen las leyes de composición interna \circ y $*$ mediante

$$a \circ b = a^2 b^2 \quad y \quad a * b = a + b$$

Investigar las distributividades de \circ respecto de $*$.

SOLUCIÓN: Sean $a, b, c \in R$, entonces

$$\begin{aligned} a \circ (b * c) &= a^2 (b * c)^2 \\ &= a^2 (b + c)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 (a \circ b) * (a \circ c) &= (a \circ b) + (a \circ c) \\
 &= a^2 b^2 + a^2 c^2 = a^2 (b^2 + c^2)
 \end{aligned} \tag{2}$$

De (1) y (2) resulta $a \circ (b * c) \neq (a \circ b) * (a \circ c)$. Análogamente se verifica que $(b * c) \circ a \neq (b \circ a) * (c \circ a)$. Por tanto, \circ no es distributiva respecto de $*$.

4. LEY DE COMPOSICIÓN EXTERNA

Una ley de composición se denomina externa, cuando se opera con elementos de dos conjuntos. Es decir, dados los conjuntos K y A , se entiende por ley de composición externa a toda aplicación del conjunto $K \times A$ en A , en donde K se denomina conjunto de operadores o escalares.

En símbolos se tiene

$$\text{“} \circ \text{” es ley externa en } A \text{ con operadores en } K \Leftrightarrow \circ : K \times A \rightarrow A.$$

Por ejemplo, el producto ordinario de números “.” es una ley de composición externa en C con escalares en R . Es decir, $R \times C \rightarrow C$ o bien, si $\alpha \in R$ y $z \in C \Rightarrow \alpha \cdot z = \alpha z \in C$. Esto significa, si $\alpha = -2$ y $z = -1+2i \Rightarrow \alpha \cdot z = -2(-1+2i) = 2 - 4i \in C$.

Ejemplo: Sean P_2 y R , conjuntos de polinomios de segundo grado y de números reales, respectivamente.

Definimos una ley de composición externa en P_2 con escalares reales, mediante

$$\alpha \cdot (a_0 + a_1x + a_2x^2) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2$$

para todo $\alpha \in R$ y $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2$

La definición anterior es una ley de composición externa en P_2 con escalares en R , pues la imagen de la operación de dos elementos, uno de R y otro de P_2 , es un elemento de P_2 .

Ejemplo: Ahora consideremos \mathbb{R}^3 y \mathbb{R} , conjuntos de vectores en el espacio y de números reales, respectivamente.

Definimos una ley de composición externa en \mathbb{R}^3 con escalares en \mathbb{R} , mediante

$$\alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad y \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Así, se tiene el producto de un escalar por un vector, y se efectúa multiplicando cada componente del vector por el escalar α .

5. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Se denomina estructura algebraica a todo conjunto no vacío en el que se han definido una o más leyes de composición interna y, eventualmente, leyes de composición externa.

Según sean las propiedades que deban satisfacer dichas leyes de composición, se tienen los diferentes tipos de estructuras algebraicas, como ser: Estructura de semigrupo, grupo, grupo abeliano, anillo y de cuerpo.

5.1 ESTRUCTURA DE SEMIGRUPO

Sea A un conjunto no vacío, en el que se ha definido una ley de composición interna $*$.

Se dice que el conjunto A , junto con la operación $*$ es un semigrupo y se representa por $(A, *)$, si y sólo si la ley $*$ es asociativa, esto es

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{para cualesquiera } a, b, c \in A.$$

Si además, aunque no es necesario, dicha ley es commutativa, entonces el semigrupo se llama commutativo.

Si dicha ley tiene elemento neutro en A , se dice que el semigrupo tiene unidad.

Ejemplo: En el conjunto \mathbb{N} de los números naturales se define la operación $*$, mediante

$$a * b = a + b + 2 \quad \text{para cualesquiera } a, b \in \mathbb{N}.$$

Determinar si \mathbb{N} posee estructura de semigrupo con respecto a esta operación.

SOLUCIÓN: Para que el conjunto \mathbb{N} tenga estructura de semigrupo con respecto a la operación $*$, debe verificarse la propiedad asociativa, esto es

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a * b) + c + 2 \\ &= (a + b + 2) + c + 2 = a + b + c + 4 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) + 2 \\ &= a + (b + c + 2) + 2 = a + b + c + 4 \quad (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2) resulta $(a * b) * c = a * (b * c)$ y es asociativa respecto de $*$.

Entonces \mathbb{N} posee estructura de semigrupo respecto de $*$.

Además, se verifica la propiedad conmutativa, pues

$$a * b = a + b + 2 = b + a + 2 = b * a$$

Por tanto, \mathbb{N} posee estructura de semigrupo conmutativo respecto de $*$.

Esto equivale a decir que el par $(\mathbb{N}, *)$ es un semigrupo conmutativo.

5.2 ESTRUCTURA DE GRUPO

Sea G un conjunto no vacío, en el que se ha definido una operación interna o ley de composición interna $*$. Se dice que el conjunto G , junto con dicha operación $*$, tiene estructura de grupo y se representa por $(G, *)$, si y sólo si cumplen las siguientes propiedades

i) Asociatividad, esto es

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{para cualesquiera } a, b, c \in G.$$

ii) Existencia de elemento neutro o identidad, es decir, existe elemento neutro e para dicha ley, tal que

$$a * e = e * a = a \quad \text{para todo } a \in G.$$

- iii) Existencia de inverso, es decir, todo elemento a de G con respecto a la ley $*$ tiene su inverso a' en G , tal que

$$a * a' = a' * a = e$$

Si además se verifica que la ley es commutativa en dicho conjunto, es decir

$$a * b = b * a \quad \text{para cualesquiera } a, b \in G.$$

entonces se dice que $(G, *)$ es un grupo abeliano commutativo.

Ejemplo: En el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales se define la ley de composición interna $*$, mediante

$$a * b = a + b - \frac{1}{2} \quad \text{para cualesquiera } a, b \in \mathbb{Q}.$$

Determinar si el conjunto \mathbb{Q} posee estructura de grupo abeliano con respecto a esta operación.

SOLUCIÓN: Para que el conjunto \mathbb{Q} tenga estructura de grupo abeliano con respecto a la operación $*$, tienen que verificarse las siguientes propiedades:

i) Asociativa

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a * b) + c - \frac{1}{2} \\ &= (a + b - \frac{1}{2}) + c - \frac{1}{2} = a + b + c - 1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a + (b * c) - \frac{1}{2} \\ &= a + (b + c - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = a + b + c - 1 \end{aligned} \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta $(a * b) * c = a * (b * c)$. Así se verifica la propiedad asociativa.

ii) Existencia de elemento neutro. Se ve que existe un elemento $e \in \mathbb{Q}$ tal que

$$a * e = a \quad \text{para todo } a \in \mathbb{Q}.$$

$$\text{esto es } a + e - \frac{1}{2} = a$$

$$e = \frac{1}{2}$$

Análogamente se prueba que $\frac{1}{2}$ es neutro a izquierda.

iii) Existencia de inversos. Es decir, existe un a' en Q , tal que

$$a * a' = e \quad \text{para cada } a \text{ de } Q$$

esto es $a + a' - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$a' = 1 - a$$

De modo análogo se prueba que es inverso a izquierda.

iv) Comutativa.

$$a * b = a + b - \frac{1}{2} = b + a - \frac{1}{2} = b * a$$

Por tanto el conjunto Q con respecto a la operación $*$, o el par $(Q, *)$, tiene estructura de grupo abeliano.

5.3 ESTRUCTURA DE ANILLO

Sea A un conjunto no vacío, en el que se han definido dos leyes de composición interna $*$ y \circ respectivamente. Se dice que el conjunto A junto con estas dos operaciones $*$, \circ tiene estructura de anillo, y se representa por $(A, *, \circ)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El conjunto A posee estructura de grupo abeliano con respecto a la ley $*$. Es decir,

$(A, *)$ es un grupo abeliano.

2. El conjunto A tiene estructura de semigrupo con respecto a la segunda ley “ \circ ”. Esto es:

(A, \circ) es un semigrupo.

3. Se cumple, además, que en el conjunto A la segunda ley “ \circ ” es distributiva respecto a la primera $*$. Esto es,

$$a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c) \quad \wedge \quad (b * c) \circ a = (b \circ a) * (c \circ a), \quad \forall a, b, c \in A$$

Si, con respecto a la segunda operación “ \circ ”, la ley es conmutativa, el anillo $(A, *, \circ)$ se denomina anillo conmutativo, y si existe elemento neutro o identidad respecto a la segunda ley “ \circ ” entonces se denomina anillo con identidad o unitario.

Si las leyes de composición son la adición “+” y multiplicación “.” habituales, estas condiciones se traducen en:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano
2. (A, \cdot) es un semigrupo
3. El producto “.” es distributivo respecto a la suma “+”.

Ejemplo: En el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros se definen las operaciones de la suma “+” y producto “.” que son habituales.

Cuál es la estructura que define a \mathbb{Z} ?

SOLUCIÓN: En primer lugar, estudiemos las propiedades que cumplen la operación “+” en el conjunto \mathbb{Z} .

Asociativa. Se cumple esta propiedad, pues

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad \text{para cualesquiera } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Existencia de elemento neutro. El neutro para la operación suma “+” en el conjunto \mathbb{Z} es:

$$a + e = a, \quad \text{entonces } e = 0.$$

Existencia del inverso. Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe otro $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (-a) = 0.$$

Comutatividad. Se cumple esta propiedad, ya que

$$a + b = b + a \quad \text{para cualesquiera } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Luego, el conjunto \mathbb{Z} con respecto a la operación suma $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.

Ahora estudiemos las propiedades que presenta la multiplicación en el conjunto \mathbb{Z} .

Asociativa. Si se cumple, ya que

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \Leftrightarrow \quad abc = abc$$

Existencia de elemento neutro. Se cumple esta propiedad porque:

$$a \cdot e = a, \quad \text{entonces } e = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, el conjunto \mathbb{Z} con respecto a la multiplicación (\mathbb{Z}, \cdot) tiene estructura de semigrupo conmutativo.

Finalmente, comprobemos que la segunda operación es distributiva con respecto a la primera. Esto es, que se verifican:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

En consecuencia, el conjunto \mathbb{Z} con las operaciones de la suma y el producto $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo conmutativo con identidad.

Ejemplo: Para el conjunto \mathbb{Z} de los enteros se llama relación de “congruencia módulo 6” a la relación de equivalencia definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow 6 \mid x - y$$

Sus clases de equivalencia son:

$$\bar{0} = K_0 = \{6K/K \in \mathbb{Z}\} \quad \bar{3} = K_3 = \{6K+3/K \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = K_1 = \{6K+1/K \in \mathbb{Z}\} \quad \bar{4} = K_4 = \{6K+4/K \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{2} = K_2 = \{6K+2/K \in \mathbb{Z}\} \quad \bar{5} = K_5 = \{6K+5/K \in \mathbb{Z}\}$$

El conjunto cociente se denota por \mathbb{Z}_6 , es decir,

$$\mathbb{Z}_6 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$$

En \mathbb{Z}_6 definimos $+$ y \cdot como

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad \text{y} \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}, \text{ para cualesquier } a, b \in \mathbb{Z}_6$$

Por ejemplo, $\bar{2} + \bar{3} = \overline{2+3} = \bar{5} \in \mathbb{Z}_6$

$$\bar{3} + \bar{4} = \overline{3+4} = \bar{7} = \bar{1} \in \mathbb{Z}_6, \text{ pues } 7 \in \bar{1} = K_1$$

$$\bar{4} + \bar{5} = \overline{4+5} = \bar{9} = \bar{3} \in \mathbb{Z}_6, \text{ pues } 9 \in \bar{3} = K_3$$

$$\bar{3} \cdot \bar{5} = \overline{3 \cdot 5} = \bar{15} = \bar{3} \in \mathbb{Z}_6, \text{ pues } 15 \in \bar{3} = K_3$$

Es fácil probar que $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, la demostración se deja al lector.

5.4 ESTRUCTURA DE CUERPO

Sea K un conjunto no vacío en el que se han definido dos operaciones “ $*$ ” y “ \circ ”. Se dice que el conjunto K junto con estas dos leyes de composición interna, $*$, \circ , tiene estructura de cuerpo y se representa por $(K, *, \circ)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Con respecto a la ley $*$, el conjunto K tiene estructura de grupo abeliano. Esto es
 $(K, *)$ es grupo abeliano.
2. Con respecto a la ley “ \circ ”, el conjunto K , menos el neutro de la primera ley, tiene estructura de grupo abeliano. Es decir
 $(K - \{e\}, \circ)$ es grupo abeliano
donde e es el neutro de la primera ley $*$.
3. La segunda ley “ \circ ” es distributiva con respecto a la primera $*$ en el conjunto K .

Si las leyes de composición interna que se han definido en el conjunto K son la suma “ $+$ ” y la multiplicación “ \cdot ” habituales, estas condiciones se traducen en:

1. $(K, +)$ es grupo abeliano
2. $(K - \{0\}, \cdot)$ es grupo abeliano
3. El producto es distributivo respecto a la suma.

Ejemplo: Clasificamos las siguientes ternas:

- a) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ no es cuerpo, pues no cumplen las condiciones 1) y 2).

En la primera no existe neutro para la suma “ $+$ ” y en la segunda, los elementos de \mathbb{N} carecen de inverso multiplicativo.

- b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es cuerpo, pues no se cumple la condición 2). Esto, porque los números enteros carecen de inverso multiplicativo.

- c) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo, pues $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ son grupos abelianos, y el producto es distributivo respecto a la suma en el conjunto \mathbb{Q} .

Ejemplo: Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x = a - b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Q}\}$

Determinar si $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo.

SOLUCIÓN: En primer lugar, comprobaremos si las operaciones suma “+” y multiplicación “.” son leyes de composición interna en A. Para esto se precisa que la suma y multiplicación de dos números cualesquiera del conjunto A dé como resultado otro elemento de A.

Esto es, sean $x = a - b\sqrt{3}$, $y = c - d\sqrt{3} \in A$

$$\text{entonces } x + y = (a - b\sqrt{3}) + (c - d\sqrt{3}) = (a+c) - (b+d)\sqrt{3} \in A$$

$$x \cdot y = (a - b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) - (ab + bc)\sqrt{3} \in A$$

luego, + y · son leyes de composición interna en A.

Ahora, estudiemos las propiedades que cumplen la operación “+” en el conjunto A.

Asociativa. Sean $x = a - b\sqrt{3}$, $y = c - d\sqrt{3}$, $z = f - g\sqrt{3} \in A$.

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= (a - b\sqrt{3} + c - d\sqrt{3}) + f - g\sqrt{3} \\ &= a - b\sqrt{3} + (c - d\sqrt{3} + f - g\sqrt{3}) = x + (y + z) \end{aligned}$$

Existencia de elemento neutro. Existe $e \in A$, tal que

$$x + e = x, \quad \text{entonces } e = 0 + 0\sqrt{3}$$

Existencia del inverso. Para todo $x \in A$, existe otro $x' \in A$, tal que

$$x + x' = e$$

$$\text{entonces } x' = -(a - b\sqrt{3}) = -a + b\sqrt{3}$$

Commutativa. Para $x, y \in A$ se tiene

$$x + y = a - b\sqrt{3} + c - d\sqrt{3} = c - d\sqrt{3} + a - b\sqrt{3} = y + x$$

Luego, el conjunto A con respecto a la operación “+” ($A, +$) tiene estructura de grupo abeliano.

Ahora estudiemos las propiedades que presenta la multiplicación en el conjunto A.

Asociativa. El producto en A es asociativo, por ser A un subconjunto de \mathbb{R} , donde se sabe que la multiplicación es asociativa.

Existencia de elemento neutro. Si existe $e \in A$, tal que

$$(a - b\sqrt{3}) \cdot e = a - b\sqrt{3}, \quad \text{entonces} \quad e = 1 - 0\sqrt{3}$$

Existencia del inverso. Para todo $x \in A$, existe otro $x^{-1} \in A$, tal que

$$x \cdot x^{-1} = e$$

$$(a - b\sqrt{3}) x^{-1} = 1 - 0\sqrt{3}$$

$$\text{entonces } x^{-1} = \frac{1}{a - b\sqrt{3}} = \frac{a + b\sqrt{3}}{a^2 + 3b^2} = \left(\frac{a}{a^2 + 3b^2} \right) - \left(\frac{-b}{a^2 + 3b^2} \right)\sqrt{3},$$

en donde a y b son distintos de cero.

Commutativa. El producto en A es commutativo, por ser A un subconjunto de \mathbb{R} , en donde la multiplicación es ley commutativa.

Por tanto, el conjunto A, menos el neutro aditivo, con respecto a la multiplicación ($A - \{0\}, \cdot$) tiene estructura de grupo abeliano.

Finalmente, comprobemos que el producto es distributivo con respecto a la suma. Consideremos $x, y, z \in A$.

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= (a - b\sqrt{3}) \cdot (c - d\sqrt{3} + f - g\sqrt{3}) = (a - b\sqrt{3}) [(c + f) - (d + g)\sqrt{3}] \\ &= [a(c + f) + 3b(d + g)] - [b(c + f) + a(d + g)]\sqrt{3} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x \cdot y + x \cdot z &= (a - b\sqrt{3})(c - d\sqrt{3}) + (a - b\sqrt{3})(f - g\sqrt{3}) \\ &= ac + 3bd - (ad + bc)\sqrt{3} + af + 3bg - (bf + ag)\sqrt{3} \\ &= [a(c + f) + 3b(d + g)] - [b(c + f) + a(d + g)]\sqrt{3} \end{aligned} \quad (2)$$

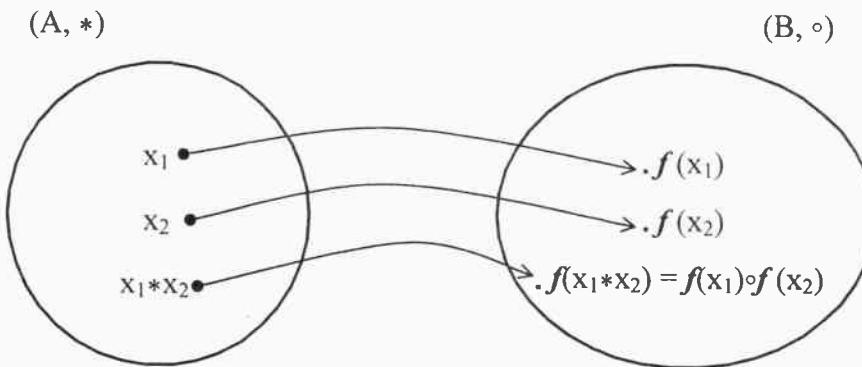
De (1) y (2) resulta $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

En consecuencia, el conjunto A con las operaciones de la suma y el producto ($A, +, \cdot$) tiene estructura de cuerpo.

6. HOMOMORFISMO

Sea A un conjunto dotado de una operación interna $*$ y B un conjunto dotado de una operación interna \circ . Se dice que una función $f: A \rightarrow B$ es un homomorfismo de $(A, *)$ en (B, \circ) si la imagen del compuesto de dos elementos de A es igual a la compuesta de las imágenes de esos elementos en B . Es decir,

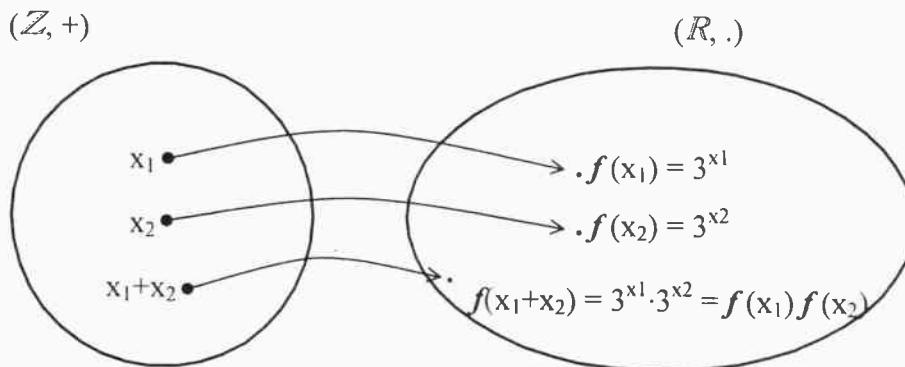
$$f \text{ es un homomorfismo de } (A, *) \text{ en } (B, \circ) \Leftrightarrow \forall x_1 \forall x_2 \in A : f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2)$$



Ejemplo: Sea \mathbb{Z} dotado de la suma habitual y \mathbb{R} dotado de la multiplicación habitual, y sea $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3^x$.

En efecto, si $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow f(x_1 + x_2) = 3^{x_1 + x_2} = 3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$$



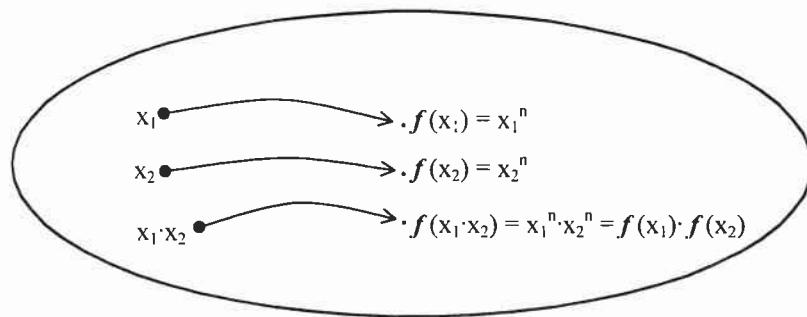
Por consiguiente, f es un homomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ en (\mathbb{R}, \cdot) .

Ejemplo: En \mathbb{R} , dotado de la multiplicación habitual, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ es un homomorfismo de \mathbb{R} sobre sí mismo (o endomorfismo), pues si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ entonces

$$f(x_1) = x_1^n, \quad f(x_2) = x_2^n$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2)^n = x_1^n \cdot x_2^n = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

(\mathbb{R}, \cdot)



6.1 ISOMORFISMO Cuando la función f que establece un homomorfismo es biyectiva, se dice que f es un isomorfismo.

Ejemplo: Sean (\mathbb{R}^+, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, y $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \ln x$.

En efecto, f es un homomorfismo, pues

si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$f(x_1) = \ln x_1, \quad f(x_2) = \ln x_2$$

$$f(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 = f(x_1) + f(x_2)$$

Ahora, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ es tal que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

luego, f es inyectiva.

Asimismo f es sobreyectiva, ya que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = e^y \text{ tal que}$$

$$f(x) = f(e^y) = \ln e^y = y$$

En consecuencia f es biyectiva.

Por lo tanto, se trata de un isomorfismo de (\mathbb{R}^+, \cdot) en $(\mathbb{R}, +)$.

Ejemplo: Sea $(\mathbb{R}, +)$ el grupo de los números reales bajo la adición y sea (\mathbb{R}^+, \cdot) el grupo de los números reales bajo la multiplicación. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = e^{-x}$.

Entonces se demostrará que f es un isomorfismo.

Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ es tal que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ e^{-x_1} &= e^{-x_2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Así f es inyectiva.

Por otra parte $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x = -\ln y$ tal que

$$f(x) = f(-\ln y) = e^{-(-\ln y)} = e^{\ln y} = y$$

entonces f es biyectiva.

Por tanto, f es un isomorfismo.

6.2 HOMOMORFISMO DE ANILLOS

Dados dos anillos $(A, +, \cdot)$ y $(B, +, \cdot)$, se dice que una $f: A \rightarrow B$ es un homomorfismo de $(A, +, \cdot)$ en $(B, +, \cdot)$ si, para cualesquiera $x_1, x_2 \in A$, se verifica que

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad y \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

El homomorfismo de anillos $f: (A, +, \cdot) \rightarrow (B, +, \cdot)$ se dice que es un isomorfismo si la función $f: A \rightarrow B$ es una biyección.

El homomorfismo de cuerpos tiene la misma definición que los homomorfismos de anillos.

Ejemplo: Consideremos los anillos $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, donde la suma y el producto de \mathbb{Z}_6 se definen como

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad y \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}, \text{ si } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_6$$

Definamos $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ mediante $f(x) = \bar{x}$, ($x \in K_x$)

Entonces, para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= \overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2} = f(x_1) + f(x_2) \\ f(x_1 \cdot x_2) &= \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

Por consiguiente, f es un homomorfismo.

6.3 NÚCLEO E IMAGEN DE UN HOMOMORFISMO

Sean $(A, *)$, (B, \circ) dos estructuras, y sea $f: A \rightarrow B$ un homomorfismo de $(A, *)$ en (B, \circ) .

