Combinación lineal y espacio generado

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Se ha visto que todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

en cuyo caso se dice que $\mathbf{v}$ es una *combinación lineal* de los tres vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. De manera más general, se tiene la siguiente definición.

Definición 5.3.1

Combinación lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\boxed{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \qquad (5.3.1)$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

¿Es posible representar al vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ como C.L. de los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$?

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sí, ya que existen escalares $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ y $a_3 = 3$ con los que podemos representar a v como C.L. de v_1, v_2 y v_3.

¿Es posible representar a $v = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \in M_{23}$ como C.L. de las matrices $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$?

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Sí, ya que existe $a_1 = 3$ y $a_2 = 2$

Definición 5.3.2

Conjunto generador

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\boxed{\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \qquad (5.3.2)$$

¿Es $V = \{i, j\}$ un conjunto generador para $\mathbb{R}^2$?

Sí, ya que todo vector en $\mathbb{R}^2$ lo puedo representar como C.L. de los vectores en el conjunto V.

¿Es $V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ un conjunto generador para $\mathbb{R}^2$?

Sí, ya que todo vector en $\mathbb{R}^2$ lo puedo representar como C.L. de los vectores en el conjunto V.

* Defina un C.G. para P_2: ← polinomios de grado igual o menor que 2.

$$V=\{x^0, x^1, x^2\}$$

$$-2x^2+3x-7 = -7(x^0)+3(x^1)+(-2)(x^2)$$

* Defina un C.G. para M_{22}:

$$V=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

pág 317

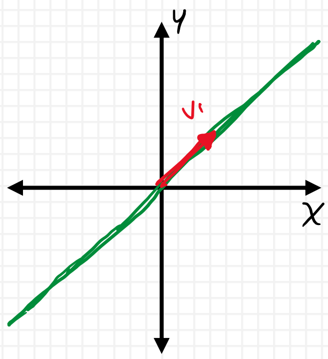
Definición 5.3.3

Espacio generado por un conjunto de vectores

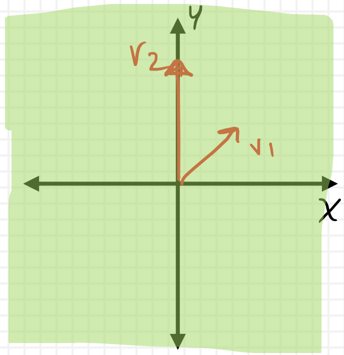
Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El **espacio generado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Es decir

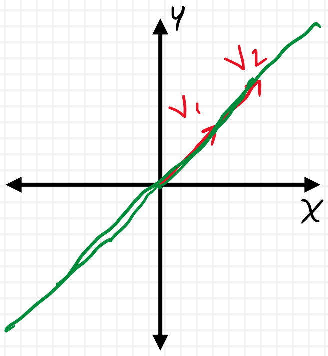
$$\boxed{\text{gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots, + a_k\mathbf{v}_k\}} \quad (5.3.3)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son escalares arbitrarios.



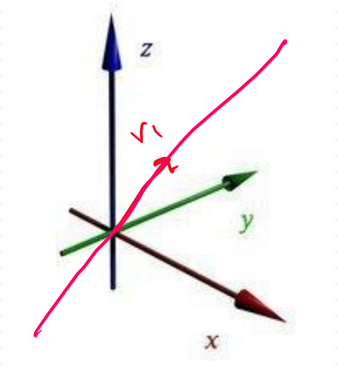
$\text{gen}\{v_1\} = \{v : v = a_1 v_1\}$



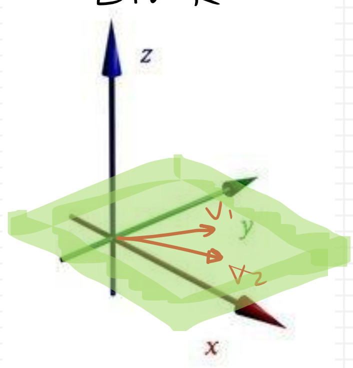


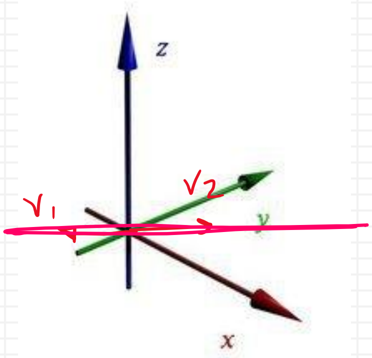
$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$

