

PPI Präsentation: Kettennäherung

Johannes Hübers, Cedric Brüggmann, PPI11

23. Januar 2020

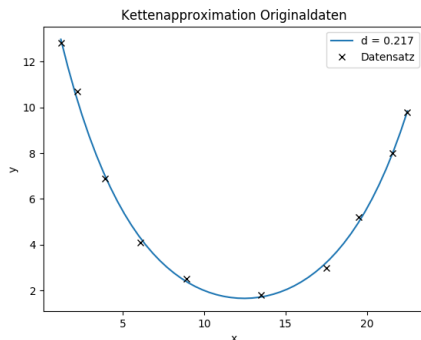
- 1 Problemstellung
- 2 Theorie
- 3 Implementierung
- 4 Experimente
- 5 Literatur

Problemstellung

Anhand von an einer Kette gemessenen Punkten soll die Gestalt der Kette möglichst gut durch

$$y = ae^{dx} + be^{-dx} + c, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

beschrieben werden.



QR-Zerlegung

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ gibt es eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\hat{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sodass für

$$R := \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt, dass } Q \cdot R = A.$$

Da A überbestimmt ist, gibt es für $Ax = b$ nicht immer eine Lösung in \mathbb{R}^n .

\Rightarrow man sucht nach $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Ax - b\|_2$ minimal

$\Leftrightarrow \|Ax - b\|_2^2$ minimal $\Rightarrow x$ heißt Kleinste-Quadrate-Lösung

Finden der Kleinste-Quadrate-Lösung

Für die QR -Zerlegung von A ist nun $\|Ax - b\|_2$ minimal genau dann, wenn x nach folgendem Algorithmus berechnet wird:

- ① bestimme $z := Q^T b$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$
- ② löse durch Rückwärtseinsetzen das Gleichungssystem $\hat{R}x = z_1$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2 &= \|Q \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x - b\|_2 = \|Q \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} - b\|_2 \\ &= \|Q \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} - Qz\|_2 = \|Q \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}\|_2 = \|z_2\|_2 \end{aligned}$$

Normalengleichung

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|Ax - b\|_2$ genau dann minimal, wenn x die Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b \quad \text{löst.}$$

Ist A vollen Spaltenrangs, ist $A^T A$ invertierbar, also die Kleinste-Quadrate-Lösung eindeutig.

Besonders für schlecht konditionierte Matrizen ist aber der QR -Algorithmus besser, weil

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(Q^T A) = \text{cond}_2(R),$$

$$\text{cond}_2(A^T A) = \text{cond}_2^2(A).$$

Implementierung: Lineares Gleichungssystem für a, b, c

Für Punkte (x_k, y_k) in der Datenreihe $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ soll

$$ae^{dx_k} + be^{-dx_k} + c = y_k.$$

Dies ist für feste d äquivalent zur Bedingung

$$A(d) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \text{für } A(d) := \begin{pmatrix} e^{dx_1} & e^{-dx_1} & c \\ & \vdots & \\ e^{dx_m} & e^{-dx_m} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 3}$$

Parameter d kann so nicht berechnet werden.

Implementierung: Lineares Gleichungssystem für a, b, c

- Damit die Kleinste-Quadrate-Lösung von $A(d) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b$ mit der QR -Zerlegung für alle $b \in \mathbb{R}^m$ gefunden werden kann, braucht A vollen Spaltenrang
- Q ist orthogonal, also invertierbar \Rightarrow reicht Spaltenrang von R zu prüfen: Hat \hat{R} keine Nullen auf der Hauptdiagonalen?
- Verfahren liefert nur gute Lösungen a, b, c , wenn d zuvor passend gewählt wird

Implementierung: d ermitteln

- Verfahren liefert nur gute Lösungen a, b, c , wenn d zuvor passend gewählt wird
- Dazu einfach im Intervall $[0.1, 0.5]$ in gleichen Abständen Werte für d auswählen, $a(d), b(d), c(d)$ berechnen und Normen der Residuen,
$$\left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - b \right\|_2$$
 vergleichen
- d mit geringster Residuumsnorm wählen

