5.4 Rango y núcleo de una transformación lineal. Transformaciones inversas

Dominio: Espacio vectorial de origen.

Codominio: Espacio vectorial de destino

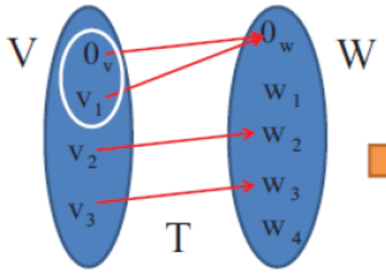
Imagen: Conjunto de todos los elementos del *codominio* que tienen un elemento correspondiente en el dominio. Es un *subespacio vectorial del codominio* (W).

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$$

Núcleo: Conjuntos de todos los elementos del dominio cuyo vector correspondiente en el codominio es el vector cero 0_W. Es un subespacio vectorial del dominio (V).

$$\mathrm{nu}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

Ejemplo:



$$\text{Dominio} = \{0_v, v_1, v_2, v_3\}$$
$$\text{Imagen}(\mathrm{Im}) = \{0_w, w_2, w_3\}$$
$$\text{Codominio} = \{0_w, w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$\text{Núcleo de } T = \mathrm{nu}(T) = \{0_v, v_1\}$$

Nulidad y Rango de una Transformación Lineal

Sean $T : V \to W$ una transformación lineal de V en W, y sea $\mathrm{Im}(T)$ la imagen de T, y sea $\mathrm{nu}(T)$ el núcleo de T. Entonces,

$$\text{Nulidad de } T = \nu(T) = \dim\{\mathrm{nu}(T)\}$$
$$\text{Rango de } T = \rho(T) = \dim\{\mathrm{Im}(T)\}$$

Además, siempre se cumple que

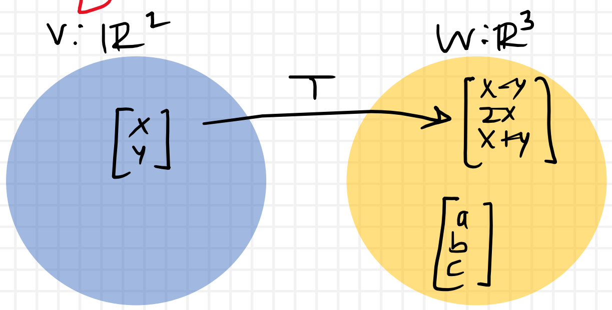
$$\dim V = \dim\{\mathrm{nu}(T)\} + \dim\{\mathrm{Im}(T)\} = \nu(T) + \rho(T)$$

E) Encuentre dominio, codominio, imagen, núcleo, nulidad y rango de:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}$

Dominio: $\mathbb{R}^2$ ✓

Codominio: $\mathbb{R}^3$ ✓



La imagen de la transformación es:

$$Im(T) = \{ w \in W : w = T(v) \}$$

Antes de sustituir la $Im(T)$, vamos a encontrar A_T

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3\times2)(2\times1) = (3\times1)$

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E.G.} \begin{array}{ccc} x & y & \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a+\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right] \end{array}$$

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$$a-b+c=0$$

Por tanto,

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a-b+c=0 \right\}$$

El rango de la transformación $\rho(T) = \dim(Im(T))$.
Necesitamos encontrar una base para la imagen de T.

$$\begin{bmatrix} b-c \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera a la $Im(T)$ y es LI, por tanto forma una base para la $Im(T)$

$$\rho(T) = \dim(Im(T)) = 2$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

El núcleo de la transformación:

$$nu(T) = \{ v \in V : T(v) = 0_W \}$$

$$nu(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x = 0 \\ \rightarrow y = 0 \\ \rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

$$nu(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y = 0 \right\}$$

La nulidad de la transformación $\nu(T) = \dim\{nu(T)\}$.
Necesitamos obtener una base para el núcleo de T.
El vector generalizado para $nu(T)$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ genera a $nu(T)$ y es LI por tanto forma una base para $nu(T)$.

$$\nu(T) = \dim(nu(T)) = 0$$

* <u>Comprobación</u>:

$$\dim V = \rho(T) + \nu(T)$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = \rho(T) + \nu(T)$$

$$2 = 2 + 0$$

Una Transformación Lineal se Determina por su Efecto sobre las Bases

Teorema: Sea ***V*** un espacio vectorial de dimensión finita con base $B_V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y sea una transformación lineal $T : V \to W$, entonces para cada vector $v \in V$ se cumple que

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

Para un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$.

