Aprendizajes esperados 3
3.1 Espacios lineales
3.2 Bases
3.3 Bases ortonormales
3.4 Transformaciones lineales y matrices
3.5 Valores y vectores propios de una transformación lineal
3.6 Descomposición en valores singulares
3.7 Análisis de componentes principales (PCA)
3.8 Aplicaciones

Capítulo 3: Espacios Vectoriales

3.1. EspaciosVectoriales

Departamento de Matemáticas y Física (MAF)

ESPACIOS VECTORIALES

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

+ suma de vectores & Multiplicación por un escalar + 10 axiomas =

conjunto — operaciones binarias — condiciones — ESPACIO VECTORIAL

ciudadano + conocimiento & Actitud Amor + 40 materias = Ingeniería

Axiomas de un espacio vectorial

investigar

Nota. Los primeros cinco axiomas se utilizan para definir a un grupo abeliano, y los axiomas vi) al x) describen la interacción de los escalares y los vectores mediante la operación binaria de un escalar y un vector.

S.V.

i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma).**

ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
(ley asociativa de la suma de vectores).

iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de $\mathbf{x}$).

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(ley conmutativa de la suma de vectores).

M.E.

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(primera ley distributiva).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(segunda ley distributiva).

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

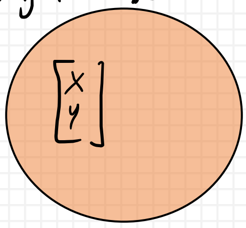
x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

E ¿Son espacios vectoriales?

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

a) El conjunto de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales.

Conjunto $\mathbb{R}^2$



$+$ S.V & M.E. normales $+$ ¿10 axiomas? $=$ ¿E.V. $\mathbb{R}^2$?

Definimos $u=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

✓ 1) $u+v \in \mathbb{R}^2$ (cerradura bajo la suma)

$$u+v=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \text{ ¿}\in \mathbb{R}^2\text{?} \checkmark$$

✓ 2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (Ley asociativa de la suma)

$$LI \rightarrow (u+v)+w = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow u+(v+w)= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2+x_3 \\ y_2+y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix}$$

¿LI = LD? ✓

✓ 3) $0_v+u=u$ (vector cero)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+x_1 \\ b+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$a+x_1=x_1$ $\qquad$ $b+y_1=y_1$

$a=x_1-x_1=0$ $\qquad$ $b=y_1-y_1=0$

$$0_v=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ¿}\in \mathbb{R}^2\text{?} \checkmark$$

✓ 4) $(-u)+u=0_v$ (inverso aditivo)

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c+x_1 \\ d+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c+x_1=0$ $\qquad$ $d+y_1=0$

$c=-x_1$ $\qquad$ $d=-y_1$

$$(-u)=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} \text{ ¿}\in \mathbb{R}^2\text{?} \checkmark$$

✓ 5) $u+v=v+u$ (Ley conmutativa de la suma)

$$LI \rightarrow u+v=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow v+u=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

¿LI = LD? ✓

6) $\alpha u \in \mathbb{R}^2$ (cerradura bajo la multiplicación por escalar)

$$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} \; ¿\in \mathbb{R}^2? \; ✓$$

7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ (Ley distributiva 1)

$$LI \rightarrow \alpha(u+v) = \alpha\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1+x_2) \\ \alpha(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+\alpha x_2 \\ \alpha y_1+\alpha y_2 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow \alpha u + \alpha v = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+\alpha x_2 \\ \alpha y_1+\alpha y_2 \end{bmatrix}$$

¿LI = LD? ✓

8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ (Ley distributiva 2)

$$LI \rightarrow (\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+\beta x_1 \\ \alpha y_1+\beta y_1 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow \alpha u + \beta u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+\beta x_1 \\ \alpha y_1+\beta y_1 \end{bmatrix}$$

¿LI = LD? ✓

9) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (Ley asociativa de la M.E.)

$$LI \rightarrow \alpha(\beta u) = \alpha\left(\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta y_1 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow (\alpha\beta)u = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta y_1 \end{bmatrix}$$

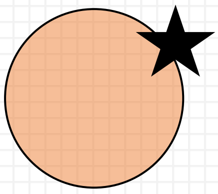
¿LI = LD? ✓

10) $1u = u$ (Neutro multiplicativo)

$$LI \rightarrow 1u = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = u \rightarrow LD$$

$\therefore$ el conjunto de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales sí califica como un ESPACIO VECTORIAL.

ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial

De hecho, $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ son todos espacios vectoriales con las operaciones normales. Vamos demostrando el caso general ($\mathbb{R}^n$).

Espacio Vectorial

Demostración: Sean $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ y α, β escalares.

1) **Cerrado bajo la suma**
2) **Cerrado bajo la multiplicación por escalar**
3) **Vector Cero**
4) **Inverso Aditivo**
5) **ley conmutativa de la suma**

$$x + (y + z) = (x + y) + z \in \mathbb{R}^n$$

$$0_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad -x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

6) **Cerrado bajo la multiplicación por escalar**
7) **Ley distributiva 1**
8) **Ley distributiva 2**
9) **Ley asociativa de la multiplicación**
10) **Neutro Multiplicativo**

$$\alpha x \in \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$\alpha (\beta x) = (\alpha\beta) x \in \mathbb{R}^n$$

$$1x = x$$

Polinomios de grado *n*, $\mathrm{V} = \mathrm{P}_n$

P_n es el conjunto de todos los polinomios de grado igual o menor a **n,** con la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, \cdots, a_0$ son escalares. La suma entre polinomios y multiplicación por escalar son las normales. ¿Es este conjunto un espacio vectorial?

Espacio Vectorial

Demostración: Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$r(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

Vector Cero $\in P_n$

$$0_v = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0 \in P_n$$

Inverso Aditivo $\in P_n$

$$-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

Asociativo Suma

$$p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$$

Cerrado Suma y Multiplicación
Conmutativa Suma

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = \beta q(x) + \alpha p(x)$$
$$= (\alpha a_n + \beta b_n) x^n + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_0 + \beta b_0) \in P_n$$

Neutro Multiplicativo

$$1p(x) = p(x)$$

Asociativo Multiplicación por Escalar

$$\alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta) p(x) \in P_n$$

Distributivo Multiplicación

$$(\alpha + \beta) p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$$
$$\alpha(p(x) + q(x)) = \alpha p(x) + \alpha q(x)$$

Matrices M_{mn}

M_{mn} es el conjunto de todas las matrices de ***m*** filas y ***n*** columnas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Demostración: con las operaciones normales.

Espacio Vectorial

Vector Cero

$$0_v=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{mn}$$

Inverso Aditivo

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}$$

Neutro Multiplicativo

$$1A=A$$

Asociativo Multiplicación por Escalar

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A \in M_{mn}$$

Asociativo Suma

$$A+(B+C)=(A+B)+C \in M_{mn}$$

Cerrado Suma y Multiplicación
Conmutativa Suma

$$\alpha A+\beta B=\beta B+\alpha A \in M_{mn}$$

Distributivo Multiplicación

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$
$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

El espacio $\mathbb{C}^n$

Este conjunto está conformado por vectores de **n** elementos complejos, es decir

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1+i\beta_1 \\ \alpha_2+i\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+i\beta_n \end{bmatrix}$$

¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial con las operaciones normales?

Espacio Vectorial

Demostración: Sean $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ y a, b escalares.

Vector Cero

$$0_v=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Inverso Aditivo

$$-x=\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\alpha_1-i\beta_1 \\ -\alpha_2-i\beta_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n-i\beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Neutro Multiplicativo

$$1x=x$$

Asociativo Suma

$$x+(y+z)=(x+y)+z \in \mathbb{C}^n$$

Cerrado Suma y Multiplicación
Conmutativa Suma

$$ax+by=by+ax \in \mathbb{C}^n$$

Asociativo Mult. Por Escalar

$$a(bx)=(ab)x \in \mathbb{C}^n$$

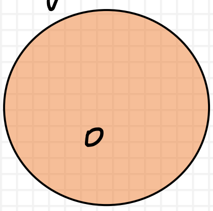
Distributivo Multiplicación

$$a(x+y)=ax+ay$$
$$(a+b)x=ax+bx$$

¿Son espacios vectoriales?

a) El conjunto definido por el vector cero $V=\{0\}$ y las operaciones normales de suma y multiplicación por un escalar.

conjunto V



+ S.V & M.E. (normal) + ¿10 axiomas? = ¿EV V?

Definimos $u=0,\ v=0,\ w=0 \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $u+v \in V$

$u+v = 0+0 = 0$ ¿$\in V$?

2) $(u+v)+w = u+(v+w)$

$LI \rightarrow (u+v)+w = (0+0)+0 = 0+0 = 0$

$LD \rightarrow u+(v+w) = 0+(0+0) = 0+0 = 0$

¿$LI = LD$?

3) $0_v + u = u$

$a+0=0$

$a=0$

$0_v = a = 0$ ¿$\in V$?

4) $(-u)+u = 0_v$

$b+0=0$

$b=0$

$(-u)=b=0$ ¿$\in V$?

5) $u+v = v+u$

$LI \rightarrow u+v = 0+0 = 0$

$LD \rightarrow v+u = 0+0 = 0$

6) $\alpha u \in V$

$\alpha u = \alpha(0) = 0$ ¿$\in V$?

7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

$LI \rightarrow \alpha(u+v) = \alpha(0+0) = \alpha(0) = 0$

$LD \rightarrow \alpha u + \alpha v = \alpha 0 + \alpha 0 = 0+0 = 0$ ¿$LI = LD$?

8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$

$LI \rightarrow (\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)0 = 0$

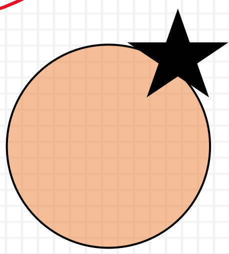
$LD \rightarrow \alpha u + \beta u = \alpha 0 + \beta 0 = 0+0 = 0$ ¿$LI = LD$?

9) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$LI \rightarrow \alpha(\beta u) = \alpha(\beta 0) = \alpha(0) = 0$

$LD \rightarrow (\alpha\beta)u = (\alpha\beta)0 = 0$ ¿$LI = LD$?

10) $1u = u$

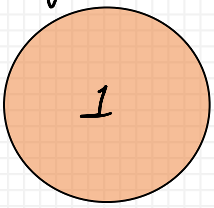


$LI \rightarrow 1u = 1(0) = 0 = u \rightarrow LD$

$\therefore$ el conjunto $V=\{0\}$ con las operaciones normales sí califica como un E.V. De hecho se le conoce como E.V. trivial.

b) El conjunto definido por $V = \{1\}$ con las operaciones normales.

conjunto V



+ s.v. & M.E. normal + ¿10 axiomas? = ¿EV V?

Definimos $u=1$, $v=1$, $w=1 \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

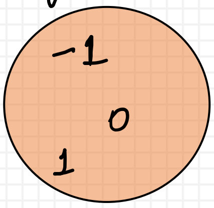
✗ 1) $u+v \in V$

$u+v = 1+1 = 2$ ¿$\in V$? ✗

$\therefore$ el conjunto $V = \{1\}$ con las operaciones normales no califica como un E.V.

c) El conjunto definido por $V = \{-1, 0, 1\}$ con las operaciones normales

conjunto V



+ s.v. & M.E. normal + ¿10 axiomas? = ¿EV V?

Definimos $u = -1 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

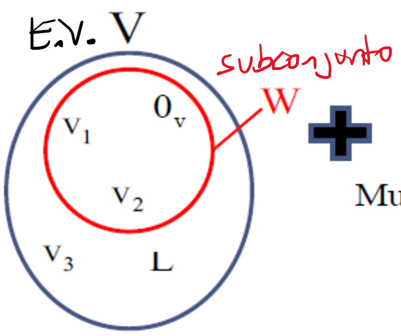
✗ 6) $\alpha u \in V$

$\alpha u = \alpha(-1) = -\alpha$ ¿$\in V$? ✗

$\therefore$ el conjunto $V = \{-1, 0, 1\}$ con las operaciones normales no califica como un E.V.

3.2 Subespacios Vectoriales

Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V, entonces W es un sub-espacio vectorial de V si también es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en V.

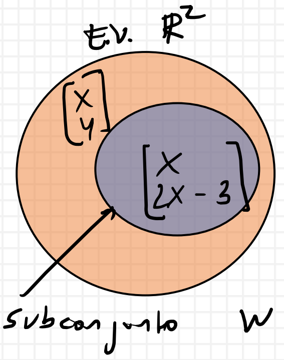


+ Suma de vectores & Multiplicación por escalar **+** 10 axiomas **=** SUB-ESPACIO VECTORIAL

Nota: Debido a que W debe ser también un espacio vectorial por si mismo, debe contener también al vector cero de V. Además, las operaciones definidas para W tienen que ser las mismas que para V.