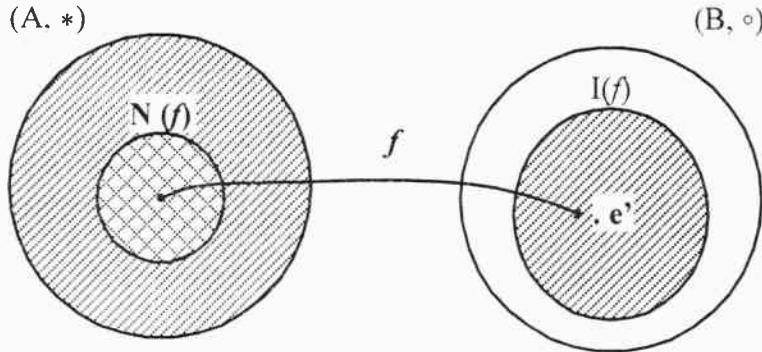
Entonces,

“Núcleo del homomorfismo $f: A \rightarrow B$ es la totalidad de los elementos de A , cuyas imágenes por f son iguales al neutro de B ”. Es decir,

$$N(f) = \{x \in A / f(x) = e'\}, e' \text{ es el neutro de } B.$$

“Imagen del homomorfismo $f: A \rightarrow B$ es la totalidad de las imágenes de los elementos de A ”. Es decir,

$$I(f) = \{y \in B / \exists x \in A \wedge f(x) = y\}$$



Si las estructuras son dos anillos $(A, +, \cdot)$ y $(B, +, \cdot)$, el neutro $e' = 0 \in B$. Por tanto

$$N(f) = \{x \in A / f(x) = 0\}$$

Ejemplo: Sean los grupos $(\mathbb{R}^2, +)$ y $(\mathbb{R}, +)$, y sea la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

definida por $f(x, y) = 2x - 3y$

Entonces f es un homomorfismo, pues

Para $u = (x, y), v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x+a, y+b) = 2(x+a) - 3(y+b) \\ &= (2x - 3y) + (2a - 3b) \\ &= f(x, y) + f(a, b) = f(u) + f(v) \end{aligned}$$

El núcleo de f es

$$N(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\}$$

$$\text{Es decir } 2x - 3y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$$

$$\text{En consecuencia, } N(f) = \{(x, \frac{2}{3}x) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}$$

La imagen de f es

$$I(f) = \{z \in \mathbb{R} / \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge f(x, y) = z\}$$

$$\text{Es decir, } 2x - 3y = z \in \mathbb{R}, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Por tanto, } I(f) = \mathbb{R}$$

"El hombre reflexivo se propone a cada instante el problema de la vida; el hombre de acción lo resuelve a cada instante. ¿Qué media entre los dos? Un lazo invisible y sin embargo real, hecho en parte de razón y de voluntad, que se llama generalmente carácter".

Franz Tamayo

EJERCICIOS

1. Sean I y P los conjuntos de los números naturales impares y de pares, respectivamente. Es decir $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$$P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

la adición o suma “+”, ¿es una ley de composición interna en I ? ¿y en P ? R : NO, SI

2. La resta o sustracción “-“, ¿es una ley de composición interna en \mathbb{N} ? ¿y en \mathbb{Z} ?

Siendo $\mathbb{N} =$ conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z} =$ conjunto de los números enteros.

R : NO, SI

3. En el conjunto \mathbb{N} , de los números naturales, se define la siguiente operación *:

Dados a y b cualesquiera pertenecientes a \mathbb{N} ,

$$a * b = ab + 1$$

a) Hallar: $(1*2)*3$, $1*(2*3)$, $(1*2)*(3*2)$ y $(2*3)*(2*1)$

b) ¿Dicha ley es asociativa?, ¿es conmutativa? R : NO, SI

4. Se define la ley de composición interna * en el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ mediante la tabla siguiente:

*	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Si a y b son dos elementos de A , el resultado de operar a con b se halla en la intersección de la fila a con la columna b .

a) Hallar $3*(2*1)$, $(3*1)*2$, $(0*2)*(2*3)$ y $(3*0)*(2*2)$

b) ¿Dicha ley es conmutativa? y ¿posee elemento neutro?

c) ¿Es asociativa? y ¿posee elemento inverso? R: SI, e=0, SI, SI

5. En el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales, se define la operación * mediante

$$a * b = \frac{a + b}{2}$$

¿Qué propiedades cumple dicha operación? R: commutativa y elementos regulares

6. En el conjunto \mathbb{Z} , de los números enteros, se establece la siguiente operación *:

$$a * b = a(b+1) + b(a+1)$$

¿Qué propiedades cumple dicha operación?

R: asociativa, commutativa, con neutro $e=0$, y elementos regulares.

7. En el conjunto \mathbb{Q} , de los números racionales, se definen las leyes de composición interna * y \circ mediante.

$$a * b = \frac{a + b}{3} \quad y \quad a \circ b = 3ab$$

Investigar las distributividades de \circ respecto de *. R: es distributiva.

8. En el conjunto \mathbb{Z} , de los números enteros, se define la ley de composición interna * mediante

$$a * b = a$$

Probar que el par $(\mathbb{Z}, *)$ es semigrupo.

9. En el conjunto \mathbb{R} , de los números reales, se define la operación * mediante

$$a * b = 0$$

Determinar si el par $(\mathbb{R}, *)$ es semigrupo commutativo.

10. En el conjunto \mathbb{R} , de los números reales, se considera la ley de composición interna * que asigna a cada par a y b de \mathbb{R} el mínimo de los dos. Es decir,

$$a * b = \min \{a, b\}$$

Determinar si el par $(\mathbb{R}, *)$ es semigrupo commutativo.

11. En el conjunto \mathbb{R}^+ , de los números reales positivos, se establece la operación * mediante

$$a * b = \sqrt{3} ab$$

Determinar si el par $(\mathbb{R}^+, *)$ es grupo abeliano.

12. Demostrar que el par $(\mathbb{R}^2, +)$ es grupo abeliano, siendo el conjunto de pares ordenados de números reales, y la suma definida por

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

13. En el conjunto \mathbb{R}^2 , se considera la operación * definida por

$$(a, b) * (c, d) = (a, d)$$

Caracterizar la estructura que posee el par $(\mathbb{R}^2, *)$.

14. Sea A un conjunto no vacío, en el que se han definido dos operaciones, + y “◦” respectivamente. Si $(A, +)$ es un grupo abeliano, y se define “◦” mediante

$$a \circ b = 0$$

entonces verificar que la terna $(A, +, \circ)$ es un anillo conmutativo.

15. Comprobar que la terna $(\mathbb{Z}^2, +, \circ)$ es un anillo conmutativo con identidad. Siendo \mathbb{Z}^2 el conjunto de pares ordenados de números enteros, + la suma habitual y “◦” definida por

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$$

16. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x = a - b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$. Determinar si la terna $(A, +, \cdot)$ es un cuerpo siendo “+” y “·” la suma y producto habituales.

7. Sea $(G, *)$ un grupo. Demostrar que si a y b pertenecen a G, entonces se verifica

$$(a * b)^* = b^* * a^*$$

18. Sea $(G, *)$ un grupo. En G se define la operación “ \circ ” mediante

$$a \circ b = b * a$$

Demostre que (G, \circ) es un grupo.

19. Sea $G = Q - \{-1\}$. Definimos la operación binaria en G como

$$a \circ b = a + b + ab$$

Demuestre que (G, \circ) es un grupo abeliano.

20. En \mathbb{Z} se define la operación binaria \circ como $a \circ b = a + b + 1$.

Demuestre que (\mathbb{Z}, \circ) es un grupo abeliano.

21. Determine si el conjunto $a = \{a + \sqrt{2}b / a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un anillo con la suma y producto usuales.

22. Sea $A = \{1, 2\}$ y $P(A)$ el conjunto de partes de A . Demuestre que $(P(A), \Delta, \cap)$ es un anillo conmutativo con identidad.

23. Sea A un conjunto y $P(A)$ el conjunto de partes de A . ¿Es $(P(A), \cup, \cap)$ un anillo?

24. Considere el conjunto \mathbb{Z} junto con las operaciones binarias $*$ y \circ definidas por

$$a * b = a + b - 1 , \quad a \circ b = a + b - ab$$

- a) Demuestre que $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ es un anillo
- b) Es conmutativo este anillo?
- c) Es un anillo con identidad?

25. Sean n, m enteros fijos. Encuentre todos los valores de n, m para los que $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ es un anillo con las operaciones binarias

$$a * b = a + b - n , \quad a \circ b = a + b - mab \quad R: 1, 1; -1, -1$$

26. En el conjunto \mathbb{Q} se define las operaciones binarias $*$ y \circ , mediante

$$a * b = a + b + 7 \quad , \quad a \circ b = a + b + \frac{ab}{7}$$

Demuestre que $(\mathbb{Q}, *, \circ)$ es un cuerpo.

7. La función $f: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dada por $f(x) = 2x$ es un homomorfismo de anillos?

R: NO

8. Encuentre el núcleo del homomorfismo de anillos $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$, donde

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_5$ es tal que $f(x) = \bar{x}$.

9. Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, +, \cdot)$, dos anillos. Si $C = AxB$, definimos las operaciones binarias $*$ y \circ mediante

$$(x, y) * (a, b) = (x+a, y+b)$$

$$(x, y) \circ (a, b) = (ax, by)$$

- a) Demuestre que $(C, *, \circ)$ es un anillo.
- b) Si A y B son comutativos, demuestre que C es comutativo.
- c) Si A tiene elemento unidad u y B tiene elemento unidad v , cual es el elemento unidad (o identidad) de C ?
- d) Si A y B son cuerpos, es C también un cuerpo?

. Si $(A, +, \cdot)$, $(B, +, \cdot)$ y $(C, +, \cdot)$ son anillos y $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ son homomorfismos de anillos, demuestre que la composición $g \circ f: A \rightarrow C$ es un homomorfismo de anillos.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo examinaremos una de las propiedades fundamentales que se halla presente en el conjunto de los números naturales. Esta propiedad nos permitirá demostrar algunas fórmulas o teoremas matemáticos mediante una técnica llamada inducción matemática, o inducción completa.

A continuación enunciaremos los principios en los que se basa fundamentalmente el método de inducción matemática.

2. EL PRINCIPIO DEL BUEN ORDEN

El principio del buen orden establece que cualquier subconjunto no vacío de números naturales contiene un elemento mínimo, o primer elemento.

Entonces según este principio se puede decir que todo subconjunto no vacío de números naturales tiene primer elemento.

Ejemplo: Sea $A = \{2, 4, 6, 8\}$. Entonces el elemento mínimo o primer elemento es 2, pues $\forall x \in A, 2 \leq x$.

Asimismo, si $B = \{3, 5, 7, 9\}$ entonces 3 es el elemento mínimo, ya que $\forall x \in B, 3 \leq x$.

Teorema Sea \mathbb{N} el conjunto de los números naturales y A un subconjunto de \mathbb{N} , tal que

- i) 1 pertenece a A .
- ii) Si k pertenece a A , entonces $k+1$ pertenece a A .

Entonces, A es el conjunto de los números naturales.

Es decir, todo subconjunto de \mathbb{N} que contiene al 1, y al siguiente de k siempre que incluya al k , es igual a \mathbb{N} .

En símbolos:

$$\left. \begin{array}{l} A \subset N \quad \wedge \quad \text{i)} 1 \in A \\ \text{ii)} k \in A \Rightarrow k + 1 \in A \end{array} \right\} \Rightarrow A = N$$

3. PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ una proposición matemática abierta, y que se desea demostrar que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que

- i) $P(1)$ es verdadera; y
- ii) Siempre que $P(k)$ sea verdadera (para algún $k \in \mathbb{N}$), entonces $P(k+1)$ será verdadera;

Entonces el principio de inducción matemática establece que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por consiguiente, si se quiere probar la validez de una proposición $P(n)$ para todas las $n \in \mathbb{N}$, se deberá probar primero que la proposición es verdadera para algún valor de n , digamos k , y luego hay que demostrar apoyándose en esta hipótesis, la proposición es también verdadera para $k + 1$ que representa el siguiente valor posible de n . Si se logra esta demostración, se completa con el siguiente razonamiento: Ya que la proposición es verdadera para $n = 1$, entonces es verdadera para $n = 2$; análogamente, si vale para $n = 2$, entonces vale para $n = 3$, y así sucesivamente para todo valor entero positivo de n .

4. MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El método de inducción matemática para demostrar una proposición matemática consta, en esencia, de los tres siguientes pasos:

1. Verificar que la proposición es verdadera para $n = 1$, o para el primer valor admisible de n .
2. Partiendo de la hipótesis de que la proposición es verdadera para algún valor de n , digamos k , demostrar que también es verdadera para $n = k + 1$.

3. Comprobado que la proposición es cierta para $n = 1$ en el paso 1, del paso 2 se sigue que también es cierta para $n = 2$, entonces es cierta para $n = 3$ y así sucesivamente para todos los valores enteros y positivos de n .

A los pasos 1 y 2 se conocen como la base de la inducción, mientras que el paso 3 se conoce como paso inductivo, o consecuencia de 1 y 2.

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que para todo $n \geq 1$,

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n) = \frac{n}{3} (n+1)(4n-1)$$

SOLUCIÓN: Sea $P(n)$ el enunciado dado. En este caso el primer valor admisible es $n=1$. Entonces se tiene

1. Para $n = 1$, la proposición

$$P(n) : 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2n-1)(2n) = \frac{n}{3} (n+1)(4n-1)$$

$$\text{se convierte en } P(1) : 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} (2)(3)$$

$$2 = 2$$

2. Si suponemos que el resultado es cierto para $n = k$, es decir,

$$P(k) : 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2k-1)(2k) = \frac{k}{3} (k+1)(4k-1) \text{ es verdadera.}$$

Para establecer la verdad de $P(k+1)$, necesitamos probar que

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2k+1)(2k+2) = \frac{(k+1)}{3} (k+2)(4k+3)$$

Sumando a ambos miembros de $P(k)$ el término $k+1$, se obtiene

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (2k-1)(2k) + (2k+1)(2k+2) = \frac{k}{3} (k+1)(4k-1) + (2k+1)(2k+2)$$

luego el segundo miembro de esta última proposición resulta

$$\begin{aligned} \frac{k}{3} (k+1)(4k-1) + (2k+1)(2k+2) &= \frac{(k+1)}{3} [k(4k-1) + 6(2k+1)] \\ &= \frac{(k+1)}{3} [4k^2 - k + 12k + 6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(k+1)}{3} [4k^2 + 11k + 6] \\
 &= \frac{(k+1)}{3} (k+2) (4k+3)
 \end{aligned}$$

lo que establece la verdad de $P(k+1)$.

3. En consecuencia, por el principio de inducción matemática, la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Demuestre que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 1$ es divisible entre 4.

SOLUCIÓN: En efecto,

1. Si $n = 1$, la proposición es verdadera, pues

$$3^{2+1} + 1 = 3^3 + 1 = 28 = 4 \cdot 7, \text{ es divisible por 4.}$$

2. Supongamos que la proposición es cierta para $n = k$, es decir, la hipótesis es

$$3^{2k+1} + 1 = 4 \cdot q, \text{ para algún } q \in \mathbb{Z}$$

basados en ello, probemos que es cierto para $n = k+1$

$$\begin{aligned}
 3^{2(k+1)+1} + 1 &= 3^{2k+3} + 1 \\
 &= 3^{2k+3} - 3^{2k+1} + (3^{2k+1} + 1) \\
 &= 3^{2k+1} (3^2 - 1) + 4q \\
 &= 4 \cdot (2 \cdot 3^{2k+1} + q) \\
 &= 4 \cdot q', \text{ donde } q' = 2 \cdot 3^{2k+1} + q \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

lo que establece la verdad de la proposición para $n = k + 1$.

3. Por tanto, la proposición resulta cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Por el método de inducción matemática, demuestre que

$$x^{2n} - y^{2n} \text{ es divisible entre } x + y \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

SOLUCIÓN: 1. Para $n = 1$ tenemos $(x^2 - y^2) / (x+y) = x - y$, con lo cual se verifica el paso 1.

2. Suponiendo que la proposición es verdadera para $n = k$, es decir

$$x^{2k} - y^{2k} = (x+y) q, \text{ donde } q \text{ es un polinomio entero.}$$

Ahora debemos probar que $x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$ también es divisible entre $x + y$. En efecto,

$$\begin{aligned} x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} &= x^{2k+2} - y^{2k+2} \\ &= (x^{2k+2} - y^{2k} x^2) + (y^{2k} x^2 - y^{2k+2}) \\ &= x^2 (x^{2k} - y^{2k}) + y^{2k} (x^2 - y^2) \\ &= (x+y) [x^2 q + y^{2k} (x-y)] \\ &= (x+y) q', \text{ donde } q' \text{ es un polinomio entero} \end{aligned}$$

lo cual muestra que $x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$ entre $x+y$ es exacta.

3. En consecuencia, por el principio de inducción, la proposición es verdadera para todo n .

5. NOTACIÓN DE SUMATORIA Y PRODUCTORIA

En muchas situaciones es conveniente introducir una notación que represente la suma de una sucesión de términos en una forma abreviada. Así, el símbolo que denota una sumatoria es Σ . Por ejemplo, la suma de n términos tales como $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ puede

representarse por $\sum_{i=1}^n a_i$. Es decir, $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, donde la letra i , llamada

índice de la suma, toma sucesivamente todos los valores enteros positivos de 1 a n inclusive.

Ejemplo:

a)
$$\sum_{i=1}^5 (2i-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + (2 \cdot 4 - 1) + (2 \cdot 5 - 1)$$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

b)
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (-1)^i \frac{i}{i+1} &= (-1)^1 \frac{1}{1+1} + (-1)^2 \frac{2}{2+1} + (-1)^3 \frac{3}{3+1} + (-1)^4 \frac{4}{4+1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo: Expresar como sumatorias las siguientes sumas:

$$\text{a)} \quad 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \sum_{i=1}^6 i^2$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad & \frac{1}{2} + 1 + \frac{5}{4} + \frac{7}{5} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \frac{5}{4} + \frac{7}{5} + \frac{9}{6} \\ & = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1+1} + \frac{2 \cdot 2 - 1}{2+1} + \frac{2 \cdot 3 - 1}{3+1} + \frac{2 \cdot 4 - 1}{4+1} + \frac{2 \cdot 5 - 1}{5+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& = \sum_{i=1}^5 \frac{2i-1}{i+1} \\ \text{c)} \quad & \frac{2}{3} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \frac{65}{16} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 + \frac{1}{4}\right) + \left(3 + \frac{1}{8}\right) + \left(4 + \frac{1}{16}\right) \\ & = \left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \left(4 + \frac{1}{2^4}\right) \\ & = \sum_{i=1}^4 \left(i + \frac{1}{2^i}\right)\end{aligned}$$

Otra notación útil, llamada productoria, es la que representa al producto de una sucesión de términos en una forma breve. El símbolo que denota a una productoria es \prod . Por ejemplo, el producto de n términos tales como $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ puede representarse por

$$\prod_{i=1}^n a_i.$$

Ejemplo: a) $\prod_{i=1}^6 i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

b) $\prod_{i=0}^4 (8-i) = (8-0)(8-1)(8-2)(8-3)(8-4) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

5.1. PROPIEDADES

$$1. \quad \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

2. $\sum_{i=1}^n k a_i = k \sum_{i=1}^n a_i$, donde k es constante.

3. $\sum_{i=1}^n k = kn$, siendo k una constante

4. $\log \prod_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \log a_i$, para todo $a_i > 0$

Ejemplo: Demuestre que para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

SOLUCIÓN: 1. Para $n = 1$, la proposición abierta

$$P(n) : \sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\text{Se convierte en } P(1) : \sum_{i=1}^1 i = \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

por lo que $P(1)$ es verdadera.

2. Supongamos que la proposición es cierta para $n = k$, es decir,

$$P(k) : \sum_{i=1}^k i = \frac{k}{2}(k+1) \quad \text{es verdadera}$$

Ahora, para establecer la verdad de $P(k+1)$, necesitamos mostrar que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)}{2}(k+2)$$

Sumando a ambos miembros de $P(k)$ el término $k+1$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{k}{2}(k+1) + (k+1)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

lo cual muestra la verdad de $P(k+1)$

3. Por tanto, por el principio de inducción, la proposición es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Demuestre por inducción matemática que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

SOLUCIÓN: Sea la proposición abierta

$$P(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

1. Para $n = 1$, la proposición abierta se convierte en

$$P(1) = \sum_{i=1}^1 i^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$$

por lo que $P(1)$ es verdadera.

2. Supongamos ahora la verdad de la proposición para $n = k$, es decir,

$$P(k) : \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) \quad \text{es verdadera}$$

A partir de esta hipótesis debemos probar la verdad de

$$P(k+1) : \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Si sumamos a ambos miembros de la hipótesis el término $k+1$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 &= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \frac{(k+1)}{6} [k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)}{6} [2k^2 + 7k + 1] \\ &= \frac{(k+1)}{6} (k+2)(2k+3) \end{aligned}$$

lo que establece la verdad de $P(k+1)$.

3. En consecuencia, por el principio de inducción, la proposición es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Obtener la suma de los n primeros términos de la serie

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$$

SOLUCIÓN: Cada término de la serie es igual al producto de dos números consecutivos. Por tanto, el término de lugar n es igual a $n(n+1)$. Entonces la suma de los n primeros términos se escribe como

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)$$

Ahora aplicando la propiedad 1 y considerando las sumas ya demostradas, $\sum i$ y $\sum i^2$, se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i(i+1) &= \sum_{i=1}^n (i^2 + i) = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{3}(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

6. EJEMPLOS ADICIONALES

Ejemplo: Obtener la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

SOLUCIÓN: La suma de los cuadrados de los n primeros naturales es

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\text{Consideremos } (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{de donde } x^3 - (x-1)^3 = 3x^2 - 3x + 1$$

$$\text{Si } x=n \Rightarrow n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

$$x=n-1 \Rightarrow (n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1$$

$$x=n-2 \Rightarrow (n-2)^3 - (n-3)^3 = 3(n-2)^2 - 3(n-2) + 1$$

.

.

.

$$x=2 \Rightarrow 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$$

$$x=1 \Rightarrow 1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

Sumando: $n^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$

$$n^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

de donde, $3 \sum_{i=1}^n i^2 = n^3 - n + 3 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

y resulta $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Ejemplo: Obtener la suma de los cubos de los n primeros números naturales.

SOLUCIÓN: En efecto

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3$$

Por $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

se tiene $x^4 - (x-1)^4 = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

Si $x=n \Rightarrow n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

$$x=n-1 \Rightarrow (n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(n-1) - 1$$

$$x=n-2 \Rightarrow (n-2)^4 - (n-3)^4 = 4(n-2)^3 - 6(n-2)^2 + 4(n-2) - 1$$

.

.

.

$$x=2 \Rightarrow 2^4 - 1^4 = 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1$$

$$x=1 \Rightarrow 1^4 - 0^4 = 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$$

Sumando: $n^4 = 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \sum_{i=1}^n i^2 + 4 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 1$

$$n^4 = 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} - n$$

de donde, $4 \sum_{i=1}^n i^3 = n^4 + n + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = n^2(n+1)^2$

despejando

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Ejemplo: Obtener la suma de los n primeros términos de una serie, cuyo término n -simo es $n^2(4n - 3)$.

