Ecuaciones lineales de primer orden, homogeneas

Jorge Ruiz López

Facultad de Ingeniería UNAM

Marzo 2022

1. Ecuación lineal de primer orden

Definicion 1.1: Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

(1)

se dice que es una [1]*ecuación lineal* en la variable dependiente y.

Ecuación homogénea Se dice que la ecuación lineal (1) es **homogénea** cuando $g(x) = 0$; si no es **no homogénea**

Forma Estándar Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre el primer coeficiente, $a_1(x)$, se obtiene una forma más útil, la forma estándar de una ecuación lineal:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

(2)

La propiedad La ecuación diferencial (2) tiene la propiedad de que su solución es la suma de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$,donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

(3)

y y_p es una solución particular de ecuación no homogénea (2). Para ver esto, observe que

$$\frac{d}{dx}[Y_c + Y_p] + P(x)[Y_c + Y_p] = [\frac{dY_c}{dx} + P(x)Y_c] + [\frac{dY_p}{dx} + P(x)Y_p] = f(c)$$

.

Nota: $[\frac{dY_c}{dx} + P(x)Y_c] = 0$

Ahora, la ecuación (3) es también separable. Por lo que podemos determinar Y_c al escribir la ecuación (3) en la forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

e integramos. Despejando y, se obtiene $Y_c = ce^{-\int P(x)dx}$. Por conveniencia escribimos $Y_c = cy_1(x)$, donde $y_1 = e^{-\int P(x)dx}$. A continuación se utiliza el hecho de que $\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1 = 0$, para determinar Y_p

El procedimiento: Ahora podemos definir una solución particular de la ecuación (2), siguiendo un procedimiento llamado variación de parámetros. Aquí, la idea básica es encontrar una función, u tal que $Y_p = u(x)y_1(x) = u(x)e^{-\int P(x)dx}$.Osea una solución de la ecuación (2). En otras palabras, nuestra suposición para Y_p es la misma que $Y_c = cy_1(x)$ excepto que c se ha sustituido por el "parámetro variable" u. Sustituyendo $yp = uy_1$ en la ecuación (2) se obtiene

$$u\frac{dy_1}{dx} + y\frac{du}{dx} + P(x)uy_1 = f(x) \text{ o } u[\frac{dy_1}{dx} + P(x)y_1] + y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

.
por tanto

$$y_1\frac{du}{dx} = f(x)$$

Entonces separando las variables e integrando se obtiene:

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)}dx \text{ y } u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

Puesto que $y_1(x) = e^{-\int P(x)dx}$, vemos que $\frac{1}{y_1(x)} = e^{\int P(x)dx}$. Por tanto

$$Y_p = uy_1 = (\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx)e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)d(x)$$

.

y

$$Y = Y_c + Y_p$$
$$y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)d(x)$$

(4)

Por tanto, si la ecuación (2) tiene una solución, debe ser de la forma de la ecuación (4). Recíprocamente, es un ejercicio de derivación directa comprobar que la ecuación (4) es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2). Recuerde el término especial

$$e^{\int P(x)dx}$$

(5)

ya que se utiliza para resolver la ecuación (2) de una manera equivalente pero más fácil. Si la ecuación (4) se multiplica por (5),

$$e^{\int P(x)dx}y = c + \int e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

(6)

y después se deriva la ecuación (6),

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

(7)

Se obtiene

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

(8)

Dividiendo el último resultado entre $e^{\int P(x)dx}$ se obtiene la ecuación (2)

Metodo de solución :

1. Ponga la ecuación lineal de la forma (1) en la forma estándar (2).

2. Identifique de la identidad de la forma estándar $P(x)$ y después determine el factor integrante $e^{\int P(x)dx}$
3. Multiplique la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es automáticamente la derivada del factor integrante y y

$$\frac{d}{dx}[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x)$$

4. Integre ambos lados de esta última ecuación.

Ejemplo: Resuelva $\frac{dy}{dx} - 3y = 6$
Factor Integrante: $e^{\int(-3)dx} = e^{-3x}$
Multiplicando: $e^{-3x}\frac{dy}{dx} - e^{-3x}3y = e^{-3x}6$
es igual a
$\frac{d}{dx}[e^{-3x}y] = e^{-3x}6$
Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y = -2e^{-3x} + c$ o $\underline{y = -2 + ce^{3x}}$
Nota:$y = Y_c + Y_p$

Referencias

[1] Denis G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales, con aplicacione de modelado*. Brooks y Cole-Cengage, 2009. ISBN: 13:978-0-495-10824-5.