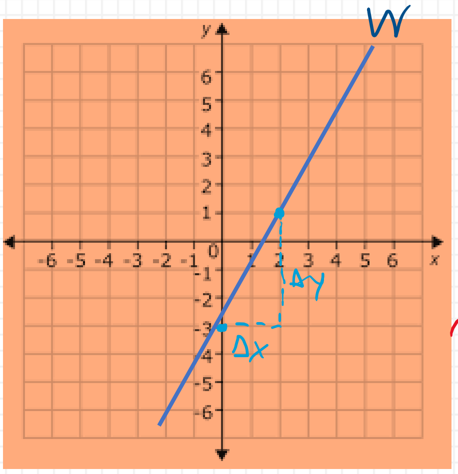
¿Son sub-espacios Vectoriales de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales?

a) Todos los puntos sobre una recta que no pasa por el origen $W = \{[x, y]^T : y = 2x - 3\}$



+ S.V. & M.E. normales + ¿10 axiomas? = ¿S.E.V. W?

Para definir el vector generalizado en un subconjunto tenemos que despejar una variable de la restricción y sustituir en el vector generalizado del E.V.



Definimos $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix} \in W$

3) $0_v + u = u$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + x_1 \\ b + 2x_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix}$$

$a + x_1 = x_1$ $\qquad$ $b + 2x_1 - 3 = 2x_1 - 3$

$a = x_1 - x_1 = 0$ $\qquad$ $b = 2x_1 - 3 - 2x_1 + 3 = 0$

$0_v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ¿$\in W$? ✗

$y = 2x - 3$

$0 = 2(0) - 3$

$0 = -3$ ✗

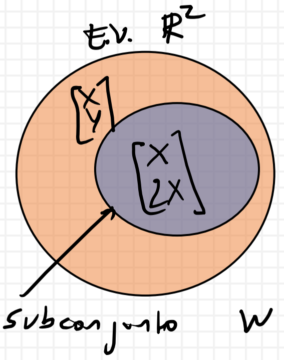
∴ el subconjunto W del Espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales no califica como un S.E.V.

Prueba Simple de Sub-Espacio Vectoriales

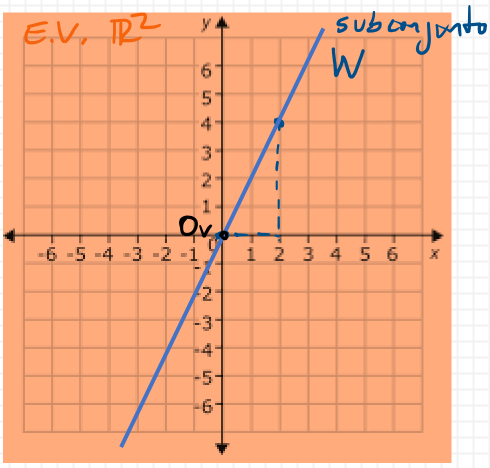
Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V, entonces W es un **sub-espacio vectorial de** V si se **cumplen las dos propiedades de cerradura**, es decir:

1) Si $x, y \in W$ entonces $x + y \in W$ **(cerrado bajo la suma)**
2) Si $\alpha =$ escalar entonces $\alpha x \in W$ **(cerrado bajo la mult. por escalar)**

b) Todos los puntos sobre una recta que pasa por el origen $W = \{[x, y]^T : y = 2x\}$



+ S.V. + M.E. normales + ¿Prueba simple? = ¿S.E.V. W?



Definimos $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $u + v \in W$

$u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$ ¿$\in W$?

$y = 2x$

$2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$

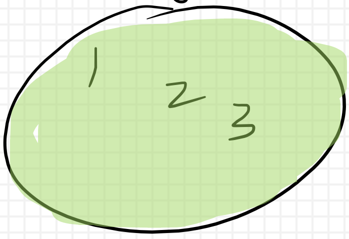
2) $\alpha u \in W$

$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha 2x_1 \end{bmatrix}$ ¿$\in W$?

$y = 2x$

$\alpha 2x_1 = 2(\alpha x_1)$

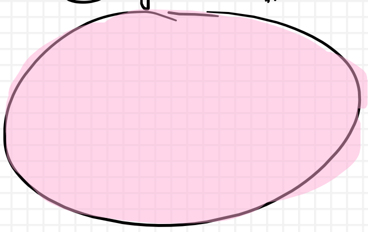
∴ El subconjunto W del E.V. de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales sí califica como un SEV conjunto A



¿ $1 \in A$? ✓

¿ $4 \in A$? ✗

Conjunto $\mathbb{R}^2$



¿ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$? ✓

¿ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$? ✗

¿Qué se debe cumplir para que 2 matrices sean iguales?

* Misma dimensión
* elementos correspondientes iguales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Son sub-espacios Vectoriales de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales?

a) Todos los puntos sobre una recta que no pasa por el origen $W = \{[x, y]^T : y = 2x - 3\}$

$\{ \}$ → conjunto

$:$ → tal que

$y = 2x - 3$ → restricción

¿ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$? ✗

$y = 2x - 3$

$1 = 2(1) - 3$

$1 = -1$ ✗

¿ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in W$? ✓

$y = 2x - 3$

$-1 = 2(1) - 3$

$-1 = -1$ ✓

Combinación lineal y espacio generado

Se ha visto que todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

en cuyo caso se dice que **v** es una *combinación lineal* de los tres vectores **i**, **j** y **k**. De manera más general, se tiene la siguiente definición.

Definición 5.3.1

Combinación lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\boxed{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \qquad (5.3.1)$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

¿Es posible representar al vector $v = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ como C. L. de los vectores $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$?

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + -1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

sí, ya que existen escalares $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ y $a_3 = 3$ con los que podemos representar a v como C.L. de v_1, v_2 y v_3.

¿Es posible representar a $v = \begin{bmatrix}-3 & 2 & 8\\-1 & 9 & 3\end{bmatrix} \in M_{23}$ como C. L. de las matrices $v_1 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 4\\1 & 1 & 5\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\-2 & 3 & -6\end{bmatrix}$?

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 2 & 8\\-1 & 9 & 3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}-1 & 0 & 4\\1 & 1 & 5\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\-2 & 3 & -6\end{bmatrix}$$

sí, ya que existe $a_1 = 3$ y $a_2 = 2$

Definición 5.3.2

Conjunto generador

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\boxed{\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n} \qquad (5.3.2)$$

¿Es $V = \{i, j\}$ un conjunto generador para $\mathbb{R}^2$?

sí, ya que todo vector en $\mathbb{R}^2$ lo puedo representar como C.L. de los vectores en el conjunto V.

¿Es $V = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$ un conjunto generador para $\mathbb{R}^2$?

sí, ya que todo vector en $\mathbb{R}^2$ lo puedo representar como C.L. de los vectores en el conjunto V.

* Defina un C.G. para P_2: ← polinomios de grado igual o menor que 2.

$$V=\{x^0, x^1, x^2\}$$

$$-2x^2+3x-7 = -7(x^0)+3(x^1)+(-2)(x^2)$$

* Defina un C.G. para M_{22}:

$$V=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

pág 317

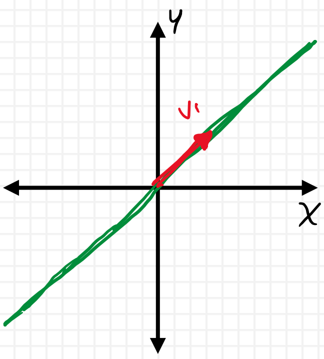
D Definición 5.3.3

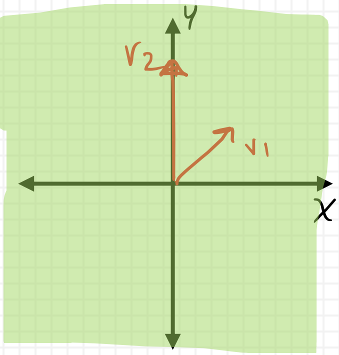
Espacio generado por un conjunto de vectores

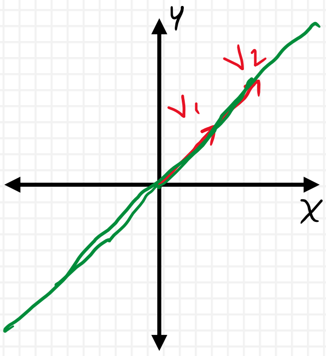
Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El **espacio generado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Es decir

$$\boxed{\text{gen }\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots, + a_k\mathbf{v}_k\}} \qquad \textbf{(5.3.3)}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son escalares arbitrarios.



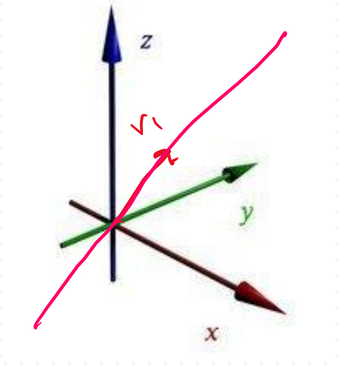


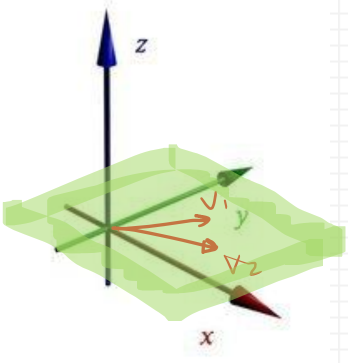


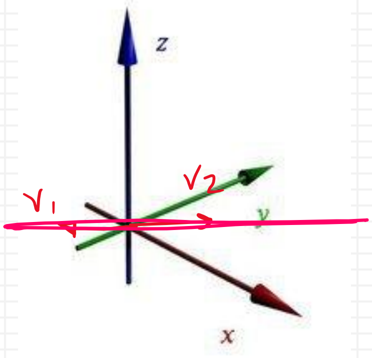
$\text{gen}\{v_1\} = \{v : v = a_1 v_1\}$

$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$

E.V. R^3

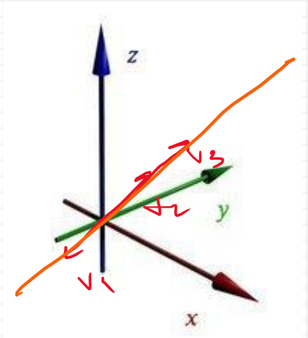


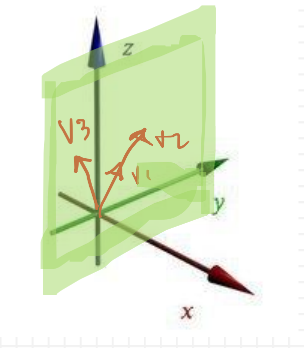


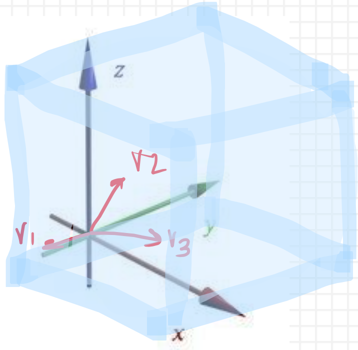


$\text{gen}\{v_1\} = \{v : v = a v_1\}$

$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$

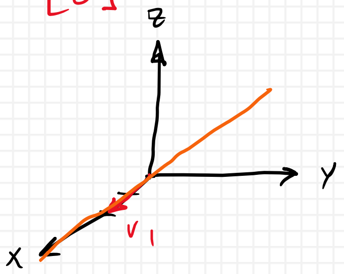






$\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3\}$

¿Cuál es el espacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$?



$$\text{gen}\{v_1\} = \{v : v = a_1 v_1\}$$

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}}\right\}$$

$$a_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{c|c}2 & x\\0 & y\\0 & z\end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{2}R_1]{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{c|c}1 & \frac{x}{2}\\0 & y\\0 & z\end{array}\right] \begin{array}{l}\to a_1 = \frac{x}{2}\\ \to 0 = y\\ \to 0 = z\end{array}$$

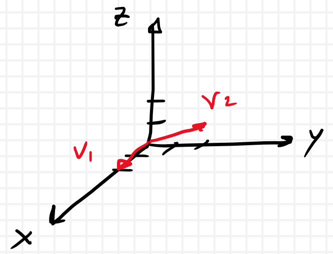
¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$y = 0$ y $z = 0$

Conclusión:

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : y = 0, z = 0\right\}$$

¿Cuál es el espacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$?



$$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \{v : v = a_1 v_1 + a_2 v_2\}$$

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : \underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}}\right\}$$

$$a_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c}2 & 0 & x\\0 & 2 & y\\0 & 1 & z\end{array}\right] \xrightarrow{\text{G.J.}} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & \frac{x}{2}\\0 & 1 & \frac{y}{2}\\0 & 0 & z - y/2\end{array}\right] \to 0 = z - y/2$$

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$z - \frac{y}{2} = 0$

conclusión:

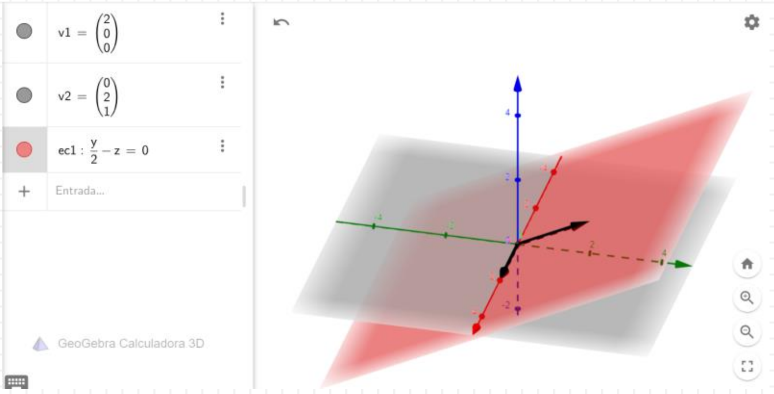
$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} : \frac{y}{2} - z = 0\right\}$$

```
clear;
close;
clc;

syms x y z;
MA = [2 0 x;0 2 y;0 1 z]

%EGJ_MA = rref(MA) % Eliminación de Gauss-Jordan

[L,EG_MA] = lu(MA)   % Eliminación Gaussiana
```



¿Cuál es el espacio generado por $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

Por amor al arte, si gustan...