SOLUCIÓN: La suma pedida es

$$\sum_{i=1}^n i^2 (4i - 3) = \sum_{i=1}^n (4i^3 - 3i^2)$$

Por la propiedad 1 y 2 de la sumatoria, y conociendo $\sum_{i=1}^n i^3$ y $\sum_{i=1}^n i^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (4i^3 - 3i^2) &= 4 \sum_{i=1}^n i^3 - 3 \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n(n+1) \left[n(n+1) - \frac{2n+1}{2} \right] = \frac{n(n+1)(2n^2 - 1)}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Los números de Fibonacci se definen en forma recursiva como

i) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$; y

ii) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo entero $n \geq 2$

Entonces los primeros números de Fibonacci son

$$n = 0 \Rightarrow F_0 = 0 \quad n = 3 \Rightarrow F_3 = F_2 + F_1 = 2$$

$$n = 1 \Rightarrow F_1 = 1 \quad n = 4 \Rightarrow F_4 = F_3 + F_2 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow F_2 = F_1 + F_0 = 1 \quad n = 5 \Rightarrow F_5 = F_4 + F_3 = 5, \text{ etc.}$$

Ahora se tiene

$$F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 = F_3 - 1$$

$$F_0 + F_1 + F_2 = 0 + 1 + 1 = 2 = F_4 - 1$$

$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 = 0 + 1 + 1 + 2 = 4 = F_5 - 1$$

luego, se puede conjeturar que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$$

la demostración de esta conjetura por inducción matemática es

1. Para $n = 1$, resulta

$$\sum_{i=0}^1 F_i = F_0 + F_1 = 0 + 1 = 1 = F_3 - 1 = F_{1+2} - 1 \quad \text{verdadera}$$

2. Supongamos verdadera para $n = k$, es decir,

$$\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$$

Ahora para el caso en que $n = k+1$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^k F_i \right) + F_{k+1} &= (F_{k+2} - 1) + F_{k+1} \\ \sum_{i=0}^{k+1} F_i &= (F_{k+2} + F_{k+1}) - 1 \\ &= F_{k+3} - 1 = F_{(k+1)+2} - 1 \end{aligned}$$

lo que prueba que es cierta para $n = k+1$

3. Por tanto, por el principio de inducción, la conjetura dada es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Sean L_0, L_1, L_2, \dots los números de Lucas, donde

i) $L_0 = 2$, $L_1 = 1$; y

ii) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, para todo entero $n \geq 2$

Entonces los primeros números de la sucesión de Lucas son

$$n = 0 \Rightarrow L_0 = 2 \quad n = 3 \Rightarrow L_3 = L_2 + L_1 = 4$$

$$n = 1 \Rightarrow L_1 = 1 \quad n = 4 \Rightarrow L_4 = L_3 + L_2 = 7$$

$$n = 2 \Rightarrow L_2 = L_1 + L_0 = 3 \quad n = 5 \Rightarrow L_5 = L_4 + L_3 = 11, \text{ etc.}$$

Ahora se tiene

$$L_1^2 = 1 = 1 \times 3 - 2 = L_1 L_2 - 2$$

$$L_1^2 + L_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10 = 3 \times 4 - 2 = L_2 L_3 - 2$$

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 1^2 + 3^2 + 4^2 = 26 = 4 \times 7 - 2 = L_3 L_4 - 2$$

de donde, se puede conjeturar que

$$\sum_{i=0}^n L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

Su demostración por inducción matemática es

1. Para $n = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^1 L_i^2 = L_1^2 = 1^2 = 1 \times 3 - 2 = L_1 L_2 - 2 \quad \text{es verdadera}$$

2. Supongamos verdadera para $n = k$, es decir,

$$\sum_{i=1}^k L_i^2 = L_k L_{k+1} - 2$$

luego para el caso en que $n = k+1$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k L_i^2 \right) + L_{k+1}^2 &= (L_k L_{k+1} - 2) + L_{k+1}^2 \\ \sum_{i=1}^{k+1} L_i^2 &= (L_k L_{k+1} + L_{k+1}^2) - 2 \\ &= L_{k+1} (L_k + L_{k+1}) - 2 \\ &= L_{k+1} L_{k+2} - 2 \end{aligned}$$

lo que prueba que es cierta para $n = k+1$

3. En consecuencia, por el principio de inducción, la conjetura dada es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

"El que aprende y aprende y no practica lo que aprende, es como el que ara y ara y nunca siembra."

Platón

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios siguientes, demuestre por el método de inducción matemática que la proposición dada es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$

$$1. \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{i=1}^n (2i+1) = 3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = n(n+2)$$

$$3. \sum_{i=1}^n (3i-1) = 2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$$4. \sum_{i=1}^n (3i-2) = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$5. \sum_{i=1}^n (4i-3) = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n-3) = n(2n-1)$$

$$6. \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$7. \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$8. \sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$9. \sum_{i=1}^n i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$10. \sum_{i=1}^n i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

~~$$11. \sum_{i=1}^n i(i+2) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$~~

$$12. \sum_{i=1}^n (i+1)(i+4) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \dots + (n+1)(n+4) = \frac{n(n+4)(n+5)}{3}$$

$$13. \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$14. \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$15. \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$16. \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$17. \sum_{i=1}^n 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$18. \sum_{i=1}^n i2^i = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

19. $\sum_{i=1}^n i3^i = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{3}{4} [1 + (2n-1)3^n]$

20. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n} + 5$ es divisible entre 3.

21. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} + 7$ es divisible entre 8.

22. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^{2n} - 1$ es divisible entre 3.

23. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n} - 1$ es divisible entre 7.

24. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible entre 3.

25. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible entre 7.

26. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible entre 11.

27. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n+1} + 1$ es divisible entre 3.

28. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ es divisible entre 57.

29. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible entre 64.

30. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$ es divisible entre 54.

31. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible entre 9.

32. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^7}{7} + \frac{n^3}{3} + \frac{11n}{21}$ es un entero.

33. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible entre $x - y$.

34. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n+1} + y^{2n+1}$ es divisible entre $x + y$.

35. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x^{2n-1} - y^{2n-1}$ es divisible entre $x - y$.

36. Determine el entero positivo n para el que $\sum_{i=1}^{2n} i = \sum_{i=1}^3 i^2$

37. Los números de Fibonacci se definen en forma recursiva como

i) $F_0 = 0$, $F_1 = 1$; y

ii) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo entero $n \geq 2$

- a) Escriba los 10 primeros números de Fibonacci
- b) Obtener las siguientes sumas

$$\sum_{i=1}^1 F_i^2, \sum_{i=1}^2 F_i^2, \sum_{i=1}^3 F_i^2, \sum_{i=1}^4 F_i^2, \sum_{i=1}^5 F_i^2, \sum_{i=1}^6 F_i^2$$

- c) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

38. La sucesión de los números de Lucas se definen en forma recursiva como

i) $L_0 = 2$, $L_1 = 1$; y

ii) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, para todo entero $n \geq 2$

- a) Escriba los primeros 10 números de Lucas.
- b) Para $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\sum_{i=1}^n L_i = L_{n+2} - 1$
- c) Para $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

39. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i+1} = F_{2n}^2$

40. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i F_i = F_{2n+1} - 1$

41. Considerando las cuatro ecuaciones siguientes

$$1 = 1$$

$$2 + 3 + 4 = 1 + 8$$

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 8 + 27$$

$$10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 27 + 64$$

Conjeture la fórmula general sugerida por estas cuatro ecuaciones y demuestre su conjetura por el método de inducción matemática.

42. Considerando las siguientes seis ecuaciones

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1 + 2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 = -(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$

Conjeture la fórmula general sugerida por estas seis ecuaciones y demuestre su conjetura por el método de inducción matemática.

Calcular las siguientes sumas

43. $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$ R : $\frac{n(4n^2 - 1)}{3}$

44. $\sum_{i=1}^n (2i-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3$ R : $n^2(2n^2 - 1)$

45. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ R : $\frac{n}{n+1}$

COMBINATORIA**1. PRINCIPIOS BÁSICOS DEL CONTEO:****1.1. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN:**

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ un conjunto de m elementos y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ otro conjunto de n elementos, si la idea es elegir aleatoriamente un elemento de cada conjunto para un fin determinado, entonces el número de opciones o alternativas de efectuar esta elección está dado por $m \cdot n$.

Luego, este principio se puede generalizar para más de 2 conjuntos, es decir, si A_1, A_2, \dots, A_k son k conjuntos finitos y cuyo número de elementos son n_1, n_2, \dots, n_k , respectivamente, entonces el número de opciones o alternativas de formar un grupo tomando un elemento de cada conjunto es igual a: $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$

Ejemplo: Supongamos que Mauricio desea comprar un par de medias y le ofrecen cuatro marcas y seis colores diferentes. Cuántas opciones de compra tiene?

SOLUCION: Tenemos dos conjuntos de especificaciones:

marcas diferentes $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}, m = 4$

y colores diferentes $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}, n = 6$

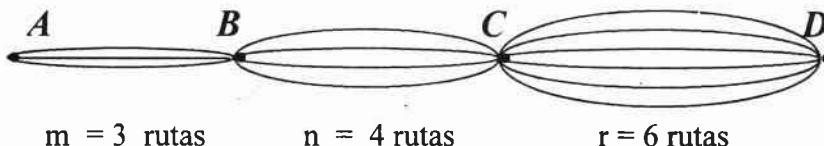
de las cuales, Mauricio debe especificar o elegir uno de cada conjunto, es decir, una marca y un color.

Por tanto, tendrá $m \cdot n = 4 \cdot 6 = 24$ opciones de compra.

Ejemplo: Un conductor de un automóvil tiene 3 rutas posibles para ir de la ciudad A a la ciudad B y para ir de la ciudad B a la ciudad C tiene 4 rutas posibles y finalmente para ir de la ciudad C a la ciudad D tiene 6 rutas

posibles. Si para ir desde A a D debe pasar necesariamente por las ciudades B y C, cuántas rutas posibles tiene el conductor?

SOLUCION:



El conductor para ir de A a D necesariamente debe tomar una ruta del tramo AB , una del tramo BC y una del tramo CD . Por tanto, el número total de rutas para ir de A a D es $m \cdot n \cdot r = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$

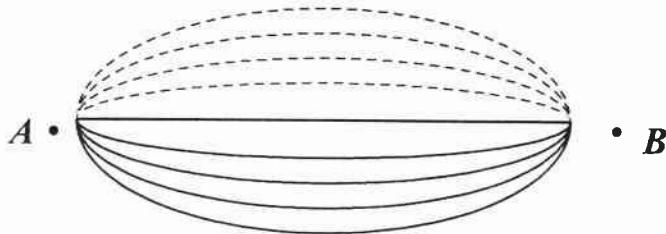
1.2. PRINCIPIO DE ADICIÓN

Si dos decisiones (u operaciones) son mutuamente excluyentes (que no pueden ocurrir ambos simultáneamente), donde la primera decisión se puede tomar de m maneras y la segunda de n maneras entonces una o la otra se puede tomar de $m + n$ maneras.

Ejemplo: Una persona puede viajar de A a B en tren o en ómnibus. Si hay cuatro rutas para el tren y 5 rutas para el ómnibus, de cuántas formas puede hacer el viaje?

SOLUCION:

$$m = 4 \text{ rutas para el tren}$$



$$n = 5 \text{ rutas para ómnibus}$$

Es claro, si la persona decide viajar en tren ya no viaja en ómnibus o viceversa. Luego la elección de un medio de transporte es mutuamente

excluyente. Por tanto, por el principio de adición dicha persona puede viajar de $m + n = 4 + 5 = 9$ formas.

2. FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea n un número entero positivo, el factorial de n , que se denota por $n!$, es igual al producto de todos los enteros consecutivos de 1 hasta n inclusive. Es decir,

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geq 1$$

Por ejemplo: $2! = 2 \cdot 1 = 2$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

2.1 PROPIEDADES DE LOS FACTORIALES

- a) por definición: $0! = 1$
- b) factorial de un número se puede expresar como:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\text{O bien } (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\text{Observaciones: } (n+m)! \neq n! + m!$$

$$(n \cdot m)! \neq n! \cdot m!$$

Ejemplo: Calcular:

$$\begin{aligned} \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{5!}{2!3!} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 5}{1} \cdot \frac{5 \cdot 2}{1} = 350 \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular

$$\frac{10!}{9!+8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{9 \cdot 8!+8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{(9+1)8!} = \frac{10 \cdot 9}{9+1} = \frac{10 \cdot 9}{10} = 9$$

Ejemplo: Hallar el valor de x en:

$$\frac{x!(x+2)^3}{x!+(x+1)!+(x+2)!} = 3!$$

SOLUCIÓN: Por la propiedad: $(n+1)! = (n+1) n!$, se tiene

$$\frac{x!(x+2)^3}{x!+(x+1)!+(x+2)!} = 3!$$

$$\frac{x!(x+2)^3}{x!+(x+1)x!+(x+2)(x+1)x!} = 3!$$

$$\frac{x!(x+2)^3}{x![1+(x+1)+(x+2)(x+1)]} = 3!$$

$$\frac{(x+2)^3}{(x+2)+(x+2)(x+1)} = 3!$$

$$\frac{(x+2)^3}{(x+2)[1+(x+1)]} = 3!$$

$$\frac{(x+2)^3}{(x+2)^2} = 3! \quad , \quad x+2 = 3! \quad , \quad x = 4$$

3. PERMUTACIONES

Se llaman permutaciones a las diversas ordenaciones o arreglos que pueden formarse con todos los elementos diferentes de un conjunto.

3.1 PERMUTACIONES SIMPLES

Son los diferentes arreglos que pueden formarse con todos los elementos u objetos distintos de un conjunto, cuya diferencia entre estos arreglos está dada solamente en el orden en que están colocados.

El número de permutaciones que pueden formarse con n objetos distintos está dado por:

$$P_n = n!$$

- Ejemplo: a) Cuántos números de 4 dígitos distintos se pueden escribir con los números: 2, 3, 4 y 5?
 b) Cuántos de ellos son pares?

SOLUCION: a) Los números de 4 dígitos que pueden escribirse con los números 2, 3, 4 y 5, son arreglos diferentes de estos números. Pues, los números como 2345, 3245, 4235, etc. son permutaciones de los 4 números dados.

Por lo tanto, se tiene $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números.

- b) En este caso los números serán pares si el dígito de las unidades es ocupado por los números 2 ó 4. Cuando el dígito de las unidades es 2, los tres dígitos restantes serán ocupados por 3, 4 y 5

			2
--	--	--	---

Entonces se tiene $P_3 = 3! = 6$ números pares

Cuando el dígito de las unidades es 4, los tres dígitos restantes serán ocupados por 2, 3 y 5.

			4
--	--	--	---

Entonces se tiene $P_3 = 3! = 6$ otros números pares.

Por tanto, en total se tiene $2P_3 = 2 \cdot 3! = 12$ números pares.

- Ejemplo: a) De cuántas maneras distintas pueden alinear 8 personas en una fila?
 b) Si 3 de ellas deben estar juntas, de cuántas formas pueden alinear?

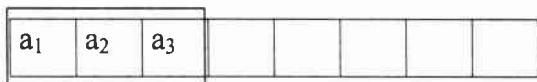
SOLUCION: a) Una posible formación de las 8 personas es

a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

Como no hay condiciones, entonces el número total de formas de alinear es

$$P_8 = 8! = 40320$$

- b) Podemos suponer que a_1 a_2 a_3 permanecen juntas y pueden considerarse como un solo objeto, es decir:



Con lo que el número de objetos se reduce a 6, y se tiene $P_6 = 6!$ alineaciones distintas.

Ahora bien, en cada uno de estas, las 3 personas que están juntas internamente pueden permutarse entre sí, originando $P_3 = 3!$ alineaciones distintas.

Entonces el número total es $P_6 P_3 = 6! 3! = 720 \cdot 6 = 4320$

Ejemplo: De cuántas maneras diferentes pueden colocarse en un estante 4 libros de Algebra, 3 de Estadística y 2 de Física, en los siguientes casos:

- a) Si los libros de Algebra deben estar juntos?
- b) Si los libros de cada materia deben quedar juntos?
- c) Si los libros de Física no deben estar juntos?

SOLUCION: a) Considerando los 4 libros de Algebra como un solo objeto, se tienen 6 objetos que pueden ordenarse de $P_6 = 6!$ maneras. Pero en cada uno de estos, los libros de Algebra pueden ordenarse de $P_4 = 4!$ maneras. Por tanto, el número total de ordenaciones es $6! 4! = 17280$.

b) Considerando los libros de cada materia como un solo objeto, tenemos 3 objetos que pueden ordenarse de $P_3 = 3!$ maneras, pero en cada grupo se pueden permutar de $P_4 = 4!$, $P_3 = 3!$ y $P_2 = 2!$ maneras, respectivamente. Por tanto, el número total de ordenaciones es $3! 4! 3! 2! = 1728$.

c) Primero se ordenan todos los libros sin restricción de $P_9 = 9!$ maneras.

Enseguida se ordenan todos los libros, con la condición de que los libros de Física queden juntos, de $P_8 P_2 = 8! 2!$ maneras.

Finalmente, el número total de ordenaciones donde los libros de Física no queden juntos es de $9! - 8! 2! = 282240$ maneras.

3.2. PERMUTACIONES CIRCULARES

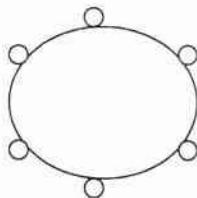
Son los diferentes arreglos que pueden formarse con n objetos distintos de modo que no hay ni primero ni último objeto, pues se hallan alrededor de un círculo, o forman una figura plana cerrada.

El número de permutaciones circulares distintas que pueden formarse con n objetos distintos es dado por

$$P_{(n-1)} = (n-1)!$$

Ejemplo: De cuántas formas diferentes pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa circular, si a) no hay condiciones?
b) dos de ellas deben estar juntas?

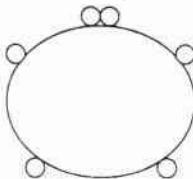
SOLUCION: a) Una posible formación de las 6 personas es:



Como no hay condiciones, entonces el número total de formas distintas que pueden sentarse las 6 personas alrededor de la mesa es

$$P_{6-1} = (6-1)! = 5! = 120$$

b) Consideremos a las dos personas juntas como una sola.



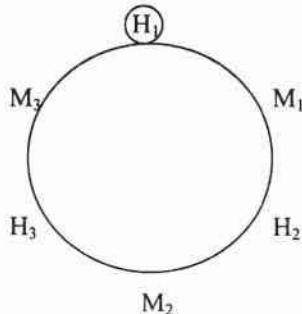
Luego, se tiene 5 objetos para ordenar en círculo, que se puede hacer de $P_{5-1} = 4!$ maneras. Pero las dos personas consideradas internamente pueden permutarse entre si de $P_2 = 2!$ maneras.

Por tanto, el número total de formas que pueden sentarse las 6 personas alrededor de una mesa circular con dos de ellas juntas es

$$P_{5-1} P_2 = 4! 2! = 24 \cdot 2 = 48$$

Ejemplo: Ahora, supóngase que las seis personas del ejemplo anterior son 3 hombres y 3 mujeres. Se requieren ordenar a las seis personas alrededor de la mesa de forma que queden alternados entre hombres y mujeres. Cuantas disposiciones distintas se pueden realizar?

SOLUCION: Si H_1, H_2 y H_3 son los hombres y M_1, M_2 y M_3 son las mujeres, y consideremos que H_1 es la persona que nos sirve de referencia como en la siguiente figura:



Entonces a partir de esta consideración se observa que las 3 mujeres pueden permutarse en las tres posiciones señaladas de $P_3 = 3!$ maneras, mientras los dos hombres restantes pueden permutarse de $P_2 = 2!$ maneras. Por tanto, el número total de disposiciones diferentes es

$$3! 2! = 6 \cdot 2 = 12$$

3.3. PERMUTACIONES CON REPETICION

Son ordenaciones diferentes que pueden formarse con n elementos de un conjunto, de los cuales uno de ellos se repite n_1 veces, otro n_2 veces, etc. Es decir,

$$\underbrace{\{a, a, \dots, a\}}_{n_1 \text{ veces}}, \underbrace{b, b, \dots, b\}}_{n_2 \text{ veces}}, \dots, \underbrace{\alpha, \alpha, \dots, \alpha\}}_{n_k \text{ veces}}, \text{ , siendo } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

El número de permutaciones de n elementos con repetición viene dado por

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Ejemplo: De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 3 bolas blancas, 2 azules y 4 negras en una fila, si las bolas del mismo color no se distinguen entre sí?

SOLUCION: Se tiene $n_1 = 3$ bolas blancas

$n_2 = 2$ bolas azules

$n_3 = 4$ bolas negras

en total $n = n_1 + n_2 + n_3 = 9$ bolas

luego, el número de maneras distintas que pueden ordenarse es

$$P_9^{3,2,4} = \frac{9!}{3! 2! 4!} = 1260$$

Ejemplo: a) De cuántas formas diferentes pueden ordenarse las letras de la palabra

TRABAJAR?

b) En cuántas de estas, las letras A, están juntas?

SOLUCION: a) Se trata de permutaciones de 8 letras de las cuales 3 son A, 2 son R, el resto son a 1. Por tanto se tiene

$$P_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!2!1!1!1!} = 3360 \text{ formas}$$

- b) Para que las cuatro A queden juntas, se debe considerar a estas como un solo elemento. Así, se permutan solo 6 letras de las cuales 2 son R. Por tanto, el número de permutaciones en las que las cuatro A están juntas es

$$P_6^{1,2,1,1,1} = \frac{6!}{1!2!1!1!1!} = 360$$

4. VARIACIONES

Se llaman variaciones a cada uno de los arreglos u ordenaciones que se hagan tomando un número determinado de objetos o elementos de un conjunto.

4.1 VARIACIONES SIMPLES

Son las diferentes ordenaciones que pueden formarse con r objetos tomados de n objetos distintos de un conjunto.

El número de todos los arreglos o variaciones que pueden formarse con n elementos distintos disponibles tomados de r en r está dado por

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo: Las variaciones de las tres letras a, b y c, tomadas de dos en dos, son:
ab, ba, ac, ca, bc y cb. Luego se tiene 6 variaciones o arreglos diferentes.

Por fórmula $V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$

Ejemplo: De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 7 personas en una banca, con capacidad para 4 personas?

SOLUCION: Como en la banca sólo pueden sentarse 4 de las 7 personas, entonces se trata de arreglos o variaciones de las 7 personas tomadas de 4 en 4. Luego, el número total de maneras diferentes que pueden sentarse es:

$$V_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$$

- Ejemplo: a) Hallar cuántos números de 4 dígitos distintos se pueden formar con los números 3, 4, 5, 6, 7, 8?
 b) Cuántos de estos números son impares?

SOLUCION: a) Los números de 4 dígitos distintos se escriben tomando 4 números de los 6 dados, es decir, 3456, 5346, 7835, 8436, etc.

Entonces se trata de variaciones de 6 elementos tomados de 4 en 4.

Luego, según la definición de variaciones se obtiene

$$V_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ números de 4 dígitos}$$

b) Los números son impares si el dígito de las unidades es ocupado por los dígitos 3, 5 o 7, en este caso.

Es decir, si el dígito de las unidades es ocupado por 3, quedan 4,5,6,7,8 para ocupar los tres dígitos restantes.

			3
--	--	--	---

entonces se tiene $V_{5,3}$ números impares.

Análogamente, cuando el dígito de las unidades es ocupado por 5 y luego por 7, se obtiene $V_{5,3}$ números impares en cada caso.

Por tanto, en total se tiene

$$3V_{5,3} = 3 \cdot \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 60 = 180 \text{ números impares}$$

4.2. VARIACIONES CON REPETICION

Son aquellos arreglos o variaciones de r objetos de n objetos diferentes disponibles, cuando cada objeto puede repetirse una, dos o más veces hasta r en cualquier ordenamiento.

El número de todos los arreglos con repetición de r objetos que pueden formarse a partir de n objetos dados es: $VR_{n,r} = n^r$

Ejemplo: Hallar cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los números 3, 4, 5, 6, 7,

- Si los dígitos no pueden repetirse?
- Si los dígitos pueden repetirse?

SOLUCION: a) Los números de 3 dígitos distintos (sin repetición) que pueden formarse con los números 3, 4, 5, 6 y 7 son: 345, 346, 753, etc.

Por tanto, son variaciones de los 5 números dados tomando de 3 en 3

$$V_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Es decir, se pueden formar 60 números

b) Si los dígitos pueden repetirse, como 545, 344, 555, 776, 333, etc.

Es decir, el dígito de las centenas puede ser ocupado por cualquiera de los números dados, el dígito de las decenas lo mismo y el de las unidades de igual forma. Luego, los números formados son

$$VR_{n,r} = n^r, \text{ siendo } n = 5 \text{ y } r = 3$$

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125 \text{ números}$$

Ejemplo: Con los números: 1, 2, 3, 4, 5, ¿Cuántos números distintos de tres dígitos se pueden formar, para los cuales a) los tres dígitos sean distintos; b) por lo menos dos dígitos sean idénticos?

SOLUCIÓN: a) Un número en el cual los tres dígitos son distintos es una ordenación de los tres números elegidos de los cinco que se dan. Entonces, se tiene

$$V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ números}$$

b) Si se permite la repetición de dígitos, se tiene

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125 \text{ números}$$

Entonces los números de tres dígitos en los cuales dos por lo menos son idénticos, son

$$VR_{5,3} - V_{5,3} = 125 - 60 = 65$$

5. COMBINACIONES

Se denominan combinaciones a los grupos diferentes que pueden formarse tomando algunos objetos de un número de objetos distintos disponibles, de modo que dos cualesquiera de estos grupos difieran solamente en algún objeto.

5.1 COMBINACIONES SIMPLES

Son las diversas formas de selección que se pueden hacer de r objetos de los n objetos distintos dados, sin tener en cuenta el orden de los mismos, y de manera que no puede haber dos grupos con los mismos elementos. Es decir, las combinaciones de r objetos, a partir de n objetos distintos, es obtener todos los subconjuntos de r objetos de los n dados.

El número de combinaciones o selecciones de r elementos que pueden formarse a partir de n elementos distintos es dado por

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!},$$

donde $\binom{n}{r}$ es el número de combinaciones de los n elementos tomados de r en r .

Ejemplo: Las combinaciones de las cuatro letras **a**, **b**, **c** y **d**, tomadas de dos en dos son: **(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)**.
luego se tiene 6 combinaciones diferentes.