E.V. R^3

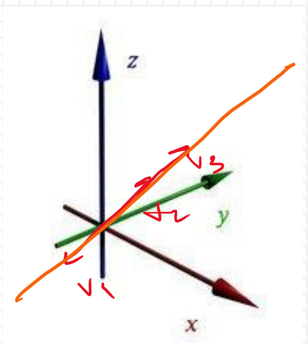


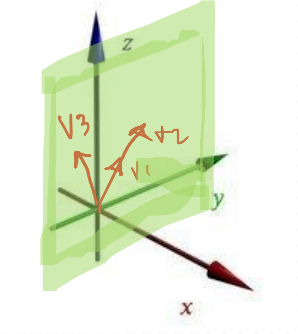
$\text{gen}\{v_1\} = \{v : v = a v_1\}$

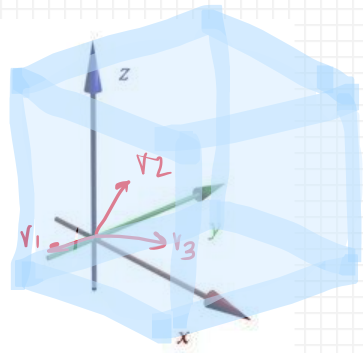




$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$

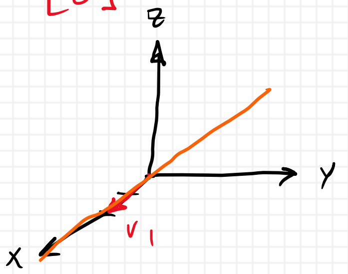






$\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3\}$

¿Cuál es el espacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?



$$\text{gen}\{v_1\} = \{v : v = a_1 v_1\}$$

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{c|c} 2 & x \\ 0 & y \\ 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{2}R_1]{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{c|c} 1 & \frac{x}{2} \\ 0 & y \\ 0 & z \end{array}\right] \begin{array}{l} \to a_1 = \frac{x}{2} \\ \to 0 = y \\ \to 0 = z \end{array}$$

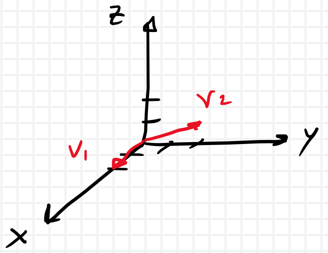
¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$y = 0$ y $z = 0$

Conclusión:

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : y = 0, z = 0\right\}$$

¿Cuál es el espacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?



$$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$$

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}\right\}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right] \xrightarrow{\text{G. J.}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{2} \\ 0 & 1 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & z - y/2 \end{array}\right] \to 0 = z - y/2$$

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$z - \frac{y}{2} = 0$

conclusión:

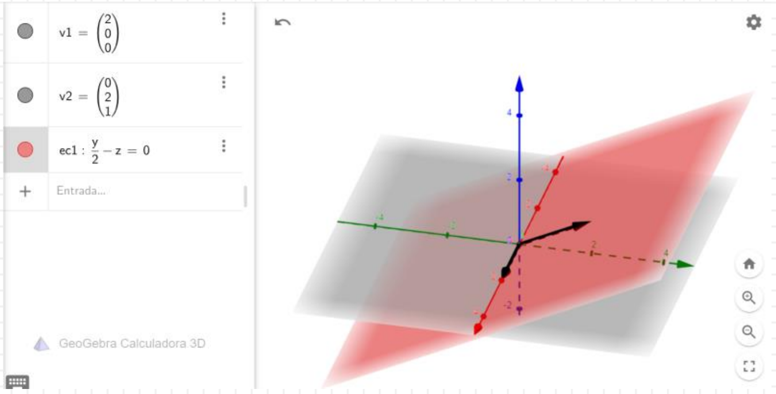
$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \frac{y}{2} - z = 0\right\}$$

```
clear;
close;
clc;

syms x y z;
MA = [2 0 x;0 2 y;0 1 z]

%EGJ_MA = rref(MA) % Eliminación de Gauss-Jordan

[L,EG_MA] = lu(MA)   % Eliminación Gaussiana
```



¿Cuál es el espacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

Por amor al arte, si gustan...

Teorema 5.3.1 **El espacio generado por vectores es un subespacio vectorial**

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

Teorema 5.3.2

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$, $n + 1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan uno o más vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador.

Resumen 5.3

- Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es un espacio vectorial V es la suma de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

  donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

- El **espacio generado por un conjunto de vectores** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

- gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

* Sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

* Forma matricial $\quad Ax = b.$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$A \rightarrow$ matriz de coeficientes
$x \rightarrow$ vector incógnitas
$b \rightarrow$ vector de constantes

* Matriz aumentada $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right]$$

TIPOS DE SOLUCIÓN DE UN SEL.

sol única

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \rightarrow x_1 = 4 \\ \rightarrow x_2 = 3 \\ \rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

infinitas sols.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 4 \\ \rightarrow 0 = 0 \\ \rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

sin sol.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 4 \\ \rightarrow 0 = 1 \\ \\ \end{array}$$

Inconsistencia matemática