Teorema 5.3.1 El espacio generado por vectores es un subespacio vectorial

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

Teorema 5.3.2

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$, $n + 1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan uno o más vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador.

Resumen 5.3

- Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es un espacio vectorial V es la suma de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

  donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

- El **espacio generado por un conjunto de vectores** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

- gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

* Sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

* Forma matricial $\quad Ax = b$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$A \rightarrow$ matriz de coeficientes
$x \rightarrow$ vector incógnitas
$b \rightarrow$ vector de constantes

* Matriz aumentada $[A|b]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right]$$

TIPOS DE SOLUCIÓN DE UN SEL.

sol única

$$\begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \rightarrow x_1 = 4 \\ \rightarrow x_2 = 3 \\ \rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

infinitas sols.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 4 \\ \rightarrow 0 = 0 \\ \rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

sin sol.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \rightarrow x_1 = 4 \\ \rightarrow 0 = 1 \\ \end{array}$$

Inconsistencia matemática

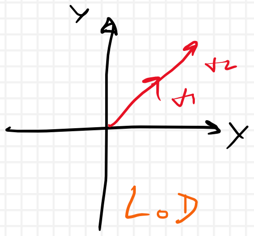
Definición 5.4.1

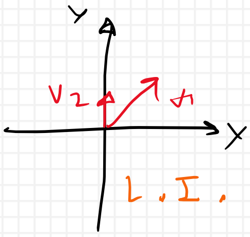
Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5.4.3}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.





$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$V_2 = \alpha V_1$

$V_2 = 2V_1$

$2V_1 - V_2 = 0_V$

$C_1V_1 + C_2V_2 = 0_V$

$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$V_2 \neq \alpha V_1$

EJEMPLO 5.4.4 Determinación de la dependencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = 0_V$

$C_1\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to c_1 = -2c_3 \\ \to c_2 = -3c_3 \\ \to 0 = 0 \end{array}$$

como C_1, C_2, C_3 no todos son ceros concluimos que V_1, V_2, V_3 son L.D.

EJEMPLO 5.4.3 Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = 0_V$

$C_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to C_1 = 0 \\ \to C_2 = 0 \\ \to C_3 = 0 \end{array}$$

Como $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, concluimos que V_1, V_2, V_3 son L.I.

e) $v_1=\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}4\\7\\-6\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}18\\-11\\4\end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix}2\\-7\\3\end{bmatrix}$

Respuesta:

$c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4=0_v$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

$$c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}4\\7\\-6\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}18\\-11\\4\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}2\\-7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2&4&18&2\\-3&7&-11&-7\\4&-6&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4 vectores de $\mathbb{R}^3$

$4>3$

Esto nos lleva a un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas c_1,c_2,c_3,c_4

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2&4&18&2&0\\-3&7&-11&-7&0\\4&-6&4&3&0\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-\frac{141}{192}&0\\0&1&0&-\frac{3}{4}&0\\0&0&1&\frac{69}{192}&0\end{array}\right]$$

$\rightarrow c_1=\frac{141}{192}c_4$

$\rightarrow c_2=3/4\,c_4$

$\rightarrow c_3=-\frac{69}{192}c_4$

El sistema tiene soluciones infinitas,

Son linealmente dependientes.

Teorema 3:
Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n>m$

Corolario: Un conjunto de vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ tiene a lo más n vectores.

Teorema 4:
Un conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ genera todo $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5: Sea $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

$c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n=0_v$

$Ac=0$

$c=A^{-1}0$

entonces las columnas (vistas como vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^n$) son **linealmente dependientes si y solo si** el sistema $Ac=0$ tiene soluciones **no triviales.**

Teorema 6: Si el sistema anterior, $Ac=0$, tiene solo **la solución trivial** entonces los vectores columnas son linealmente independientes.

En otras palabras, si $\det(A)=0$ las columnas de A son **linealmente dependientes**, y si $\det(A)\neq 0$ las columnas de A son **linealmente independientes**.

Los teoremas anteriores se obtienen directamente del método que hemos usado para probar dependencia lineal de un conjunto de vectores.

E) verificar dependencia lineal de $v_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}$

Como tenemos 3 vectores de $\mathbb{R}^3$, podemos usar el teorema 6

$A=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&0&-1\\4&2&5\end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&0&-1\\4&2&5\end{vmatrix}=-1\neq 0 \quad \therefore\ v_1,v_2,v_3$ son L.I.

E ¿Para qué valores de a los siguientes vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ son L.I?

$$A = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3]$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3a$$

Para que v_1, v_2 y v_3 sean L.I., $|A| \neq 0$

$$3a \neq 0 \rightarrow a \neq 0$$

BASES

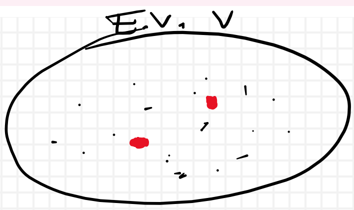
Definición 5.5.1

Base

Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.



Ya se han analizado algunos ejemplos de bases. En el teorema 5.4.7, por ejemplo, se vio que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. De esta forma,

Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ se define

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \; \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base canónica

Puesto que los vectores $\mathbf{e}_i$ son las columnas de una matriz identidad (que tiene determinante 1), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base en $\mathbb{R}^n$. Esta base especial se denomina **base canónica** en $\mathbb{R}^n$. Ahora se encontrarán bases para algunos otros espacios.

Base canónica para P_n

En P_n el conjunto de vectores

$$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$$

genera todo el espacio P_n y son linealmente independientes, son una base para P_n. A esta base se le conoce como **base canónica de** P_n .

Base canónica para M_{22}

Anteriormente se vio que el conjunto de matrices

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

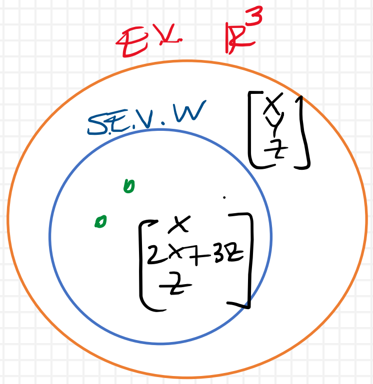
genera todo el espacio M_{22} y se puede notar que son linealmente independientes (***ninguna es combinación lineal de las otras***) por lo tanto ese conjunto es una base para M_{22} .

A esta base se le conoce como **base canónica de** M_{22} .

Una base para un sub-espacio de $\mathbb{R}^3$

Encuentra una base para el conjunto de vectores que se encuentran en el sub-espacio vectorial

$$W = \left\{\begin{bmatrix} x, & y, & z\end{bmatrix}^T : 2x - y + 3z = 0\right\}$$



Primero debemos escribir el vector generalizado para el S.E.V. W.

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}z$$

El conjunto $\left\{v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}\right\}$ genera todo el S.E.V. W. Además, es L.I. ya que $v_2 \neq \alpha v_1$. Por lo tanto dicho conjunto califica como una base para el S.E.V. W.

Verifique si el conjunto es una base de V y obtenga las coordenadas del vector v respecto a esa base.

a) $\left\{\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$ y $v=\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix}$

Para que un conjunto califique como una base se debe cumplir que sean L.I. y que generen todo el E.V. Primero verificamos I.L.

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\\1 & 2 & 1\end{vmatrix} = -11 \neq 0 \quad \therefore \quad v_1, v_2, v_3 \text{ son L.I.}$$

Además, del teorema 4 sabemos que 3 vectores L.I. de $\mathbb{R}^3$ genera todo $\mathbb{R}^3$ por tanto, el conjunto dado sí califica como una base para $\mathbb{R}^3$.

Para obtener las coordenadas de v respecto a la base dada hacemos

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 0 & -3\\-2 & -1 & 2 & 4\\1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -13/11\\0 & 1 & 0 & 6/11\\0 & 0 & 1 & 12/11\end{array}\right] \begin{array}{l}\to c_1 = -13/11\\ \to c_2 = 6/11\\ \to c_3 = 12/11\end{array}$$

Las coordenadas de v respecto a la base dada son:

$c_1 = -13/11$
$c_2 = 6/11$
$c_3 = 12/11$

Coordenadas de un vector respecto a una base.

Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base para el espacio vectorial V y si $v \in V$ entonces existe un **conjunto único** de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tales que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Al conjunto de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ se le llama **coordenadas de** v **respecto a la base** $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Definición: Si el espacio vectorial *V* tiene una base con un número finito de vectores, entonces:

- La **dimensión de** *V* es el **número** de vectores en su base.
- *V* es un **espacio vectorial de dimensión finita**.
- Si $V = \{0_v\}$ entonces tiene **dimensión cero**.
- La dimensión de *V* se denota por $\dim V$

Ejemplo:

¿Cuál es la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$? $\dim \mathbb{R}^n = n$ ✓

¿Cuál es la dimensión del espacio P_n ? $\dim P_n = n+1$ ✓

¿Cuál es la dimensión del espacio M_{22} ? $\dim M_{22} = 4$

¿Cuál es la dimensión de $V=\{0_v\}$? $\dim V = 0$ ✓

¿Cuál es la dimensión del espacio M_{mn}? $\dim M_{mn} = mn$

¿Cuál es la dimensión del espacio de todos los polinomios *P*? $\dim P = \infty$

Teorema 7: Suponga que $\dim V = n$. Si $u_1,\cdots,u_m$ es un conjunto de vectores **linealmente independientes**, entonces $m \le n$.

Teorema 8: Sea ***H*** un sub-espacio de un **espacio de dimensión finita** *V* entonces

$$\dim H \le \dim V$$

Discusión: ¿Qué dimensión tienen todos los sub-espacios de $\mathbb{R}^3$? ¿Y de $\mathbb{R}^2$?

≤ 3 $\qquad$ ≤ 2

$0, 1, 2, 3$

S.E.L. no-homogéneos

$$Ax = b$$

Desp. x

$$A^{-1}(Ax = b)$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

3 tipos soluciones:

* sol. única
* infinitas
* sin sol.

S.E.L. homogéneos

$$Ax = 0$$

Desp. x

$$x = A^{-1}0$$

2 tipos soluciones:

* sol. única (trivial)
* infinitas

$|A| \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ existe $\rightarrow x = 0$

$|A| = 0 \rightarrow A^{-1}$ no existe

¿El conjunto $V = \{x^2+1, x+2\}$ genera a P_2?

R: el conjunto V no genera a P_2, ya que sólo hay 2 vectores en dicho conjunto. Para que un conjunto pueda generar a P_2 necesitamos 3 vectores L.I.

$P_2 \to$ polinomios de grado igual o menor que 2

$\dim P_2 = 3$

Base $\to$ conjunto de vectores que cumplen
- I.L.
- genera a todo V

6.1 Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

En $\mathbb{R}^n$ se vio que n vectores linealmente independientes constituyen una base. La base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es la de mayor uso. Estos vectores tienen dos propiedades:

i) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $i \neq j$

ii) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

Definición 6.1.1

Conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal** si

ortogonalidad $\rightarrow$ $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ si $i \neq j$ (6.1.1)

normalidad $\rightarrow$ $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ (6.1.2)

Si sólo se satisface la ecuación (6.1.1) se dice que el conjunto es **ortogonal**.

