Considere

$F(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

* calcular divergencia
* calcular el rotacional

Definición (Divergencia).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Considere

$$F(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

* calcular divergencia
* calcular el rotacional

$$M(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$N(x,y,z) = -2xy\,e^{-x^2-y^2}$$

$$P(x,y,z) = 0$$

5. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (regla del producto)

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = (1-2x^2)(-2x e^{-x^2-y^2}) + e^{-x^2-y^2}(-4x)$$

$$= -2xe^{-x^2-y^2} + 4x^3 e^{-x^2-y^2} - 4x e^{-x^2-y^2}$$

$$= 4x^3 e^{-x^2-y^2} - 6xe^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = -2xy(-2ye^{-x^2-y^2}) + e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$= 4xy^2 e^{-x^2-y^2} - 2x e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= 4x^3 e^{-x^2-y^2} \underline{- 6xe^{-x^2-y^2}} + 4xy^2 e^{-x^2-y^2} \underline{- 2x e^{-x^2-y^2}}$$

$$= (4x^3 + 4xy^2 - 8x)e^{-x^2-y^2}$$

Definición (**Rotacional**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\cancelto{0}{\frac{\partial P}{\partial y}} - \cancelto{0}{\frac{\partial N}{\partial z}}\right)\mathbf{i} + \left(\cancelto{0}{\frac{\partial M}{\partial z}} - \cancelto{0}{\frac{\partial P}{\partial x}}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$M(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$N(x,y,z) = -2xy\,e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy\left(-2xe^{-x^2-y^2}\right) + e^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$= (4x^2y - 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (1-2x^2)\left(-2y\,e^{-x^2-y^2}\right) + \cancelto{0}{e^{-x^2-y^2}(0)}$$

$$= (4x^2y - 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

En esta sección se definen dos operaciones que se pueden ejecutar sobre los campos vectoriales y que desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones del cálculo vectorial al flujo de fluidos y a la electricidad y magnetismo. Cada operación es similar a la derivación, pero una genera un campo vectorial mientras que la otra proporciona un campo escalar.

Rotacional

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen las derivadas parciales de P, Q y R, entonces el **rotacional** de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ definido por

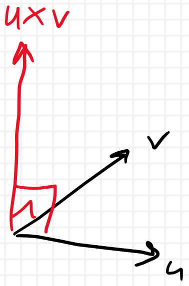
$$\boxed{1} \qquad \operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Como un auxiliar nemotécnico, escribimos la ecuación 1 usando la notación del operador. Introducimos el operador diferencial vectorial ∇ ("nabla") como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Tiene significado cuando opera sobre una función escalar para producir el gradiente de f.

$$F = \nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$



Si pensamos que ∇ es un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, también podemos considerar el producto cruz formal de ∇ y el campo vectorial $\mathbf{F}$ como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} k$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \operatorname{rot}\mathbf{F}$$

Por tanto, la manera más sencilla de recordar la definición 1 es por medio de la expresión simbólica

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}}$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine el rotacional de $\mathbf{F}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$F(x,y,z) = \overset{P}{xz\,i} + \overset{Q}{xyz\,j} \overset{R}{-\,y^2 k}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = xy \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\operatorname{rot} F = (-2y - xy)\,i + (x - 0)\,j + (yz - 0)\,k$$

$$\operatorname{rot} F = y(-x-2)\,i + x\,j + yz\,k$$

Divergencia

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ entonces la **divergencia de F** es la función de tres variables definida por

9
$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

Observe que el rot **F** es un campo vectorial, pero div **F** es un campo escalar. En términos del operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, la divergencia de **F** se puede expresar simbólicamente como el producto punto de ∇ y **F**:

10
$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}}$$

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, encuentre div **F**.

$$F(x,y,z) = xz\,i + xyz\,j - y^2 k$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} =$$

$$\partial P/\partial x = z$$

$$\partial Q/\partial y = xz(1)$$

$$\partial R/\partial z = \cancel{0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = z + xz$$

Ejercicio Clase

06 Martes Septiembre

Considere:

$$\nabla f(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,i - 2xye^{-x^2-y^2}\,j + 0k$$

Divergencia:

$$\operatorname{div} F = \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy} + \frac{dP}{dz}$$

$$\frac{dM}{dx} = (4x^3-6x)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{dN}{dy} = 2x(2y^2-1)e^{-y^2-x^2}$$

$$\frac{dP}{dz} = 0$$

$$\operatorname{div} f = 4x^3e^{-x^2-y^2} - 6xe^{-x^2-y^2} + 4xy^2e^{-y^2-x^2} - 2xe^{-y^2-x^2}$$

$$\operatorname{div} F = (e^{-x^2-y^2})(4x^3-8x+4xy^2)$$

Rotacional

$$\operatorname{Rot} F = [0-0]\,i + [0-0]\,j + [-2ye^{-y^2-x^2} - (4x^2-2)ye^{\dots}$$

$$\operatorname{Rot} F = 0i + 0j + [-2ye^{-y^2-x^2} - 4x^2ye^{-x^2-y^2} + 2ye^{-x^2-y^2}]\,k$$

$$\operatorname{Rot} F = 0i + 0j - 4x^2ye^{-x^2-y^2}\,k$$