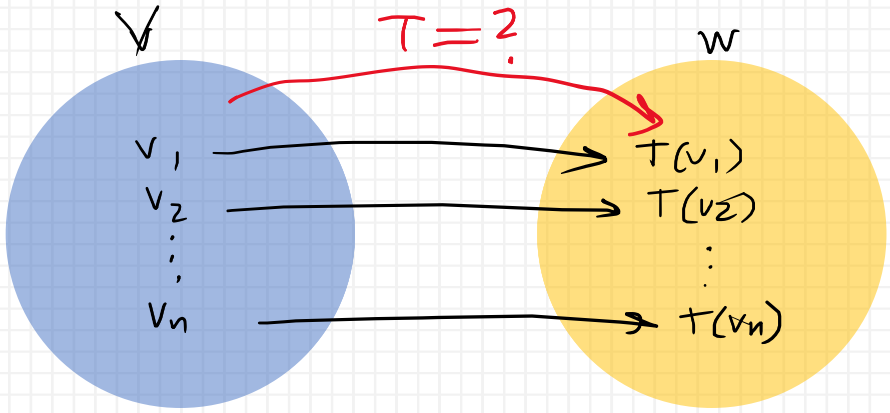
Demostración: Dado que $B_V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de ***V*** se cumple que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Y por las propiedades de transformación lineal tenemos que

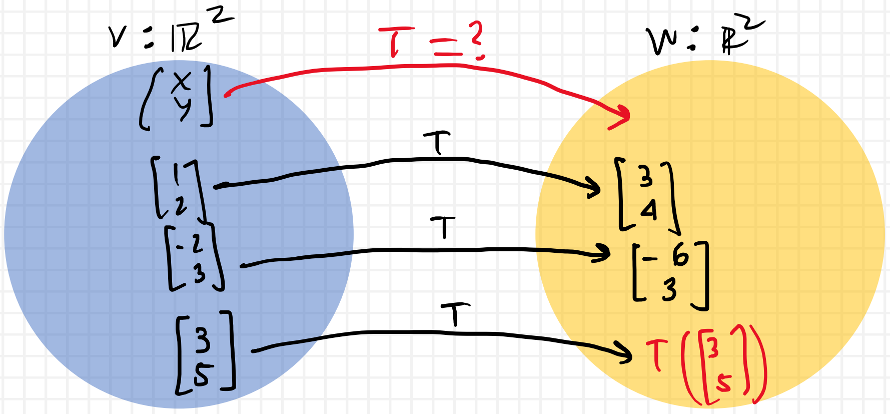
$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \cdots + T(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \end{aligned}$$

Este teorema nos permite definir una transformación lineal, solo conociendo una **base para *V*** y la **transformación de los vectores de la base**, como veremos a continuación…



$B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Ejemplo: Sea $B = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right\}$ una base para $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}$. Calcule $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ y $T\left(\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}\right)$



$B_V = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right\}$

Dado B_v es una base para $\mathbb{R}^2$

$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, $\quad B_v = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3x}{7} + \frac{2y}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2x}{7} + \frac{y}{7} \end{array}\right] \begin{array}{l} \to \alpha_1 = \frac{3x}{7} + \frac{2y}{7} \\ \to \alpha_2 = -\frac{2x}{7} + \frac{y}{7} \end{array}$$

El teorema nos dice

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{3x}{7} + \frac{2y}{7}\right) T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \left(-\frac{2x}{7} + \frac{y}{7}\right) T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