$u \perp v \longrightarrow u \cdot v = 0$

$|u| = 1 \longrightarrow |u|^2 = u \cdot u$

E) Verificar si la sig. base de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal o no.

$$B = \left\{ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

✓ ortogonalidad:

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_1 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_2 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

✓ normalidad:

$$u_1 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$u_2 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$u_3 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$\therefore$ La base dada sí califica como una B.O. de $\mathbb{R}^3$.

De hecho, siempre se cumple que:

Teorema:

Si $\boldsymbol{S}$ es un **conjunto ortogonal** de vectores diferentes de cero, entonces $\boldsymbol{S}$ es **linealmente independiente**.

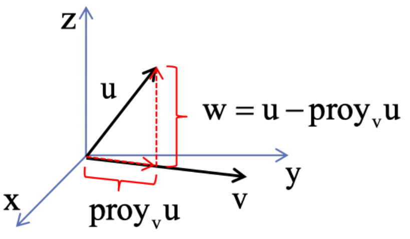
¿Cómo obtener una **base ortonormal** de una que no lo es?

Recuerdan que de dos vectores **u** y **v**, obteníamos un vector ortogonal a **v** por medio de

$$\mathrm{w} = \mathrm{u} - \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2}\mathrm{v}$$

donde

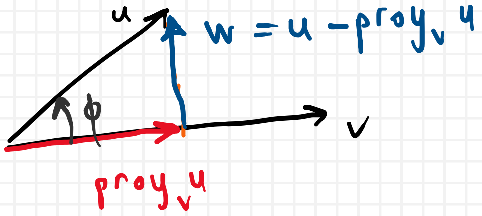
$$\mathrm{proy}_{\mathrm{v}}\mathrm{u} = \frac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2}\mathrm{v}$$



Ese principio usaremos en el **Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt**.

$u \cdot v \rightarrow$ u punto v

$|v| \rightarrow$ magnitud de v



$\mathrm{proy}_v u \rightarrow$ proyección de u sobre v

$$\mathrm{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

$v \perp w$

$\mathrm{proy}_v u \perp w$

$\mathrm{proy}_u v \parallel v$

Fórmula de ángulo entre vectores

$$\cos\phi = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

trigonometría

$$\cos\phi = \frac{c.a.}{hip} = \frac{|\mathrm{proy}_v u|}{|u|}$$

Igualando nos queda

$$\frac{|\mathrm{proy}_v u|}{\cancel{|u|}} = \frac{u \cdot v}{\cancel{|u|}|v|}$$

$$|\mathrm{proy}_v u| = \frac{u \cdot v}{|v|} \longrightarrow \mathrm{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|} \frac{v}{|v|}$$

4.2 Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Sea **H** un sub-espacio de dimensión ***m*** de $\mathbb{R}^n$, y sea $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ una base de **H**. Entonces, podemos construir una base ortonormal como:

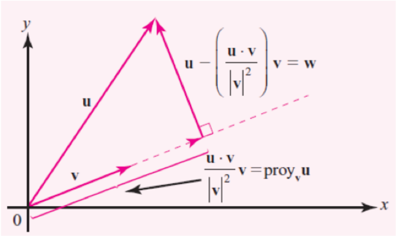
Paso 1: Elección del primer vector unitario.

$$\boxed{u_1=\frac{v_1}{|v_1|}} \longrightarrow u_1\cdot u_1=\frac{v_1}{|v_1|}\cdot\frac{v_1}{|v_1|}=\frac{|v_1|^2}{|v_1|^2}=1$$

Paso 2: Elección de un segundo vector ortogonal a u_1

$$w=u-\frac{u\cdot v}{|v|^2}v \Rightarrow v'_2=v_2-\frac{v_2\cdot u_1}{|u_1|^2}u_1 \xrightarrow{|u_1|=1}$$

$$\boxed{v'_2=v_2-(v_2\cdot u_1)u_1}$$



Paso 3: Elección de un segundo vector unitario

$$\boxed{u_2=\frac{v'_2}{|v'_2|}}$$

Paso 4: Continuación del proceso

$$v'_3=v_3-(v_3\cdot u_1)u_1-(v_3\cdot u_2)u_2 \longrightarrow u_3=\frac{v'_3}{|v'_3|}$$

$$v'_4=v_4-(v_4\cdot u_1)u_1-(v_4\cdot u_2)u_2-(v_4\cdot u_3)u_3 \longrightarrow u_4=\frac{v'_4}{|v'_4|}$$

$$\vdots$$

$$v'_m=v_m-(v_m\cdot u_1)u_1-(v_m\cdot u_2)u_2-\cdots-(v_m\cdot u_{m-1})u_{m-1} \longrightarrow u_m=\frac{v'_m}{|v'_m|}$$

Entonces, $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ es un conjunto de **vectores ortonormales**.

Pero, por el teorema visto anteriormente sabemos que $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ son linealmente independiente (ya que son ortogonales) entonces

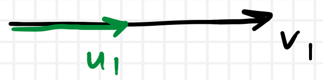
$\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ es una base ortonormal de H

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Sea **H** un sub-espacio de dimensión ***m*** de $\mathbb{R}^n$, y sea $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ una base de **H**. Entonces, podemos construir una base ortonormal como:

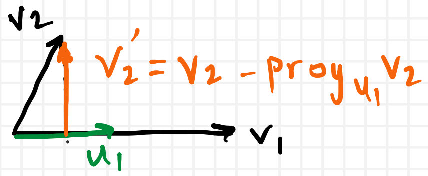
Paso 1.- elección del primer vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$



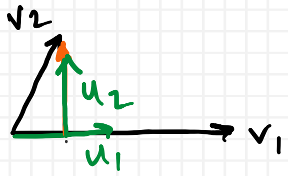
Paso 2.- elección del segundo vector que sea ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - \text{proy}_{u_1} v_2$$
$$= v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{|u_1|^2} u_1$$
$$= v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1$$



Paso 3.- elección del segundo vector unitario

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|}$$



Paso 4.- elección del tercer vector que sea ortogonal a u_1 y u_2

$$v_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1) u_1 - (v_3 \cdot u_2) u_2$$

Paso 5.- elección del tercer vector unitario

$$u_3 = \frac{v_3'}{|v_3'|}$$

$$\vdots$$

$$v_m' = v_m - (v_m \cdot u_1) u_1 - (v_m \cdot u_2) u_2 - \cdots - (v_m \cdot u_{m-1}) u_{m-1}$$

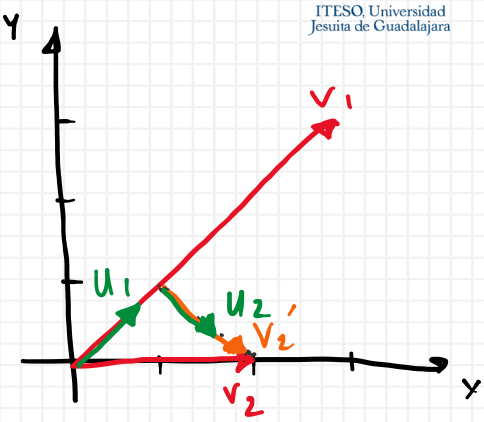
$$u_m = \frac{v_m'}{|v_m'|}$$

La B.O. es $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

5

(E) Construya una B.O. iniciando con la base $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Se puede ver claramente que la base dada no es una B.O., por tanto, aplicaremos el P.O.G.S.



Paso 1.- elección del 1er vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|v_1| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

Paso 2.- elección del 2do vector que es ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Paso 3.- elección del 2do vector unitario.

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{|v_2'|} v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|v_2'| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

Conclusión: la B.O. para $\mathbb{R}^2$ obtenida a partir de la base dada, aplicando el POGS, es:

$$B.O. = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

comprobación:

ortogonalidad

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

normalidad

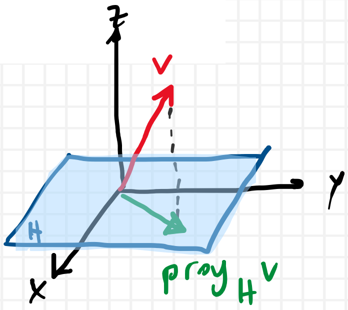
$$u_1 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1$$

$$u_2 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1$$

Sea **H** un sub-espacio de $\mathbb{R}^n$ con base ortonormal $\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ entonces la **proyección ortogonal** de **v** sobre **H** está dada por:

$$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \cdots + (v \cdot u_k)u_k$$

Observe que $\text{proy}_H v$ siempre pertenece a **H**.



Proyección ortogonal de un vector sobre un plano.

Encuentre $\text{proy}_H v$ donde $H = \{(x,y,z)^T : 2x - y + 3z = 0\}$ y $v = [3 \quad -2 \quad 4]^T$.

$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$

1.- Debemos calcular una B.O. para H

Primero calculamos una base para H. Entonces, debemos escribir el vector generalizado de H

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

El conjunto $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera a H, y es LI. ya que $v_2 \neq \alpha v_1$. Por tanto, el conjunto forma una base para H.

Se ve claramente que la base obtenida no es una B.O. Para ortonormalizar la base aplicamos el P.O.G.S.

1.- Elección del 1er vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.- Elección del 2do vector ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.- Elección del 2do vector unitario

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{|v_2'|} v_2' = \frac{1}{\sqrt{(-1.2)^2 + (0.6)^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} -1.2 \\ 0.6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix}$$

La B.O. para H es:

$$\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1) u_1 + (v \cdot u_2) u_2$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.4472 \\ 0.8944 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -0.7171 \\ 0.3586 \\ 0.5976 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1429 \\ -0.5714 \\ -0.2857 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Expresión de un vector en términos de una base ortonormal

Exprese el vector $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en términos de la base ortonormal $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \right\}$

$$v = (v \cdot u_1) u_1 + (v \cdot u_2) u_2 + (v \cdot u_3) u_3$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.7071 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + 1.2247 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} + 3.4641 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

4.5 Matriz Ortogonal

Una matriz Q de nxn es ortogonal si es invertible y se cumple

$$Q^{-1} = Q^T$$

Observe que una consecuencia directa es que $QQ^T = I_n$.

Teorema: La matriz Q de nxn es ortogonal si y solo si las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.

CODIFICACIÓN DE MENSAJES

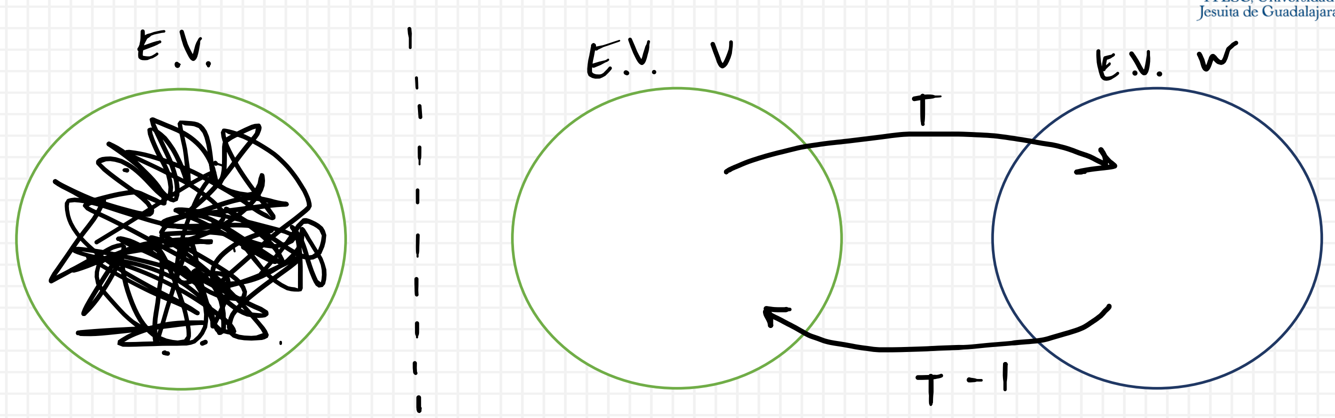
Codificar el mensaje

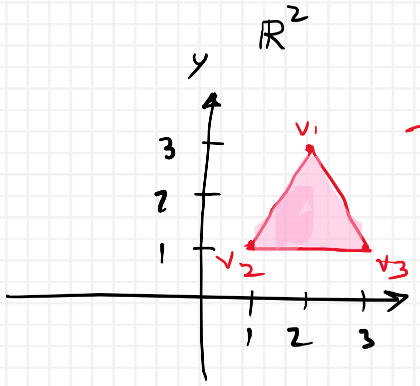
$M_c = A M_0$ → decodificar el msj. $M_0 = A^{-1} M_c$

