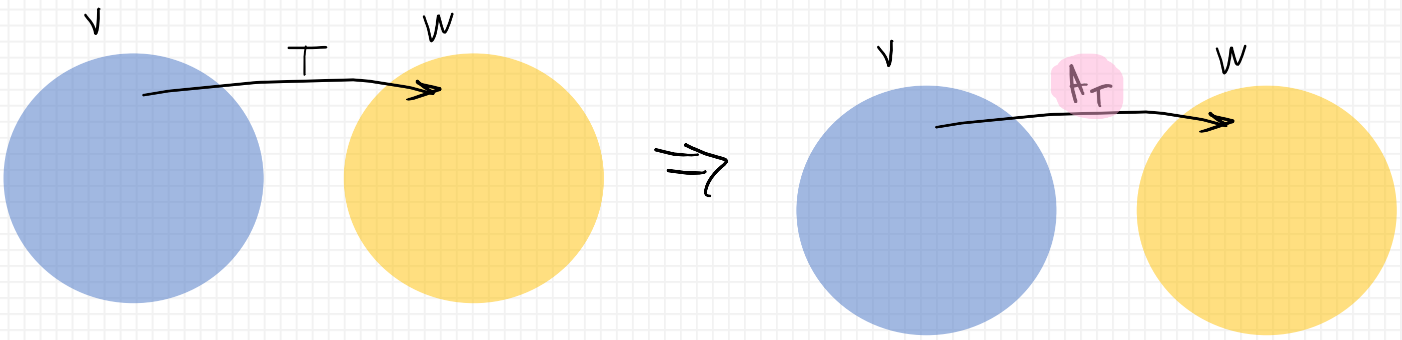
VALORES Y VECTORES PROPIOS

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara



Valores y Vectores Propios

Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación con una matriz asociada A. En muchas aplicaciones (algunas las veremos después) es útil encontrar un vector v y un escalar λ tal que se cumpla

$$Av = \lambda v \xrightarrow{\text{Si se cumple}} \begin{array}{l} \lambda \Rightarrow \text{valor propio de A} \\ v \neq 0 \Rightarrow \text{vector propio de A (correspondiente a } \lambda) \end{array}$$

Nombres equivalentes

valor propio	vector propio
eigenvalor	eigenvector
autovalor	autovector
valor característico	vector característico

Para calcularlos, primero se nota que

$$Av - \lambda v = 0$$
$$(A - \lambda I)v = 0$$

Resulta en un sistema homogéneo. Ahora, si $v \neq 0$ (**no solución trivial**) significa que el sistema deberá **infinitas soluciones**. Por lo tanto

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esta última ecuación (llamada **ecuación característica**) nos servirá para encontrar los valores y vectores propios de A.
El determinante resulta en un polinomio de λ como $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ llamado polinomio característico.

Algunos hechos importantes antes de los cálculos…

Teorema Fundamental del Álgebra: Cualquier polinomio **P(x)** de grado **n** (es decir la potencia más grande de **x** es **n**) tiene exactamente **n** raíces, contando multiplicidades.

$$x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2 \text{ raíces} \longrightarrow x^3 + 1 \Rightarrow 3 \text{ raíces} \longrightarrow x^4 + 3x \Rightarrow 4 \text{ raíces}$$

Podemos concluir: Cualquier matriz de **nxn** tiene exactamente **n** valores propios, contando multiplicidades.

<u>**Espacio Característico:**</u> Sea λ un valor característico de la matriz **A(nxn)** con vector característico **v**, entonces

$$E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$$

es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ conocido como **espacio característico** de **A** correspondiente a λ.

<u>**Teorema:**</u> Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ valores propios diferentes de la matriz **A**, con vectores propios correspondientes $v_1, \cdots, v_m$. Entonces $v_1, \cdots, v_m$ son **linealmente independientes**.

Multiplicidad Algebraica: El número de veces que se repite un valor propio λ para una matriz **A** se denomina ***multiplicidad algebraica*** de λ.

Ejemplo: Sean $\{1, 1, -2, -2, -2\}$ los valores propios de la matriz **A(5x5)**. Entonces

$$\text{Mult. Alg. de } \lambda = 1 \text{ es } 2.$$
$$\text{Mult. Alg. de } \lambda = -2 \text{ es } 3.$$

Ⓔ Calcular valores y vectores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

1.- encontrar el polinomio característico $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = 6 - 7\lambda + \lambda^2$$

2.- encontrar las raíces de $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda = 1 \qquad \lambda = 6$$

los valores propios de A son:

$\lambda_1 = 1$, m.a $= 1$

$\lambda_2 = 6$, m.a $= 1$

Para encontrar los vectores propios

para $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} x_2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

si $x_2 = 1$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para $\lambda_2 = 6$

$(A - \lambda_2 I)\, v_2 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = x_2$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

si $x_2 = 1$:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Multiplicidad Geométrica

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

La **multiplicidad geométrica** de un valor propio λ es la dimensión del espacio característico correspondiente a λ.

$$\text{Mult. Geométrica de } \lambda = \dim(E_\lambda)$$

Note que en los **ejercicios anteriores, la multiplicidad geométrica** de todos los valores propios obtenidos **es 1**.

Propiedad: $\text{Mult. Geométrica de } \lambda \leq \text{Mult. Algebraica de } \lambda$

Ejemplo: Calcule los valores y vectores propios y su multiplicidad algebraica y geométrica.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.- polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$$

2.- encontrar las raíces de $p(\lambda) = 0$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0 \xrightarrow{\text{roots}(p)} \begin{array}{l} \lambda_1 = 8, \quad m.a. = 1 \\ \lambda_2 = -1, \quad m.a. = 2 \end{array}$$

3.- Encontramos los vectores propios asociados a cada valor propio.

para $\lambda_1 = 8$

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = x_3 \\ \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{array}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad \text{Si } x_3 = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$m.g. = \dim(E_{\lambda_1}) = 1$$

para $\lambda_2 = -1$

$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

si $x_2 = x_3 = 1$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \text{gen} \left\{ v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$m.g. = \dim(E_{\lambda_2}) = 2$$