Operador diferencial. Polinomios diferenciales

Jorge Ruiz López

Facultad de Ingeniería UNAM

Abril 2022

1. Ecuación lineal de orden n

Una [1]*ecuación diferencial* lineal de n-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

se dice que es homogénea, mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

con g(x) no igual a cero, se dice que es no homogénea.

2. Operador diferencial

En cálculo la derivación se denota con frecuencia con la letra D mayúscula, es decir, $\frac{dy}{dx} = Dy$. El símbolo D se llama operador diferencial porque convierte una función derivable en otra función. Por ejemplo, $D(cos4x) = 4sen4x$ y $D(5x^3 - 6x2) = 15x^2 - 12x$. Las derivadas de orden superior se expresan en términos de D de manera natural

$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2$$

y, en general

$$\frac{d^ny}{d^nx} = D^ny$$

donde y representa una función suficientemente derivable. Las expresiones polinomiales en las que interviene D, tales como $D+3$, D^2+3D-4 y $5x^3D^3 - 6x^2D^2 + 4xD + 9$, son también operadores diferenciales. En general, se define un **operador diferencial de n-ésimo orden** u **operador polinomial** como:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}xD^{n-1} + ... + a_1(x)D + a_0(x)$$
(1)

Como una consecuencia de **dos propiedades** básicas de la derivada, $D(cf(x)) = cDf(x)$ c es una constante y $D\{f(x) + g(x)\} = Df(x) + Dg(x)$, el operador diferencial L tiene una propiedad de linealidad; es decir, L operando sobre una combinación lineal de dos funciones derivables es lo mismo que la combinación lineal de L operando en cada una de las funciones. Simbólicamente esto se expresa como

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L(f(x)) + \beta L(g(x))$$
(2)

donde α y β son constantes. Como resultado de (2) se dice que el operador diferencial de n-ésimo orden es un **operador lineal.**

3. Ecuaciones diferenciales

Cualquier ecuación diferencial lineal puede expresarse en términos de la notación D. Por ejemplo, la ecuación diferencial $y'' + 5y'6y = 5x - 3$ se puede escribir como $D^2y + 5Dy + 6y = 5x–3$ o $(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$. Usando la ecuación (2), se pueden escribir las ecuaciones diferenciales lineales de n-énesimo orden (homogénea y no homogénea) en forma compacta como

$$L(y) = 0 \text{ y } L(y) = g(x)$$

respectivamente.

Referencias

[1] Denis G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales, con aplicacione de modelado*. Brooks y Cole-Cengage, 2009. ISBN: 13:978-0-495-10824-5.