* Si A es una matriz ortogonal

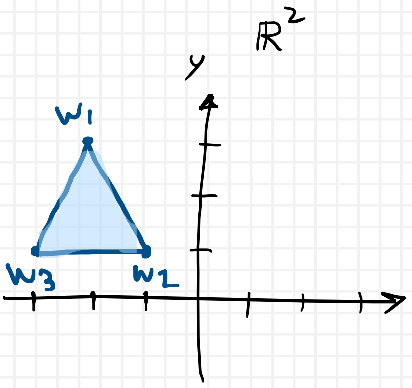
$M_c = A M_0$ → $M_0 = A^T M_c$

TRANSFORMACIONES LINEALES





$\xrightarrow{T}$ reflexión con respecto al eje y



$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_1 = T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = T(v_3) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformación de reflexión con respecto al eje x

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

- Transformación de reflexión con respecto al origen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

- Transformación de alargamiento en el eje x

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

- Transformación de alargamiento en el eje y

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

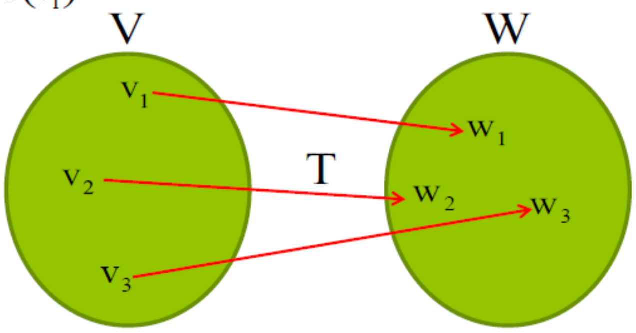
- Transformación de escalamiento uniforme

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

5.1 Definición de una transformación lineal

Sean **V** y **W espacios vectoriales** , una transformación lineal de V en W es una mapeo (correspondencia) $T: V \rightarrow W$ que para $a, b =$ escalares y $v_1, v_2 \in V$ cumple

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2) $T(a v_1) = a T(v_1)$



$T: V \rightarrow W$

T de V en W

Además, siempre cumple que:

1) $T(0_v) = 0_w$
2) $T(v_i - v_j) = T(v_i) - T(v_j)$

Nota: Una transformación lineal también es conocida como operador lineal

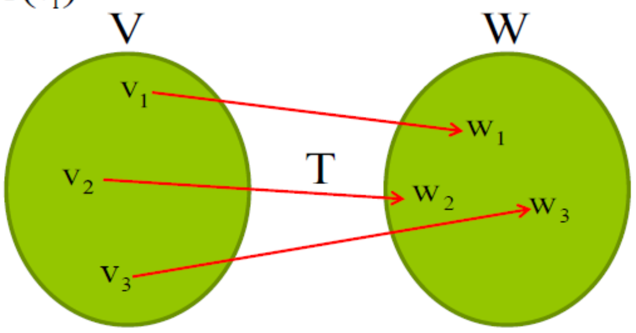
5.1 Definición de una transformación lineal

Sean **V** y **W espacios vectoriales** , una transformación lineal de V en W es una mapeo (correspondencia) $T: V \rightarrow W$ que para $a, b =$ escalares y $v_1, v_2 \in V$ cumple

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2) $T(a v_1) = a T(v_1)$

$T: V \rightarrow W$

T de V en W



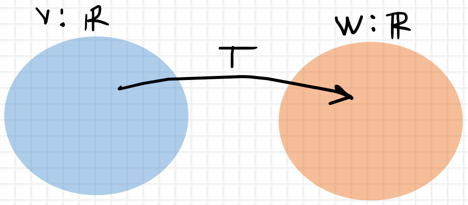
Además, siempre cumple que:

1) $T(0_v) = 0_w$
2) $T(v_i - v_j) = T(v_i) - T(v_j)$

Nota: Una transformación lineal también es conocida como operador lineal

E ¿Son transformaciones lineales?

a) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x$



Definimos $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2 \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$

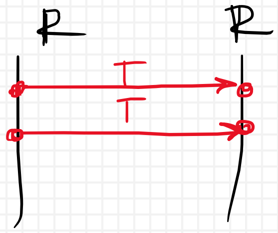
1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

$T(x) = x$

LI $\rightarrow T(v_1 + v_2) = T(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$

LD $\rightarrow T(v_1) + T(v_2) = T(x_1) + T(x_2) = x_1 + x_2$

¿LI = LD? ✓



2) $T(a v_1) = a T(v_1)$

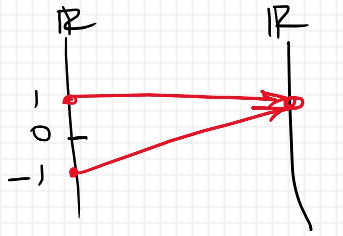
LI $\rightarrow T(a v_1) = T(a x_1) = a x_1$

LD $\rightarrow a T(v_1) = a T(x_1) = a x_1$

¿LI = LD? ✓

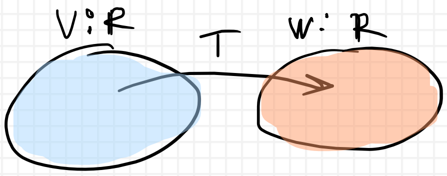
∴ T sí es una transformación lineal (T.L.)

b) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$



Definimos $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2 \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$



LI $\rightarrow T(v_1 + v_2) = T(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2$

$= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$

LD $\rightarrow T(v_1) + T(v_2) = T(x_1) + T(x_2) = x_1^2 + x_2^2$

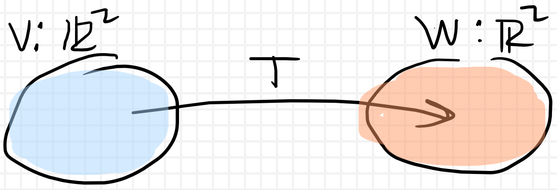
$T(x) = x^2$

¿LI = LD? ✗ ∴ T no es una T.L.

d) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+1\\y\end{bmatrix}$

Definimos $v_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$

y $a\in\mathbb{R}$

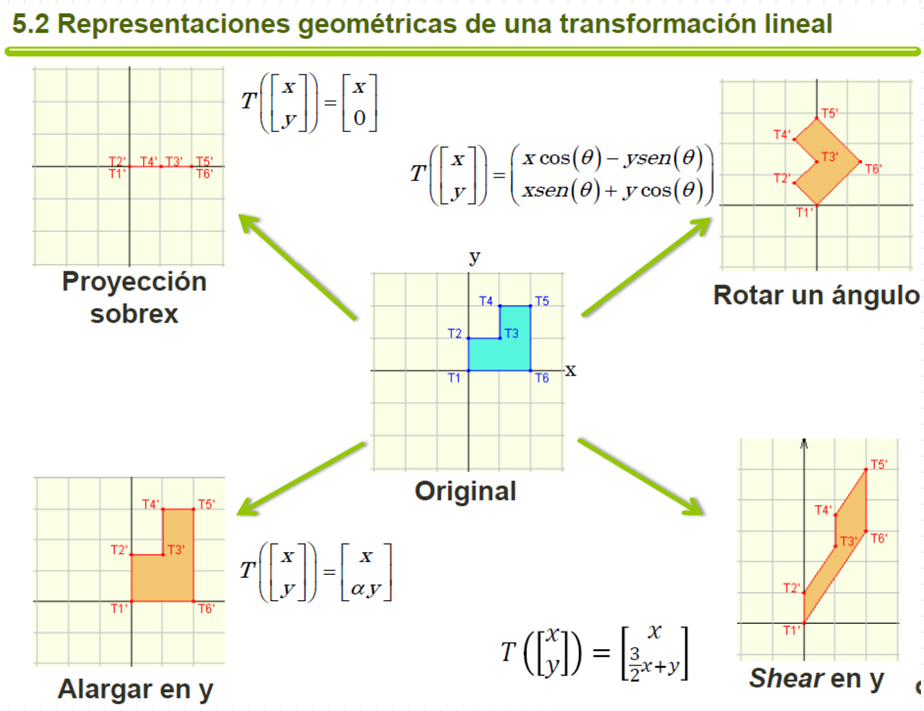


1) $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$

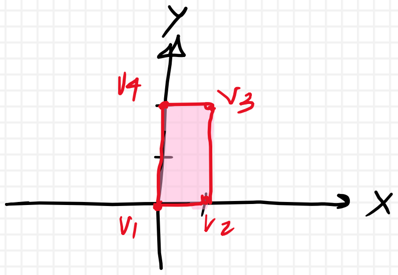
$LI \to T(v_1+v_2)=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+x_2+1\\y_1+y_2\end{bmatrix}$

$LD \to T(v_1)+T(v_2)=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2+1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+2\\y_1+y_2\end{bmatrix}$

¿LI = LD? ✗ $\therefore$ T no es una T.L.



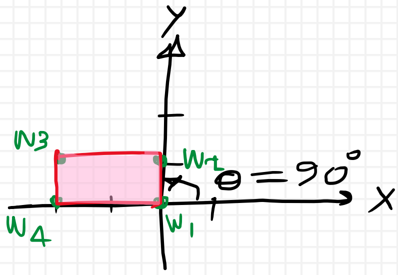
E) Rotar 90° la sig. imagen.



$\xrightarrow{T}$

$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\cos(\theta)-ysen(\theta)\\xsen(\theta)+y\cos(\theta)\end{pmatrix}$

$\theta=90°$



$w_1=T(v_1)=T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\cos 90°-0\,sen 90°\\0\,sen 90°+0\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$w_2=T(v_2)=T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\cos 90°-0\,sen 90°\\1\,sen 90°+0\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$w_3=T(v_3)=T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\cos 90°-2\,sen 90°\\1\,sen 90°+2\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

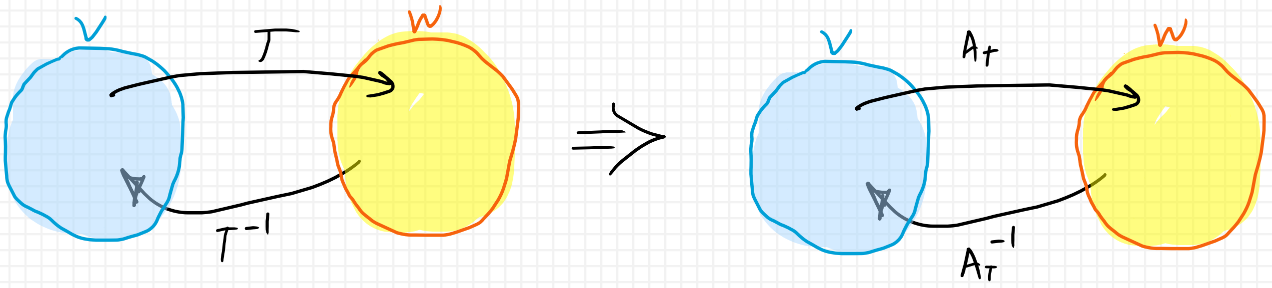
$w_4=T(v_4)=T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\cos 90°-2\,sen 90°\\0\,sen 90°+2\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

5.3 Representación matricial de una transformación lineal

Sea $T: V \rightarrow W$ donde $V \in \mathbb{R}^n$ y $W \in \mathbb{R}^m$. Entonces la matriz asociada a la transformación T es $A_T \in M_{mn}$.
Además, la inversa de la transformación T está definida por la matriz $A_T^{-1} \in M_{nm}$.

Nota: Esto significa que para que una transformación tenga inversa, su matriz asociada **debe ser cuadrada y ser no singular**.

A_T es no singular $\rightarrow |A_T| \neq 0 \longrightarrow A_T^{-1}$ existe



Ejemplo: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y+2x \\ 5y \end{bmatrix}$

a) Encuentre su representación matricial.

b) Determine si la transformación tiene inversa y de ser así, calcularla

Para encontrar la representación matricial de T hacemos:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y+2x \\ 5y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y+2x \\ 5y \end{bmatrix}$$

$(3\times 2)(2\times 1) = (3\times 1)$

La rep. matricial de T es:

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Para que una transformación tenga inversa $|A_T| \neq 0$. En este caso, como A_T no es cuadrada su determinante no se puede calcular y por tanto concluimos que T^{-1} no existe.

6

1) Obtener la representación matricial de $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$

Además, verifique si la transformación tiene inversa, y de ser así calcular

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$$

La rep matricial de T es:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix} \qquad A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$(2\times 2)(2\times 1) = (2\times 1)$$

Para verificar si la T^{-1} existe

$$|A_T| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \therefore \quad A^{-1} \text{ si existe.}$$

De hecho es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1667 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

5.4 Rango y núcleo de una transformación lineal. Transformaciones inversas

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Dominio: Espacio vectorial de origen.

