PPI Präsentation: Kettennäherung

Johannes Hübers, Cedric Brügmann, PPI11

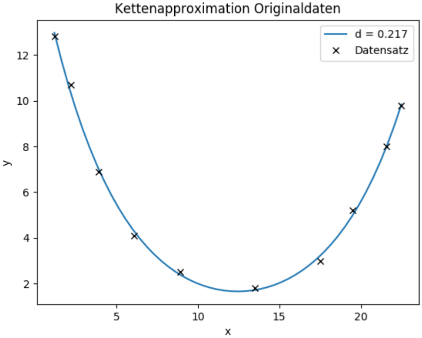
23. Januar 2020

Problemstellung

Anhand von an einer Kette gemessenen Punkten soll die Gestalt der Kette möglichst gut durch

$$y = ae^{dx} + be^{-dx} + c, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

beschrieben werden.



QR-Zerlegung

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass für

$$R := \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt, dass } Q \cdot R = A.$$

Da A überbestimmt ist, gibt es für $Ax = b$ nicht immer eine Lösung in $\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \text{ man sucht nach } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|Ax - b\|_2 \text{ minimal}$$

$$\Leftrightarrow \|Ax - b\|_2^2 \text{ minimal} \Rightarrow x \text{ heißt Kleinste-Quadrate-Lösung}$$

Finden der Kleinste-Quadrate-Lösung

Für die QR-Zerlegung von A ist nun $\|Ax - b\|_2$ minimal genau dann, wenn x nach folgendem Algorithmus berechnet wird:

1. bestimme $z := Q^T b,\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z_1 \in \mathbb{R}^n,\ z_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$
2. löse durch Rückwärtseinsetzen das Gleichungssystem $\hat{R}x = z_1$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2 = \|Q \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x - b\|_2 &= \|Q \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} - b\|_2 \\ = \|Q \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} - Qz\|_2 &= \|Q \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix} \|_2 = \|z_2\|_2 \end{aligned}$$

Normalengleichung

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|Ax - b\|_2$ genau dann minimal, wenn x die Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b \quad \text{löst.}$$

Ist A vollen Spaltenrangs, ist $A^T A$ invertierbar, also die Kleinste-Quadrate-Lösung eindeutig.

Besonders für schlecht konditionierte Matrizen ist aber der QR-Algorithmus besser, weil

$$cond_2(A) = cond_2(Q^T A) = cond_2(R),$$

$$cond_2(A^T A) = cond_2^2(A).$$

Implementierung: Lineares Gleichungssystem für a, b, c

Für Punkte (x_k, y_k) in der Datenreihe $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ soll

$$ae^{dx_k} + be^{-dx_k} + c = y_k.$$

Dies ist für feste d äquivalent zur Bedingung

$$A(d)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \text{für } A(d) := \begin{pmatrix} e^{dx_1} & e^{-dx_1} & 1 \\ & \vdots & \\ e^{dx_m} & e^{-dx_m} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 3}$$

Parameter d kann so nicht berechnet werden.

Implementierung: Lineares Gleichungssystem für a, b, c

- Damit die Kleinste-Quadrate-Lösung von $A(d)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b$ mit der QR-Zerlegung für alle $b \in \mathbb{R}^m$ gefunden werden kann, braucht A vollen Spaltenrang
- Q ist orthogonal, also invertierbar $\Rightarrow$ reicht Spaltenrang von R zu prüfen: Hat $\hat{R}$ keine Nullen auf der Hauptdiagonalen?
- Verfahren liefert nur gute Lösungen a, b, c, wenn d zuvor passend gewählt wird

Implementierung: d ermitteln

- Verfahren liefert nur gute Lösungen a, b, c, wenn d zuvor passend gewählt wird
- Dazu einfach im Intervall $[0.1, 0.5]$ in gleichen Abständen Werte für d auswählen, $a(d), b(d), c(d)$ berechnen und Normen der Residuen, $\|A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - b\|_2$ vergleichen
- d mit geringster Residuumsnorm wählen

