5.3

Combinación Lineal y espacio generado

De los problemas 1 al 25 determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

2.- En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$$\text{Gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$$

$$\text{Gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right\}$$

$$a_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & x\\2 & 4 & y\end{array}\right] \xrightarrow{G.J} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & (3*y)/2 - 2*x\\0 & 1 & x - y/2\end{array}\right]$$

$a_1 = (3*y)/2 - 2*x$
$a_2 = x - y/2$

Existen los escalares a_1 y a_2 tal que $a_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ∴ $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ sí generan $\mathbb{R}^2$.

20.- En P_2: $\underset{1}{1-x}, \underset{2}{3-x^2}, \underset{3}{x}$

Primero cumple con el conjunto para generar $P_{n+1} = 3$

Son linealmente independientes si la ecuación
$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$$c_1(x) + c_2(1-x) + c_3(3-x^2)$$

$$c_1 x + c_2 - c_2 x + 3c_3 - c_3 x^2 = 0x^2 + 0x + 0$$

$$-c_3 x^2 + (c_1 - c_2)x + (c_2 + 3c_3) = 0x^2 + 0x + 0$$

Obtenemos la ecuaciones

$-c_3 = 0$ ← Solucion del sistema
$c_1 - c_2 = 0$
$c_2 + 3c_3 = 0$

$-c_3 = 0$
$c_2 = 0$
$c_1 = 0$

Por lo tanto $1-x$, $3-x^2$, x son LI

22. En P_2: x^2+1; x^2-1; $x+6$

$$V = C_1 + C_2x + C_3x^2$$

$$a_1(x^2+1) + a_2(x^2-1) + a_3(x+6) = C_3x^2 + C_2x + C_1$$

$$a_1x^2 + a_1 + a_2x^2 - a_2 + a_3x + 6a_3 = C_3x^2 + C_2x + C_1$$

$$(a_1+a_2)x^2 + a_3x + (a_1 - a_2 + 6a_3) = C_3x^2 + C_2x + C_1$$

(1) $a_1 + a_2 = C_3$

(2) $a_3 = C_2$

(3) $a_1 - a_2 + 6a_3 = C_1$

Existen escalares a_1, a_2, a_3 tal que $a_1(x^2+1) + a_2(x^2-1) + a_3(x+6) = C_3x^2 + C_2x + C_1$

Por lo tanto x^2+1, x^2-1, $x+6$ generan a P_2

Solucionamos el sistema de ecuaciones para comprobar que el sistema tiene solución.

(2) $a_3 = C_2$

(3) $a_1 - a_2 + 6(C_2) = C_1$

$a_1 - a_2 = C_1 - 6C_2$

(1) $a_1 + a_2 = C_3$

$2a_1 = C_1 - 6C_2 + C_3$

$a_1 = \frac{C_1 - 6C_2 + C_3}{2}$

(1) $a_2 = C_3 - \frac{C_1 - 6C_2 + C_3}{2}$

23. En M_{22}: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Escalares

$$a_1\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 & a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2a_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a_3 & -a_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3a_4 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_3 & a_1 - a_3 \\ 2a_2 + 3a_4 & a_2 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

(1) $2a_1 + 3a_3 = w$

(2) $a_1 - a_3 = x$

(3) $2a_2 + 3a_4 = y$

(4) $a_2 + a_4 = z$

Solución del sistema

$$2a_1 + 3a_3 = w$$
$$3(a_1 - a_3 = x)$$
$$3a_1 - 3a_3 = 3x$$
$$5a_1 = w + 3x \Rightarrow a_1 = \frac{w+3x}{5}$$

- Remplazando en ecuacion 2:

$$\frac{w+3x}{5} - x = a_2$$

- Resolver 3 y 4

$$2a_2 + 3a_4 = y \Rightarrow \cancel{2a_2} + 3a_4 = y \Rightarrow$$
$$-2(a_2 + a_4 = z) \quad \cancel{-2a_2} - 2a_4 = -2z \qquad a_4 = y - 2z$$

Remplazando en 4 para sacar a_2

$$a_2 = z - y + 2z \Rightarrow a_2 = -y + 3z$$

Tenemos la solucion del sistema y existen escalares a_1, a_2, a_3, a_4 ∴ por lo tanto los vectores generan al espacio vectorial de M_{22}.

Describa el espacio generado por los vectores

27:

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Sean C_1, C_2, C_3 escalares

Combinacion:

$$C_1 \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5c_1 \\ -8c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4c_2 \\ -8c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10c_3 \\ -5c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5c_1 - 4c_2 + 10c_3 \\ -8c_1 - 8c_2 - 5c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$-5c_1 - 4c_2 + 10c_3 = x$$
$$-8c_1 - 8c_2 - 5c_3 = y$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & 10 & x \\ -8 & -8 & -5 & y \end{array}\right) \xrightarrow{G.J}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -25/2 & y/2 - x \\ 0 & 1 & 105/8 & x - (5*y)/8 \end{array}\right)$$

Entonces:

$$C_1 - \frac{25}{2}C_3 = y/2 - x$$
$$C_2 + 105/8\, C_3 = x - 5/8\, y$$

$C_3 = C_3$ los escalares existen y tienen infinitas soluciones.