Codominio: Espacio vectorial de destino

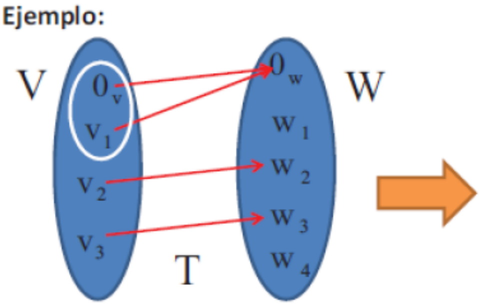
Imagen: Conjunto de todos los elementos del *codominio* que tienen un elemento correspondiente en el dominio. Es un *subespacio vectorial del codominio* (W).

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$$

Núcleo: Conjuntos de todos los elementos del dominio cuyo vector correspondiente en el codominio es el vector cero 0_W. Es un subespacio vectorial del dominio (V).

$$\mathrm{nu}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

Ejemplo:



$$\text{Dominio} = \{0_v, v_1, v_2, v_3\}$$
$$\text{Imagen}(\mathrm{Im}) = \{0_w, w_2, w_3\}$$
$$\text{Codominio} = \{0_w, w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$\text{Núcleo de } T = \mathrm{nu}(T) = \{0_v, v_1\}$$

Nulidad y Rango de una Transformación Lineal

Sean $T : V \to W$ una transformación lineal de V en W, y sea $\mathrm{Im}(T)$ la imagen de **T**, y sea $\mathrm{nu}(T)$ el núcleo de **T**. Entonces,

$$\text{Nulidad de } T = \nu(T) = \dim\{\mathrm{nu}(T)\}$$
$$\text{Rango de } T = \rho(T) = \dim\{\mathrm{Im}(T)\}$$

Además, siempre se cumple que

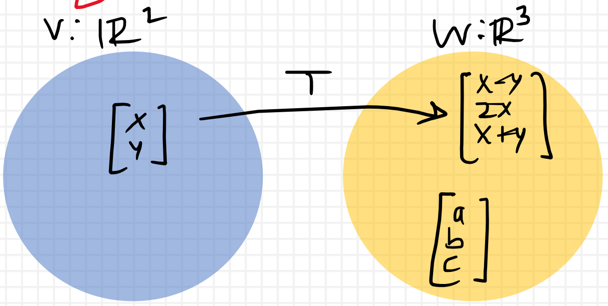
$$\dim V = \dim\{\mathrm{nu}(T)\} + \dim\{\mathrm{Im}(T)\} = \nu(T) + \rho(T)$$

E) Encuentre dominio, codominio, imagen, núcleo, nulidad y rango de:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}$

Dominio: $\mathbb{R}^2$

Codominio: $\mathbb{R}^3$



La imagen de la transformación es:

$$Im(T) = \{w \in W : w = T(v)\}$$

Antes de sustituir la $Im(T)$, vamos a encontrar A_T

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3\times2)(2\times1) = (3\times1)$

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E.G.} \begin{array}{ccc} x & y & \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a+\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right] \end{array}$$

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$$a - b + c = 0$$

Por tanto,

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a-b+c=0 \right\}$$

El rango de la transformación $\rho(T) = \dim(Im(T))$.

Necesitamos encontrar una base para la imagen de T.

$$\begin{bmatrix} b-c \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera a la $Im(T)$ y es LI, por tanto forma una base para la $Im(T)$

$$\rho(T) = \dim(Im(T)) = 2$$

5.4 Rango y núcleo de una transformación lineal. Transformaciones inversas

Dominio: Espacio vectorial de origen.

Codominio: Espacio vectorial de destino

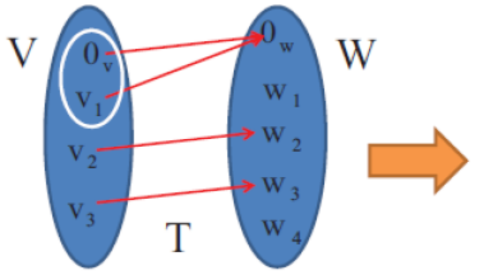
Imagen: Conjunto de todos los elementos del *codominio* que tienen un elemento correspondiente en el dominio. Es un *subespacio vectorial del codominio* (W).

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$$

Núcleo: Conjuntos de todos los elementos del dominio cuyo vector correspondiente en el codominio es el vector cero 0_W. Es un subespacio vectorial del dominio (V).

$$\mathrm{nu}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

Ejemplo:



$$\text{Dominio} = \{0_v, v_1, v_2, v_3\}$$
$$\text{Imagen}\,(\mathrm{Im}) = \{0_w, w_2, w_3\}$$
$$\text{Codominio} = \{0_w, w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$\text{Núcleo de } T = \mathrm{nu}(T) = \{0_v, v_1\}$$

Nulidad y Rango de una Transformación Lineal

Sean $T : V \to W$ una transformación lineal de V en W, y sea $\mathrm{Im}(T)$ la imagen de **T**, y sea $\mathrm{nu}(T)$ el núcleo de **T**. Entonces,

$$\text{Nulidad de } T = \nu(T) = \dim\{\mathrm{nu}(T)\}$$
$$\text{Rango de } T = \rho(T) = \dim\{\mathrm{Im}(T)\}$$

Además, siempre se cumple que

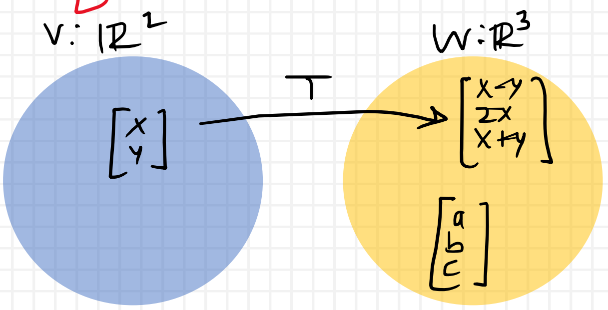
$$\dim V = \dim\{\mathrm{nu}(T)\} + \dim\{\mathrm{Im}(T)\} = \nu(T) + \rho(T)$$

E) Encuentre dominio, codominio, imagen, núcleo, nulidad y rango de:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}$

Dominio: $\mathbb{R}^2$ ✓

Codominio: $\mathbb{R}^3$ ✓



La imagen de la transformación es:

$$Im(T) = \{ w \in W : w = T(v) \}$$

Antes de sustituir la $Im(T)$, vamos a encontrar A_T

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3\times 2)(2\times 1) = (3\times 1)$

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E.G.} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a+\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right] \end{array}$$

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$$a - b + c = 0$$

Por tanto,

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0 \right\}$$

El rango de la transformación $\rho(T) = \dim(Im(T))$.
Necesitamos encontrar una base para la imagen de T.

$$\begin{bmatrix} b-c \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera a la $Im(T)$ y es LI, por tanto forma una base para la $Im(T)$

$$\rho(T) = \dim(Im(T)) = 2$$

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$$

El núcleo de la transformación:

$$nu(T) = \{ v \in V : T(v) = 0_W \}$$

$$nu(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to x = 0 \\ \to y = 0 \\ \to 0 = 0 \end{array}$$

$$nu(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0,\ y = 0 \right\}$$

La nulidad de la transformación $\nu(T) = \dim\{nu(T)\}$.
Necesitamos obtener una base para el núcleo de T.
El vector generalizado para $nu(T)$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ genera a $nu(T)$ y es LI por tanto forma una base para $nu(T)$.

$$\nu(T) = \dim(nu(T)) = 0$$

* Comprobación:

$$\dim V = \rho(T) + \nu(T)$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = \rho(T) + \nu(T)$$

$$2 = 2 + 0$$

Una Transformación Lineal se Determina por su Efecto sobre las Bases

Teorema: Sea ***V*** un espacio vectorial de dimensión finita con base $B_V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y sea una transformación lineal $T : V \to W$, entonces para cada vector $v \in V$ se cumple que

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

Para un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$.

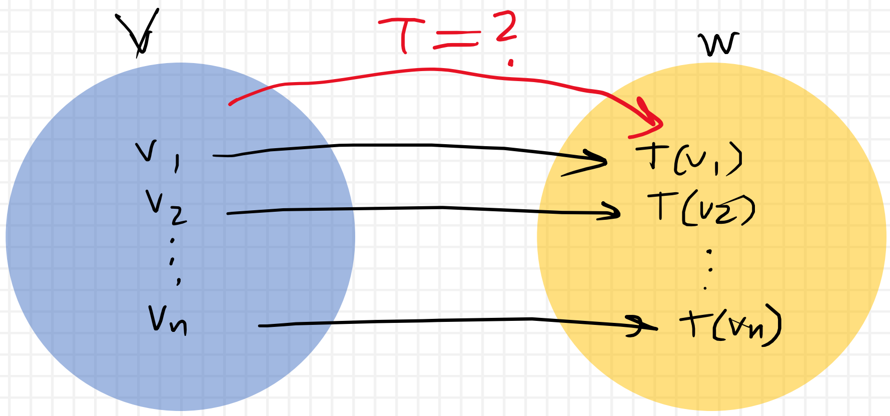
Demostración: Dado que $B_V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de ***V*** se cumple que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Y por las propiedades de transformación lineal tenemos que

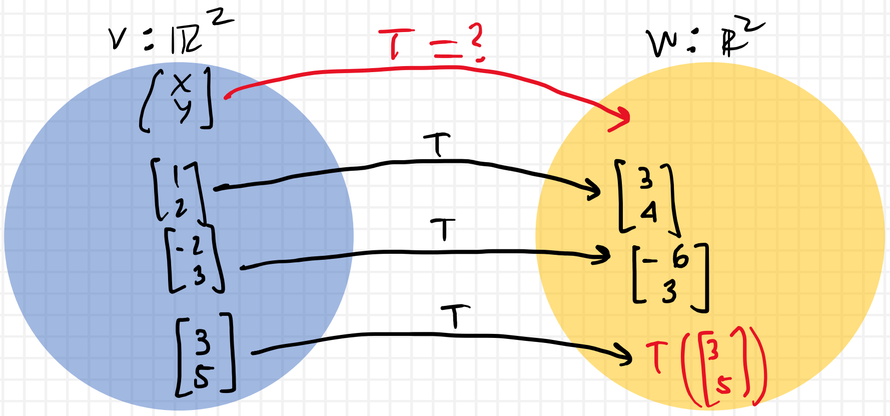
$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + \cdots + T(\alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \end{aligned}$$

Este teorema nos permite definir una transformación lineal, solo conociendo una **base para *V*** y la **transformación de los vectores de la base**, como veremos a continuación...



$B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Ejemplo: Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ una base para $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$. Calcule $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ y $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right)$



$B_V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Dado B_v es una base para $\mathbb{R}^2$

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, $B_v = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

la matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3x}{7} + \frac{2y}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2x}{7} + \frac{y}{7} \end{array}\right] \begin{array}{l} \to \alpha_1 = \frac{3x}{7} + \frac{2y}{7} \\ \to \alpha_2 = -\frac{2x}{7} + \frac{y}{7} \end{array}$$

El teorema nos dice

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{3x}{7} + \frac{2y}{7}\right) T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + \left(-\frac{2x}{7} + \frac{y}{7}\right) T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$$

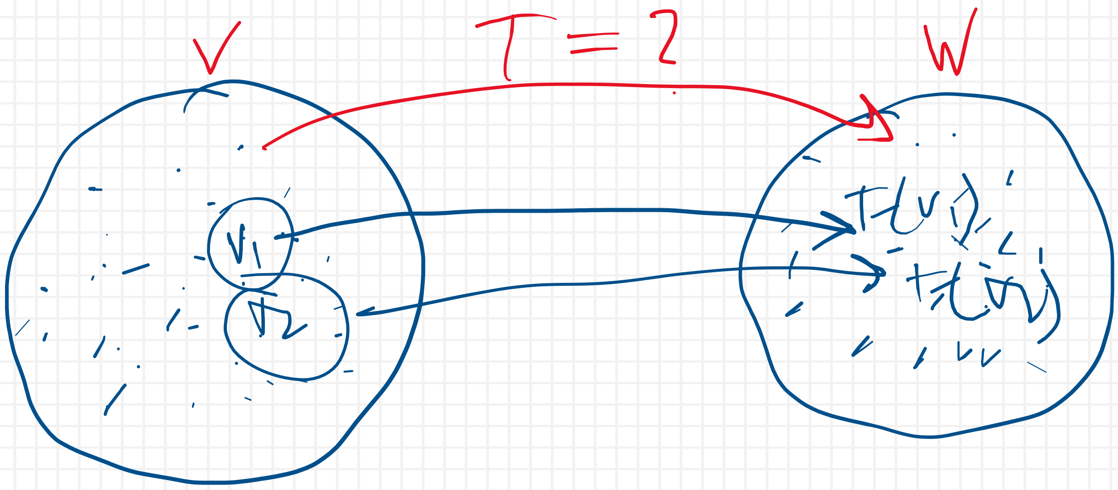
$$= \left(\frac{3x}{7} + \frac{2y}{7}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \left(-\frac{2x}{7} + \frac{y}{7}\right) \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ \frac{6x}{7} + \frac{11y}{7} \end{bmatrix}$$

La transformación generalizada es:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ \frac{6x}{7} + \frac{11y}{7} \end{bmatrix}$$

Aplicar la transformación:

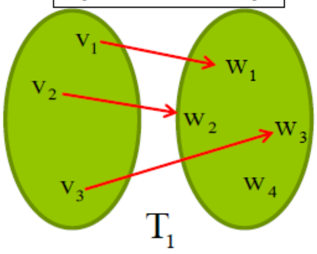
$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(3) \\ \frac{6(3)}{7} + \frac{11(5)}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10.4286 \end{bmatrix}$$



Tipos de Transformaciones Lineales

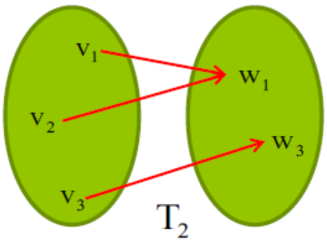
ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Inyectiva (uno a uno)



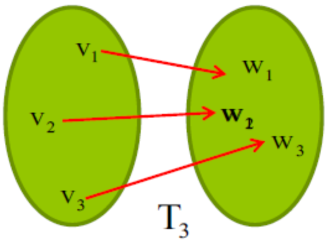
Si para cada **w**, existe **solo** un **v** correspondiente.