Por fórmula:

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)! 2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

Obsérvese que **(a,b)** y **(b,a)** son una misma combinación (se prescinde del orden), mientras que **ab** y **ba** constituyen dos variaciones distintas (interesa el orden)

Ejemplo: Cuántos grupos de 4 alumnos se pueden formar con 11 alumnos aventajados para representar a su colegio en un concurso de matemática?

SOLUCION: Como se trata de formar posibles grupos de 4 miembros (no importa el orden), entonces se trata de selecciones o combinaciones de 11 alumnos tomados de 4 en 4.

Por tanto, el número de posibles grupos que pueden formarse es:

$$C_{11,4} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{(11-4)!4!} = \frac{11!}{7!4!} = 330$$

Ejemplo: Cuántos grupos de 2 hombres y 3 mujeres se pueden formar con 5 hombres y 7 mujeres?

SOLUCION: Para formar grupos de 2 hombres y 3 mujeres, primero se puede seleccionar 2 hombres cualesquiera de los 5 posibles, de $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ formas. En seguida se selecciona 3 mujeres de las 7 posibles, de $C_{7,3} = \binom{7}{3}$ formas.

Finalmente el número total de grupos de 2 hombres y 3 mujeres que pueden formarse es

$$C_{5,2} C_{7,3} = \binom{5}{2} \binom{7}{3} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{7!}{4!3!} = 350$$

Ejemplo: Un club de 9 miembros desea elegir un comité de deportes de 3 personas.

- De cuántas formas se puede elegir este comité?
- Suponga que dos miembros del club, A y B, no se entienden, entonces A y B juntos no deben formar parte del comité. ¿De cuántas maneras se puede formar el comité?.

SOLUCIÓN: a) Como no existen restricciones, se puede elegir o seleccionar tres de entre los 9 miembros, en

$$C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = 84 \text{ formas diferentes}$$

b) las posibilidades son: no participa A ni participa B, o participa A pero no B, o participa B y no A. Entonces se tiene

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{2} + \binom{7}{2} = \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{5!2!} = 77 \text{ formas}$$

Ejemplo: Considerando los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

- Cuántos números de 4 dígitos, que contengan dos pares y dos impares distintos, se pueden formar con los números dados?
- Cuántos de ellos contienen a 5?
- Cuántos de ellos son múltiplos de 5?
- Cuántos de ellos son múltiplos de 5 y contienen a 2?

SOLUCIÓN: El conjunto de números que se considera consta de 5 impares y 4 pares.

a) Existen $\binom{5}{2}$ formas de seleccionar 2 impares y $\binom{4}{2}$ formas de seleccionar 2 pares. Además, cada 4 números así seleccionados se pueden ordenar de $4!$ maneras. Entonces se pueden formar

$$\binom{5}{2} \binom{4}{2} 4! = \frac{5!}{3!2!} \frac{4!}{2!2!} 4! = 1440 \text{ números}$$

- b) En este caso se tiene la siguiente situación de impares y pares:

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------	---	--------------------------

$$\Rightarrow \{1, 3, 7, 9\} \text{ y } \{2, 4, 6, 8\}$$

Como 5 es uno de los componentes, el otro impar se puede seleccionar en $\binom{4}{1}$ maneras y los dos pares en $\binom{4}{2}$ maneras. Luego cada cuatro números se puede ordenar en $4!$ maneras. Entonces se pueden formar

$$\binom{4}{1} \binom{4}{2} 4! = 4 \cdot 6 \cdot 24 = 576 \text{ números que contienen a 5}$$

- c) Un número es múltiplo de 5, si el dígito de las unidades es igual a 5.

			5
--	--	--	---

$$\Rightarrow \{1, 3, 7, 9\} \text{ y } \{2, 4, 6, 8\}$$

Al igual que en b) los restantes números, un impar y dos pares, se pueden seleccionar en $\binom{4}{1}$ y $\binom{4}{2}$ maneras, respectivamente. Luego cada tres números se pueden ordenar en $3!$ maneras, ya que 5 debe quedar fijo. Entonces se pueden formar

$$\binom{4}{1} \binom{4}{2} 3! = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144 \text{ números múltiplos de 5}$$

- d) Ahora se tiene

	2		5
--	---	--	---

$$\Rightarrow \{1, 3, 7, 9\} \text{ y } \{4, 6, 8\}$$

Como 2 y 5 son parte de los 4 dígitos, sólo se necesita seleccionar dos números, un impar y un par. Luego los tres números se pueden ordenar en $3!$ formas, pues 5 debe quedar fijo. Entonces se obtienen

$$\binom{4}{1} \binom{3}{1} 3! = 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72 \text{ números múltiplos de 5 y contienen a 2.}$$

5.2. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

El número de combinaciones de r objetos tomados de los n objetos dados, de manera que estos objetos pueden repetirse, está dado por

$$CR_{n,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)! r!}$$

Ejemplo: Las combinaciones con repetición de los cuatro elementos **a**, **b**, **c** y **d**, tomados de dos en dos son:

(**a,a**), (**a,b**), (**a,c**), (**a,d**), (**b,b**), (**b,c**), (**b,d**), (**c,c**), (**c,d**), (**d,d**)
luego se tiene 10 combinaciones diferentes.

$$\text{Según la fórmula se tiene } CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \frac{5!}{3! 2!} = 10$$

Ejemplo: Cuántos términos tiene un polinomio completo y homogéneo de grado 4 con 2 variables?

SOLUCION: Sean **x** e **y** las variables. Como el polinomio es homogéneo, todos los términos son de grado 4. Es decir, en cada término la suma de los exponentes de las variables debe ser igual a 4. Por tanto, el número total es el de combinaciones con repetición de los 2 elementos (variables) tomados de 4 en 4, es decir, para **n** = 2 y **r** = 4, se tiene

$$CR_{2,4} = \binom{2+4-1}{4} = \frac{5!}{1! 4!} = 5 \text{ términos,}$$

de modo que **r** puede ser superior a **n** cuando se permiten repeticiones.

El polinomio puede expresarse así:

$$P(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 ; \quad a, b, c, d, e \neq 0$$

Ejemplo: Seis estudiantes de primer curso se detienen en una tienda de helados, donde cada uno puede escoger un helado entre los 5 sabores disponibles. Cuántos pedidos diferentes se pueden hacer?

SOLUCION: Aquí interesa cuántos se compran de cada tipo y no el orden en que se lo compran, de modo que el problema es de selecciones o combinaciones con repetición. Es decir, combinaciones con repetición de los 5 sabores tomados de 6 en 6. Por tanto, el número de pedidos distintos es

$$CR_{5,6} = \binom{5+6-1}{6} = \frac{10!}{4! 6!} = 210 \text{ formas.}$$

5.3. PROPIEDADES

1. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1}$
2. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$
3. Si $\binom{m}{r} = \binom{m}{t}$, entonces $r = t$ ó $m = r + t$.
4. Si $\binom{n}{r} = \binom{m}{r}$, entonces $n = m$

Ejemplo: Demostrar que.

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

SOLUCION: Según la definición de número combinatorio se tiene:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)!} \\
 &= \frac{n!}{(n-r)(n-r-1)!r!} + \frac{n!}{(n-r-1)!(r+1)r!} \\
 &= \frac{n!(r+1) + n!(n-r)}{(n-r)(n-r-1)!(r+1)r!} \\
 &= \frac{n!(r+1+n-r)}{(n-r)!(r+1)!} = \frac{n!(n+1)}{(n-r)!(r+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n-r)!(r+1)!} = \binom{n+1}{r+1}
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Hallar el valor de x en:

$$\binom{2x-2}{7} - \binom{x+10}{7} = \binom{x+10}{8} - \binom{2x-2}{8}$$

SOLUCION: Aplicando la propiedad del ejemplo anterior o propiedad 2, se tiene:

$$\binom{2x-2}{7} + \binom{2x-2}{8} = \binom{x+10}{7} + \binom{x+10}{8}$$

$$\binom{2x-1}{8} = \binom{x+11}{8}$$

Entonces, por la propiedad 4 resulta

$$2x - 1 = x + 11$$

$$x = 12$$

Ejemplo: Hallar los valores de x en :

$$\binom{13}{2x-1} + \binom{13}{2x-2} + \binom{14}{2x-2} = \binom{15}{x+4}$$

SOLUCION: Aplicando la propiedad 2 se tiene

$$\binom{13}{2x-1} + \binom{13}{2x-2} + \binom{14}{2x-2} = \binom{15}{x+4}$$

$$\binom{14}{2x-1} + \binom{14}{2x-2} = \binom{15}{x+4}$$

$$\binom{15}{2x-1} = \binom{15}{x+4}$$

Luego, aplicando la propiedad 3 resulta

$$2x - 1 = x + 4 , \quad x = 5$$

$$\text{ó} \quad 15 = (2x - 1) + (x + 4)$$

$$15 = 3x + 3 , \quad x = 4$$

Por tanto los valores de x son 4 ó 5

6. BINOMIO DE NEWTON

Si a y b son números reales diferentes de cero y n un entero positivo, entonces:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

Siendo, los términos primero, segundo, tercero, ..., k-esimo término:

$$t_1 = \binom{n}{0} a^n, \quad t_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} b, \quad t_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2, \quad t_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-2}$$

Luego el término general del desarrollo es:

$$t_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \text{donde } k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Por tanto, usando la notación sumatoria, se tiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ejemplo: Hallar el coeficiente de x^{19} en el desarrollo de: $\left(\frac{2}{x^2} - x^3\right)^{13}$

SOLUCION: Por el término general se tiene:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{13}{k} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{13-k} (-x^3)^k \\ &= \binom{13}{k} \frac{2^{13-k}}{x^{26-2k}} (-1)^k x^{3k} \\ &= \binom{13}{k} 2^{13-k} (-1)^k x^{5k-26} \end{aligned}$$

Para que el exponente de x sea igual a 19 se tiene:

$$5k - 26 = 19$$

$$5k = 45, \quad k = 9$$

luego, el coeficiente de x^{19} es:

$$\binom{13}{k} 2^{13-k} (-1)^k = \binom{13}{9} 2^4 (-1)^9 = -11440$$

Ejemplo: En el desarrollo de: $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{1}{2x}\right)^9$

Hallar el término independiente de x .

SOLUCION: Por el término general se tiene:

$$\begin{aligned}
 t_{k+1} &= \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \binom{9}{k} \left(\frac{2x^2}{3} \right)^{9-k} \left(\frac{1}{2x} \right)^k \\
 &= \binom{9}{k} \left(\frac{2}{3} \right)^{9-k} x^{18-2k} \frac{1}{2^k x^k} \\
 &= \binom{9}{k} \left(\frac{2}{3} \right)^{9-k} \frac{1}{2^k} x^{18-3k}
 \end{aligned}$$

Por la condición del término independiente se tiene:

$$18-3k = 0, \quad k = 6$$

luego, el término independiente es:

$$t_7 = \binom{9}{6} \left(\frac{2}{3} \right)^3 \frac{1}{2^6} = \frac{7}{18}$$

6.1. PROPIEDADES

1. El desarrollo completo de la potencia de un binomio tiene $(n+1)$ términos.
2. Los términos equidistantes de los extremos tienen igual coeficiente binomial.

Es decir, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

3. Los términos centrales en el desarrollo de un binomio $(a+b)^n$, son:

$$t_{\frac{n}{2}+1}, \text{ si } n \text{ es par.}$$

$$t_{\frac{n+1}{2}} \text{ ó } t_{\frac{n+3}{2}}, \text{ si } n \text{ es impar.}$$

4. En el desarrollo de un multinomio $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$, el número de términos está dado por:

$$CR_{r,n}$$

5. En el desarrollo de un multinomio $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$, el término general es

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}, \text{ donde } n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

Ejemplo: Hallar el término central en el desarrollo de $\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x}\right)^{20}$.

SOLUCION: Por la propiedad 3 y el término general, se tiene:

$$\begin{aligned} t_{\frac{n}{2}+1} &= t_{10+1} = \binom{20}{10} \left(\frac{x^2}{\sqrt{2}} \right)^{10} \left(-\frac{1}{x} \right)^{10} \\ &= \binom{20}{10} \frac{x^{20}}{2^5} = \frac{46184}{8} x^{10}. \end{aligned}$$

Ejemplo: En el desarrollo de $(u + x + y + z)^{10}$, hallar:

- a) Número de términos.
- b) El coeficiente de $u^2 x^2 y^2 z^4$.

SOLUCION: a) Por la propiedad 4, el número de términos en el desarrollo del multinomio dado es:

$$CR_{r,n} = CR_{4,10} = \binom{4+10-1}{10} = \frac{13!}{3! 10!} = 286$$

b) Por la propiedad 5, el coeficiente de $u^2 x^2 y^2 z^2$ es

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, n_4} = P_{10}^{2, 2, 2, 4} = \frac{10!}{2! 2! 2! 4!} = 18900$$

“No enseñar a un hombre que está dispuesto a aprender es desaprovechar a un hombre.

Enseñar a quien no está dispuesto a aprender es malgastar las palabras”.

Confucio

EJERCICIOS

1. Si $4\binom{n}{3} = 5\binom{n-1}{3}$, hallar n **R: 15**

2. Si $3\binom{2n}{3} = 44\binom{n}{2}$, hallar n **R: 6**

3. Si $\binom{18}{n} = \binom{18}{n+2}$, hallar $\binom{n}{5}$ **R: 56**

4. Simplificar: $E = \frac{(4!+2)^3(4!)!}{(4!+2)!+(4!+1)!+(4!)!}$ **R:n**

5. Simplificar: $E = \frac{n^{n+1}(n-1)!^{(n+1)!}}{(n-1)!^{n-n!}n!^{n!}}$ **R: 26**

6. Simplificar la expresión E = 5·5!+4·4!+3·3!+2·2!+1·1! **R: 6!-1**

7. Calcular x en:

$$\binom{x-1}{17} + \binom{x-1}{16} + \binom{x}{16} + \binom{x+1}{16} - \binom{2x-19}{17} = \binom{2x-19}{16} \quad \text{R: 20}$$

8. Calcular x en:

$$\binom{21}{2x-3} + \binom{21}{2x-4} + \binom{22}{2x-4} + \binom{23}{2x-4} = \binom{24}{4x-21} \quad \text{R: 8;9}$$

9. De la ciudad A a la ciudad B hay 4 caminos diferentes y de la ciudad B a la ciudad C hay 3 caminos diferentes. De cuántas maneras se podrá ir de A a C?

10. Si cuatro universidades de La Paz desean contratar un empleado para cada una de las 3 áreas: biblioteca, mantenimiento y personal. Cuántas oportunidades de empleo hay disponible?
11. Hay 5 candidatos para presidente de un club, 4 para vicepresidente y 2 para secretario. De cuántas maneras se pueden ocupar estos tres puestos?
12. En una pared están clavadas 4 perchas. De cuántas maneras diferentes se pueden colgar de ellas 3 chaquetas, una en cada percha? **R:24**
13. Cuatro viajeros llegan a una ciudad en que hay cinco hoteles. De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar cada uno en un hotel diferente? **R:120**
14. De cuántas maneras se pueden colocar 7 cuadros diferentes en una fila sabiendo que uno de ellos debe de estar, a) en el centro, b) en uno de los extremos?
R: 720, 1440
15. De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante 6 libros diferentes de modo que, a) dos de ellos estén siempre juntos, b) dos de ellos no queden juntos?
R: 240, 480
16. De cuántas formas diferentes pueden ordenarse en un estante 4 textos diferentes de Algebra, 3 de cálculo y 2 de Física de modo que los textos de cada materia estén juntos? **R:1728**
17. De cuántas maneras pueden ordenarse 10 hojas de examen si deben quedar de tal manera que la hoja mejor contestada y la peor no queden juntas? **R: 8.9!**

18. De cuántas maneras pueden sentarse 2 peruanos, 3 argentinos y 4 bolivianos alrededor de una mesa circular si, a) no hay restricciones, b) los de la misma nacionalidad estén juntos? ~~R: 40320, 576~~

19. Un grupo de 5 profesores y 5 estudiantes van a sentarse de manera que aparezcan alternados. Calcular el número de formas en que esto puede hacerse si, a) se sientan en fila, b) se sientan alrededor de una mesa redonda?

R:28800; 2880

20. Hay tres tipos de medallas: 3 de oro, 2 de plata y 4 de bronce. De cuántas maneras pueden distribuirse entre 9 personas, si a cada persona le corresponde una y sólo una? **R:1260**

21. a) De cuántas maneras se pueden ordenar las letras en la palabra MAMPARA?
b) Cuántas disposiciones del inciso a) tienen las tres A juntas? **R: 420, 60**

22. Tres viajeros llegan a una ciudad en la que hay 7 hoteles. De cuántas maneras pueden ocupar sus cuartos, debiendo estar cada uno en un hotel diferente? **R:210**

23. De cuántas maneras se pueden elegir un presidente, un secretario y un tesorero en un club formado por 11 miembros? **R: 990**

24. Obtener el número de palabras de cuatro letras que pueden formarse con 7 consonantes diferentes y 4 vocales diferentes, si las consonantes y vocales deben ir alternadas y no se permite repetición. **R: 1008**

25. Considere los números 2, 3, 5, 6, 7, 9.
a) Cuántos números de tres dígitos distintos se pueden formar con los seis números dados? **R: 120**
b) Cuántos de estos números son impares? **R: 80**

- c) Cuántos son múltiplos de 5?. R: 20
- d) Cuántos son menores que 400? R: 40
26. Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los números: 1, 2, 3, 4, 5?, Cuántos de estos números son pares? R: 60, 24
27. Cuántos números de 4 dígitos se pueden formar con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? Cuántos de estos números son impares? R: 4536; 2240
28. Hallar cuántos números comprendidos entre 2000 y 7000, con todos sus dígitos distintos, se pueden formar con los números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8?, Cuántos de estos números son pares? R: 1680, 924
29. Con seis números: 1, 2, 3, 4, 5, 6. ¿Cuántos números distintos de tres dígitos se pueden formar, para los cuales,
- Los tres dígitos sean distintos? R: 120
 - Por lo menos dos dígitos sean idénticos? R: 96
30. Cuántos partidos de fútbol se jugarán en un campeonato local, en el que participan 16 equipos? R: 120
31. De una urna que contiene 4 bolas blancas, 2 negras y 3 rojas, se extraen 5 bolas al azar. De cuántas maneras se pueden obtener a) 2 blancas, 1 negra y 2 rojas, b) 3 blancas, c) por lo menos 3 blancas, d) a lo mucho 2 rojas? R: 36;40;45;111
32. Un club de 10 miembros desea elegir un comité de diversiones de tres personas.
- De cuántas maneras puede elegirse este comité? R: 120
 - Suponga que dos miembros del club no se entienden, entonces juntos no pueden formar el comité. ¿De cuántas formas se puede formar el comité?
- R: 112

33. De cuántas maneras se puede formar un comité de cuatro personas elegidas de un grupo de seis hombres y seis mujeres, si el comité debe contener más hombres que mujeres? **R: 135**
34. Una urna contiene 6 bolas blancas y 5 negras. Halle el número de formas posibles de seleccionar 4 bolas de la urna si:
a) Son de cualquier color? **R: 330**
b) Son dos blancas y dos negras? **R: 150**
c) Todos son del mismo color? **R: 20**
35. Para formar un compuesto se dispone de 6 sustancias del tipo A y de 8 del tipo B. El compuesto requiere 3 del primer tipo y 4 del segundo. De cuántas maneras puede realizarse la experiencia en los siguientes casos?
a) Sin restricciones; **R: 1400**
b) Una sustancia determinada del tipo A debe ser incluida. **R: 700**
c) Dos sustancias determinadas del tipo B no puede incluirse. **R: 300**
36. Considere 3 vocales incluyendo la a y 7 consonantes incluyendo la b.
a) Cuántas palabras de 5 letras, que contengan 2 vocales y 3 consonantes distintas, se pueden formar con las letras dadas? **R: 12600**
b) Cuántas de ellas contienen a b? **R: 5400**
c) Cuántas de ellas empiezan con b? **R: 1080**
d) Cuántas de ellas empiezan con a y contienen a b? **R: 720**
37. Una pastelería ofrece cinco tipos distintos de pasteles. Si se supone que hay al menos una docena de cada tipo al entrar en la pastelería, de cuántas formas se podrá seleccionar una docena de pasteles? **R: 1820**
38. Cuántos términos tiene un polinomio completo y homogéneo, si:
a) es de grado 2 con 4 variables? **R: 10**

b) es de grado 4 con 3 variables?

R: 15

39. Hallar el onceavo término del desarrollo de: $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$

R : $\frac{1001}{x}$

40. Determinar x de modo que la suma de los términos tercero y sexto del desarrollo de $\left(\frac{3}{2} - 2x\right)^7$ sea igual a cero.

R : 0, $\frac{3}{4}$

41. Hallar el término independiente del desarrollo de: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{3x^2}\right)^{10}$

R: 5

42. Hallar el término en x^3 del desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$

R: 795 x^3

43. Determinar el lugar que ocupa el término en x^7 del desarrollo del binomio

R: t_7

$$\left(\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} \sqrt{x}\right)^{12}$$

44. Hallar el lugar que ocupa el término del desarrollo del binomio

$\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\sqrt[3]{x}}\right)^{21}$ que contiene x e y elevados a la misma potencia.

R: t_{10}

45. Hallar el término central del desarrollo de $\left(\frac{4\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}x}\right)^{16}$

R: $\frac{715}{2}$

46. En el desarrollo del binomio $(x^\alpha + y^\beta)^n$, el término décimo es $55 x^{24} y^{72}$.

Hallar: α , β y n

R: 12; 8; 11

47. El siguiente binomio posee 16 términos, hallar el término onceavo de su

desarrollo:

$$\left(\frac{x^{n-7}}{y^{n+2}} + \frac{y^{2n-3}}{x^{3n-11}} \right)^{n+10}$$

$$R : 3003 \frac{y^{35}}{x^{50}}$$

48. Hallar el término decimotercero del desarrollo del binomio $\left(9x - \frac{1}{\sqrt{3x}} \right)^n$

sabiendo que el coeficiente binomial del tercer término es 105.

$$R: 455 x^3$$

49. En el desarrollo de $\left(x^2 - \frac{a}{x} \right)^n$ los coeficientes binómicos de los términos cuarto y decimotercero son iguales. Hallar el término que no contiene x. $R: 3003 a^{10}$

50. La suma de los coeficientes de los términos primero, segundo y tercero del desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^n$ es igual a 46. Hallar el término que no contiene a x.

$$R: 84$$

51. Para qué valores de n los coeficientes de los términos segundo, tercero y cuarto del desarrollo del binomio $(1+x)^n$ forman una progresión aritmética? $R: 7$

52. En la expresión $\left(2\sqrt[3]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4]{4}} \right)^6$ hallar x para que el tercer término del desarrollo del binomio valga 240. $R: 2$

53. Determinar x en la expresión $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^3$, sabiendo que en el desarrollo del binomio la relación entre el séptimo término contado desde el principio y el séptimo término contado desde el final vale $\frac{1}{6}$ $R: 9$

54. a) Hallar el coeficiente de $x^2 y^3 z^4$ en $(x+y+z)^9$. $R: 1260$

- b) Cuántos términos distintos aparecen en la expresión del inciso a)? R: 55

Demostrar las siguientes igualdades:

55.
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

56.
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

EJERCICIOS VARIOS

57. Simplificar la expresión
$$E = \frac{7(7!)^{\frac{7!}{2}} (6!)^{8!+1} (8!)^{\frac{7!}{2}}}{[8(6!)^8 (7!)^2]^{\frac{7!}{2}}} \quad \text{R: } 7!$$

58. Los automóviles Buick se producen en 4 modelos, de 12 colores, 3 potencias de motor y 2 tipos de transmisión.
- Cuántos automóviles diferentes pueden fabricarse?
 - Si uno de los colores disponibles es el azul. Cuántos automóviles distintos, de color azul, se pueden fabricar?
 - Si una potencia de motor es V-8. Cuántos automóviles azules distintos tienen motor V-8? R: 288, 24, 8

59. De cuántas maneras pueden ordenarse los símbolos a, b, c, d, e, e, e, e, e, de modo que: a) las cinco e queden juntas, b) tres e siempre estén juntas, c) ninguna e sea adyacente a otra? R: 120, 840, 24

60. En un lugar donde venden hamburguesas se advierte al cliente que su hamburguesa puede ir con todo lo siguiente o sin ello: salsa de tomate, mostaza, mayonesa, lechuga, tomate, cebolla y pepinillo. Cuántos tipos diferentes de hamburguesas son posibles? R: 128

61. a) De cuántas maneras pueden colocarse 7 personas alrededor de una mesa circular?

b) Cuántas disposiciones son posibles si 3 personas insisten en sentarse juntas?

R: 720, 14.

62. De cuántas formas se pueden seleccionar un equipo de baloncesto de cinco personas de entre 12 jugadores posibles? ¿Cuántas selecciones incluyen al más débil y al más fuerte de los jugadores?