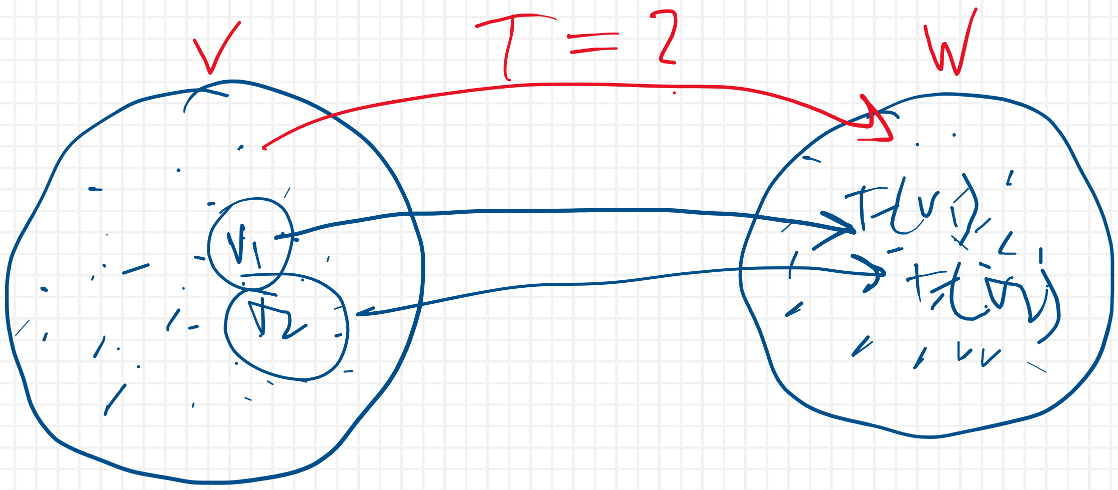
$$= \left(\frac{3x}{7} + \frac{2y}{7}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left(-\frac{2x}{7} + \frac{y}{7}\right) \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ \frac{6x}{7} + \frac{11y}{7} \end{bmatrix}$$

La transformación generalizada es:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ \frac{6x}{7} + \frac{11y}{7} \end{bmatrix}$$

Aplicar la transformación:

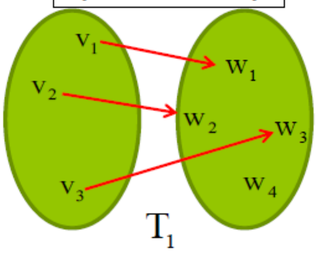
$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(3) \\ \frac{6(3)}{7} + \frac{11(5)}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10.4286 \end{bmatrix}$$



Tipos de Transformaciones Lineales

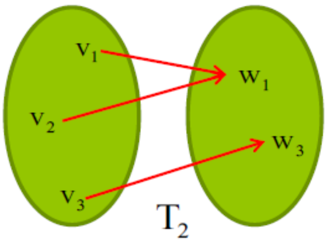
ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Inyectiva (uno a uno)



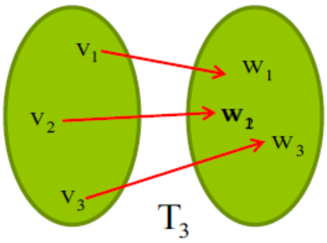
Si para cada **w**, existe **solo** un **v** correspondiente.

Suprayectiva



Si la **imagen** y el **codominio** son **iguales.**

Biyectiva



Inyectiva + Suprayectiva

¿Cuáles de estas transformaciones tienen inversa?

Inyectiva (uno a uno) y biyectiva. Podemos calcular el vector del dominio correspondiente a cada vector en la imagen.

Nota: Una transformación es Inyectiva (uno a uno) **si tiene transformación inversa.**

¿Cómo calcular la inversa de una transformación?...

Del ejercicio 1:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿La T.L. es inyectiva? No es inyectiva porque no existe A_T^{-1}.

¿La T.L. es suprayectiva?

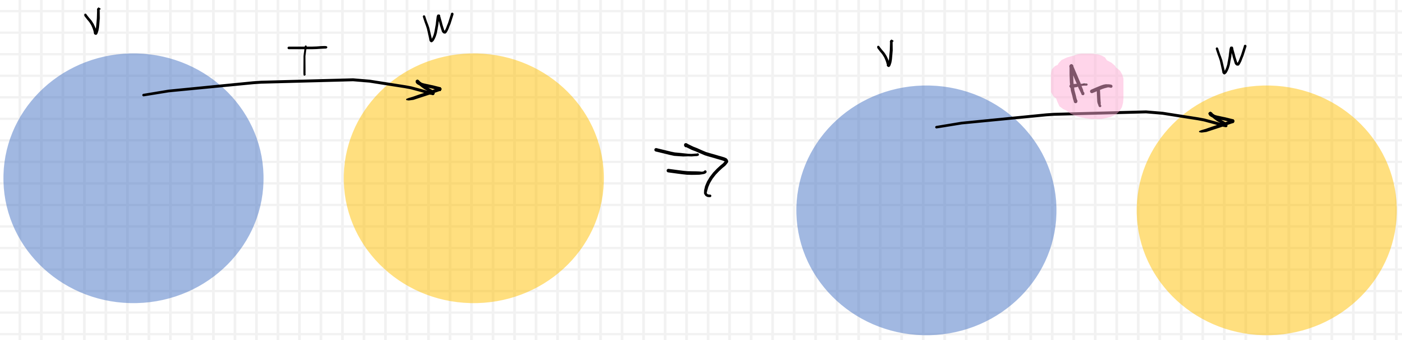
codominio = Im(T)

$$\mathbb{R}^3 \neq \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a-b+c=0 \right\}$$

No es suprayectiva. Por tanto, tampoco será biyectiva.