Scribe

Por lo tanto:

$$\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-5\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

32.- $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$

Existen escalares c_1, c_2, c_3
Combinación

$$c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2c_1\\-c_1\\-c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4c_2\\2c_2\\2c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6c_3\\-3c_3\\-3c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}2c_1 - 4c_2 + 6c_3 &= x\\ -c_1 + 2c_2 - 3c_3 &= y\\ -c_1 + 2c_2 - 3c_3 &= z\end{aligned}$$

Matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & 6 & x\\ -1 & 2 & -3 & y\\ -1 & 2 & -3 & z\end{array}\right) \xrightarrow{G.J}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -4 & 6 & x\\ 0 & 0 & 0 & x/2 + y\\ 0 & 0 & 0 & x/2 + z\end{array}\right)$$

$$2c_1 - 4c_2 + 6c_3 = x$$
$$0 = x/2 + y$$
$$0 = x/2 + z$$

No existen solución.

Dado que no es posible encontrar los escalares c_1, c_2, c_3 tal que

$$c_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}$ **NO** generan a $\mathbb{R}^3$

Sección 5.4

Determine si el conjunto de vectores dado es L.I o L.D.

4 $\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix}$, $C_1 v_1 + C_2 v_2 = 0$

$$C_1\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}12\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}-6C_1 + 12C_2 = 0\\ C_1 - 2C_2 = 0\end{matrix}$$

Matriz aumentada

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix}-6 & 12\\ 1 & -2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right]$$ o bien

Cuando podemos armar una matriz 2x2 (nxn) con el determinante podemos definir si son L.I o L.D.
Det A ≠ 0 si y solo si las columnas y filas de A son linealmente independientes

$$12C_2 = 6C_1$$

① $C_2 = \frac{6}{12}C_1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}C_1$

② $C_1 - 2(\frac{1}{2})C_1 = 0$

$C_1 - C_1 = 0 \quad 0 = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix}-6 & 12\\ 1 & -2\end{vmatrix} \Rightarrow 12 - 12 = 0$$

Como det A = 0, definimos que los vectores son L.D.

11.- $\begin{bmatrix}8 & -11 & 12\\ -7 & -12 & -3\\ -8 & -7 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \det A = -2207$ $\quad$ det A ≠ 0 ∴ Son L.I

$$+\ 8\left[(-12)(7) - (-3)(-7)\right] - (-11)\left[(-7)(7) - (-3)(-8)\right] + 12\left[(-7)(-7) - (-12)(-8)\right]$$

$$8\left[-84 - 21\right] - (-11)\left[-49 - 24\right] + 12\left[49 - 96\right] =$$

$$8\left[-105\right] - (11)\left[-73\right] + 12\left[-50\right] \Rightarrow -840 - 803 - 600 = -2207$$

32.- Para que valores de α serán linealmente dependientes los vectores

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\1\\2\end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \quad \begin{bmatrix}2 & -4 & \alpha\\ -3 & 6 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix} = 0$$

$$2\left[(6)(2) - (1)(-2)\right] - (-4)\left[(-3)(2) - (-1)(1)\right] + \alpha\left[(-3)(-2) - (6)(1)\right] = 0$$

$$2\left[12 - (-2)\right] + 4\left[(-6) - 1\right] + \alpha\left[6 - 6\right] = 0$$

$$2\left[14\right] + 4\left[-7\right] + \alpha\left[0\right] = 0 \Rightarrow 28 - 28 + 0 = 0 = 0$$

det A = 0

No existe valor de α dado que det A = 0 ∴ Los vectores son L.D.

34.- Para qué valores de α y β serán L.I los vectores

$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\\beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\5\\2\end{pmatrix}$ Sabemos que $\det A \neq 0 \Rightarrow$ L.I

Entonces

$$\det A \begin{bmatrix}3 & -2 & \alpha\\2 & -1 & 5\\1 & \beta & 2\end{bmatrix} \neq 0$$

$$3\left[(-1)(2)-(5)(\beta)\right]-(-2)\left[(2)(2)-(5)(1)\right]+\alpha\left[(2)(\beta)-(-1)(1)\right]\neq 0$$

$$3\left[-2-5\beta\right]+2\left[4-5\right]+\alpha\left[2\beta+1\right]\neq 0$$

$$-6-15\beta-2+2\alpha\beta+\alpha\neq 0$$

$$-8+2\alpha\beta-15\beta+\alpha\neq 0 \Rightarrow -8+\beta((2\alpha)-15)+\alpha\neq 0$$

Vemos que si $\alpha=8$ Los vectores serian L.D. $\therefore \alpha\neq 8$

$$\beta=\frac{8-\alpha}{2\alpha-15} = \alpha\neq 8 \qquad \beta\neq 0$$

Seccion 5.5 Bases y su dimensión.

12.- $H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y=0\}$; $(1,1)$, $(4,4)$

Segun la definicion de base

$\{(1,1),(4,4)\}$ son una base del espacio vectorial H

si se cumple ① $\{(1,1),(4,4)\}$ son L.I

② $\{(1,1),(4,4)\}$ generan a H.

