Maximización de la derivada direccional

Suponga que tenemos una función f de dos o tres variables y consideramos todas las derivadas direccionales posibles de f en un punto dado. Éstas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Cabe entonces, plantear las preguntas: ¿en cuál de estas direcciones f cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas las proporciona el teorema siguiente.

15 Teorema Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Significancia del vector gradiente

Ahora se resumen los modos en los que el vector gradiente es importante. Primero se considera una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 15, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Además, también sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P (refiérase a la figura 9). Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque, a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia. Así, parece razonable que si nos movemos en dirección perpendicular, se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. Una vez más, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ señala la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de f siguen siendo constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (véase la figura 11).

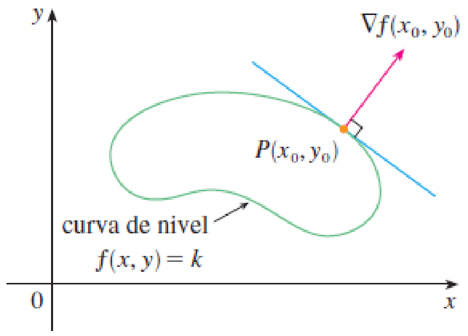


FIGURA 11

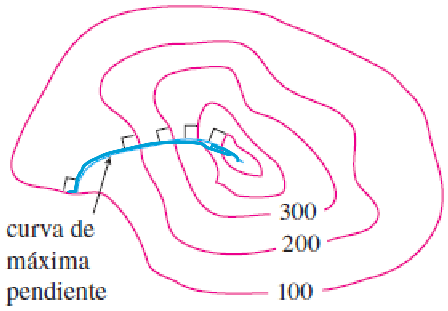
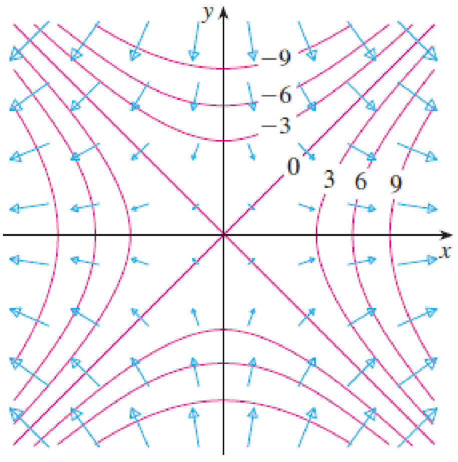
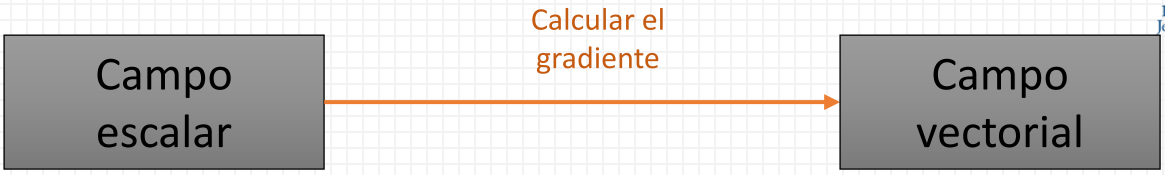


FIGURA 12

Si consideramos un mapa topográfico de una colina y representamos mediante $f(x, y)$ la altura por arriba del nivel del mar de un punto de coordenadas (x, y), entonces se puede dibujar una curva de máxima pendiente como en la figura 12, haciéndola perpendicular a todas las curvas de nivel. Este fenómeno también se puede observar en la figura 12 de la sección 14.1, donde Lonesome Creek sigue una curva con el descenso más empinado.

Los sistemas algebraicos computarizados poseen comandos para dibujar muestras de vectores gradiente. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (a, b). En la figura 13 se ilustra una gráfica de éstas (que se denominan *campo del vector gradiente*) para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobrepuesta en un mapa de contorno de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente apuntan "pendiente arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.





Considere el campo escalar

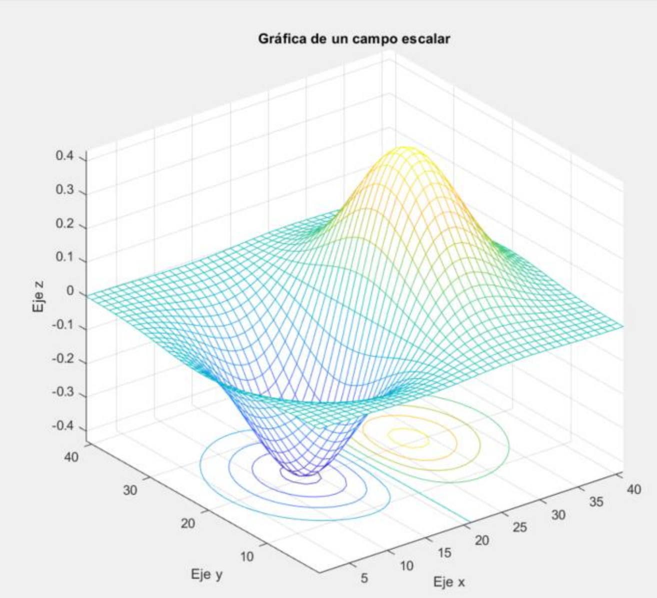
$f(x,y) = x\,e^{-x^2-y^2}$

① Primero, grafique

```
%Graficar el campo escalar
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-2:spacing:2,-
2:spacing:2);
Z = X.*exp(-X.^2-Y.^2);

meshc(Z)    %Superficie con la curva de
nivel
title('Gráfica de un campo escalar');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
zlabel('Eje z');
```