R: 792, 120

63. Un sábado, cuando iban de compras, Silvia y Teresa vieron a dos hombres alejarse en automóvil de la fachada de una joyería, justo antes de que sonara una alarma contra robos. Aunque todo ocurrió muy rápido, cuando fueron interrogadas las dos jóvenes, pudieron dar a la policía la siguiente información acerca de la placa (que constaba de dos letras seguidas de cuatro dígitos) del automóvil que huyó. Teresa estaba segura de que la segunda letra de la placa era una O o una Q, y que el último dígito era un 3 ó un 8. Silvia dijo que la primera letra de la placa era una C o una G y que el primer dígito era definitivamente un 7. ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía?

R: 800

64. Un estudiante tiene que responder siete preguntas de un cuestionario de diez. De cuántas formas puede hacer su selección si: a) no hay restricciones; b) debe responder necesariamente a las dos primeras preguntas; c) debe responder a tres preguntas como mínimo de las cinco primeras?

R: 120, 56, 110

65. Con 7 consonantes y 4 vocales, cuántas palabras pueden formarse, conteniendo cada una 3 consonantes y 2 vocales?

R: 25200

66. Considere los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- a) Cuántos números de 5 dígitos, que contengan dos pares y tres impares distintos, se pueden formar con los números dados?

R: 7200

- b) Cuántos de ellos contienen a 5? R: 4320
- c) Cuántos de ellos son múltiplos de 5? R: 864
- d) Cuántos de ellos son múltiplos de 5 y contienen a 2? R: 576
67. a) De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra ROTATORIO?
 b) Cuántas ordenaciones del inciso a) tienen las tres o juntas?
 c) Cuántas ordenaciones del inciso a) no tienen las o adyacentes?
R: 15120, 1260, 6300
68. De cuántas maneras puede distribuir un profesor ocho pasteles de chocolate y siete de canela entre cuatro de sus alumnos, a) de modo que cada uno reciba al menos un pastel de chocolate; b) si cada uno quiere como mínimo un pastel de cada tipo? R: 4200, 525
69. Dada la siguiente lista de números: -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, se seleccionan cuatro números. De cuántas maneras se pueden hacer las selecciones de modo que el producto de los cuatro números resulte positivo y a) los números sean distintos; b) cada número se puede seleccionar hasta cuatro veces? R: 66, 255
70. a) Hallar el coeficiente de $x^2 y^3 z^5$ en $\left(2u + \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z\right)^{10}$ R: 35
 b) Cuántos términos distintos aparecen en la expresión del inciso a)? R: 286
71. En los siguientes ejercicios, hallar el número de soluciones enteras no negativas para la ecuación dada:
 a) $x_1 + x_2 = 5$, b) $x_1 + x_2 = 7$ R: 6, 8
 a) $x_1 + x_2 + x_3 = 7$, b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ R: 36, 286
72. Hallar el equivalente de la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$$

R: $(n+1)! - 1$

73. Calcular x en: $2+2.2!+3.3!+4.4!+\dots+(x+2).(x+2)! = 22!$ **R:19**

Demostrar las siguientes igualdades:

74. $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \dots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$

75. $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

76. Demuestre que si n es un entero con $n \geq 1$, entonces:

$$\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}$$

77. Demuestre que si n y r son enteros con $n \geq r \geq 2$, entonces:

$$\binom{n}{r} + 2\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2} = \binom{n+2}{r}$$

Calcular la siguiente suma:

78. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}$ **R: $1 - \frac{1}{(n+1)!}$**

"El hombre es un ser en
busca de significado"

Platón

CAPITULO VIII

NÚMEROS COMPLEJOS Y SUS OPERACIONES

I. NÚMEROS COMPLEJOS

Se sabe que todo número real tiene la propiedad de que su cuadrado es un número real no negativo.

Por tanto, la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. No obstante, es posible extender el conjunto de los números reales a un conjunto mayor, llamado conjunto de los números complejos, mediante el cual se podrá resolver cualquier ecuación cuadrática. Para ello, la unidad imaginaria se define como

$i = \sqrt{-1}$, con la propiedad de que $i^2 = -1$

El conjunto de números de la forma $x + yi$, donde x y y son números reales e $i = \sqrt{-1}$, recibe el nombre de conjunto de los números complejos. Los números reales x e y en la expresión $z = x + yi$, se conocen respectivamente, como parte real y parte imaginaria de z . Se escribe

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

Por ejemplo, si $z = \frac{2}{3} - \frac{3}{2}i$, entonces $\operatorname{Re}(z) = \frac{2}{3}$ y $\operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{2}$

Dos números complejos $z_1 = x + yi$ y $z_2 = a + bi$ son iguales si y solo si tienen iguales las partes real e imaginaria. Es decir, $x = a$, $y = b$.

El conjugado de un número complejo $z = x + yi$ es $\bar{z} = x - yi$, o bien $x + yi$ y $x - yi$ son números complejos conjugados. Por ejemplo, el conjugado de cada uno de los siguientes números complejos es:

Si $z = 2 + 3i$, entonces	$\bar{z} = 2 - 3i$
Si $z = 3 - 4i$, entonces	$\bar{z} = 3 + 4i$
Si $z = -5 - i$, entonces	$\bar{z} = -5 + i$
Si $z = 2i$, entonces	$\bar{z} = -2i$
Si $z = -3$, entonces	$\bar{z} = -3$

2. OPERACIONES FUNDAMENTALES

Las cuatro operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división se denominan las operaciones fundamentales. Cuando estas operaciones se efectúan con los números complejos, podemos proceder como en el álgebra de números reales, con la excepción de que $i^2 = -1$.

Para dos números complejos cualesquiera $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$, se definen las cuatro operaciones fundamentales como sigue:

2.1. ADICIÓN

La suma de dos o más números complejos se obtiene sumando separadamente las partes reales e imaginarias, como sigue:

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$$

Ejemplo: Efectuar las adiciones indicadas.

$$\text{a)} \quad z_1 + z_2 + z_3 \quad \text{b)} \quad z_1 + \overline{z_3} + \overline{z_4} \quad \text{c)} \quad \overline{z_2} + z_3 + z_4$$

$$\text{Sabiendo que } z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = \frac{1}{2} + i, \quad z_3 = -\frac{i}{2}, \quad z_4 = 2$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad z_1 + z_2 + z_3 &= (2 - 3i) + \left(\frac{1}{2} + i\right) + \left(-\frac{i}{2}\right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{2}\right) + \left(-3 + 1 - \frac{1}{2}\right)i = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad z_1 + \overline{z_3} + \overline{z_4} &= (2 - 3i) + \left(-\frac{i}{2}\right) + (2) \\ &= 2 - 3i + \frac{i}{2} + 2 = 4 - \frac{5}{2}i \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \overline{z_2} + z_3 + z_4 = \left(\frac{1}{2} + i\right) + \left(-\frac{i}{2}\right) + (2) = \frac{1}{2} - i - \frac{i}{2} + 2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

2.2. SUSTRACCIÓN

Para restar un número complejo del otro, se resta las partes reales e imaginarias separadamente. Así tenemos :

$$z_1 - z_2 = (x + yi) - (a + bi) = (x - a) + (y - b)i$$

Ejemplo: Efectuar las sustracciones indicadas.

- a) $z_1 - z_2$, b) $z_2 - \overline{z_3}$, c) $\overline{z}_3 - \overline{z}_1$
 d) $\overline{z}_3 - z_1$, e) $(\overline{z_1 + z_2}) - (\overline{z_2} - \overline{z_3})$, f) $(2z_1 + \overline{z_3}) - 2i\overline{z_2}$

Sabiendo que $z_1 = \frac{1}{2} - i$, $z_2 = -2 + \frac{i}{2}$, $z_3 = -2i$

$$\text{SOLUCIÓN: a)} \quad z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\right) - \left(-2 + \frac{i}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + 2\right) + \left(-1 - \frac{1}{2}\right)i = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\text{b)} \quad z_2 - \overline{z_3} = \left(-2 + \frac{i}{2}\right) - (-2i) = -2 + \frac{i}{2} - 2i = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$\text{c)} \quad \overline{z_2} - \overline{z_1} = \overline{\left(-2 + \frac{i}{2}\right)} - \overline{\left(\frac{1}{2} - i\right)} = \left(-2 - \frac{i}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\text{d)} \quad \overline{z_3} - z_1 = \overline{(-2i)} - \left(\frac{1}{2} - i\right) = 2i - \frac{1}{2} + i = -\frac{1}{2} + 3i$$

$$\text{e)} \quad (\overline{z_1 + z_2}) - (\overline{z_2} - \overline{z_3}) = \overline{\left(\frac{1}{2} - i - 2 + \frac{i}{2}\right)} - \left[\overline{-2 + \frac{i}{2}} - (-2i)\right] \\ = -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} + 2 + \frac{5i}{2} = \frac{1}{2} + 3i$$

$$\text{f)} \quad (2z_1 + \overline{z_3}) - 2i\overline{z_2} = [2\left(\frac{1}{2} - i\right) + (-2i)] - 2i\left(-2 + \frac{i}{2}\right) \\ = [1 - 2i + 2i] - 2i(-2 - \frac{i}{2}) = 1 + 4i - 1 = 4i$$

2.3. MULTIPLICACIÓN

El producto de dos números complejos se obtiene multiplicando como binomios ordinarios, como sigue:

$$z_1 z_2 = (x+yi)(a+bi) = (xa-yb)+(xb+ya)i$$

Ejemplo: Efectuar las operaciones indicadas.

$$a) \quad z_1 \overline{z_2} \quad , \quad b) \quad z_2 \overline{z_3} \quad , \quad c) \quad z_3 \overline{z_3} - (z_1 - \overline{z_2}),$$

$$\text{Sabiendo que } z_1 = -1 + 2i, \quad z_2 = -2 - i, \quad z_3 = 2 - \frac{i}{2}$$

SOLUCION:

$$\begin{aligned} a) \quad z_1 \overline{z_2} &= (-1 + 2i)(\overline{-2 - i}) = (-1 + 2i)(-2 + i) \\ &= -1(-2 + i) + 2i(-2 + i) = 2 - i - 4i + 2i \\ &= (2 - 2) + (-1 - 4)i = 0 - 5i = -5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad z_2 \overline{z_3} &= (-2 - i)\overline{(2 - \frac{i}{2})} = (-2 - i)(2 + \frac{i}{2}) \\ &= -2(2 + \frac{i}{2}) - i(2 + \frac{i}{2}) = -4 - i - 2i + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad z_3 \overline{z_3} - (z_1 - \overline{z_2}) &= z_3 \overline{z_3} - z_1 + \overline{z_2} \\ &= (2 - \frac{i}{2})(2 - \frac{i}{2}) - (-1 + 2i) + (\overline{-2 - i}) \\ &= (2 - \frac{i}{2})(2 + \frac{i}{2}) + 1 - 2i + (-2 + i) \\ &= 4 + \frac{1}{4} + 1 - 2i - 2 + i = \frac{13}{4} - i \end{aligned}$$

2.4. DIVISIÓN

Al dividir dos números complejos, siendo el divisor distinto de cero, puede obtenerse el cociente multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del divisor, y se obtiene:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 z_2} = \frac{(x+yi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + \frac{ya-xb}{a^2+b^2} i$$

Ejemplo: Expresar cada una de las siguientes expresiones en la forma binómica de los números complejos:

$$a) \quad \frac{2}{1-2i}, \quad b) \quad \frac{3i}{2-i}, \quad c) \quad \frac{2-3i}{1+2i}$$

SOLUCION:

$$a) \quad \frac{2}{1-2i} = \frac{2(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i}{1+4} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$b) \quad \frac{3i}{2-i} = \frac{3i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6i-3}{4+1} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$$

$$c) \quad \frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2-4i-3i-6}{1+4} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

Ejemplo: Expresar $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{2-i}{1+2i}$ en la forma binómica de los números complejos.

SOLUCION: Aplicando las propiedades de operaciones fundamentales, se obtiene:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} - \frac{2-4i-i+2i^2}{1-(2i)^2} \\ &= \frac{1+2i-1}{1+1} - \frac{2-5i-2}{1+4} \\ &= \frac{2i}{2} - \frac{-5i}{5} = i + i = 2i \end{aligned}$$

2.5 PROPIEDADES

Si $z_1 = x + yi$, $z_2 = a + bi$, entonces se tiene

$$1. \overline{z_1 + z_2} = (x + a) - (y + b)i = (x - yi) + (a - bi) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2. \overline{z_1 - z_2} = (x - a) - (y - b)i = (x - yi) - (a - bi) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$3. \overline{z_1 z_2} = (xa - yb) - (xb + ya)i = xa - yb - xbi - yai \\ = x(a - bi) - yi(a - bi) = (x - yi)(a - bi) = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$4. \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{xa + yb}{a^2 + b^2} - \frac{ya - xb}{a^2 + b^2} i = \frac{xa + yb - yai + xbi}{a^2 + b^2} \\ = \frac{a(x - yi) + b(x - yi)}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(x - yi)(a + bi)}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1} z_2}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

Ejemplo: En la siguiente ecuación, hallar el complejo z .

$$\overline{z - 3i} = \bar{i}z + 1$$

SOLUCIÓN: Aplicando las propiedades indicadas se tiene

$$\bar{z} - \bar{3i} = \bar{i}z + 1$$

$$\bar{z} + 3i = -i\bar{z} + 1$$

$$\bar{z}(1 + i) = 1 - 3i$$

$$\bar{z} = \frac{1 - 3i}{1 + i} = \frac{(1 - 3i)(1 - i)}{2} = -1 - 2i$$

Entonces resulta $z = -1 - 2i = -1 + 2i$

3. MÓDULO Y SUS PROPIEDADES

El módulo de un número complejo $z = x + yi$ se define como el número real positivo,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

o bien $|z|^2 = z\bar{z}$

por ejemplo, el módulo del número complejo $z = -3 + 2i$ es

$$|z| = |-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Por otra parte si z_1 y z_2 son dos números complejos, son válidas las siguientes propiedades

$$1. \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$2. \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

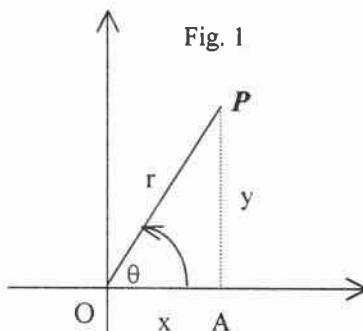
$$3. \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

4. FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea P un punto en el plano complejo correspondiente al número complejo $z = x + yi$, como se muestra en la figura 1. Por trigonometría; en el triángulo rectángulo OAP se tiene: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ se llama módulo de z ;

y el ángulo $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ se llama argumento de z .



Por tanto, $z = x + yi = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$

De donde $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$, se llama la forma polar del número complejo; r y θ se llaman coordenadas polares.

Ejemplo: Hallar el módulo, el argumento y la forma polar del número complejo

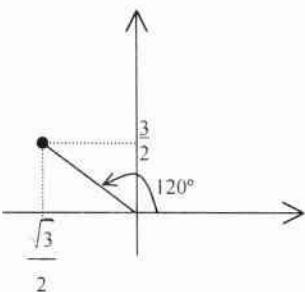
$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

SOLUCION: Al representar gráficamente el número complejo dado, tenemos

$$r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3}, \quad \text{arctg} \frac{y}{x} = -60^\circ$$

Argumento $\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, ya que está en el segundo cuadrante.

$$\text{Por lo tanto, } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = \sqrt{3}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$



5. FORMA EXPONENCIAL

La ecuación $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$,

que define la exponencial compleja $e^{i\theta}$ para todo valor real de θ , se conoce como la fórmula de Euler.

La fórmula de Euler permite expresar un número complejo en forma exponencial, como sigue:

$$z_1 = x + yi = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z_2 = a + bi = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$$

Por tanto, el producto y el cociente de estos números en la forma polar son las siguientes: $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Ejemplo: Hallar a) $z_1 z_2$, b) $\frac{z_1}{z_2}$

Sabiendo que $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$

SOLUCION: si $r_1 = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, $\operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = -60^\circ$

$\theta_1 = -60^\circ$, por estar en el cuarto cuadrante

$$r_2 = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = 2, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{-\sqrt{3}} = -30^\circ$$

$\theta_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, por estar en el segundo cuadrante

entonces $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

$$\begin{aligned} &= 4 [\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ] \\ &= 4(0 + i) = 4i \end{aligned}$$

y $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$$\begin{aligned} &= 1 [\cos(-210^\circ) + i \sin(-210^\circ)] \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

6. TEOREMA DE D' MOIVRE

Por la fórmula de Euler, tenemos:

$$z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

Por tanto, la potencia enésima del número complejo z es:

$$\begin{aligned} z^n &= (x + yi)^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n e^{in\theta} \\ z^n &= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \end{aligned}$$

Esta última relación se llama teorema de De Moivre.

Ejemplo: Calcular $(-1 - \sqrt{3}i)^7$ usando el Teorema de De Moivre y expresar el resultado en la forma binómica

SOLUCION: Primero expresamos $z = -1 - \sqrt{3}i$ en la forma polar y luego aplicamos el Teorema de De Moivre. Así tenemos.

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{-1} = 60^\circ$$

$$\theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ, \text{ por estar en el 3er cuadrante}$$

$$\begin{aligned} z^7 &= r^7 (\cos 7\theta + i \sin 7\theta) \\ &= 2^7 (\cos 1680^\circ + i \sin 1680^\circ) \\ &= 2^7 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ), \text{ por trigonometría} \\ &= 2^7 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -64(1 + \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\frac{(\sqrt{3} - i)^6}{(1 + \sqrt{3}i)^4}$, y expresar el resultado en la forma rectangular.

SOLUCION: Sean $z_1 = \sqrt{3} - i$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

entonces $r_1 = \sqrt{3+1} = 2$; $\theta_1 = \arctg \frac{-1}{\sqrt{3}} = -30^\circ$

$$r_2 = \sqrt{1+3} = 2 ; \quad \theta_2 = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$$

por tanto $\frac{z_1^6}{z_2^4} = \frac{r_1^6 e^{i6\theta_1}}{r_2^4 e^{i4\theta_2}} = \frac{r_1^6}{r_2^4} e^{i(6\theta_1 - 4\theta_2)}$

$$= \frac{r_1^6}{r_2^4} [\cos(6\theta_1 - 4\theta_2) + i \sin(6\theta_1 - 4\theta_2)]$$

es decir, $\frac{(\sqrt{3}-i)^6}{(1+\sqrt{3}i)^4} = \frac{2^6}{2^4} [\cos(-420^\circ) + i \sin(-420^\circ)]$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 - 2\sqrt{3}i$$

7. RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO

Ahora consideremos la radicación o extracción de raíces de un número complejo. Recordando que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera no se alteran si el ángulo se aumenta o disminuye en un múltiplo entero positivo de 360° . Por tanto, para cualquier número complejo, si k es un entero no negativo se puede escribir

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + k360^\circ) + i \sin(\theta + k360^\circ)]$$

Extrayendo la raíz enésima en ambos miembros y por el Teorema de D'Moivre tenemos

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + k360^\circ}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + k360^\circ}{n} \right) \right]$$

Luego, haciendo $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ sucesivamente, obtenemos las n raíces enésimas distintas de z .

Ejemplo: Hallar las cuatro raíces cuartas de $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ y representarlas gráficamente.

SOLUCION: El módulo y el argumento del número complejo dado son:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \quad \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{-2} - 60^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \quad \text{ya que está en el segundo cuadrante.}$$

Por la fórmula de la raíz enésima tenemos

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4} \left[\cos \left(\frac{120^\circ + k360^\circ}{4} \right) + i \sin \left(\frac{120^\circ + k360^\circ}{4} \right) \right]$$

Asignando sucesivamente a k los valores 0, 1, 2, 3, obtenemos las cuatro raíces pedidas:

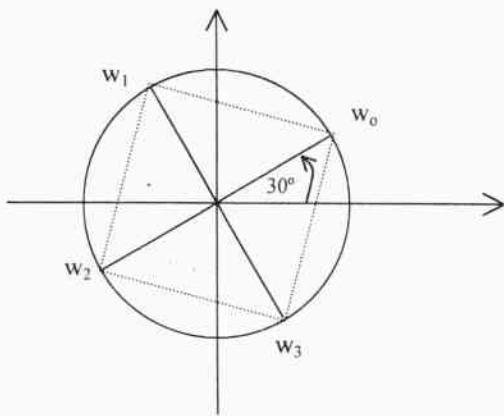
$$k = 0, \quad w_0 = \sqrt{2} [\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ] = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + i)$$

$$k = 1, \quad w_1 = \sqrt{2} [\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ] = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + \sqrt{3}i)$$

$$k = 2, \quad w_2 = \sqrt{2} [\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ] = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + i)$$

$$k = 3, \quad w_3 = \sqrt{2} [\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ] = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \sqrt{3}i)$$

Estas raíces se representan en el plano complejo, como sigue:



Obsérvese que estas raíces están igualmente espaciados a lo largo de la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$. Asimismo, obsérvese que la suma de todas las raíces es igual a cero. Esto es

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 0$$

Ejemplo: Hallar las seis raíces sextas de la unidad.

SOLUCIÓN: Sea $z = 1$, entonces $r = 1$ y $\theta = 0^\circ$

$$1 = \cos k 360^\circ + i \sin k 360^\circ$$

luego,

$$\sqrt[6]{1} = \cos \frac{k360^\circ}{6} + i \sin \frac{k360^\circ}{6}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\text{si } k = 0 \Rightarrow w_0 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1 + 0i$$

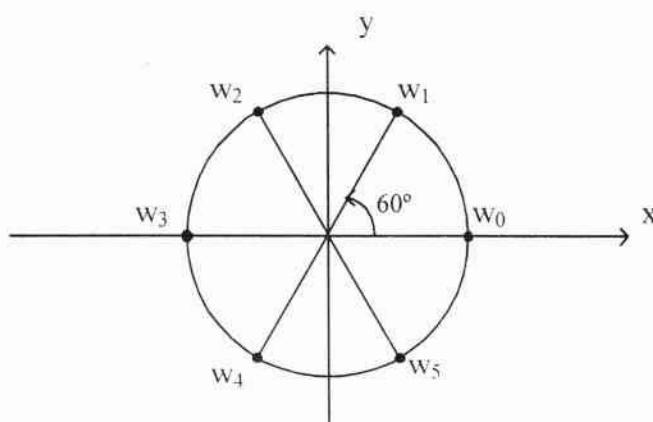
$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1 + 0i$$

$$k = 4 \Rightarrow w_4 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 5 \Rightarrow w_5 = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



8. EXPONENCIAL Y LOGARITMACIÓN COMPLEJA

Sea $z = x + yi$ cualquier número complejo. Entonces, la exponencial compleja se define como

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

donde $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$

Ejemplo: Sea $z = 2 - 5i$. Entonces

$$e^z = e^{2-5i} = e^2 e^{-5i} = e^2 (\cos 5 - i \sin 5) = 2.1 + 7.1i$$

Se sabe que $z = x + yi = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$

o bien $z = r(\cos(\theta + 2\pi k) + i \sin(\theta + 2\pi k)) = r e^{i(\theta + 2\pi k)}$

En donde θ está en radianes y k puede ser cualquier entero.