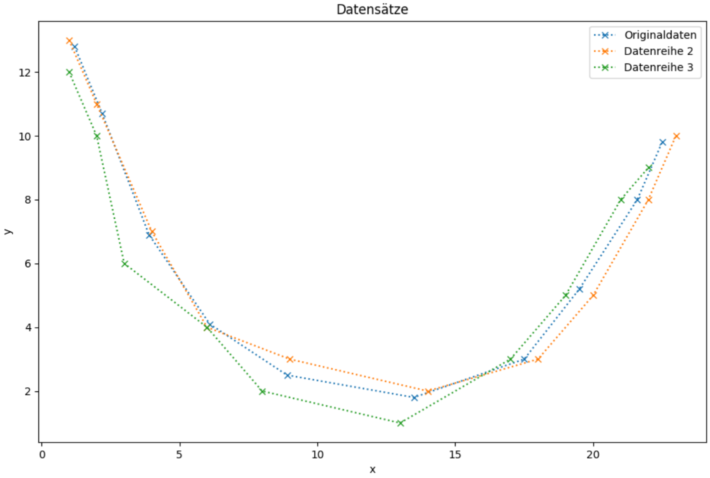
Experimente

- 3 Datensätze: Originaldaten, Datenreihe 2, Datenreihe 3
- Bei Datenreihe 2 wurden x- und y-Werte der Datenpaare je auf die nächste ganze Zahl gerundet.
- Bei Datenreihe 3 wurden x- und y-Werte der Datenpaare jeweils abgerundet.

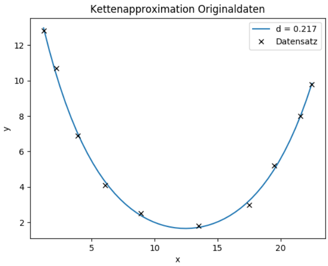
Fragen:

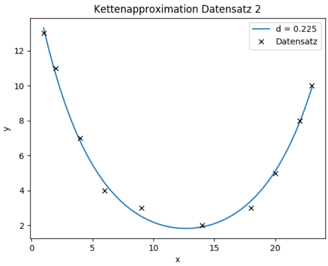
- Wie wirkt sich d auf die Gestalt der Kettennäherung aus?
- Was beeinflusst die Konditionen von A und $A^T A$?
- Was beeinflusst die Residuumsnorm?

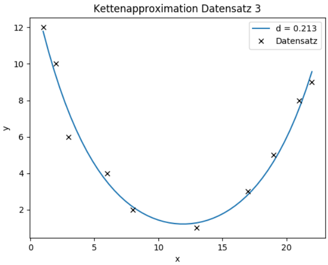
Datensätze


Datensätze
Originaldaten
Datenreihe 2
Datenreihe 3
y
x
12
10
8
6
4
2
0
5
10
15
20