Suprayectiva



Si la **imagen** y el **codominio** son **iguales.**

Biyectiva



Inyectiva + Suprayectiva

¿Cuáles de estas transformaciones tienen inversa?

Inyectiva (uno a uno) y biyectiva. Podemos calcular el vector del dominio correspondiente a cada vector en la imagen.

Nota: Una transformación es Inyectiva (uno a uno) **si tiene transformación inversa.**

¿Cómo calcular la inversa de una transformación?...

Del ejercicio 1:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿La T.L. es inyectiva? No es inyectiva porque no existe A_T^{-1}.

¿La T.L. es suprayectiva?

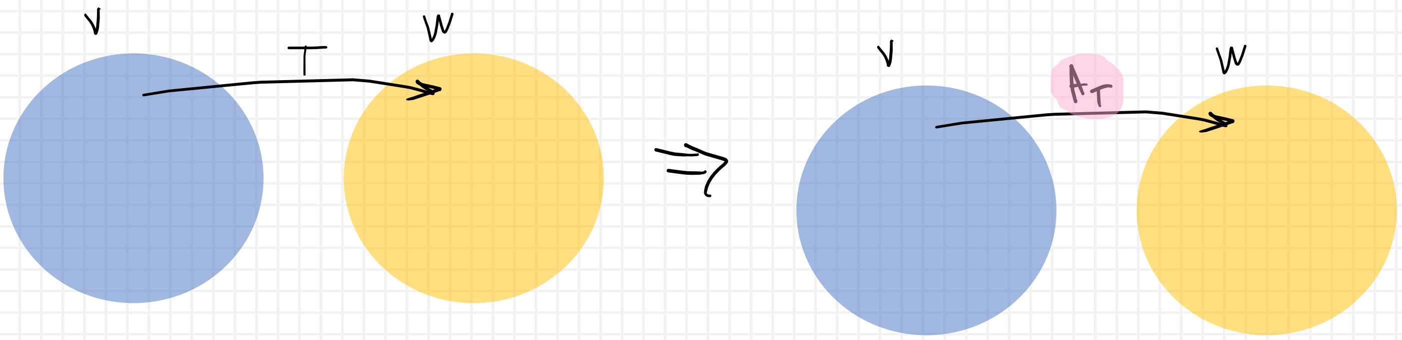
codominio $=$ $Im(T)$

$$\mathbb{R}^3 \neq \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a-b+c=0 \right\}$$

No es suprayectiva. Por tanto, tampoco será biyectiva.

VALORES Y VECTORES PROPIOS

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara



Valores y Vectores Propios

Sea $T: V \to W$ una transformación con una matriz asociada A. En muchas aplicaciones (algunas las veremos después) es útil encontrar un vector v y un escalar λ tal que se cumpla

$$Av = \lambda v \xrightarrow{\text{Si se cumple}} \begin{array}{l} \lambda \Rightarrow \text{valor propio de A} \\ v \neq 0 \Rightarrow \text{vector propio de A (correspondiente a } \lambda) \end{array}$$

Nombres equivalentes

valor propio	vector propio
eigenvalor	eigenvector
autovalor	autovector
valor característico	vector característico

Para calcularlos, primero se nota que

$$Av - \lambda v = 0$$
$$(A - \lambda I)v = 0$$

Resulta en un sistema homogéneo. Ahora, si $v \neq 0$ (**no solución trivial**) significa que el sistema deberá **infinitas soluciones**. Por lo tanto

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esta última ecuación (llamada **ecuación característica**) nos servirá para encontrar los valores y vectores propios de A.
El determinante resulta en un polinomio de λ como $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ llamado polinomio característico.

Algunos hechos importantes antes de los cálculos…

Teorema Fundamental del Álgebra: Cualquier polinomio **P(x)** de grado **n** (es decir la potencia más grande de **x** es **n**) tiene exactamente **n** raíces, contando multiplicidades.

$x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2$ raíces $\longrightarrow$ $x^3 + 1 \Rightarrow 3$ raíces $\longrightarrow$ $x^4 + 3x \Rightarrow 4$ raíces

Podemos concluir: Cualquier matriz de **nxn** tiene exactamente **n** valores propios, contando multiplicidades.

<u>Espacio Característico:</u> Sea λ un valor característico de la matriz **A(nxn)** con vector característico **v**, entonces

$$E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$$

es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ conocido como **espacio característico** de **A** correspondiente a λ.

<u>Teorema:</u> Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ valores propios diferentes de la matriz **A**, con vectores propios correspondientes $v_1, \cdots, v_m$. Entonces $v_1, \cdots, v_m$ son **linealmente independientes**.

Multiplicidad Algebraica: El número de veces que se repite un valor propio λ para una matriz **A** se denomina ***multiplicidad algebraica*** de λ.

Ejemplo: Sean $\{1, 1, -2, -2, -2\}$ los valores propios de la matriz **A(5x5)**. Entonces

Mult. Alg. de $\lambda = 1$ es 2.

Mult. Alg. de $\lambda = -2$ es 3.

(E) Calcular valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

1.- encontrar el polinomio característico $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$
$$= \left| \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = 6 - 7\lambda + \lambda^2$$

2.- encontrar las raíces de $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

$\lambda - 1 = 0$ $\qquad$ $\lambda - 6 = 0$

$\lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = 6$

los valores propios de A son:

$\lambda_1 = 1$, $m.a = 1$

$\lambda_2 = 6$, $m.a = 1$

Para encontrar los vectores propios

para $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} x_2$$
$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

si $x_2 = 1$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para $\lambda_2 = 6$

$(A - \lambda_2 I) v_2 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = x_2$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

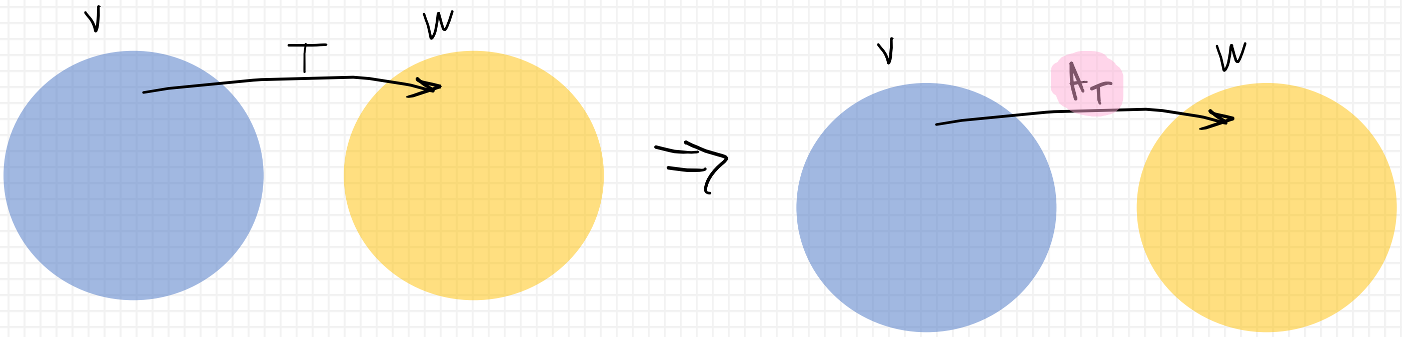
si $x_2 = 1$:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

VALORES Y VECTORES PROPIOS



Valores y Vectores Propios

Sea $T: V \longrightarrow W$ una transformación con una matriz asociada A. En muchas aplicaciones (algunas las veremos después) es útil encontrar un vector v y un escalar λ tal que se cumpla

$$Av = \lambda v \xrightarrow{\text{Si se cumple}} \begin{array}{l} \lambda \Rightarrow \text{valor propio de A} \\ v \neq 0 \Rightarrow \text{vector propio de A (correspondiente a } \lambda) \end{array}$$

Nombres equivalentes

valor propio	vector propio
eigenvalor	eigenvector
autovalor	autovector
valor característico	vector característico

Para calcularlos, primero se nota que

$$Av - \lambda v = 0$$
$$(A - \lambda I)v = 0$$

Resulta en un sistema homogéneo. Ahora, si $v \neq 0$ (**no solución trivial**) significa que el sistema deberá **infinitas soluciones**. Por lo tanto

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esta última ecuación (llamada **ecuación característica**) nos servirá para encontrar los valores y vectores propios de A.
El determinante resulta en un polinomio de λ como $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ llamado polinomio característico.

Algunos hechos importantes antes de los cálculos…

Teorema Fundamental del Álgebra: Cualquier polinomio **P(x)** de grado **n** (es decir la potencia más grande de **x** es **n**) tiene exactamente **n** raíces, contando multiplicidades.

$$x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2 \text{ raíces} \longrightarrow x^3 + 1 \Rightarrow 3 \text{ raíces} \longrightarrow x^4 + 3x \Rightarrow 4 \text{ raíces}$$

Podemos concluir: Cualquier matriz de **nxn** tiene exactamente **n** valores propios, contando multiplicidades.

<u>Espacio Característico:</u> Sea λ un valor característico de la matriz **A(nxn)** con vector característico **v**, entonces

$$E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$$

es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ conocido como **espacio característico** de **A** correspondiente a λ.

<u>Teorema:</u> Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ valores propios diferentes de la matriz **A**, con vectores propios correspondientes $v_1, \cdots, v_m$. Entonces $v_1, \cdots, v_m$ son **linealmente independientes**.

Multiplicidad Algebraica: El número de veces que se repite un valor propio λ para una matriz **A** se denomina ***multiplicidad algebraica*** de λ.

Ejemplo: Sean $\{1, 1, -2, -2, -2\}$ los valores propios de la matriz **A(5x5)**. Entonces

$$\text{Mult. Alg. de } \lambda = 1 \text{ es } 2.$$
$$\text{Mult. Alg. de } \lambda = -2 \text{ es } 3.$$

(E) Calcular valores y vectores propios de
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

1.- encontrar el polinomio característico $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$
$$= \left| \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = 6 - 7\lambda + \lambda^2$$

2.- encontrar las raíces de $p(\lambda)$

$$p(\lambda) = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda - 6 = 0$$
$$\lambda = 1 \qquad \lambda = 6$$

los valores propios de A son:

$\lambda_1 = 1$, $m.a = 1$

$\lambda_2 = 6$, $m.a = 1$

Para encontrar los vectores propios

para $\lambda_1 = 1$

$$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0$$
$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} x_2$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

si $x_2 = 1$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para $\lambda_2 = 6$

$(A - \lambda_2 I)\, v_2 = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = x_2$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

si $x_2 = 1$:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El espacio característico:

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Multiplicidad Geométrica

La **multiplicidad geométrica** de un valor propio λ es la dimensión del espacio característico correspondiente a λ.

$$\text{Mult. Geométrica de } \lambda = \dim(E_\lambda)$$

Note que en los **ejercicios anteriores, la multiplicidad geométrica** de todos los valores propios obtenidos **es 1**.