Entonces

$$\ln z = \ln(r e^{i(\theta + 2\pi k)}) = \ln r + i(\theta + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Cuando $k = 0$, se tiene el valor principal de $\ln z$, es decir

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

Ejemplo: Sea $z = 3 - \sqrt{3}i$. Entonces

$$r = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}, \quad \theta = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

luego

$$\ln z = \ln(3 - \sqrt{3}i) = \ln(2\sqrt{3}) + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

El valor principal es

$$\ln z = \ln(3 - \sqrt{3}i) = \ln(2\sqrt{3}) - \frac{\pi}{6}i$$

Sean z_1 y z_2 dos números complejos tales que $z_1 \neq 0$. Entonces la exponencial compleja $z_1 z_2$ se determina como sigue:

Haciendo $w = z_1 z_2$, y aplicando logaritmo natural se tiene

$$\ln w = z_2 \ln z_1$$

Por definición de logaritmo resulta

$$w = e^{z_2 \ln z_1}$$

o bien

$$z_1 z_2 = e^{z_2 \ln z_1}$$

Ejemplo: Sean $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 1 + i$. Hallar el complejo $z_1 z_2$

SOLUCIÓN: Como $r_1 = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ rad.

$$\text{Entonces } \ln z_1 = \ln \sqrt{2} + i \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{luego } z_2 \ln z_1 = (1+i)[\ln \sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k)] = (\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k) + i(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k)$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto } z_1 z_2 &= e^{z_2 \ln z_1} = e^{(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k) + i(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k)} \\ &= e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k} [\cos(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i \sin(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k)] \end{aligned}$$

Siendo el valor principal

$$z_1 z_2 = e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}} [\cos(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4})] = 0.9 - 1.3i$$

Ejemplo: Hallar $\ln z$, si $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \frac{\pi}{3}$

$$\text{SOLUCIÓN: Como } r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad, por encontrarse en tercer cuadrante}$$

$$\text{Entonces } \ln z = \ln \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \ln 1 + i \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \right) = i \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k \right)$$

Siendo el valor principal

$$\ln z = i \frac{4\pi}{3}$$

Ejemplo: Hallar el valor principal de la exponencial

$$z = \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{-i}$$

SOLUCIÓN: En efecto

$$\frac{-\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(1 + \sqrt{3}i)}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

luego se tiene

$$r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\ln\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \ln 1 + i\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) = i\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right)$$

Aplicando logaritmo natural en la expresión dada se tiene

$$\begin{aligned} \ln z &= -i \ln\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 - \sqrt{3}i}\right) = -i \ln\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -ii\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right) \\ &= \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por definición de logaritmo resulta

$$z = e^{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k}$$

Siendo el valor principal

$$z = e^{\frac{7\pi}{6}} = 39.06$$

Ejemplo: Hallar el valor principal de z en

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{-z} = 1 - i$$

SOLUCIÓN: Aplicando logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación dada se tiene

$$-z \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \ln(1-i)$$

como $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \ln 1 + i \frac{\pi}{6} = i \frac{\pi}{6}$ (valor principal)

y $\ln(1-i) = \ln \sqrt{2} - i \frac{\pi}{4}$ (valor principal)

Entonces resulta

$$-z\left(i \frac{\pi}{6}\right) = \ln \sqrt{2} - i \frac{\pi}{4}$$

despejando se obtiene

$$z = i \frac{6}{\pi} \ln \sqrt{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + i \frac{3}{\pi} \ln 2$$



Leonhard Euler (1707 – 1783)

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios, efectuar las operaciones indicadas:

1. $(\sqrt{3} + i)(1 + \sqrt{3}i) - (-2 + i)$ R : $2 + 3i$
2. $(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2 - (1 + \sqrt{6}i)$ R : $-2 + \sqrt{6}i$
3. $(4 - 5i)(2 + 9i) + (3 - 7i)(3 - 5i)$ R : $27 - 10i$
4. $2i(5 + 12i) + (2 + 3i)(5 + 7i) + (3 + 4i)(5 - 12i)$ R: $28 + 23i$
5. $(1 - i)(2 + i)(3 - 2i) - 20$ R : $1 + i$
6. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{2}{1+i} - \frac{1}{i}$ R: $1 + i$
7. $\frac{1}{1-2i} + \frac{2}{2-i} - \frac{1}{5i}$ R : $1 + i$
8. $\frac{1-8i}{8+i} + \frac{13i}{3+2i} - \frac{2}{1-i}$ R: $1 + i$
9. $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i} - \frac{1}{1-i} + \frac{3}{1+i}$ R: $1 - i$
10. $\frac{(1+i)^2}{3-i} + \frac{1}{1-2i} + 2 + i^6$ R: $1 + i$
11. $\frac{(3-i)(2+i)}{i} - \frac{2}{1+i} + i(5-i)$ R: $1 - i$

12. $\frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i} - 2$ R: $1-i$

13. $\frac{(1+2i)(2+i)(3-2i)}{(1-i)^2} + 5$ R: $-\frac{5}{2} + 5i$

14. $\frac{3+2i}{1+5i} - \frac{1+5i}{3+2i} - \frac{1}{1+i}$ R: $-1-i$

15. $\frac{3+4i}{2-i} + \frac{3-4i}{2+i} + \frac{5+i}{5i}$ R: $1-i$

16. $\frac{(1+i)^2}{1-i} - \frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{1}{i^2}$ R: $-1+2i$

17. $\frac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}} - \frac{1}{i}$ R: $2+2i$

18. $\frac{(2i - i^{-1})^3 (i - 3i^{-1})^2 i^3}{(i + 2i^{-1})^2 (3i + i^{-1})^3} + \left(\frac{4}{i}\right)^3$ R: $10i$

19. $\frac{(2+i^7)(2+i^9)(-3+i^5)(3+i^{11})}{i(1-3i)}$ R: $-9+13i$

20. $\frac{(1+i^5)^5}{(1+i^3)^3} - \frac{(2+i^9)^4}{(1+2i^7)^3} + (1+i^9)^4$ R: $-3+2i$

21. $\left[(1-i)^{-1} - 1\right]^{-1} + 4(1+i^{-1})^{-1}$ R: $1+i$

22. $\left[(1+i)^{-1} - i^{-1}\right]^{-1} + 4(-1+i^{-1})^{-1}$ R: $-1+i$

23. $\left[\frac{(1-i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{1-i} \right]^{-1} - 4(1-i^{-1})^{-1}$ R: $-3+i$

24. $i + \frac{1}{i + \frac{1}{i + \frac{1}{1 + \frac{1}{i}}}}$ R: $1-i$

25. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{i}}}}}$ R: $1+i$

26. $1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1-i}}}}}$ R: $1-i$

27. $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10}$ R: $-1+i$

28. $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + i^{-4} - i^{-5} + i^{-6} + i^{-7} + i^{-8} + i^{-9} + i^{-10}$ R: $-1-i$

29. Si: $\overline{z_1} = 2\overline{z_3} + z_2, z_2 = (1-i) - z_3, \overline{z_3} + (1-i) = 2\overline{(1+i)}$

calcular $z = \frac{\overline{z_2} + 2z_1 - z_3}{z_3^2 - z_1} + (\overline{2i-1}) + z_3^3$ R: $-\frac{3}{2}(4+i)$

En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar el complejo z:

30. $(2-i)z = (1+2i)^2$ R: $-2+i$

31. $(1+2i)z = 5i^3(2-3i)$ R: $-7+4i$

32. $\overline{z+2i} = 1 - iz$ $R : \frac{3-i}{2}$

33. $\overline{zi} - 3i = \overline{z+2}$ $R : \frac{-5+i}{2}$

34. $\frac{1-2i}{z} = \frac{1+i^7}{2}$ $R : 3 - i$

35. $\frac{1+\sqrt{3}i}{z} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ $R : \sqrt{3} + i$

36. $\frac{1+i}{z-1} + 2 = (1+i)^2$ $R : \frac{1}{2}(2-i)$

37. $\frac{1}{z-i} + \frac{2+i}{1+i} = 2 - i$ $R : 1 + 2i$

38. $\frac{i}{z+2i} + \frac{2+i}{1+i} = 2$ $R : 1 - i$

39. $\frac{1-i}{5-i} + \frac{3-2i}{2-iz} = \frac{1+i}{3+2i}$ $R : 13 - 2i$

40. $\left(\frac{zi-2}{1-i} \right) = \frac{\overline{zi}+1}{1-i}$ $R : \frac{-3-i}{2}$

41. $\frac{\overline{(zi+1)}}{\overline{zi}-2} = \frac{2+i}{1-2i}$ $R : \frac{3-i}{2}$

En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar los valores reales a y b que cumplan con la relación dada:

42. $(4+2i)a + (3-3i)b = 13+i$ $R : 2, 1$

43. $(3a-i)(2+i) - (a-bi)(1+2i) = 2+i$ $R : 1, 2$

44. $2(ai - 5b + 2) + 2i(ai + 2b + 3) + i = a(3 + 4i) - b(8-3i)$ R: 2, -3

45. Si: $z_1 = \frac{2+i}{3-i}$, $z_2 = \frac{1-i}{2+i}$, calcular $|z_1 + z_2|$ R: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

46. Si: $z = \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)(-3+3i)}{3i(1-i)(1-\sqrt{3}i)}$, calcular $|z|$ R: $\sqrt{2}$

47. Si: $z_1 = -1 + i$
 $z = \sqrt{2} i - |z_1|$, calcular $|z|$, z^2 y z^4 R: 2, $-4i$, -16

Expresar los siguientes números complejos en su forma polar:

48. a) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ b) $-1 - \sqrt{3}i$

49. a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ b) $\sqrt{3} - \frac{1}{i}$

50. a) $2i(\sqrt{3} + i)$ b) $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2i}$

51. a) -2 b) $-2i$

En cada uno de los siguientes ejercicios, efectuar las operaciones indicadas:

52. $3(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) \cdot \sqrt{2}(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$ R: $3(-1 + i)$

53. $(\cos 280^\circ + i \operatorname{sen} 280^\circ) \cdot 4(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)$ R: $2(\sqrt{3} - i)$

54. $4(\cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ) \cdot (\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ)$ R: $2(-1 + \sqrt{3}i)$

55. $\frac{2(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)}{3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)}$ R : $\frac{1}{3} + \frac{i}{3}$

56. $\frac{2(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)}{3(\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)}$ R : $-\frac{1}{3} + \frac{i}{\sqrt{3}}$

En cada uno de los siguientes ejercicios, calcular la potencia indicada usando el Teorema de Moivre.

57. $[\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^7$ R: $8(1 - i)$

58. $[\sqrt{2} (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)]^8$ R: $8(-1 + \sqrt{3}i)$

59. $(\sqrt{3} - 3i)^6$ R: 12^3

60. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$ R : $-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

61. $\left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$ R : $2(1 - \sqrt{3}i)$

62. $\frac{(\sqrt{3}-i)^8}{(-1+\sqrt{3}i)^5}$ R : $-4(1 + \sqrt{3}i)$

63. $\frac{(\sqrt{2}+i)^9}{(1-\sqrt{2}i)^8}$ R : $\sqrt{2} + i$

64. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+i}{1-\sqrt{2}i}\right)^9$ R : $-\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$

65. $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 \cdot \left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^{10}$

$$R : \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}i)$$

66. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$

$$R : -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

67. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{60} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^8$

$$R : 2 - \sqrt{3}i$$

68. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$

$$R : -1$$

69. $\left(\frac{1-i}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{2}{1-i}\right)^{-3}$

$$R : -\frac{9}{4} + \frac{7}{4}i$$

70. $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right)^{-4} - \left(\frac{2}{-\sqrt{3}+i}\right)^{-4}$

$$R : \sqrt{3}i$$

71. $\left(\frac{\operatorname{Sen}\alpha + i\operatorname{Sen}\alpha}{2}\right)^{-5}$

$$R : 4 \operatorname{sen}^{-5} \alpha (-1 + i)$$

En cada uno de los siguientes ejercicios, calcular las raíces que se indican y representarlas gráficamente

72. a) $\sqrt{5-12i}$ b) $\sqrt{-15-8i}$

73. a) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{-8i}$

74. a) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}i}}$

b) $\sqrt[4]{-1}$

75. a) $\sqrt[4]{-i}$

b) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

76. a) $\sqrt[5]{1}$

b) $\sqrt[6]{1}$

77. Si $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad,

Hallar: $\left(\frac{\overline{\omega_0} + \overline{\omega_2}}{\omega_1} \right)^5$ $R : \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

78. Si $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad,

Hallar: $\frac{(\omega_0 + \omega_2)^4}{(\omega_0 + \omega_1)^3}$ R: $-\omega_1$

79. Si $\omega_0', \omega_1', \omega_2'$ son las tres raíces cúbicas de la unidad imaginaria,

Hallar: $\left(\frac{\overline{\omega_0'} + \overline{\omega_2'}}{\omega_1'} \right)^5$ $R : \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

80. Sean $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ son las tres raíces cúbicas de la unidad,

Demostrar: a) $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0$

b) $(\omega_0 + \omega_1)^3 + 1 = 0$

c) $(\omega_0 + \omega_2)^4 - \omega_1 = 0$

d) $\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = 0$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en complejo:

81.
$$\begin{cases} (1+i)Z_1 + iZ_2 = -3 + 2i \\ (2+i)Z_1 + (2-i)Z_2 = 2 + i \end{cases}$$
 R: $-1+i; 2+i$

82.
$$\begin{cases} (2-3i)Z_1 - (1+i)Z_2 = 4 - 3i \\ (3-i)Z_1 + (1+2i)Z_2 = 11 + i \end{cases}$$
 R: $2+i; 1-2i$

83. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en complejo:

a) $(Z-1-i)(Z-1+i)(Z+1+i)(Z+1-i) = 5$ R: $1; i; -1; -i$

b) $Z^2 - (2-i)Z + (3-i) = 0$ R: $1+i; 1-2i$

84. Calcular: $5i^{476} - 3i^{258} + 4i^{327} - 8i^{932} + 4i^{441}$ R: 0

85. Simplificar: $\frac{i^{343} + i^{55331} + i^{2542} + i^{412300}}{i^{-55} + i^{-242} + i^{-328}}$ R: -2

86. Hallar n de modo que $\left(\frac{2+ni}{3-2i}\right)^2$ sea un número real R: $-\frac{4}{3}, 3$

87. Hallar $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que: $\frac{x-\sqrt{3}i}{-3+yi} = \left(\frac{2+2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{-4}$ R: $\frac{3}{2}; -5\sqrt{3}$

88. Hallar un número complejo cuyo cuadrado sea igual al conjugado de dicho número. R: $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$

89. Sean Z_1 y Z_2 dos números complejos, demostrar que:

$$\text{a)} \quad \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) = z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{Im}(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2) = z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$$

Determinar $\ln z$ de los siguientes complejos

90. a) $z = -2$ b) $z = -2i$

91. a) $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ b) $z = \frac{\sqrt{3}-3i}{2}$

Determinar los valores principales de las exponenciales siguientes

92. a) i^{-2i} b) $(-i)^i$ R: $e^\pi, e^{\pi/2}$

93. a) $(1+i)^i$ b) $(1-i)^{4i}$ R: $e^{-\pi/4+i\ln\sqrt{2}}, e^{-7\pi+i\ln 4}$

94. a) $(\sqrt{3}-i)^{1/i}$ b) $(-1+\sqrt{3}i)^{1/i}$ R: $e^{11\pi/6-i\ln 2}, e^{2\pi/3-i\ln 2}$

Hallar el valor principal de z en los siguientes casos

95. a) $e^{-z} = 1-i$ b) $e^{-iz} = -1-i$ R: $-\ln\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4}i; -\frac{5\pi}{4} + i\ln\sqrt{2}$

96. a) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^z = -i$ b) $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^z = i$ R: $\frac{9}{2}, -\frac{3}{10}$

97. a) $(1-i)^{1/z} = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$ b) $(-1-i)^{1/z} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ R: $\frac{7}{44} - i\frac{3}{11\pi}\ln 2$
 $\frac{15}{8} - i\frac{3}{4\pi}\ln 2$

EJERCICIOS VARIOS

98. Efectuar las operaciones que se indican:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{100} i^k \quad ; \quad \text{b) } \prod_{k=1}^{100} i^k \quad \text{R: 1, -1}$$

Efectuar las siguientes operaciones que se indican:

$$99. \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^{78} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^{78} \quad \text{R: 2}$$

$$100. \left(\frac{1 + \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha} \right)^n, \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{Z}. \quad \text{R: } \cos n \alpha + i \operatorname{sen} n \alpha$$

$$101. \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha - i \cos \alpha} \right)^n, \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}), n \in \mathbb{Z}. \quad \text{R: } \cos(n\alpha - \frac{n\pi}{2}) - i \operatorname{sen}(n\alpha - \frac{n\pi}{2})$$

102. Hallar el valor de x para el cual las expresiones siguientes sea un número imaginario puro:

$$\text{a) } \frac{(1+2i)(1+3i)}{(3+2i)(x+3i)}, \quad \text{b) } \frac{x+1}{1+(x-i)i} + \frac{1-3i}{x-(1+i)} \quad \text{R: } 15, -\frac{3}{2}$$

$$103. \text{ Si } Z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + \sqrt{3}i}, \text{ calcular: } \sqrt{Z^8 + \bar{Z}^8}, \quad Z^2 \text{ y } Z^4 \quad \text{R: } \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i); -1$$

104. Sean w_0, w_1, w_2 las tres raíces cúbicas de la unidad, efectuar las siguientes operaciones:

$$\text{a) } (w_0 - w_1 + w_2)^3 + (w_0 + w_1 - w_2)^3 \quad \text{R: -16}$$

$$\text{b) } (w_1)^4 + (w_2)^4 + (w_1 w_2)^{-1} \quad \text{R: 0}$$

$$\text{c) } (w_0 - w_1 + w_2)(w_0 + w_1 - w_2) \quad \text{R: 4}$$

105. Sean w_0^i, w_1^i, w_2^i las tres raíces cúbicas de la unidad imaginaria, efectuar las siguientes operaciones:

a) $(w_0^i)^3 + (w_1^i)^3 + (w_2^i)^3$ R:-3

b) $(w_0^i)^4 + (w_1^i)^4 + (w_2^i)^4$ R: 0

c) $(w_0^i w_1^i)^2 + (w_0^i w_2^i)^2 + (w_1^i w_2^i)^2$ R: 0

106. Demuestre que

$$(1+i)(1+\sqrt{3}i)(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 2\sqrt{2} [\cos(\alpha+105^\circ) + i \sin(\alpha+105^\circ)]$$

107. Demuestre que

$$\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

108. Demuestre que

$$\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \cos 2n\alpha + i \sin 2n\alpha$$

109. Sabiendo que n es un entero múltiplo de 3, demostrar que:

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^n = 2$$

110. Sea $Z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i$, hallar los números naturales n para que Z^n sea imaginario puro. $R : 6(1 + 2k), k = 0, 1, 2, \dots$

"El talento se desarrolla en la soledad; el carácter en la corriente del mundo".

Gottlieb

ALGEBRA BOOLEANA**1. INTRODUCCIÓN**

El concepto moderno de álgebra abstracta fue desarrollado por el matemático inglés George Boole en su estudio de los sistemas abstractos generales, opuestos a los casos particulares de tales sistemas. En su obra publicada en 1854, *An Investigation of the Laws of Thought*, creó un sistema de lógica matemática en términos que ahora llamamos álgebra booleana.

A partir de 1938 Claude Elwood Shannon, desarrolló el álgebra de las funciones de conmutación y mostró su relación con el álgebra de la lógica.

2. ALGEBRA DE BOOLE

Sea B un conjunto con al menos dos elementos. Se denomina álgebra de Boole a una estructura algebraica que admite dos operaciones binarias \wedge y \vee en B , y una operación unitaria: la complementación, que verifican los siguientes axiomas:

1. $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ son conmutativas
2. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ son asociativas
3. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ son distributivas
4. $\forall a \in B$, $a \wedge 1 = a$, $a \vee 0 = a$ Existen neutros en B , respecto de \wedge y \vee que se denotan con 1 y 0 , respectivamente.
5. Todo $a \in B$ admite un complemento \bar{a} , tal que

$$a \vee \bar{a} = 1 . \quad a \wedge \bar{a} = 0$$

Ejemplo: Si U es un conjunto, entonces el conjunto $P(U)$, de las partes de U , con las operaciones la unión e intersección, constituyen un modelo de álgebra

de Boole, pues con $\vee = \cup$, $\wedge = \cap$, se satisface los axiomas 1, 2, 3 y 4 por teoría de conjuntos, siendo el ϕ y el mismo conjunto U los neutros para dichas operaciones. Además todo subconjunto de U admite un complemento que satisface el axioma 6, es decir, si $A \subset U$,

$$A \cup \bar{A} = U \quad y \quad A \cap \bar{A} = \phi$$

2.1 EL PRINCIPIO DE DUALIDAD

Se denomina proposición dual correspondiente a una proposición del álgebra de Boole, a la que resulta de ella cambiando \vee por \wedge y viceversa, así como 0 por 1 y viceversa. Por ejemplo, son duales las siguientes proposiciones

$$a \vee (b \wedge a) \Leftrightarrow a \wedge (b \vee a)$$

$$a \wedge (b \vee 0) \Leftrightarrow a \vee (b \wedge 1)$$

$$(0 \vee 1) \wedge a \Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee a$$

2.2 PROPIEDADES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Para cualquier álgebra booleana (B, \vee, \wedge) , si $a, b \in B$, entonces

1. $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$
2. $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$
3. $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$
4. $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$, $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$
5. $\bar{\bar{a}} = a$, $\bar{1} = 0$, $\bar{0} = 1$

Ahora se definirá una importante álgebra de Boole que será la base en las siguientes secciones. Sea $B = \{0, 1\}$, y sean $\vee = +$ y $\wedge = \cdot$ las operaciones binarias suma y producto lógico, respectivamente, definidas como sigue:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

Además se tiene $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$

Así pues, es fácil demostrar que el conjunto B junto con las operaciones indicadas es un álgebra de Boole. Asimismo el conjunto $B^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in B, i = 1, 2, \dots, n\}$ es un álgebra de Boole.

Si $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B^n$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B^n$

entonces $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots + a_n + b_n)$

$a \cdot b = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$

$\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$

Además, los neutros en B^n para las operaciones $+ y \cdot$, respectivamente, son

$(0, 0, \dots, 0)$ y $(1, 1, \dots, 1)$

3. FUNCIONES BOOLEANAS

Sea $B = \{0, 1\}$ y sea B^n como se definió anteriormente. Una función definida como $f: B^n \rightarrow B$ es una función booleana, o de conmutación. Estas funciones pueden verse como funciones de n variables, donde cada uno de ellas toma sólo valores 0 y 1. A estas variables se denominan variables booleanas.

Ejemplo: Sea $f: B^3 \rightarrow B$, tal que $f(x, y, z) = xz + y$ (se escribe xz en vez de $x \cdot z$)

Encuentre el valor de la función booleana, para cada una de las 2^3 posibles asignaciones a las variables x, y, z .

SOLUCIÓN: Primero construyamos una tabla con las 8 posibles combinaciones de ceros y unos (Idem a una tabla de verdad en lógica).

Luego, considerando la definición anterior para la suma y producto lógico, se obtiene los valores de la función booleana como sigue:

x	y	z	xz	$f = xz + y$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Nota: la definición anterior indica

$$\begin{array}{lll} 0 + 0 = 0 & , & 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \\ 0 \cdot 0 = 0 & , & 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} 1 + 1 = 1 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Para $n \in \mathbb{Z}$, sean $f, g : B^n \rightarrow B$ dos funciones booleanas de las n variables booleanas x_1, x_2, \dots, x_n . Entonces definimos, que:

- i) f y g son iguales si tienen el mismo valor para cada una de las 2^n posibles asignaciones a las n variables.
- ii) el complemento de f es la función booleana definida sobre B^n como

$$\bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

- iii) la suma y el producto de f y g , respectivamente, como

$$(f + g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(f \cdot g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

3.1 PROPIEDADES

Sean $f, g, h : B^n \rightarrow B$ funciones booleanas arbitrarias, y sean x, y, z las variables booleanas arbitrarias. Las propiedades que satisfacen estas funciones y las variables booleanas son:

$$1. \text{ de Idempotencia} \quad f + f = f \qquad \qquad x + x = x$$

$$f \cdot f = f \qquad \qquad x \cdot x = x$$

2. commutativas	$f + g = g + f$	$x + y = y + x$
	$f \cdot g = g \cdot f$	$x \cdot y = y \cdot x$
3. asociativas	$f + (g + h) = (f + g) + h$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
	$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
4. distributivas	$f + (g \cdot h) = (f + g) \cdot (f + h)$	$x + (y \cdot z) = (x + y)(x + z)$
	$f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$	$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
5. de absorción	$f + f \cdot g = f$, $f \cdot (f + g) = f$	$x + (x \cdot y) = x$, $x \cdot (x + y) = x$
	$f + 1 = 1$, $f \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$, $x \cdot 0 = 0$
6. de complemento	$\bar{\bar{f}} = f$	$\bar{\bar{x}} = x$
	$f + \bar{f} = 1$	$x + \bar{x} = 1$
	$f \cdot \bar{f} = 0$	$x \cdot \bar{x} = 0$
7. de De Morgan	$\overline{f + g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$, $\overline{f \cdot g} = \bar{f} + \bar{g}$	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
8. de Identidad	$f + 0 = f$, $f \cdot 1 = f$	$x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$

Nota: El símbolo 1 denota la función booleana constante cuyo valor es siempre 1, y 0 es la función cuyo único valor es 0, es decir 0 y $1 \notin B$.

