Ricardo De León Flores

Descomposiciones de matrices

También son conocidas como matrices de factorización, son usadas para describir una matriz de diferentes representaciones usando factores de matrices interpretadas.

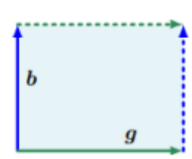
Determinante y traza

Un determinante es un objeto matemático para resolver ecuaciones lineales matemáticas, los determinantes son solo definidos para matrices cuadradas.

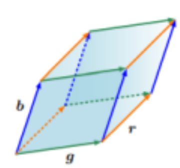
$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El determinante te una matriz cuadrada da como resultado un numero real.

Para una matriz cuadrada **A** sostiene que una matriz **A** es invertible si el $\det(A) \neq 0$.



The area of the parallelogram (shaded region) spanned by the vectors b and g is $|\det([b, g])|$.



The volume of the parallelepiped (shaded volume) spanned by vectors r, b, g is $|\det([r, b, g])|$

Computar un determinante de nxn requiere de un algoritmo que resuelva n mayor a 3 recursivamente aplicando la expansión de Laplace.

Expansión de la place.

1. Expansion along column j:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{k,j})$$

2. Expansion along row j

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{jk} \det(A_{j,k})$$

Para una matriz de nxn el determinante exhibe las siguientes propiedades:

- det(AB) = det(A) det(B)
- det(A) = det(A T)
- If A is regular (invertible), then det(A −1) = 1 /det(A)
- Agregar una columna y una fila no cambia sigue siendo det(A)
- La multiplicación de un escalar por columna y fila det(A) x λ. det(λA) = λ n det(A)
- Si se intercambian columnas se cambia el signo de la operación

Teorema. Una matriz cuadrada su det(A) ≠ 0 si rk(A)=, es decir es invertible.

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

La Traza es la suma de la diagonal de la matriz A

Propiedades de la traza:

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \; for \; A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A), \; \alpha \in \mathbb{R} \; for \; A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$
- $tr(I_n) = n$
- $tr(AB) = tr(BA) \; for \; A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$

Ahora, junto con la traza y el determinante podemos ahora definir una ecuación importante en términos polinomiales.

Para Alpha pertenece a R y una matriz cuadrada de A que pertenece a R

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$
$$= c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_n\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$$

$$c_0, \cdots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$$

In particular,

$$c_0 = \det(A),$$
$$c_{n-1} = (-1)^{n-1}tr(A)$$

Eigenvalores y Eigenvectores

Podemos hacer mapeos lineales y asociarlos con trasformación de matrices para obtener "eigen" análisis. Los eigenvalores de un mapeo lineal nos va a decir como un set de vectores especiales, los eigenvectores son transformados a un mapeo lineal.

Eigenvalores Ecuación:

$$\boldsymbol{Ax = \lambda x}$$

$A \in \mathbb{R}^{nxn}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ is an **eigenvalue** of A
$x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ is the corresponding **eigenvector** of A

Colinealidad y codirección.

Dos vectores que apuntan en la misma dirección son llamados codirecciones. Dos vectores son colineales si apuntan en direcciones contrarias. Todos los vectores con colineales a x y también eigenvectores a A.

Teorema. $\lambda \in \mathbb{R}$ es un eigen valor si $A \in \mathbb{R}\ nxn$ si y solo si es una raíz con clases polinomiales.

Eigen espacio y eigen espectro

Para toda matriz cuadrada. El set de eigen vectores de **A** asociados con un eigen valor y Alpha pertenece a Rn, es llamado un **eigen espacio** con respecto a Alpha denotado por $E\ \lambda$. El set de eigen valores de **A** es llamado **eigen espectro** o solo espectro de **A**

Propiedades:

- **A** matriz y su traspuesta pose los mismos eigen valores pero no necesariamente los mismos eigen vectores.
- El eigen espacio es el espacio nulo de $-\lambda I$
-

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - \lambda x = 0$$
$$(A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(A - \lambda I)$$

Teorema. El determinante de una matriz A cuadrada es el producto de sus eigen valores

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Teorema. La traza de una matriz cuadrada es la suma de sus eigen valores

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Eigen descomposición y diagonalización

Una matriz diagonal es una matriz que tiene valores cero en todos sus elementos diagonales.

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

El determinante es el producto de su diagonal, una matriz de poder está dada por las diagonales de sus elementos elevadas a la k y la inversa es el reciproco de su diagonal y la diagonal de sus elementos no son cero.

Una matriz A es diagonalizable si es similar a una matriz diagonal, la diagonalización es otra manera de expresar un mapeo lineal, pero con otras bases.

Teorema. Eigen composición, una matriz cuadrada puede ser refactorizada en

$$A = PDP^{-1}$$