Propiedad: $\text{Mult. Geométrica de } \lambda \leq \text{Mult. Algebraica de } \lambda$

Ejemplo: Calcule los valores y vectores propios y su multiplicidad algebraica y geométrica.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1.- polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$$

2.- encontrar las raíces de $p(\lambda) = 0$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0 \xrightarrow{\text{roots}(p)} \begin{matrix} \lambda_1 = 8, & m.a. = 1 \\ \lambda_2 = -1, & m.a. = 2 \end{matrix}$$

3.- Encontramos los vectores propios asociados a cada valor propio.

para $\lambda_1 = 8$

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \to x_1 = x_3 \\ \to x_2 = \frac{1}{2}x_3 \\ \end{matrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ 1/2\, x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, \quad \text{si } x_3 = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$m.g. = \dim(E_{\lambda_1}) = 1$$

para $\lambda_2 = -1$

$$(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - x_3$$

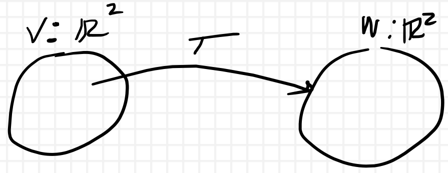
$$v_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

si $x_2 = x_3 = 1$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \text{gen}\left\{ v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$m.g. = \dim(E_{\lambda_2}) = 2$$



$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{bmatrix}$$

La rep. matricial de T es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$(2\times 2)(2\times 1) = 2\times 1$

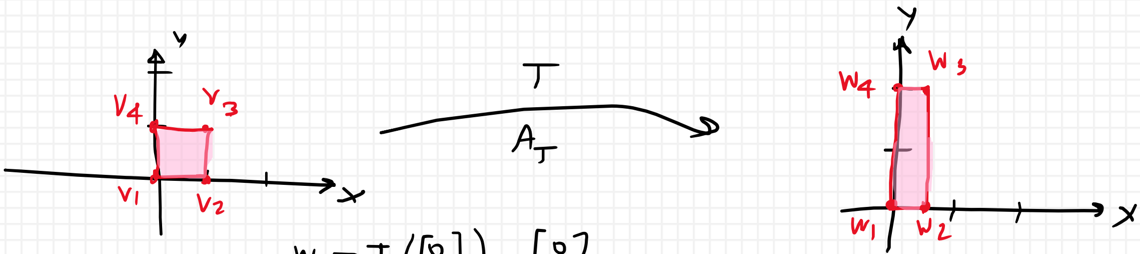
Graphical Intuition in Two Dimensions

Let us gain some intuition for determinants, eigenvectors, and eigenvalues using different linear mappings. Figure 4.4 depicts five transformation matrices $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_5$ and their impact on a square grid of points, centered at the origin:

In geometry, the area-preserving properties of this type of shearing parallel to an axis is also known as Cavalieri's principle of equal areas for parallelograms

- $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. The direction of the two eigenvectors correspond to the canonical basis vectors in $\mathbb{R}^2$, i.e., to two cardinal axes. The vertical axis is extended by a factor of 2 (eigenvalue $\lambda_1 = 2$), and the horizontal axis is compressed by factor $\frac{1}{2}$ (eigenvalue $\lambda_2 = \frac{1}{2}$). The mapping is area preserving ($\det(\boldsymbol{A}_1) = 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$).

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ 2y \end{bmatrix}$$



$$w_1 = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

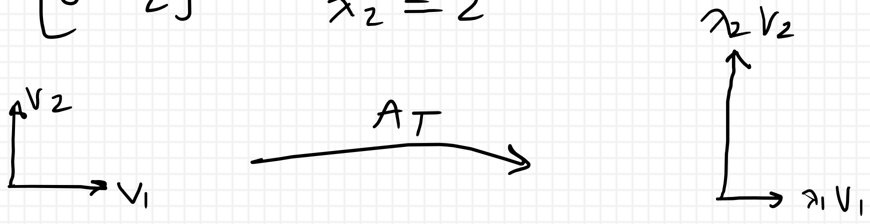
$$w_4 = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A_T| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

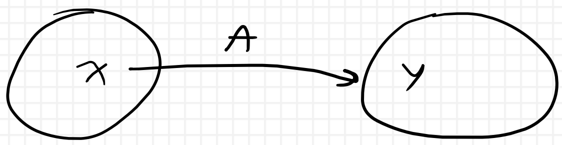
$\lambda_1 = \frac{1}{2}$

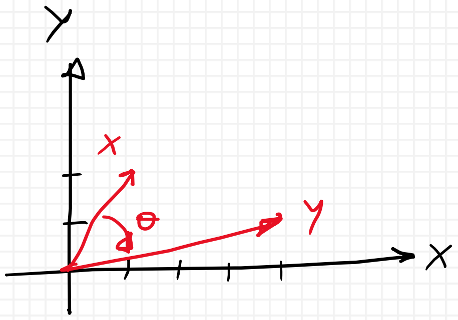
$\lambda_2 = 2$



SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

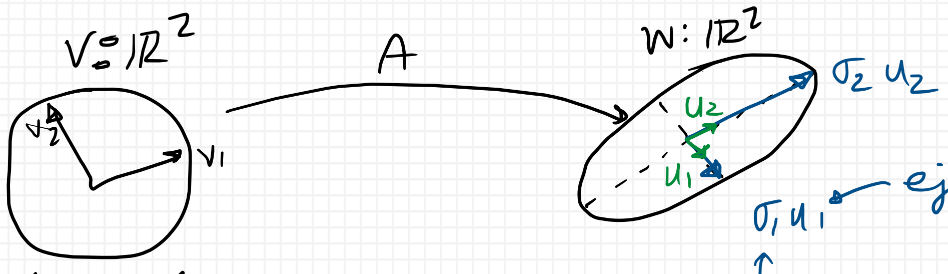




$$y = Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$

rotación en un ángulo θ $\qquad$ alargamiento



ejes principales

valores singulares

$B_v = \{v_1, v_2\}$

círculo $\qquad$ elipse

* para $\mathbb{R}^n$

esfera de dimensión n $\xrightarrow{A}$ elipsoide de dimensión n

$v_1, v_2, \ldots, v_n$ ← vectores ortogonales

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ ← vectores ortonormales

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ← alargamiento

$Av_1 = \sigma_1 u_1$ $\qquad Av = \lambda v$

$Av_j = \sigma_j u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}}_{A \in \mathbb{C}^{n \times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_{V \in \mathbb{C}^{n \times n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}_{U \in \mathbb{C}^{n \times n}} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}}_{\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}}$$

$AV = U\Sigma$, notar que U y V son matrices ortogonales

entonces $U^{-1} = U^*$ y $V^{-1} = V^*$

Teorema de SVD: cada matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tiene una descomposición en valores singulares

* valores singulares $\{\sigma_j\}$ son determinados de manera unívoca y si A es cuadrada σ_j son distintos
* $\{u_j\}$ y $\{v_j\}$ son únicos.

$$AV = U\Sigma$$

Desp. A y nos queda

$$A = U\Sigma V^*$$ → Podimos descomponer a la matriz A como la multiplicación de 3 matrices.

Desconocemos U, V, Σ

$$A^T(A = U\Sigma V^*)$$
$$A^TA = A^T U\Sigma V^*$$
$$A^TA = (U\Sigma V^*)^T U\Sigma V^*$$
$$A^TA = V\Sigma U^T U\Sigma V^*$$
$$A^TA = V\Sigma I \Sigma V^*$$
$$A^TA = V\Sigma^2 V^*$$
$$A^TAV = V\Sigma^2 V^* V$$
$$A^TAv = V\Sigma^2 I$$
$$\boxed{A^TAv = V\Sigma^2}$$

$$Av = \lambda v$$

obtenemos V y Σ

$$(A = U\Sigma V^*)A^T$$
$$AA^T = U\Sigma V^*(U\Sigma V^*)^T$$
$$AA^T = U\Sigma V^* V\Sigma U^T$$
$$AA^T = U\Sigma^2 U^T$$
$$AA^TU = U\Sigma^2 U^TU$$
$$\boxed{AA^TU = U\Sigma^2}$$

$$Av = \lambda v$$

obtenemos U y Σ

$$\lambda_j = \sigma_j^2 \rightarrow \sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$$

valores y vectores propios de A^TA → V y Σ

$$V = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{array}\right], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \ \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

valores y vectores propios de AA^T → U y Σ

APLICACIÓN DE SVD EN PROCESAMIENTO DE IMÁGENES

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Partimos de la función $z(x,y) = x^2y - x^2 - y^2$, definida en un intervalo de $-5 \le x \le 5$ y $-5 \le y \le 5$, igualmente espaciadas con enteros

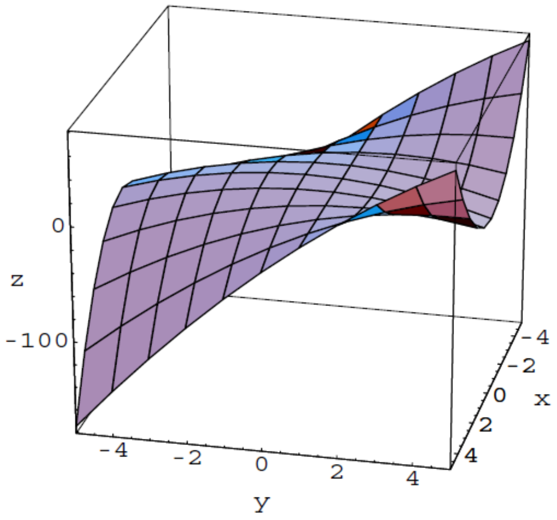


Figure 1: $z = x^2y - x^2 - y^2$ using 11×11 grid

$11 \times 11 = 121$ datos

Si nosotros formamos la sig. matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -175 & -141 & -109 & -79 & -51 & -25 & -1 & 21 & 41 & 59 & 75 \\ -121 & -96 & -73 & -52 & -33 & -16 & -1 & 12 & 23 & 32 & 39 \\ -79 & -61 & -45 & -31 & -19 & -9 & -1 & 5 & 9 & 11 & 11 \\ -49 & -36 & -25 & -16 & -9 & -4 & -1 & 0 & -1 & -4 & -9 \\ -31 & -21 & -13 & -7 & -3 & -1 & -1 & -3 & -7 & -13 & -21 \\ -25 & -16 & -9 & -4 & -1 & 0 & -1 & -4 & -9 & -16 & -25 \\ -31 & -21 & -13 & -7 & -3 & -1 & -1 & -3 & -7 & -13 & -21 \\ -49 & -36 & -25 & -16 & -9 & -4 & -1 & 0 & -1 & -4 & -9 \\ -79 & -61 & -45 & -31 & -19 & -9 & -1 & 5 & 9 & 11 & 11 \\ -121 & -96 & -73 & -52 & -33 & -16 & -1 & 12 & 23 & 32 & 39 \\ -175 & -141 & -109 & -79 & -51 & -25 & -1 & 21 & 41 & 59 & 75 \end{bmatrix}$$

$$z(0,0) = x^2y - x^2 - y^2 = 0$$

$$z(1,0) = 1^2(0) - 1^2 - 0^2 = -1$$

$$z(5,5) = 5^2 5 - 5^2 - 5^2 = 75$$

La matriz A la vamos a descomponer aplicando SVD.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

```
%% SVD Proyecto 1
close;
clear;
clc;

A = [ -175   -141   -109    -79    -51    -25     -1     21     41     59     75
  -121    -96    -73    -52    -33    -16     -1     12     23     32     39
   -79    -61    -45    -31    -19     -9     -1      5      9     11     11
   -49    -36    -25    -16     -9     -4     -1      0     -1     -4     -9
   -31    -21    -13     -7     -3     -1     -1     -3     -7    -13    -21
   -25    -16     -9     -4     -1      0     -1     -4     -9    -16    -25
   -31    -21    -13     -7     -3     -1     -1     -3     -7    -13    -21
   -49    -36    -25    -16     -9     -4     -1      0     -1     -4     -9
   -79    -61    -45    -31    -19     -9     -1      5      9     11     11
  -121    -96    -73    -52    -33    -16     -1     12     23     32     39
  -175   -141   -109    -79    -51    -25     -1     21     41     59     75
];

[U,S,V] = svd(A)
[V1,D1,W1] = eig(A*A');
[V2,D2,W2] = eig(A'*A);
```

La matriz A se puede escribir como

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

Podemos observar que si consideramos

$$A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^T \qquad \dim(u_1) = 11 \times 1$$

$$A_2 = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T \qquad \dim(v_1) = 11 \times 1$$

A_1 requiere $11 + 11 + 1 = 23$ (19 %)

A_2 requiere $(11)4 + 2 = 46$ (38 %)