Aprendizajes esperados 3
3.1 Espacios lineales
3.2 Bases
3.3 Bases ortonormales
3.4 Transformaciones lineales y matrices
3.5 Valores y vectores propios de una transformación lineal
3.6 Descomposición en valores singulares
3.7 Análisis de componentes principales (PCA)
3.8 Aplicaciones

Capítulo 3: Espacios Vectoriales

3.1. EspaciosVectoriales

Departamento de Matemáticas y Física (MAF)

ESPACIOS VECTORIALES

conjunto + suma de vectores & Multiplicación por un escalar (operaciones binarias) + 10 axiomas (condiciones) = ESPACIO VECTORIAL

ciudadano + conocimiento & Actitud Amor + 40 materias = Ingeniería

Axiomas de un espacio vectorial

investigar

Nota. Los primeros cinco axiomas se utilizan para definir a un grupo abeliano, y los axiomas vi) al x) describen la interacción de los escalares y los vectores mediante la operación binaria de un escalar y un vector.

S.V.

i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma).**

ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
(ley asociativa de la suma de vectores).

iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de $\mathbf{x}$).

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(ley conmutativa de la suma de vectores).

M.E.

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(primera ley distributiva).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(segunda ley distributiva).

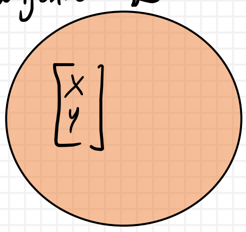
ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

(E) ¿Son espacios vectoriales?

a) El conjunto de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales.

Conjunto $\mathbb{R}^2$



+ S.V & M.E. normales + ¿10 axiomas? = ¿E.V. $\mathbb{R}^2$?

Definimos $u=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, w=\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

✓ 1) $u+v \in \mathbb{R}^2$ (cerradura bajo la suma)

$$u+v=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} \text{ ¿}\in \mathbb{R}^2\text{?} \checkmark$$

✓ 2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (Ley asociativa de la suma)

$$LI \rightarrow (u+v)+w = \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow u+(v+w) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2+x_3 \\ y_2+y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ y_1+y_2+y_3 \end{bmatrix}$$

¿LI = LD? ✓

✓ 3) $0_v+u=u$ (vector cero)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+x_1 \\ b+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$a+x_1=x_1$ $\qquad$ $b+y_1=y_1$

$a=x_1-x_1=0$ $\qquad$ $b=y_1-y_1=0$

$$0_v=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ¿}\in \mathbb{R}^2\text{?} \checkmark$$

✓ 4) $(-u)+u=0_v$ (inverso aditivo)

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c+x_1 \\ d+y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c+x_1=0$ $\qquad$ $d+y_1=0$

$c=-x_1$ $\qquad$ $d=-y_1$

$$(-u)=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} \text{ ¿}\in \mathbb{R}^2\text{?} \checkmark$$

✓ 5) $u+v=v+u$ (Ley conmutativa de la suma)

$$LI \rightarrow u+v=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$LD \rightarrow v+u=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

¿LI = LD? ✓

6) $\alpha u \in \mathbb{R}^2$ (cerradura bajo la multiplicación por escalar)

$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix}$ ¿$\in \mathbb{R}^2$? ✓

✓ 7) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$ (Ley distributiva 1)

$LI \rightarrow \alpha(u+v) = \alpha\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(x_1+x_2) \\ \alpha(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha y_1 + \alpha y_2 \end{bmatrix}$

$LD \rightarrow \alpha u + \alpha v = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha y_1 + \alpha y_2 \end{bmatrix}$

¿$LI = LD$? ✓

✓ 8) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ (Ley distributiva 2)

$LI \rightarrow (\alpha+\beta)u = (\alpha+\beta)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)x_1 \\ (\alpha+\beta)y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_1 \end{bmatrix}$

$LD \rightarrow \alpha u + \beta u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta x_1 \\ \alpha y_1 + \beta y_1 \end{bmatrix}$

¿$LI = LD$? ✓

✓ 9) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (Ley asociativa de la M.E.)

$LI \rightarrow \alpha(\beta u) = \alpha\left(\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} \beta x_1 \\ \beta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta y_1 \end{bmatrix}$

$LD \rightarrow (\alpha\beta)u = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta x_1 \\ \alpha\beta y_1 \end{bmatrix}$

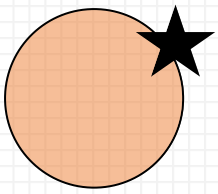
¿$LI = LD$? ✓

✓ 10) $1u = u$ (Neutro multiplicativo)

$LI \rightarrow 1u = 1\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = u \rightarrow LD$

∴ el conjunto de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales sí califica como un ESPACIO VECTORIAL.

ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial

De hecho, $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ son todos espacios vectoriales con las operaciones normales. Vamos demostrando el caso general ($\mathbb{R}^n$).

Espacio Vectorial

Demostración: Sean $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$ y α, β escalares.