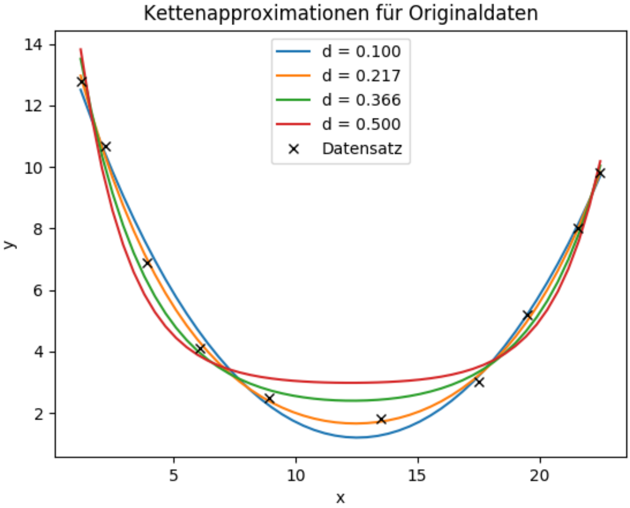
Kettenapproximationen



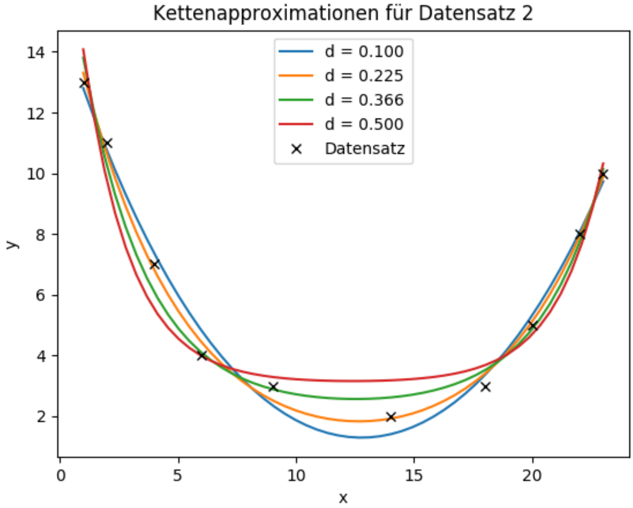




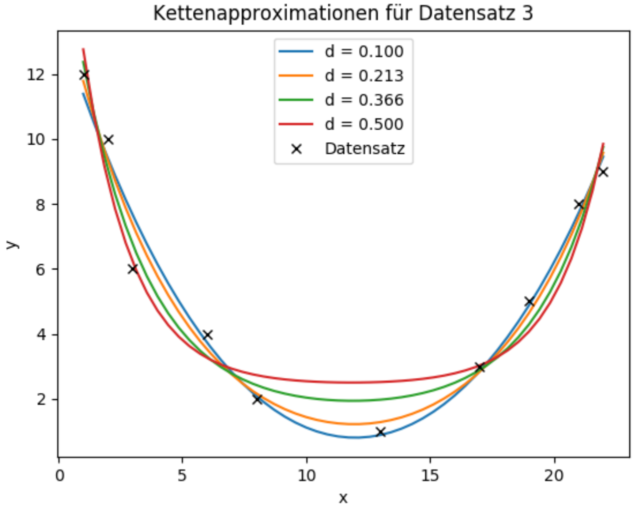
Approximationen für verschiedene d



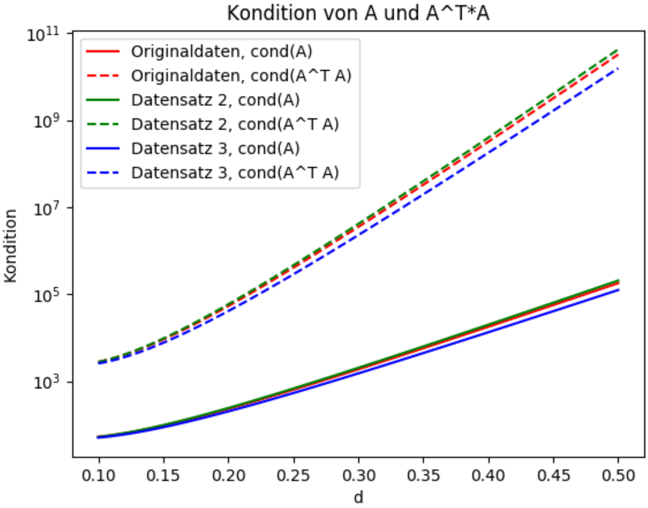
Approximationen für verschiedene d



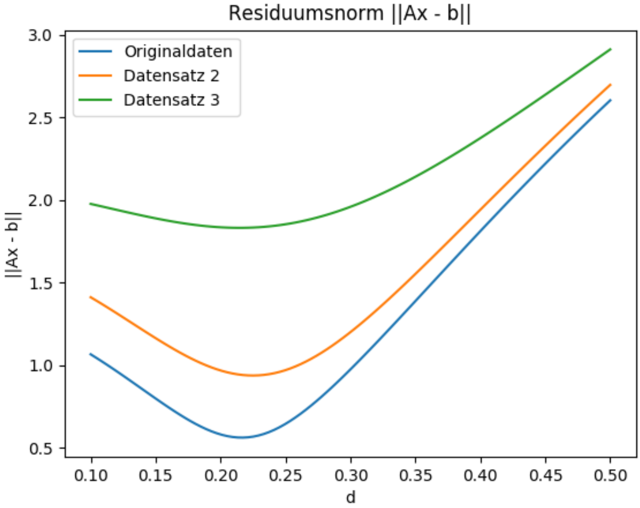
Approximationen für verschiedene d



Konditionen



Norm des Residuums



Auswertung

- Konditionen hängen nur von Werten $x_1, \ldots, x_m$ ab.
- Konditionen steigen exponentiell mit d.
- Je weniger natürlich die Gestalt des Seils (der Datenreihe), desto höher die Norm des Residuums.

Literatur

Prof. Caren Tischendorf.
Skript Numerische Lineare Algebra, WiSe 2019/20.

Dr. Hella Rabus.
Projektpraktikum I Aufgabenblatt Serie 4, WiSe 2019/20.