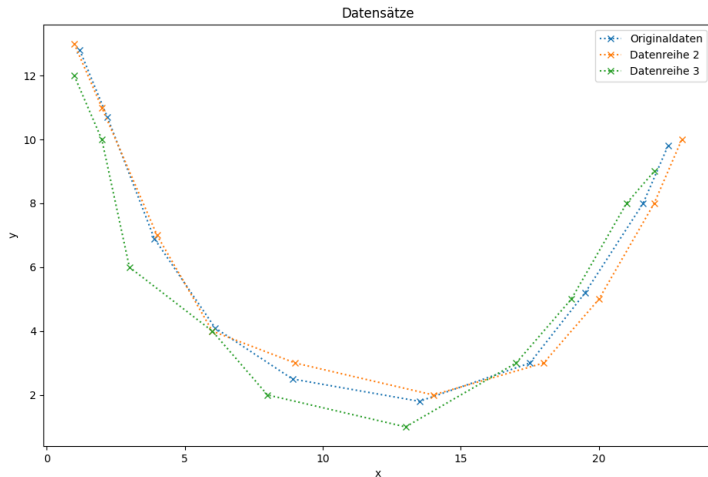
Experimente

- 3 Datensätze: Originaldaten, Datenreihe 2, Datenreihe 3
- Bei Datenreihe 2 wurden x - und y -Werte der Datenpaare je auf die nächste ganze Zahl gerundet.
- Bei Datenreihe 3 wurden x - und y -Werte der Datenpaare jeweils abgerundet.

Fragen:

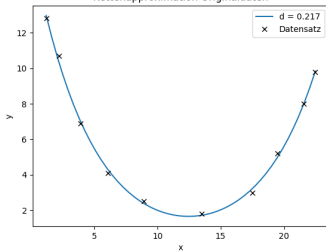
- Wie wirkt sich d auf die Gestalt der Kettennäherung aus?
- Was beeinflusst die Konditionen von A und $A^T A$?
- Was beeinflusst die Residuumsnorm?