Ejemplo: Demuestre que $x + \bar{x} y = x + y$

SOLUCIÓN: Por la propiedad distributiva se tiene

$$\begin{aligned} x + \bar{x} y &= (x + \bar{x})(x + y) \\ &= 1(x + y) = x + y \end{aligned}$$

Ejemplo: Simplificar $f(x, y, z) = x(\bar{x} + y) + \bar{z} + yz$

SOLUCIÓN: Por las propiedades distributiva, de complemento y de absorción se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x\bar{x} + xy + (\bar{z} + y)(\bar{z} + z) \\ &= 0 + xy + (\bar{z} + y)1 = xy + \bar{z} + y = y + \bar{z} \end{aligned}$$

Ejemplo: Simplificar $f(x, y, z, u) = xyu + xzu + x\bar{y}\bar{u} + yz + x\bar{z}$

SOLUCIÓN: Por las propiedades asociativa, distributiva y de absorción se tiene

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z, u) &= xyu + x\bar{y}\bar{u} + yz + x(zu + \bar{z}) \\
 &= xyu + x\bar{y}\bar{u} + yz + x(z + \bar{z})(u + \bar{z}) \\
 &= xyu + x\bar{y}\bar{u} + yz + x(u + \bar{z}) \\
 &= xyu + x\bar{y}\bar{u} + yz + xu + x\bar{z} \\
 &= xu(y + 1) + x\bar{y}\bar{u} + yz + x\bar{z} \\
 &= xu + x\bar{y}\bar{u} + yz + x\bar{z} \\
 &= x(u + \bar{y}\bar{u}) + yz + x\bar{z} \\
 &= x(u + \bar{y})(u + \bar{u}) + yz + x\bar{z} \\
 &= x(u + \bar{y}) + yz + x\bar{z} \\
 &= xu + x\bar{y} + yz + x\bar{z} \\
 &= xu + x(\bar{y} + \bar{z}) + yz = xu + x\bar{yz} + yz \\
 &= xu + (x + yz)(\bar{yz} + yz) = xu + x + yz \\
 &= x + yz
 \end{aligned}$$

Anora consideremos el proceso de encontrar una función booleana a partir de una tabla de valores dada.

Ejemplo: Obtener las fórmulas para las funciones $f, g : B^2 \rightarrow B$ dadas en la siguiente tabla de valores

x	y	$f(x, y)$	$g(x, y)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

SOLUCIÓN: Según la tabla de valores la función f resulta 1 cuando $x = 1$ e $y = 0$ y 0 en los demás casos. Entonces $f(x, y) = x \bar{y}$.

De la misma forma la función g da el valor 1 para $x = 0$ e $y = 0$, luego para $x = 1$ e $y = 0$, por lo que $g(x, y) = \bar{x} \bar{y} + x \bar{y}$.

Ejemplo: Obtener una fórmula para la función booleana $f : B^3 \rightarrow B$ dada en la siguiente tabla de valores

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\leftarrow \bar{x} \bar{y} z$$

$$\leftarrow \bar{x} y z$$

$$\leftarrow x y \bar{z}$$

SOLUCIÓN: En la tabla de valores vemos que la columna de f tiene tres unos, los cuales se expresan como $\bar{x} \bar{y} z$, $\bar{x} y z$, $x y \bar{z}$, respectivamente. Así,

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y z + x y \bar{z}$$

Ejemplo: Obtener una fórmula para la función booleana $f : B^3 \rightarrow B$ dada en la siguiente tabla de valores

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$\leftarrow x + \bar{y} + z$$

$$\leftarrow \bar{x} + y + z$$

$$\leftarrow \bar{x} + y + \bar{z}$$

SOLUCIÓN: Un método diferente a la anterior consiste en considerar los ceros que se tienen en la columna de f . Los tres ceros se expresan como $x + \bar{y} + z$, $\bar{x} + y + z$ y $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$, respectivamente. Así,

$$f(x, y, z) = (x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

3.2 FORMAS NORMALES DISYUNTIVA Y CONJUNTIVA

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, si f es una función booleana sobre las n variables x_1, x_2, \dots, x_n , entonces se dice que:

- i) Una representación de f como una suma de productos es una forma normal disyuntiva (f.n.d.) de f . Por ejemplo,

$$f(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} y \bar{z} + x y \bar{z}$$

la función f está en la f.n.d. porque cada una de las variables x, y, z aparece (a veces complementada, a veces no) en cada uno de los productos (o términos). Cada producto se denomina mintérmino.

- ii) Una representación de f como un producto de sumas es una forma normal conjuntiva (f.n.c.) de f . Por ejemplo,

$$f(x, y, z) = (x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

la función f está en la f.n.c. pues está expresada como un producto de términos, cada uno de los cuales es una suma de variables individuales, unas veces complementada y otras no. Cada término, o suma completa, se denomina maxtérmino.

Ejemplo: Encuentre la f.n.d. y f.n.c. de $f: B^3 \rightarrow B$ dada en la siguiente tabla de valores

Nro. Decimal equivalente	x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

SOLUCIÓN: La función f depende de tres variables. Cada una de las 2^3 combinaciones de ceros y unos representa a un número decimal, se conoce como el número binario equivalente. Es decir,

$$0 \equiv 000, 1 \equiv 001, 2 \equiv 010, 3 \equiv 011, 4 \equiv 100, 5 \equiv 101, 6 \equiv 110 \text{ y } 7 \equiv 111.$$

Luego, la función f tiene valores uno en las filas que corresponden a los números 0, 1, 3, 4 y 6, y que pueden ser expresados como

Nro. Decimal equivalente	xyz	f	
0	000	1	$\overleftarrow{x} \overline{y} \overline{z}$
1	001	1	$\overleftarrow{x} \overline{y} z$
2	010	0	
3	011	1	$\overleftarrow{x} y z$
4	100	1	$\overleftarrow{x} \overline{y} \overline{z}$
5	101	0	
6	110	1	$\overleftarrow{x} y \overline{z}$
7	111	0	

$$\text{Así, la f.n.d. de } f \text{ es } f(x, y, z) = (\overline{x} \overline{y} \overline{z}) + (\overline{x} \overline{y} z) + (\overline{x} y z) + (x \overline{y} \overline{z}) + (x y \overline{z}).$$

Esta función puede expresarse también como

$$f = \sum m(0, 1, 3, 4, 6),$$

donde $\sum m$ indica la sumatoria de mintérminos.

Ahora para obtener la f.n.c. de f consideremos los ceros en la columna de f , que en total son tres y corresponden a los números 2, 5 y 7. Estos se pueden expresar como

Nro. Decimal equivalente	xyz	f
0	000	1
1	001	1
2	010	0
3	011	1
4	100	1
5	101	0
6	110	1
7	111	0

$$\leftarrow x + \bar{y} + z$$

$$\leftarrow \bar{x} + y + \bar{z}$$

$$\leftarrow \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

Así, la f.n.c. de f es $f(x, y, z) = (x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

Asimismo se puede escribir como

$$f = \prod M(2, 5, 7),$$

donde $\prod M$ indica la productoria de maxterminos.

Ejemplo: Para una función booleana de cuatro variables las 2^4 combinaciones de ceros y unos y la equivalencia con los números decimales se muestra en la siguiente tabla:

Nro. Decimal equivalente	x	y	z	u	Equivalencias decimal – binario
0	0	0	0	0	$\rightarrow 0 \equiv 0000$
1	0	0	0	1	$\rightarrow 1 \equiv 0001$
2	0	0	1	0	$\rightarrow 2 \equiv 0010$
3	0	0	1	1	$\rightarrow 3 \equiv 0011$
4	0	1	0	0	$\rightarrow 4 \equiv 0100$
5	0	1	0	1	$\rightarrow 5 \equiv 0101$
6	0	1	1	0	$\rightarrow 6 \equiv 0110$
7	0	1	1	1	$\rightarrow 7 \equiv 0111$
8	1	0	0	0	$\rightarrow 8 \equiv 1000$
9	1	0	0	1	$\rightarrow 9 \equiv 1001$
10	1	0	1	0	$\rightarrow 10 \equiv 1010$
11	1	0	1	1	$\rightarrow 11 \equiv 1011$
12	1	1	0	0	$\rightarrow 12 \equiv 1100$
13	1	1	0	1	$\rightarrow 13 \equiv 1101$
14	1	1	1	0	$\rightarrow 14 \equiv 1110$
15	1	1	1	1	$\rightarrow 15 \equiv 1111$

Ejemplo: Sea $f: B^3 \rightarrow B$ tal que $f(x, y, z) = xy + x\bar{y}z + \bar{z}$. Obtener:

- a) la f.n.d. y f como \sum_m , b) la f.n.c. y f como \prod_M

SOLUCIÓN: a) la función f depende de tres variables booleanas. Entonces podemos escribir de nuevo cada término como sigue:

- i) $xy = xy(z + \bar{z}) = xyz + xy\bar{z}$ (multiplicamos por $z + \bar{z} = 1$)
- ii) $x\bar{y}z = x\bar{y}z$ (el término está completo, no falta ninguna variable)
- iii) $\bar{z} = (y + \bar{y})\bar{z} = y\bar{z} + \bar{y}\bar{z} = (x + \bar{x})y\bar{z} + (x + \bar{x})\bar{y}\bar{z}$
 $= xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Por la propiedad de idempotencia para $+$, la f.n.d. de f resulta

$$f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Obtendremos seguidamente el número decimal correspondiente a cada término;

$$xyz : 111 \equiv 7, \quad xy\bar{z} : 110 \equiv 6, \quad x\bar{y}z : 101 \equiv 5$$

$$\bar{x}y\bar{z} : 010 \equiv 2, \quad x\bar{y}\bar{z} : 100 \equiv 4, \quad \bar{x}\bar{y}\bar{z} : 000 \equiv 0$$

Por lo que podemos escribir $f \equiv \sum_m (0, 2, 4, 5, 6, 7)$

b) De la representación anterior (suma de mintérminos) se tiene que

$$f = \prod_M (1, 3)$$

luego, los equivalentes en binario de los maxtérminos 1 y 3 son

$$1 \equiv J01 : x + y + \bar{z} \quad y \quad 3 \equiv 011 : x + \bar{y} + \bar{z}$$

En consecuencia, la f.n.c. de f es

$$f(x, y, z) = (x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z}).$$

Ejemplo: Sea $f: B^4 \rightarrow B$ tal que $f(x, y, z, u) = (x + \bar{y} + z)(x + y + u)(\bar{z} + u)$

Obtener: a) la f.n.c. y f como \prod_M , b) la f.n.d. y f como \sum_m

SOLUCIÓN: a) la función f depende de cuatro variables booleanas. Entonces escribimos cada factor del producto como sigue:

$$\text{i)} \quad x + \bar{y} + z = x + \bar{y} + z + u\bar{u} \quad (\text{sumamos } u\bar{u} = 0)$$

$$= (x + \bar{y} + z + u)(x + \bar{y} + z + \bar{u}) \quad (\text{por la prop.distributiva})$$

$$\text{ii)} \quad x + y + u = x + y + u + z\bar{z} = (x + y + z + u)(x + y + \bar{z} + u)$$

$$\text{iii)} \quad \bar{z} + u = y\bar{y} + \bar{z} + u = (y + \bar{z} + u)(\bar{y} + \bar{z} + u) = (x\bar{x} + y + \bar{z} + u)(x\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + u)$$

$$= (x + y + \bar{z} + u)(\bar{x} + y + \bar{z} + u)(x + \bar{y} + \bar{z} + u)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + u)$$

En consecuencia, por la propiedad de idempotencia tenemos

$$f(x,y,z,u) = (x + \bar{y} + z + u)(x + \bar{y} + z + \bar{u})(x + y + z + u)(x + y + \bar{z} + u)(x + \bar{y} + \bar{z} + u)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + u)$$

El número decimal correspondiente a cada maxtrérmino es

$$(x + \bar{y} + z + u) : 0100 \equiv 4, (x + \bar{y} + z + \bar{u}) : 0101 \equiv 5, (x + y + z + u) : 0000 \equiv 0$$

$$(x + y + \bar{z} + u) : 0010 \equiv 2, (\bar{x} + y + \bar{z} + u) : 1010 \equiv 10, (x + \bar{y} + \bar{z} + u) : 0110 \equiv 6$$

$$(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} + u) : 1110 \equiv 14$$

$$\text{de donde} \quad f = \prod M(0, 2, 4, 5, 6, 10, 14)$$

b) De la representación anterior (producto de maxtrérminos) se tiene

$$f \equiv \sum m(1, 3, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15)$$

Ahora, los equivalentes en binario de cada mintérmino son

$$1 \equiv 0001 : \bar{x}\bar{y}\bar{z}u, \quad 3 \equiv 0011 : \bar{x}\bar{y}zu, \quad 7 \equiv 0111 : \bar{x}yzu$$

$$8 \equiv 1000 : x\bar{y}\bar{z}\bar{u}, \quad 9 \equiv 1001 : x\bar{y}\bar{z}u, \quad 11 \equiv 1011 : x\bar{y}zu$$

$$12 \equiv 1100 : xy\bar{z}\bar{u}, \quad 13 \equiv 1101 : xy\bar{z}u, \quad 15 \equiv 1111 : xyzu$$

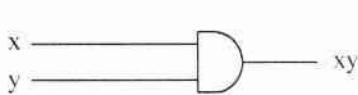
Por tanto, la f.n.d. de f es

$$f(x,y,z,u) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}u + x\bar{y}zu + xyzu + x\bar{y}\bar{z}\bar{u} + x\bar{y}\bar{z}u + x\bar{y}zu + xy\bar{z}\bar{u} + xy\bar{z}u + xyzu$$

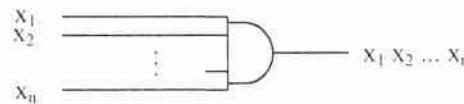
4. REDES DE PUERTAS LÓGICAS

La importancia de las funciones booleanas, o de conmutación, radica en su implementación por medio de puertas lógicas (dispositivos electrónicos).

4.1 FUNCIÓN AND El símbolo del dispositivo que puede realizar el producto lógico de dos variables x e y , asimismo el dispositivo que realice el producto lógico de muchas variables están representados por:

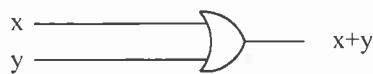


Puerta AND de dos entradas

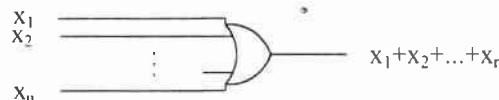


Puerta AND de entradas múltiples

4.2 FUNCIÓN OR La representación del dispositivo que realiza la suma lógica de dos variables x e y , también del dispositivo que realiza la suma lógica de muchas variables se indican en las siguientes figuras:

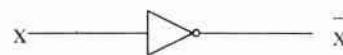


Puerta OR de dos entradas



Puerta OR de entradas múltiples

4.3 INVERSOR (NOT) Un inversor es una puerta lógica que tiene solamente una entrada y una salida, donde la salida es el complemento lógico de la entrada. El símbolo lógico de un inversor está representado en la siguiente figura:



4.4 FUNCIÓN OR-EXCLUSIVE Se llama función or-exclusive a la operación binaria que se representa por el símbolo \oplus , y se define como

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$$

Cuya tabla de valores es

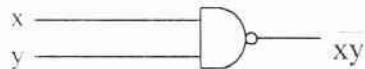
x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

El símbolo para una puerta que forma la función or-exclusive de dos variables de entrada es el de la siguiente figura



4.5 FUNCIONES NAND Y NOR Se llama función NAND al complemento de la función AND, es decir, para dos variables x e y se escribe \overline{xy} y se lee "NOT x AND y ". Esta operación NOT-AND abreviadamente se denomina NAND. Análogamente, la función NOR es el complemento de la función OR, es decir, $\overline{x+y}$ que se lee "NOT x OR y ".

Los símbolos para representar una puerta NAND y una puerta NOR se muestran en las siguientes figuras



Puerta NAND



Puerta NOR

Ejemplo: Sea $f: B^3 \rightarrow B$. Para la función f cuya tabla de valores es

Nro. Decimal equivalente	x	y	z	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$$\leftarrow \overline{x} \overline{y} z$$

$$\leftarrow \overline{x} y \overline{z}$$

$$\leftarrow x \overline{y} \overline{z}$$

$$\leftarrow x y \overline{z}$$

Encontrar: a) la f.n.d. y simplificar (minimizar)

b) una red de puertas lógicas

SOLUCIÓN: a) la f.n.d. de f resulta

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

luego, por las propiedades de las variables booleanas se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{z}(\bar{y} + y) \\ &= \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{z} \\ &= \bar{x}\bar{y}z + (\bar{x}y + x)\bar{z} = \bar{x}\bar{y}z + (\bar{x} + x)(y + x)\bar{z} \\ &= \bar{x}\bar{y}z + (y + x)\bar{z} = \bar{x}\bar{y}z + y\bar{z} + x\bar{z} \end{aligned}$$

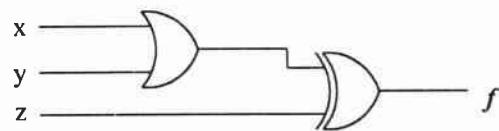
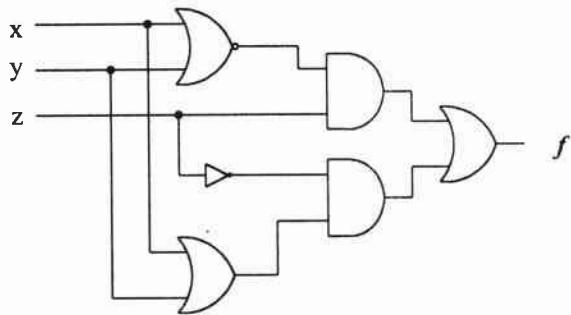
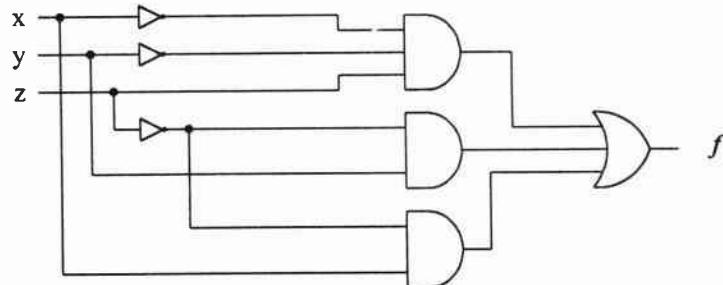
Así, una suma minimal de productos para f puede ser:

i) $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + y\bar{z} + x\bar{z}$

ii) $f(x, y, z) = (\bar{x} + y)z + (x + y)\bar{z}$

iii) $f(x, y, z) = (x + y) \oplus z$

b) las redes de puertas para cada caso i), ii) y iii), respectivamente, son:



Ejemplo: Encontrar una red de puertas para la función booleana

$$f \equiv \sum m(3, 4, 5, 7, 9, 13, 14, 15)$$

SOLUCIÓN: Considerando el orden de las variables como x, y, z, u . Se tiene que

$$3 \equiv 0011 : \bar{x} \bar{y} zu, \quad 4 \equiv 0100 : \bar{x} y \bar{z} \bar{u}, \quad 5 \equiv 0101 : \bar{x} y \bar{z} u.$$

$$7 \equiv 0111 : \bar{x} yzu, \quad 9 \equiv 1001 : x \bar{y} \bar{z} u, \quad 13 \equiv 1101 : xy \bar{z} u$$

$$14 \equiv 1110 : xyz\bar{u}, \quad 15 \equiv 1111 : xyzu$$

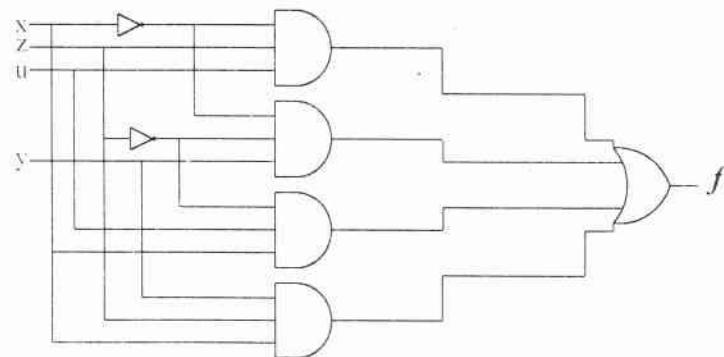
de donde

$$f(x,y,z,u) = \bar{x} \bar{y} zu + x \bar{y} \bar{z} \bar{u} + \bar{x} y \bar{z} u + \bar{x} yzu + x \bar{y} \bar{z} u + xy \bar{z} u + xyz\bar{u} + xyzu$$

Por las propiedades de las variables booleanas, una suma minimal de productos para f resulta

$$\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= \bar{x} zu(\bar{y} + y) + \bar{x} y \bar{z} (\bar{u} + u) + x \bar{z} u(\bar{y} + y) + xyz(\bar{u} + u) \\ &= \bar{x} zu + \bar{x} y \bar{z} + x \bar{z} u + xyz \end{aligned}$$

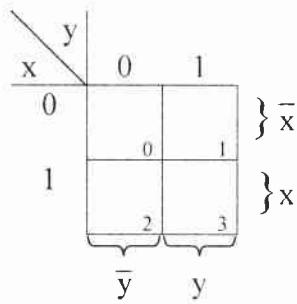
Por tanto, una red de puertas lógicas es



5. MAPAS DE KARNAUGH

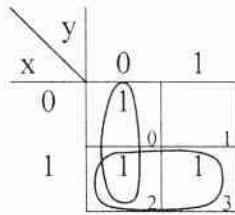
Para la simplificación y minimización de funciones booleanas con no más de seis variables, usamos un método gráfico llamado mapa de Karnaugh, desarrollado en 1953 por Maurice Karnaugh.

Examinamos el primer caso donde f es una función de dos variables, digamos x e y , en ese orden



En cada casilla se escribe el número decimal correspondiente.

A las casillas que corresponden a $x = 1$ señalamos con x , y las que corresponden a $x = 0$ con \bar{x} . Análogamente se procede con las columnas. Por ejemplo, el mapa de Karnaugh para la función booleana $f = \sum m(0, 2, 3)$ es

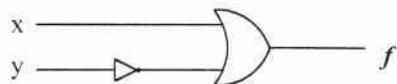


Se representa colocando 1 en las casillas correspondientes a los mintérminos 0, 2 y 3.

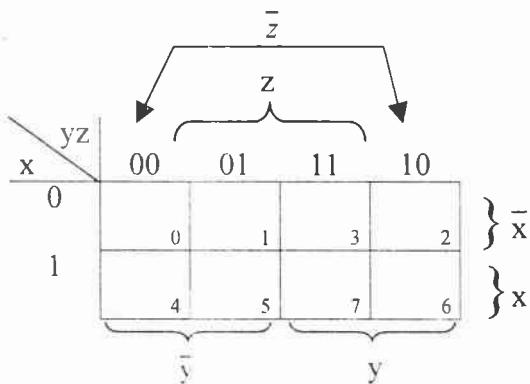
Luego agrupamos mayor cantidad de 1 que son adyacentes como se muestra en la tabla de valores. Así, se obtiene que la segunda fila corresponde a x ($x=1$) y la primera columna corresponde a \bar{y} ($y=0$). Por tanto, la función f simplificada es

$$f(x, y) = x + \bar{y}$$

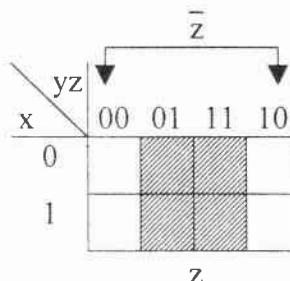
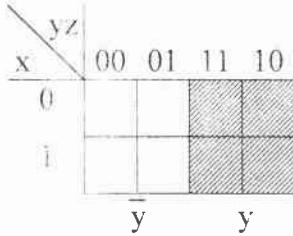
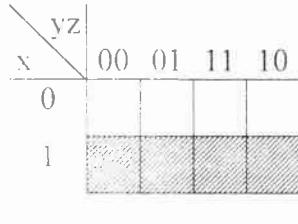
La red de puertas es



Ahora, consideremos el caso donde f es una función booleana de tres variables, digamos x, y, z en ese orden.



