Ecuaciones diferenciales de variables separables.

Jorge Ruiz López

Facultad de Ingeniería UNAM

Marzo 2022

1. Ecuaciones diferenciales de variables separables.

Definición 1.1: Una ecuación diferencial de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Se dice que es [1]***separable*** o que tiene variables separables.

Observe que al dividir entre la función $h(y)$, podemos escribir una ecuación separable $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ como:

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

(2)

donde, por conveniencia $p(y)$ representa a $\frac{1}{h(y)}$.
Ahora si $y = f(x)$ representa una solución de la ecuación (2), se tiene que $p(f(x))f'(x) = g(x)$, y por tanto

$$\int (f(x))f'(x) = \int g(x)$$

(3)

Pero $dy = f'(x)dx$, por lo que la ecuación (3) es la misma que

$$\int p(y)dy = \int g(x)dx$$
o
$$H(y) = G(x) + c$$

(4)

donde $H(y)yG(x)$ son antiderivadas de $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ y $g(x)$, respectivamente.

Método de solución: La ecuación (4) indica el procedimiento para resolver ecuaciones separables. Al integrar ambos lados de p(y) dy = g(x) dx, se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones, que usualmente se expresa de manera implícita.
Ejemplo:
Resuelva $(1 + x)dy - ydx = 0$

Solución: Dividiendo entre (1 + x)y, podemos escribir $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{(1+x)}$, de donde tenemos que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(1+x)}$$
$$ln|y| = ln|1+x| + c_1$$
$$y = e^{ln|1+x|+c_1} = e^{ln|1+x|} \cdot e^{c_1}$$
$$= |1+x|e^{c_1}$$
$$= \pm e^{c_1}(1+x)$$

Haciendo c igual a e^{c_1} se obtiene $\underline{y = c \cdot (1+x)}$

Referencias

[1] Denis G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales, con aplicacione de modelado*. Brooks y Cole-Cengage, 2009. ISBN: 13:978-0-495-10824-5.