8.21 Forma matricial de la regla de la cadena

Sea $h = f \circ g$, donde g es diferenciable en a y f diferenciable en $b = g(a)$. La regla de la cadena establece que

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a).$$

Podemos expresar la regla de la cadena en función de las matrices jacobianas $Dh(a)$, $Df(b)$, y $Dg(a)$ que representan las transformaciones lineales $h'(a)$, $f'(b)$, y $g'(a)$, respectivamente. Puesto que la composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de sus matrices, obtenemos

(8.26) $$Dh(a) = Df(b)\, Dg(a), \qquad \text{donde} \quad b = g(a).$$

Ésta es la llamada *forma matricial de la regla de la cadena.* También puede escribirse como un conjunto de ecuaciones escalares expresando cada matriz en función de sus elementos.

Ejemplo.-Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to f : \mathbb{R}^2$ diferenciables, hallar $(f \circ g)'$ si $g(x,y) = (xy, 5x, y^3)$ y $f(x,y,z) = (3x^2 + y^2 + z^2, 5xyz)$

$$(f \circ g)' = f' \circ g'$$

$$Dh(a) = Df(g(a))\, Dg(a) = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{2 \times \boxed{3 \quad\quad 3} \times 2}_{2 \times 2}$$

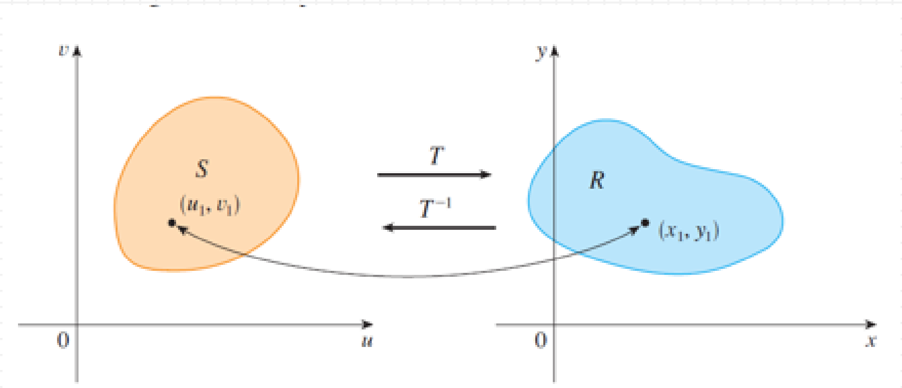
$$= \begin{bmatrix} 6xy^2 + 50x + 0 & 6x^2y + 0 + 6y^5 \\ 25xy^4 + 25xy^4 + 0 & 25x^2y^3 + 0 + 75x^2y^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6xy^2 + 50x & 6x^2y + 6y^5 \\ 50xy^4 & 100x^2y^3 \end{bmatrix}$$

$$Dg(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

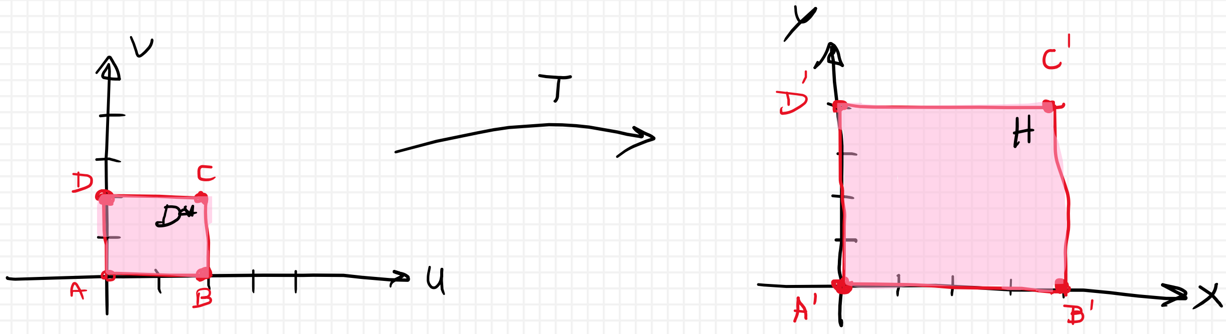
$$Df(g(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 2y & 2z \\ 5yz & 5xz & 5xy \end{bmatrix}_{g(a)}$$

$$= \begin{bmatrix} 6(xy) & 2(5x) & 2(y^3) \\ 5(5x)y^3 & 5(xy)y^3 & 5(xy)5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix}$$



DOMINIO IMAGEN

$$T\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$$



$$u = \frac{1}{2}x \rightarrow x = 2u$$

$$v = \frac{1}{2}y \rightarrow y = 2v$$

$$\rightarrow J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El determinante del Jacobiano

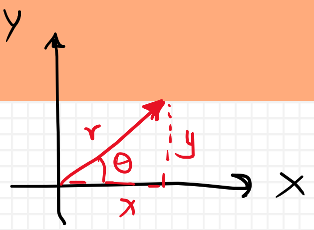
$$|J_F| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

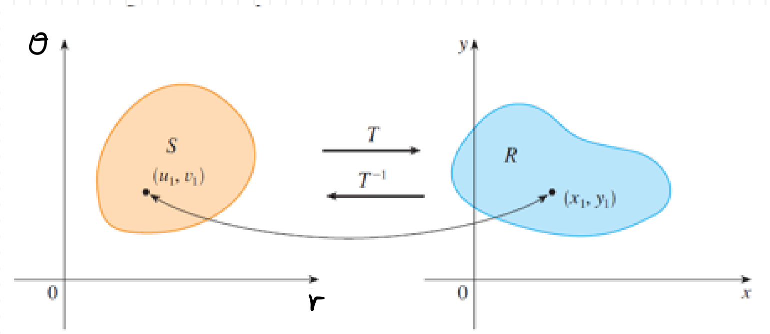
$$\text{Área}(H) = \text{Área}(D^*)|J_F|$$

$$\text{Área}(H) = \text{Área}(D^*)\ 4$$

La transformación de coordenadas polares (r, θ) a coordenadas cartesianas (x, y) está dada por la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{+} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ cuyas componentes son

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$





$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$|J_F| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\,\text{sen}^2\theta) = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$

$$= r$$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Derivación implícita

La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se empezó a tratar en las secciones 3.5 y 14.3. Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

6 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Debemos escribir la ec. dada en la forma:

$F(x,y) = 0$

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$\underbrace{x^3 + y^3 - 6xy}_{F(x,y)} = 0$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 6y = 3x^2 - 6y$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 + 3y^2 - 6x = 3y^2 - 6x$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \cancelto{0}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \quad$ y $\quad \dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

así que esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y obtenemos la primera fórmula de las ecuaciones 7 de la página 930. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7 $$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

EJEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Primero escribimos la ec. dada en la forma

$F(x,y,z) = 0$

y nos queda

$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

$$\underbrace{x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6yz$$

$$F_z = \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 6xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

$$F_y = 3y^2 + 6xz$$

El examen queda el jueves 22 de septiembre en clase de manera virtual.

Viene todo lo que vimos

- Me queda pendiente subir una tarea de derivación implícita.
- Reporte de lectura del tema 1.8 (este tema queda fuera del examen del 1er parcial)