Datensätze

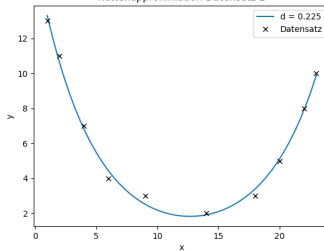


Kettenapproximationen

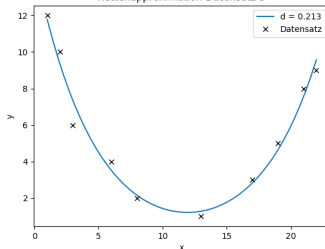
Kettenapproximation Originaldaten



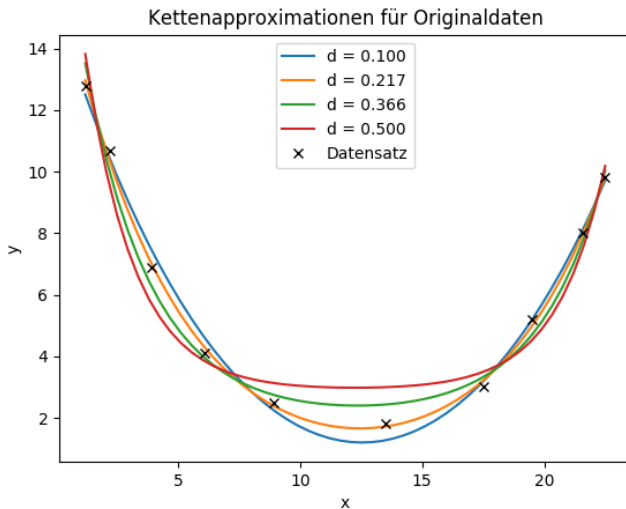
Kettenapproximation Datensatz 2



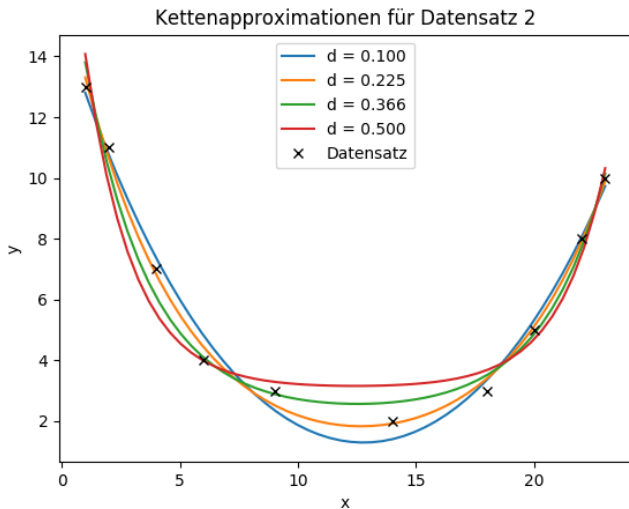
Kettenapproximation Datensatz 3



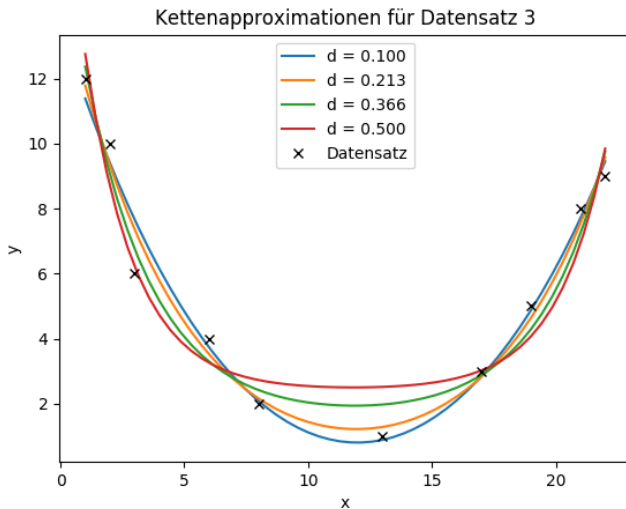
Approximationen für verschiedene d



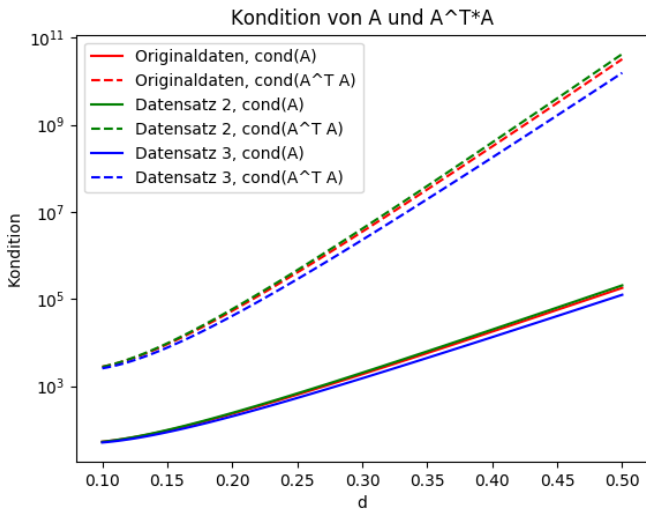
Approximationen für verschiedene d



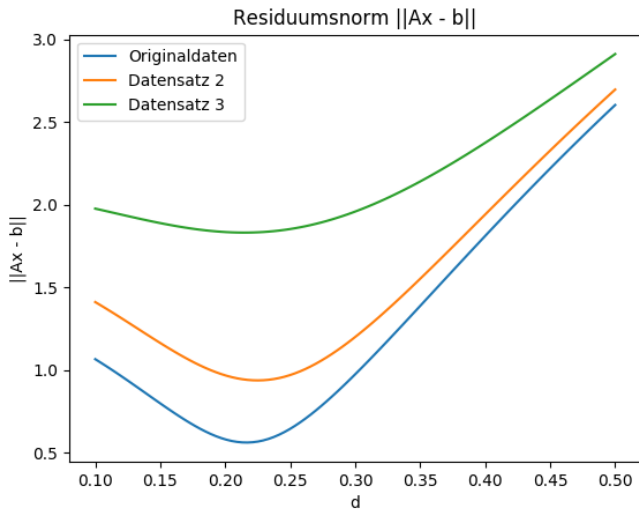
Approximationen für verschiedene d



Konditionen



Norm des Residuums



Auswertung

- Konditionen hängen nur von Werten x_1, \dots, x_m ab.
- Konditionen steigen exponentiell mit d .
- Je weniger natürlich die Gestalt des Seils (der Datenreihe), desto höher die Norm des Residuums.

Literatur



Prof. Caren Tischendorf.

Skript Numerische Lineare Algebra, WiSe 2019/20.



Dr. Hella Rabus.

Projektpraktikum I Aufgabenblatt Serie 4, WiSe 2019/20.