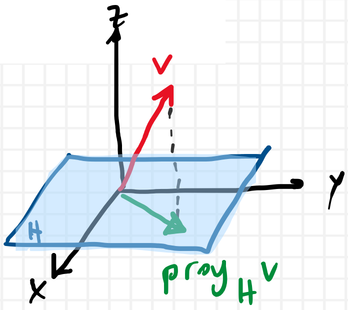
Proyección Ortogonal

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Sea **H** un sub-espacio de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ entonces la **proyección ortogonal** de **v** sobre **H** está dada por:

$$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \cdots + (v \cdot u_k)u_k$$

Observe que $\text{proy}_H v$ siempre pertenece a **H**.



Proyección ortogonal de un vector sobre un plano.

Encuentre $\text{proy}_H v$ donde $H = \{(x,y,z)^T : 2x - y + 3z = 0\}$ y $v = [3 \quad -2 \quad 4]^T$.

$$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$$

1.- Debemos calcular una B.O. para H

Primero calculamos una base para H. Entonces, debemos escribir el vector generalizado de H

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

El conjunto $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera a H, y es L.I. ya que $v_2 \neq \alpha v_1$. Por tanto, el conjunto forma una base para H.

Se ve claramente que la base obtenida no es una B.O. Para ortonormalizar la base aplicamos el P.O.G.S.

1.- Elección del 1er vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.- Elección del 2do vector ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.- Elección del 2do vector unitario

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{|v_2'|} v_2' = \frac{1}{\sqrt{(-1.2)^2+(0.6)^2+1^2}} \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix}$$

La B.O. para H es:

$$\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1429 \\ -0.5714 \\ -0.2857 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Expresión de un vector en términos de una base ortonormal

Exprese el vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en términos de la base ortonormal $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + (v \cdot u_3)u_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.7071\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + 1.2247\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} + 3.4641\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

4.5 Matriz Ortogonal

Una matriz $\boldsymbol{Q}$ de $\boldsymbol{nxn}$ es ortogonal si es invertible y se cumple

$$Q^{-1} = Q^T$$

Observe que una consecuencia directa es que $QQ^T = I_n$.

Teorema: La matriz $\boldsymbol{Q}$ de $\boldsymbol{nxn}$ es ortogonal si y solo si las columnas de $\boldsymbol{Q}$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.

CODIFICACIÓN DE MENSAJES

Codificar el mensaje $\longrightarrow$ decodificar el msj.

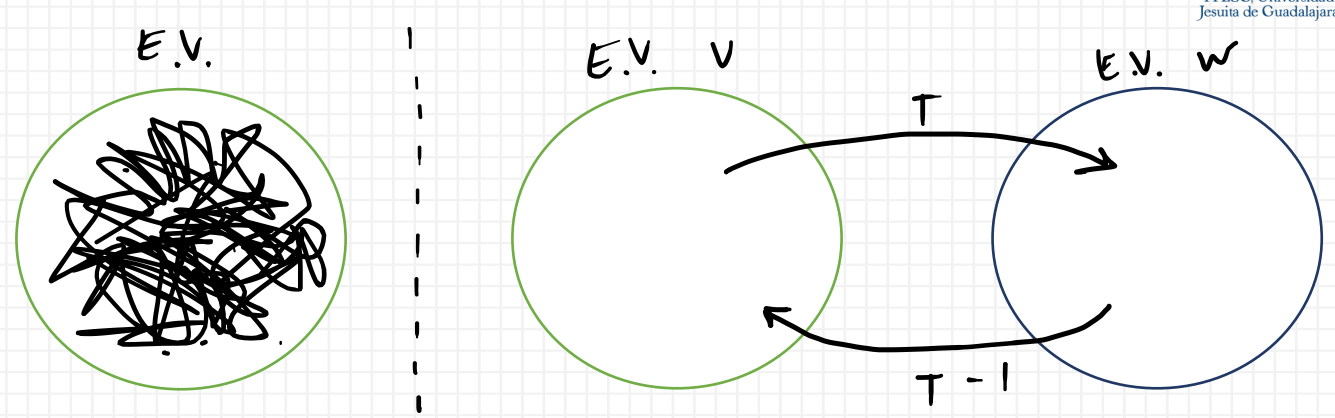
$M_c = A M_0$ $\longrightarrow$ $M_0 = A^{-1} M_c$

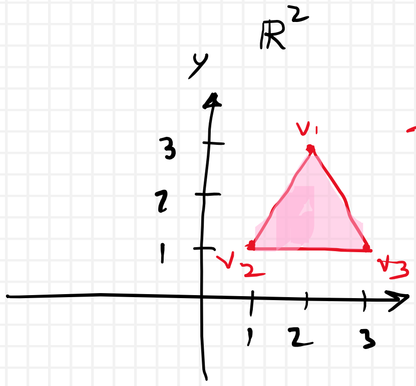
* Si A es una matriz ortogonal

$M_c = A M_0$ $\longrightarrow$ $M_0 = A^T M_c$

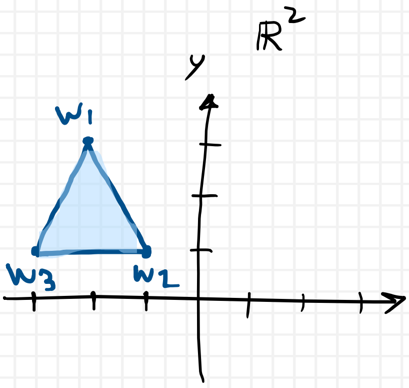
TRANSFORMACIONES LINEALES

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara





T reflexión con respecto al eje y



$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_1 = T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = T(v_3) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformación de reflexión con respecto al eje x

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

- Transformación de reflexión con respecto al origen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

- Transformación de alargamiento en el eje x

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

- Transformación de alargamiento en el eje y

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

- Transformación de escalamiento uniforme

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

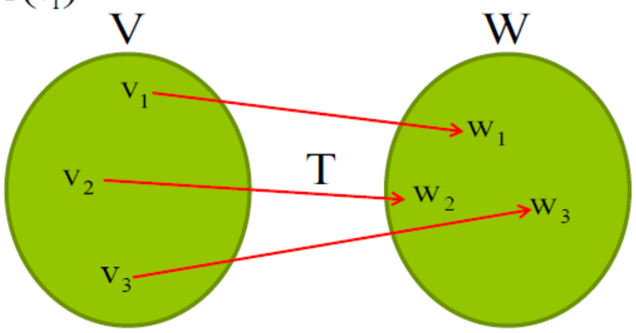
5.1 Definición de una transformación lineal

Sean **V** y **W espacios vectoriales** , una transformación lineal de V en W es una mapeo (correspondencia) $T: V \to W$ que para $a, b =$ escalares y $v_1, v_2 \in V$ cumple

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2) $T(a v_1) = a T(v_1)$

$T: V \to W$

T de V en W



Además, siempre cumple que:

1) $T(0_v) = 0_w$
2) $T(v_i - v_j) = T(v_i) - T(v_j)$

Nota: Una transformación lineal también es conocida como operador lineal

ITESO, Universidad
Jesuita de Guadalajara