Solución de la ecuación diferencial: general y particular. Definición de solución singular.

Jorge Ruiz López

Facultad de Ingeniería UNAM

March 2022

1. Solución de una ecuación diferencial:

Definición 1.1: Solución[1] de una ecuación diferencial es una función que no contiene derivadas y que satisface a dicha ecuación; es decir, al sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial resulta una identidad.

Definición 1.2: Solución general de una ecuación diferencial es la función que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones).
Ejemplo: La función $x + y^2 = c$ es la *solución general* de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$$

Porque derivándola implícitamente tenemos: $1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, o expresado en otra forma: $2yy' = -1$. Sustituyendo y y y' obtenemos una identidad:

$$2\sqrt{c-x}\left(-\frac{1}{2\sqrt{c-x}}\right) = -1 \blacksquare -1 = -1;$$
$$\text{donde } y = \sqrt{c-x}$$

Ejemplo 2: La función $y = 3x^2 + c_1x + c_2$ es *solución general* de la ecuación diferencial $y'' = 6$, porque

$$y' = 6x + c_1$$
$$\text{y } y'' = 6 \blacksquare 6 = 6$$

Definición 1.3: Solución particular de una ecuación diferencial es la función cuyas constantes arbitrarias toman un valor específico.
Ejemplo: La función $y = e^{-x} + 8$ es *solución particular* de la ecuación diferencial $y' + e^x = 0$, porque derivando la solución y sustituyéndola en la ecuación dada, obtenemos:

$$y' = -e^{-x}$$
$$-e^{-x} + e^{-x} = 0 \blacksquare 0 = 0$$

Definición 1.4: Solución singular de una ecuación diferencial es una función cuya tangente a su gráfica en cualquier punto (X_0, Y_0) coincide con la tangente de otra solución, pero ya no coincide con esta última tangente en ninguna vecindad del punto (X_0, Y_0), por pequeña que ésta sea.

Estas soluciones se obtienen a partir de la solución general. Un método para encontrar dichas soluciones es derivar la ecuación diferencial dada con respecto a y', con lo cual formamos un sistema de ecuaciones:

$$F(x, y, y') = 0$$

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0$$

del cual, eliminando y', se obtienen una o más soluciones singulares.
Ejemplo: Hallar las soluciones singulares, si las hay, de la ecuación diferencial:

$$y'^2 = 16x^2$$

Derivando con respecto a y', tenemos:

$$2y' = 0$$

De donde $y' = 0$; sustituyendo en la ecuación, obtenemos $x = 0$, que es la solución singular. En efecto, las soluciones generales de dicha ecuación son:

$$y = 2x^2 + c,\ y = -2x^2 + c,$$

y para el punto $(0, 0)$ su gráfica es $y = \pm 2x^2$

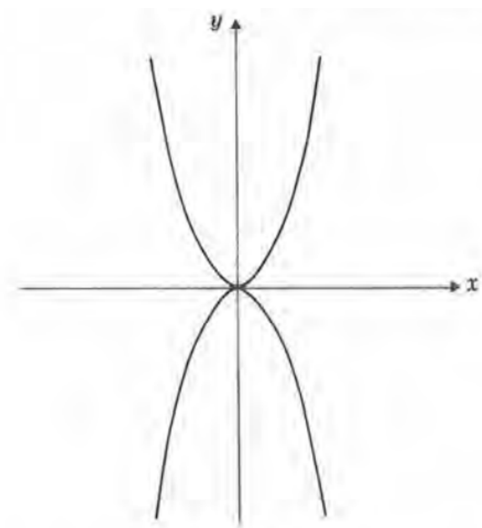

Figura 1.1

Y $x = 0$ es el punto de contacto con las pendientes de $y = \pm 2x^2$ en el punto $(0, 0)$.

Referencias

[1] Isabel Carmona Jover. *Ecuaciones Diferenciales.* Longman de México Editores, 1998. ISBN: 9684441509.