Comprobar que son L.I

$$\det A \begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 4\end{bmatrix}\neq 0 \Rightarrow (1)(4)-(4)(1) \Rightarrow 4-4=0$$

$\therefore$ Son L.D y no hay una Base para H

15.-
Encuentra una Base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + 5z = 0$

Despejamos una variable "y" $y = \frac{3x+5z}{2}$

Escribimos el vector generalizado

$$\begin{bmatrix} x \\ \frac{3x+5z}{2} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

El conjunto $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera todo $\mathbb{R}$,

además es L.I ya que $v_1 \neq \alpha v_2$ ∴ Califica como base

32.- Encuentra una base para D_3, el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3 ¿Cuál es la dimensión de D_3?

Matriz Diagonal D_3

$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$$

$$\text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- genera todo D_3
- Además M_1, M_2, M_3 son L.I $V_1 \neq \alpha V_2$

∴ Califica para una base

$D_3 = 3 \times 3$ ✓

33.- ¿Cuál es la dimensión D_n en el espacio de matrices diagonales $D_{n \times n}$

$\dim D_n = n \times n$ con elementos diagonales

6.1 Bases Ortonormales.

2.- En $\mathbb{R}^2$ Comenzando con Vectores básicos $\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}$

- Elegimos el primer vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{|v_1|}|v_1| = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

- Elección del 2do vector ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 1/\sqrt{2} + (-1/\sqrt{2})\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

- Elección del 2do Vector unitario

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{|v_2'|}v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Base ortonormal para $\mathbb{R}^2 = \left\{ u_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}; u_2 = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$

3.- $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ Base ortonormal para el subespacio dado.

- Crear un vector que genere $\mathbb{R}$ y una base

$$x+y=0 \Rightarrow x=-y$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-y\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}y$$

- Base $= u_1 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ es L.I

- Verificar si la base $u_1 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ es ortonormal

$u_1 : \cdot u_1 = 0 \rightarrow$ ortog.
$u_1 : \cdot u_1 = 1 \rightarrow$ norm.

- Verificar si es ortogonal con el metodo de gram-schimit

Primer Vector.

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \therefore \text{Es una base ortogonal de } H$$

(Es ortogonal por que esta solo)

- Normalizamos el vector u_1

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(1)^2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Entonces $\{w_1\} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ Es una base ortonormal de H

Scribe

9.- $\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$

• Obtenemos una base para π

$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y - 3z\}$

$$\pi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

$\left\{ v_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Es una base de π y además son L.I

Primer vector Elección del vector unitario u_1

$$u_1 = v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+0^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Elección del segundo vector ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\frac{6}{\sqrt{5}} \right] \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Elección del segundo vector unitario v_2'

$$u_2 = v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} \Rightarrow \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(3/5)^2 + (-6/5)^2 + (1)^2}} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{14/5}} \begin{pmatrix} 3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{14/5} \\ -6/5\sqrt{14/5} \\ 1/\sqrt{14/5} \end{pmatrix}$$

La base ortonormal para π es

$$\left\{ u_1, u_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5\sqrt{14/5} \\ -6/5\sqrt{14/5} \\ 1/\sqrt{14/5} \end{pmatrix} \right\}$$

12.- $L = \{(x, y, z)\} \in \mathbb{R}^3 : x = t,\ y = 2t,\ z = -2t;\ t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_1} t$$

- Obtener el vector unitario u_1

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \Rightarrow \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} u_1$$

La base ortonormal para L es el vector u_1 $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ y es L.I

23.- Demostrar que si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

$$PP^T = P^TP = I$$
$$QQ^T = Q^TQ = I$$

Demostrar que:

$$PQ\ (PQ)^T = (PQ)^T PQ = I$$
$$(PQ)^T = Q^T P^T$$

L.I. $PQ\ (PQ)^T = PQ\ (Q^T P^T)$
$= P\ I\ P^T$
$= PP^T$
$PQ\ (PQ)^T = I$

L.D. $(PQ)^T = Q^T P^T$
$(PQ)^T PQ = Q^T P^T P Q$
$(PQ)^T PQ = Q^T I Q$
$= Q^T Q$
$(PQ)^T PQ = I$

27.- Demuestre que para cualquier número real t, la matriz A $\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es ortogonal. Propiedad $AA^T = A^T A = I$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t & \operatorname{sen} t \cos t - \cos t \operatorname{sen} t \\ \cos t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos t & \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

38.- Sean u_1 y u_2 dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $|u_1 - u_2| = \sqrt{2}$

$|u_1| = 1$
$|u_2| = 1$
$u_1 \cdot u_2 = 0$

$$|u_1 - u_2|^2 = 2$$

$$(u_1 - u_2) \cdot (u_1 - u_2) = 2$$

$$|u_1|^2 - 2u_1 \cdot u_2 + |u_2|^2 = 2$$

$$(1)^2 - 2(0) + (1)^2 = 2$$

$$1 + 1 = 2$$

$$2 = 2$$