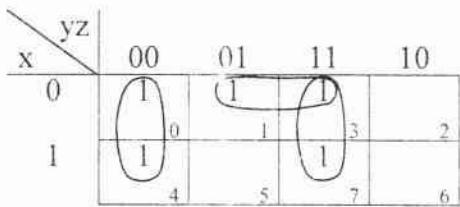
Examinemos las regiones correspondiente a cada variable



Ejemplo: Encontrar una representación como suma minimal de productos para la función booleana

$$f = \sum_m (0, 1, 3, 4, 7)$$

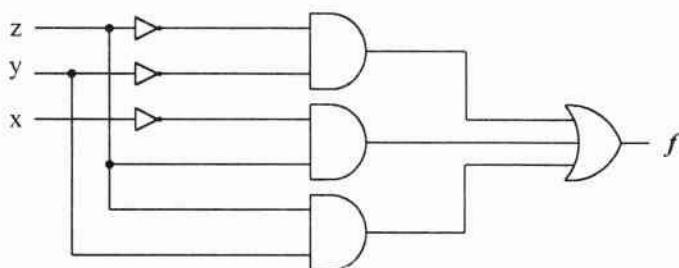
SOLUCIÓN: El correspondiente mapa de Karnaugh se muestra en la siguiente figura



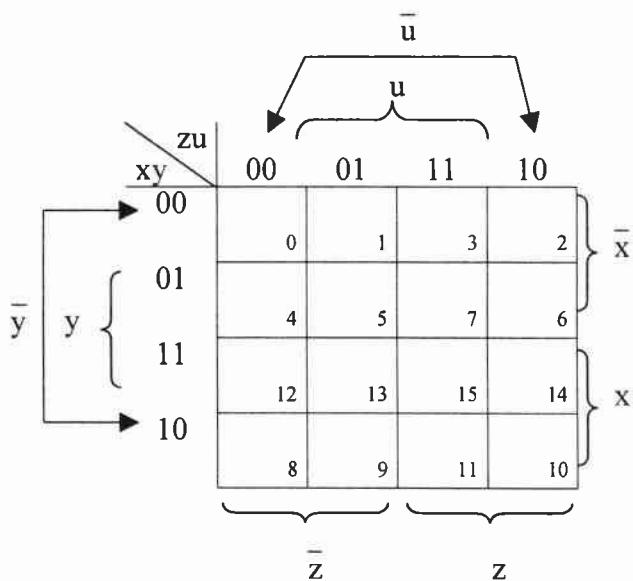
Donde, los 1 de las casillas 0 y 4 producen $\bar{y}\bar{z}$, los 1 de las casillas 1 y 3 producen $\bar{x}z$ y los 1 de las casillas 3 y 7 producen yz . Por lo tanto, como suma minimal de productos,

$$f(x, y, z) = \bar{y}\bar{z} + \bar{x}z + yz$$

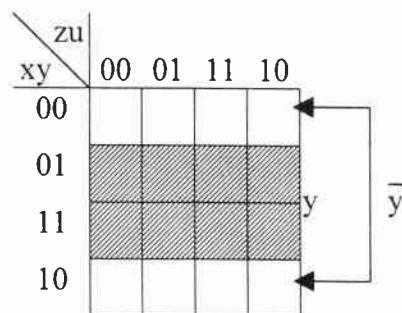
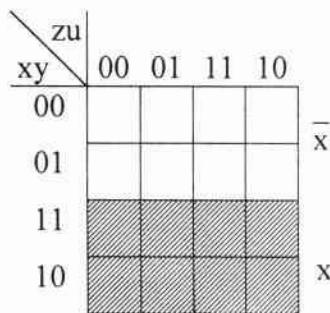
la red de puertas es

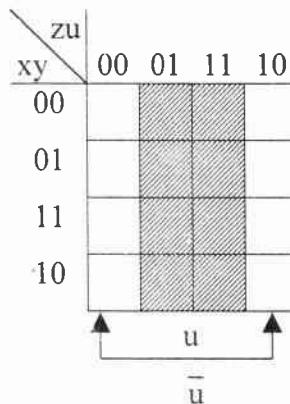
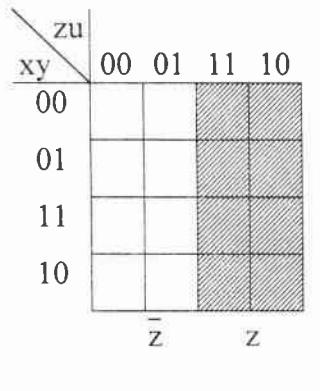


Ahora, consideremos el mapa de Karnaugh para el caso de una función booleana de cuatro variables, donde la distribución de variables en el orden x, y, z, u se presenta en la siguiente tabla.



las casillas que corresponden a cada variable son

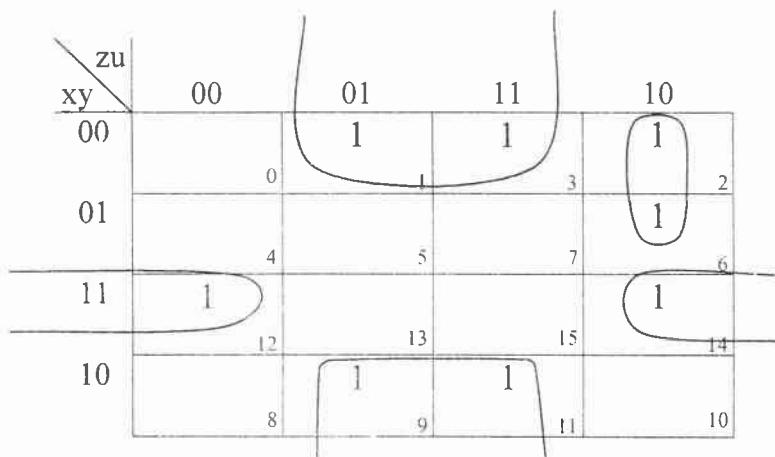




Ejemplo: Obtener una representación como suma minimal de productos para la función booleana

$$f = \sum_m (1, 2, 3, 6, 9, 11, 12, 14)$$

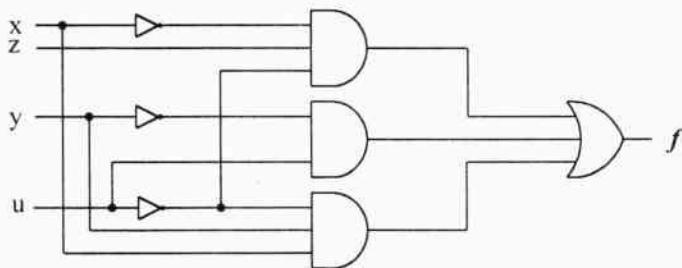
SOLUCIÓN: El correspondiente mapa de Karnaugh se muestra en la siguiente tabla



Las casillas con mintérminos 1, 3, 9 y 11 son adyacentes y nos da el producto $\bar{y}u$, las casillas con mintérminos 2 y 6 nos da el producto $\bar{x}z\bar{u}$ y las casillas con mintérminos 12 y 14 produce $xy\bar{u}$. Por tanto, tenemos que

$$f(x, y, z, u) = \bar{y}u + \bar{x}z\bar{u} + xy\bar{u}$$

la red de puertas es

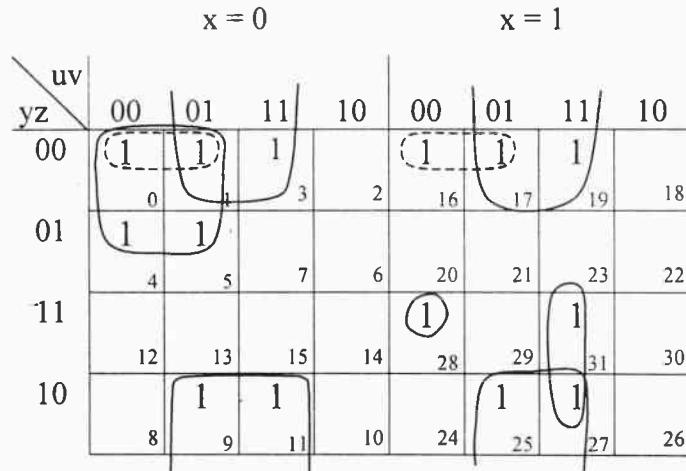


Ejemplo: Una función booleana de cinco variables es expresada como

$$f(x, y, z, u, v) = \sum m(0, 1, 3, 4, 5, 9, 11, 16, 17, 19, 25, 27, 28, 31)$$

Minimizarla mediante un mapa de Karnaugh.

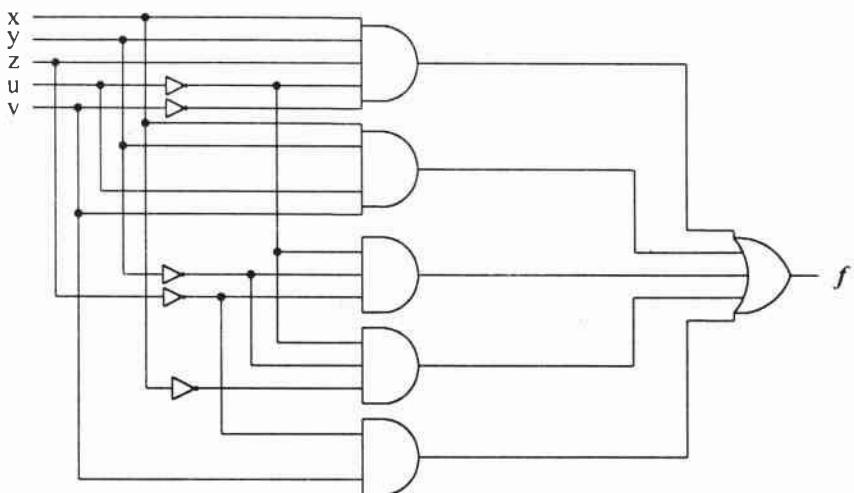
SOLUCIÓN: El correspondiente mapa de Karnaugh se da en la siguiente tabla



Las casillas con mintérminos 1, 3, 9, 11, 17, 19, 25, 27 nos da el producto $\bar{z}v$. Las casillas con mintérminos 0, 1, 4 y 5 nos da el producto $\bar{x}\bar{y}\bar{u}$. Las casillas con mintérminos 0, 1, 16 y 17 nos da el producto $\bar{y}\bar{z}\bar{u}$. Las casillas con mintérminos 27 y 31 produce $xyuv$. La casilla con mintérminos 28 produce $xz\bar{u}\bar{v}$.

Por tanto, encontramos

$$f(x, y, z, u, v) = \bar{z}v + \bar{x}\bar{y}\bar{u} + \bar{y}\bar{z}\bar{u} + xyuv + xz\bar{u}\bar{v}$$



5.1 FUNCIONES INCOMPLETAMENTE ESPECIFICADAS

En la práctica, muchas veces se desea escribir en su forma más simple una función f cuyo valor para algunas combinaciones de las variables es indiferente. Para tales casos, las salidas no son especificadas y se dice que la función f está especificada de manera incompleta.

Ejemplo: Realizar la síntesis de una función f de cuatro variables x, y, z y u cuya tabla de valores corresponda a la de la siguiente tabla:

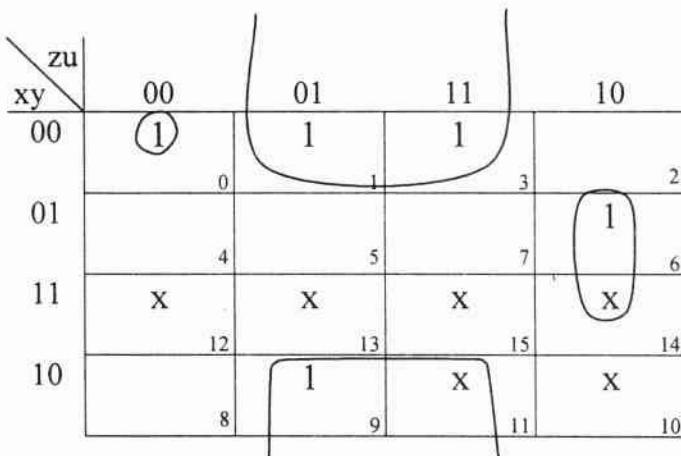
Nro decimal equivalente	x	y	z	u	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	x
11	1	0	1	1	x
12	1	1	0	0	x
13	1	1	0	1	x
14	1	1	1	0	x
15	1	1	1	1	x

donde aparece una "x" para el valor de f en los últimos seis casos. Estas combinaciones de las variables no se presentarán, debido a ciertas restricciones externas, por lo que el valor de f en estos casos es indiferente.

Por lo tanto, escribimos $f = \sum m(0, 1, 3, 6, 9) + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$

donde $d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$ denota los seis casos de indiferencia.

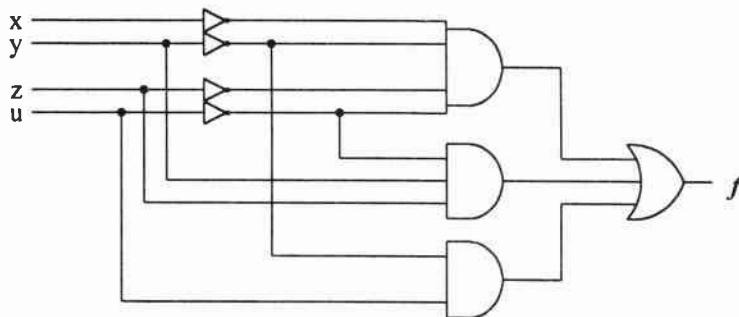
Para buscar una expresión como suma minimal de productos para f , podemos usar cualquiera o todas estas condiciones de indiferencia en el proceso de simplificación.



Utilizamos el mapa de Karnaugh y obtenemos

$$f(x, y, z, u) = \bar{y}u + yz\bar{u} + \bar{x}yz\bar{u}$$

Por tanto, la red de puertas resulta



EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios f es una función booleana. Simplificar la función dada.

1. $f(x, y, z) = xy + \overline{xy}z$ R: $xy + z$

2. $f(x, y, z) = (x + y)\bar{y} + xz + \bar{z}$ R: $x + \bar{z}$

3. $f(x, y, z, u) = \overline{\bar{x} + \bar{x}\bar{u} + \bar{y}\bar{z}}$ R: $x(y + z)$

4. $f(x, y, z, u) = \overline{(x + y)(z + \bar{u})u}$ R: $\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{u}$

5. $f(x, y, z, u) = x\bar{y} + yz + x\bar{z} + xu$ R: $x + yz$

6. $f(x, y, z, u) = xyu + \bar{x}y\bar{u} + yzu + xz + y\bar{z}$ R: $xz + y$

7. Obtener una fórmula para las funciones booleanas cuyas tablas de valores se dan a continuación.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

a) Como suma de productos.

b) Como producto de sumas.

8. Sea $f: B^4 \rightarrow B$ una función booleana, cuya tabla de valores es

x	y	z	u	$f(x, y, z, u)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Encuentre la forma normal disyuntiva (f.n.d.) de f .

9. Considere la función booleana de tres variables $f(x, y, z) = x + yz$

obtener: a) la f.n.d. y f como \sum_m R: $\sum_m (3, 4, 5, 6, 7)$

b) la f.n.c. y f como \prod_M R: $\prod_M (0, 1, 2)$

10. Considere la función booleana de tres variables $f(x, y, z) = x(\bar{y} + z)$

obtener: a) la f.n.d. y f como \sum_m R: $\sum_m (4, 5, 7)$

b) la f.n.c. y f como \prod_M R: $\prod_M (0, 1, 2, 3, 6)$

11. Dada la función booleana de tres variables $f(x, y, z) = xy + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}z$

obtener: a) la f.n.d. y f como \sum_m R: $\sum_m (0, 1, 5, 6, 7)$

b) la f.n.c. y f como \prod_M R: $\prod_M (2, 3, 4)$

12. Sea $f: B^4 \rightarrow B$ tal que $f(x, y, z, u) = (x + y + z)(x + \bar{y} + u)(\bar{y} + z)$

Determine: a) la f.n.c. y f como \prod_M R: $\prod_M (0, 1, 4, 5, 6, 12, 13)$

b) la f.n.d. y f como \sum_M R: $\sum_M (2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15)$

13. Sea $f: B^4 \rightarrow B$ tal que $f(x, y, z, u) = (xyz + zu)(x + \bar{x}\bar{y}z)$

Determine: a) la f.n.c. y f como \prod_M R: $\prod_M (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13)$

b) la f.n.d. y f como \sum_M R: $\sum_M (3, 11, 14, 15)$

14. Considere la función booleana de tres variables

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{x} + \overline{y} + \bar{x}z}$$

Expresar como suma minimal de productos y construir una red de puertas

$$R: x + y\bar{z}$$

15. Dada la función booleana de cuatro variables

$$f(x, y, z, u) = (\bar{x} + yz)(y + \bar{z}u)$$

Expresar como suma minimal de productos y construir una red de puertas

$$R: \bar{x}y + \bar{x}\bar{z}u + yz$$

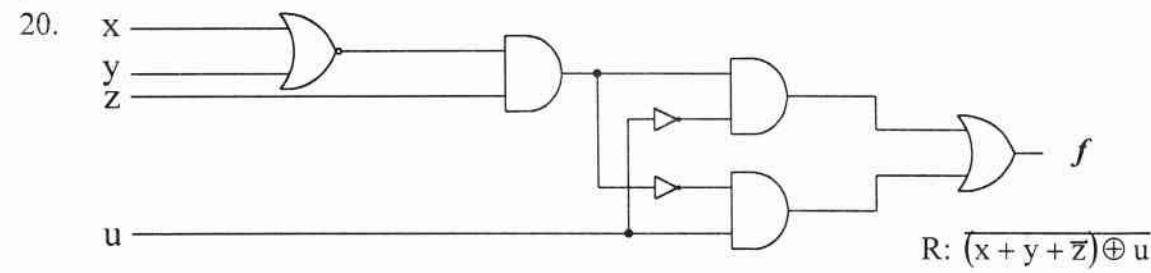
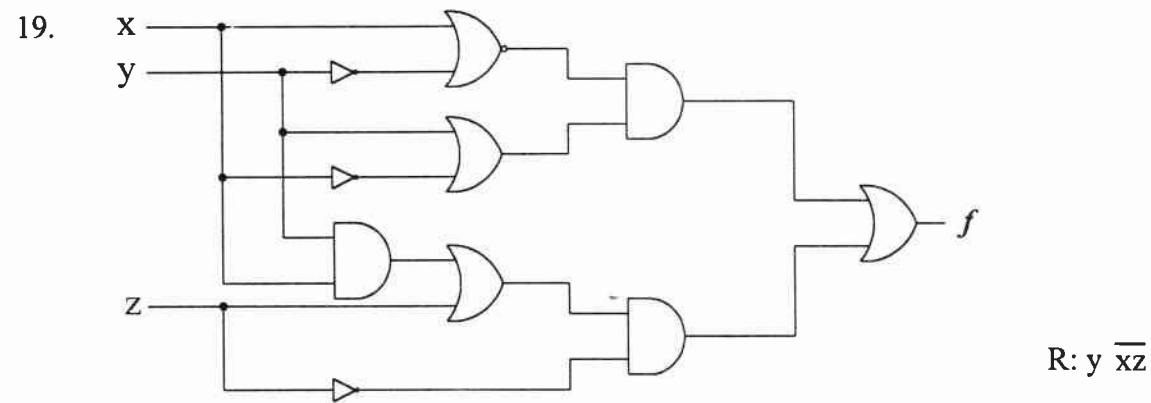
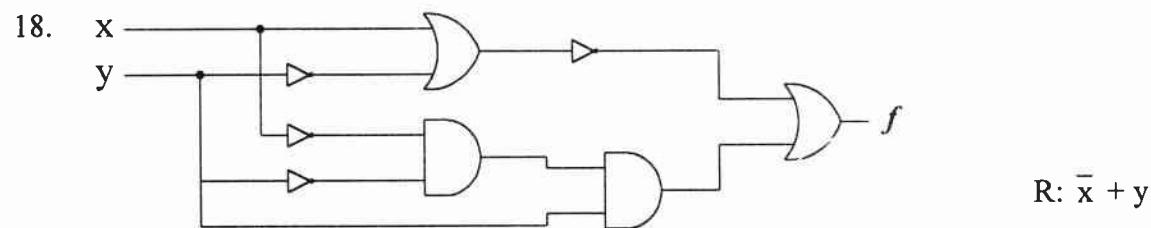
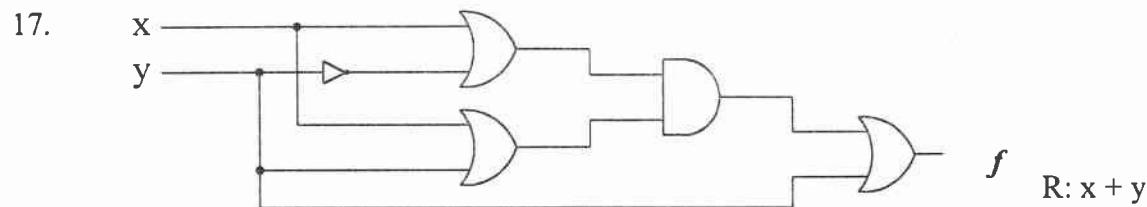
16. Dada la función booleana de cinco variables

$$f(x, y, z, u, v) = (x + \bar{y}z) (\overline{yv + u})$$

Expresar como suma minimal de productos y construir una red de puertas

$$R: \bar{y}\bar{u} + x\bar{u}\bar{v} + \bar{z}\bar{u}\bar{v}$$

Para cada una de las siguientes redes lógicas, exprese la salida f en términos de las variables de entrada. Luego utilice la expresión de la salida para simplificar la red dada.



En cada una de los siguientes ejercicios construya un mapa de Karnaugh para las funciones cuyas tablas de valores se dan a continuación. Luego, expresar f como suma minimal de productos.

21.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

22.

x	y	z	u	$f(x, y, z, u)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

x	y	z	u	$f(x, y, z, u)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Para cada de las siguientes funciones, use un mapa de Karnaugh para encontrar una representación como suma minimal de productos.

23. $f(x, y, z) = \sum m(0, 2, 4, 7)$

R: $\bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + xyz$

24. $f(x, y, z) = \sum m(1, 2, 5, 6)$

R: $\bar{y}z + y\bar{z}$

25. $f(x, y, z, u) = \sum m (5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15)$ R: $x\bar{z}\bar{u} + y\bar{z}u + xzu + yz\bar{u}$

26. $f(x, y, z, u) = \sum m (7, 9, 10, 11, 14, 15)$ R: $xz + x\bar{y}u + yzu$

27. $f(x, y, z, u) = \sum m (0, 1, 2, 3, 6, 7, 14, 15)$ R: $\bar{x}\bar{y} + yz$

28. $f(x, y, z, u, v) = \sum m (1, 2, 3, 4, 10, 17, 18, 19, 22, 23, 27, 28, 30, 31)$
R: $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}\bar{v} + xyz\bar{v} + \bar{x}\bar{z}u\bar{v} + \bar{y}\bar{z}v + x\bar{y}u + xuv$

29. $f(x, y, z, u, v) = \sum m (0, 3, 5, 7, 8, 12, 13, 15, 16, 21, 23, 24, 28, 29, 31)$
R: $\bar{x}\bar{y}uv + x\bar{u}\bar{v} + \bar{z}\bar{u}\bar{v} + zv$

Encuentre una representación como suma minimal de productos para cada una de las siguientes funciones booleanas incompletamente especificadas.

30. $f(x, y, z, u) = \sum m (1, 3, 5, 7, 9) + d (10, 11, 12, 13, 14, 15)$
R: u

31. $f(x, y, z, u) = \sum m (0, 5, 6, 8, 13, 14) + d (4, 9, 11)$
R: $\bar{y}\bar{z}\bar{u} + y\bar{z}u + yz\bar{u}$

32. $f(x, y, z, u, v) = \sum m (0, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 19, 20, 24, 28) + d (1, 13, 16, 29, 31)$
R: $x\bar{u}\bar{v} + \bar{y}\bar{z}uv + \bar{x}\bar{y}\bar{v} + \bar{x}z\bar{u}$

BIBLIOGRAFÍA

- A. LENTIN, J. RIVAUD. Álgebra moderna. Editorial Aguilar
- C. SILVA REHERMANN. Matemática básica superior. Editorial Científico-Técnica
- ALVARO PINZÓN. Conjuntos y estructuras. Editorial Harla
- ARMANDO ROJO. Álgebra I. Editorial El Ateneo
- FRANK AYRES. Álgebra moderna. Editorial Mc. Graw – Hill
- ALLENDOERFER – OAKLEY. Matemáticas universitarias. Editorial Mc. Graw – Hill
- ROBERTO CARRANZA. MAT – 100. Edición Previa
- RALPH GRIMALDI. Matemáticas discretas y combinatoria. Editorial Addison Wesley
- SUPPES P. HILLS S. Introducción a la Lógica matemática. Editorial Reverté
- KOLEMAN BERNARD. Estructuras de matemáticas discretas para la computación.
- LEHMANN CHARLES H. Álgebra. Editorial Limusa
- REES P., SPARKS F., REES CH. Álgebra. Editorial Mc. Graw – Hill
- P. GUTIERREZ F. Álgebra I. Editorial La Hoguera
- J. QUIJANO H. Álgebra (3 tomos). Editorial San Marcos
- R. FIGUEROA G. Matemática básica I. Editorial W.H. Editores
- J. DE BURGOS. Álgebra lineal. Editorial Mc. Graw – Hill
- PETER J. KAHN. Introducción al álgebra lineal. Editorial Harla
- R. CHURCHILL, J. BROWN Variable compleja y aplicaciones. Editorial Mc. Graw-Hill
- ENRIQUE MANDADO. Sistemas electrónicos digitales. Editorial Marcombo
- HERBERT TAUB. Circuitos digitales y microprocesadores. Editorial Mc. Graw – Hill

S. Lazo Q.

A L G E B R A M O D E R N A

CONTENIDO

- 1.- LÓGICA
- 2.- TEORÍA DE CONJUNTOS
- 3.- RELACIONES
- 4.- FUNCIONES
- 5.- LEYES DE COMPOSICIÓN Y
ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
- 6.- INDUCCIÓN MATEMÁTICA
- 7.- COMBINATORIA
- 8.- NÚMEROS COMPLEJOS Y
SUS OPERACIONES
- 9.- ALGEBRA BOOLEANA

Depósito legal N° 4-1-807-99