② obtener el vector gradiente

$f(x,y) = x\,e^{-x^2-y^2}$

$\frac{d\,uv}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$

$\frac{de^u}{du} = u' e^u$

$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$

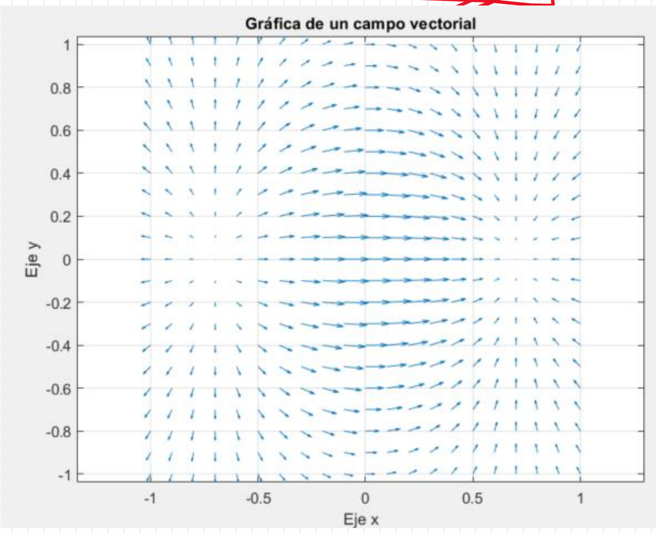
$= \left(e^{-x^2-y^2}(1) + x\left(-2x e^{-x^2-y^2}\right)\right)\mathbf{i} + x\left(-2y\,e^{-x^2-y^2}\right)\mathbf{j}$

$\nabla f(x,y) = (1-2x^2)\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j}$

```
%Graficar el campo vectorial que encontramos
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-1:spacing:1,-1:spacing:1);
U =(1-2.*X.^2).*exp(-X.^2-Y.^2); % 1era
componente del vector gradiente
V =-2.*X.*Y.*exp(-X.^2-Y.^2);      % 2da
componente del vector gradiente

quiver(X,Y,U,V)
axis equal
grid on;
title('Gráfica de un campo vectorial');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
```



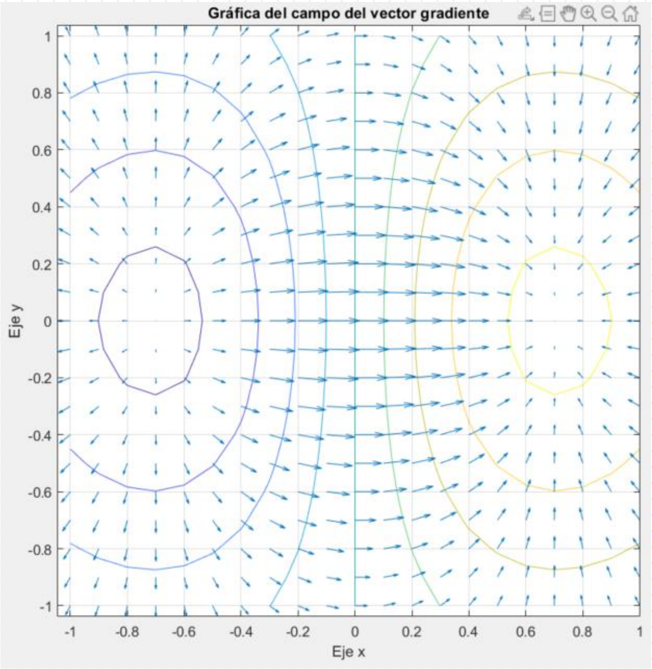
Gráfica del campo del vector gradiente

```
%Graficar el campo del vector gradiente
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-1:spacing:1,-
1:spacing:1);
Z = X.*exp(-X.^2-Y.^2);
contour(X,Y,Z)
grid on;
axis equal;

hold on;

U = (1-2*X.^2).*exp(-X.^2-Y.^2);
V = -2*X.*Y.*exp(-X.^2-Y.^2);
quiver(X,Y,U,V);
title('Gráfica del campo del vector
gradiente');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
```



Considere

$\nabla f(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

calcular divergencia

calcular el rotacional

Definición (Divergencia).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}$

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}$