VALORES Y VECTORES PROPIOS

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara



Valores y Vectores Propios

Sea $T: V \to W$ una transformación con una matriz asociada A. En muchas aplicaciones (algunas las veremos después) es útil encontrar un vector v y un escalar λ tal que se cumpla

$$Av = \lambda v \xrightarrow{\text{Si se cumple}} \begin{array}{l} \lambda \Rightarrow \text{valor propio de A} \\ v \neq 0 \Rightarrow \text{vector propio de A (correspondiente a } \lambda) \end{array}$$

Nombres equivalentes

valor propio	vector propio
eigenvalor	eigenvector
autovalor	autovector
valor característico	vector característico

Para calcularlos, primero se nota que

$$Av - \lambda v = 0$$
$$(A - \lambda I)v = 0$$

Resulta en un sistema homogéneo. Ahora, si $v \neq 0$ (**no solución trivial**) significa que el sistema deberá **infinitas soluciones**. Por lo tanto

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esta última ecuación (llamada **ecuación característica**) nos servirá para encontrar los valores y vectores propios de A.
El determinante resulta en un polinomio de λ como $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ llamado polinomio característico.

Algunos hechos importantes antes de los cálculos…

Teorema Fundamental del Álgebra: Cualquier polinomio **P(x)** de grado **n** (es decir la potencia más grande de **x** es **n**) tiene exactamente **n** raíces, contando multiplicidades.

$$x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2 \text{ raíces} \longrightarrow x^3 + 1 \Rightarrow 3 \text{ raíces} \longrightarrow x^4 + 3x \Rightarrow 4 \text{ raíces}$$

Podemos concluir: Cualquier matriz de **nxn** tiene exactamente **n** valores propios, contando multiplicidades.

<u>Espacio Característico:</u> Sea λ un valor característico de la matriz **A(nxn)** con vector característico **v**, entonces

$$E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$$

es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ conocido como **espacio característico** de **A** correspondiente a λ.

<u>Teorema:</u> Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ valores propios diferentes de la matriz **A**, con vectores propios correspondientes $v_1, \cdots, v_m$. Entonces $v_1, \cdots, v_m$ son **linealmente independientes**.

Multiplicidad Algebraica: El número de veces que se repite un valor propio λ para una matriz **A** se denomina ***multiplicidad algebraica*** de λ.

Ejemplo: Sean $\{1, 1, -2, -2, -2\}$ los valores propios de la matriz **A(5x5)**. Entonces

Mult. Alg. de $\lambda = 1$ es 2.

Mult. Alg. de $\lambda = -2$ es 3.

E) Calcular valores y vectores propios de
$$A=\begin{bmatrix}4&2\\3&3\end{bmatrix}$$

1.- encontrar el polinomio característico $p(\lambda)$

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|$$
$$=\left|\begin{bmatrix}4&2\\3&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\3&3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(4-\lambda)(3-\lambda)-6=6-7\lambda+\lambda^2$$

2.- encontrar las raíces de $p(\lambda)$

$$p(\lambda)=0$$
$$\lambda^2-7\lambda+6=0$$
$$(\lambda-1)(\lambda-6)=0$$

$$\lambda-1=0 \qquad \lambda-6=0$$
$$\lambda=1 \qquad \lambda=6$$

los valores propios de A son:
$\lambda_1=1$, $m.a=1$
$\lambda_2=6$, $m.a=1$

Para encontrar los vectores propios

para $\lambda_1=1$
$$(A-\lambda_1 I)v_1=0$$
$$\left(\begin{bmatrix}4&2\\3&3\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}3&2\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c}3&2&0\\3&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{G.J.}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{2}{3}&0\\0&0&0\end{array}\right]\rightarrow x_1=-\frac{2}{3}x_2$$

$$v_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}x_2\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}x_2$$

si $x_2=1$:
$$v_1=\begin{bmatrix}-2/3\\1\end{bmatrix}$$

El espacio característico:
$$E_{\lambda_1}=\text{gen}\left\{v_1=\begin{bmatrix}-2/3\\1\end{bmatrix}\right\}$$

para $\lambda_2 = 6$

$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = x_2$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

si $x_2 = 1$:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$