# Ecuaciones diferenciales exactas.

Jorge Ruiz López

Facultad de Ingeniería UNAM

Marzo 2022

## 1. Ecuaciones diferenciales exactas.

**Definición 1.1:** Una expresión diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una [1] ***diferencial exacta*** en una región $R$ del plano $xy$ si ésta corresponde a la diferencial de alguna función $f(x,y)$ definida en $R$. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se dice que es una **ecuación exacta** si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

**Criterio para una diferencial exacta:** Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$ continuas y que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular $R$ definida por a¡x¡b, c¡y¡d. Entonces una condición necesaria y sufi ciente para que $M(x,y)dxN(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

(1)

siendo

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x},\ N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

**Método de solución:** Dada una ecuación en la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, determine si la igualdad de la ecuación (1) es válida. Si es así, entonces existe una función $f$ para la que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

Podemos determinar $f$ integrando $M(x,y)$ respecto a $x$ mientras $y$ se conserva constante

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

(2)

donde la función arbitraria $g(y)$ es la “constante” de integración. Ahora derivando (2) respecto a $y$ y suponiendo que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

Se obtiene

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

(3)

Por último, se integra la ecuación (3) respecto a $y$ y se sustituye el resultado en la ecuación (2). Pudimos iniciar el procedimiento anterior con la suposición de que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$. Después, integrando $N$ respecto a $y$ y derivando este resultado, encontraríamos las ecuaciones que, respectivamente, son análogas a las ecuaciones (2) y (3)

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)$$

y

$$h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy$$

**Ejemplo:** Resuelva $2xydx + (x^2-1)dy = 0$

**Solución:**Con $M(x,y) = 2xy$ y $N(x,y) = x^2 - 1$ tenemos que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Existe una función $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones, se obtiene:

$$f(x,y) = x^2y + g(y)$$

Tomando la derivada parcial de la última expresión con respecto a $y$ y haciendo el resultado igual a $N(x,y)$ se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1$$

Se tiene que $g'(y) = -1$ y $g(y) = -y$. Por tanto $f(x,y) = x^2y - y$, así la solución de la ecuación en la forma implícita es $x^2y - y = c$. La forma explícita de la solución se ve fácilmente como $y = \frac{c}{1-x^1}$ y está definida en cualquier intervalo que no contenga ni a $x = 1$ ni a $x = -1$.

# Referencias

[1] Denis G. Zill. *Ecuaciones Diferenciales, con aplicacione de modelado.* Brooks y Cole-Cengage, 2009. ISBN: 13:978-0-495-10824-5.