1) **Cerrado bajo la suma**
2) **Cerrado bajo la multiplicación por escalar**
3) **Vector Cero**
4) **Inverso Aditivo**
5) **ley conmutativa de la suma**

$$x + (y + z) = (x + y) + z \;\epsilon \mathbb{R}^n$$

$$0_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon \mathbb{R}^n \qquad -x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix} \epsilon \mathbb{R}^n$$

6) **Cerrado bajo la multiplicación por escalar**
7) **Ley distributiva 1**
8) **Ley distributiva 2**
9) **Ley asociativa de la multiplicación**
10) **Neutro Multiplicativo**

$$\alpha x \;\epsilon \mathbb{R}^2$$

$$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

$$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x \;\epsilon \mathbb{R}^n$$

$$1x = x$$

Polinomios de grado *n*, $\mathrm{V} = \mathrm{P}_n$

P_n es el conjunto de todos los polinomios de grado igual o menor a **n,** con la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, \cdots, a_0$ son escalares. La suma entre polinomios y multiplicación por escalar son las normales. ¿Es este conjunto un espacio vectorial?

Espacio Vectorial

Demostración: Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

, $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

$r(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

Vector Cero $\in P_n$

$$0_v = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0 \in P_n$$

Inverso Aditivo $\in P_n$

$$-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

Asociativo Suma

$$p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$$

Cerrado Suma y Multiplicación
Conmutativa Suma

$$\alpha p(x) + \beta q(x) = \beta q(x) + \alpha p(x)$$
$$= (\alpha a_n + \beta b_n) x^n + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_0 + \beta b_0) \in P_n$$

Neutro Multiplicativo

$$1 p(x) = p(x)$$

Asociativo Multiplicación por Escalar

$$\alpha(\beta p(x)) = (\alpha\beta) p(x) \in P_n$$

Distributivo Multiplicación

$$(\alpha + \beta) p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$$

$$\alpha(p(x) + q(x)) = \alpha p(x) + \alpha q(x)$$

Matrices M_{mn}

M_{mn} es el conjunto de todas las matrices de ***m*** filas y ***n*** columnas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Demostración: con las operaciones normales.

Espacio Vectorial

Vector Cero

$$0_v=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in M_{mn}$$

Inverso Aditivo

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}$$

Neutro Multiplicativo

$$1A=A$$

Asociativo Multiplicación por Escalar

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A \in M_{mn}$$

Asociativo Suma

$$A+(B+C)=(A+B)+C \in M_{mn}$$

Cerrado Suma y Multiplicación
Conmutativa Suma

$$\alpha A+\beta B=\beta B+\alpha A \in M_{mn}$$

Distributivo Multiplicación

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

El espacio $\mathbb{C}^n$

Este conjunto está conformado por vectores de **n** elementos complejos, es decir

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1+i\beta_1 \\ \alpha_2+i\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+i\beta_n \end{bmatrix}$$

¿Es $\mathbb{C}^n$ un espacio vectorial con las operaciones normales?

Espacio Vectorial

Demostración: Sean $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ y a, b escalares.

Vector Cero

$$0_v=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Inverso Aditivo

$$-x=\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\alpha_1-i\beta_1 \\ -\alpha_2-i\beta_2 \\ \vdots \\ -\alpha_n-i\beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Neutro Multiplicativo

$$1x=x$$

Asociativo Suma

$$x+(y+z)=(x+y)+z \in \mathbb{C}^n$$

Cerrado Suma y Multiplicación
Conmutativa Suma

$$ax+by=by+ax \in \mathbb{C}^n$$

Asociativo Mult. Por Escalar

$$a(bx)=(ab)x \in \mathbb{C}^n$$

Distributivo Multiplicación

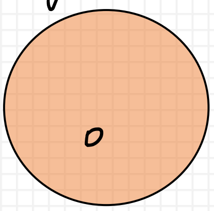
$$a(x+y)=ax+ay$$

$$(a+b)x=ax+bx$$

¿Son espacios vectoriales?

a) El conjunto definido por el vector cero $V=\{0\}$ y las operaciones normales de suma y multiplicación por un escalar.

conjunto V



$+$ S.V & M.E. normal $+$ ¿10 axiomas? $=$ ¿EV V?

Definimos $u=0,\ v=0,\ w=0 \in V$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1) $u+v\in V$

$u+v=0+0=0$ ¿$\in V$?

2) $(u+v)+w=u+(v+w)$

$LI \rightarrow (u+v)+w=(0+0)+0=0+0=0$

$LD \rightarrow u+(v+w)=0+(0+0)=0+0=0$ ¿$LI=LD$?

3) $0_v+u=u$

$a+0=0$

$a=0$

$0_v=a=0$ ¿$\in V$?

4) $(-u)+u=0_v$

$b+0=0$

$b=0$

$(-u)=b=0$ ¿$\in V$?

5) $u+v=v+u$

$LI \rightarrow u+v=0+0=0$

$LD \rightarrow v+u=0+0=0$

6) $\alpha u\in V$

$\alpha u=\alpha(0)=0$ ¿$\in V$?

7) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

$LI \rightarrow \alpha(u+v)=\alpha(0+0)=\alpha(0)=0$

$LD \rightarrow \alpha u+\alpha v=\alpha 0+\alpha 0=0+0=0$ ¿$LI=LD$?

8) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

$LI \rightarrow (\alpha+\beta)u=(\alpha+\beta)0=0$

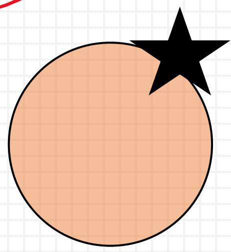
$LD \rightarrow \alpha u+\beta u=\alpha 0+\beta 0=0+0=0$ ¿$LI=LD$?

9) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

$LI \rightarrow \alpha(\beta u)=\alpha(\beta 0)=\alpha(0)=0$

$LD \rightarrow (\alpha\beta)u=(\alpha\beta)0=0$ ¿$LI=LD$?

10) $1u=u$

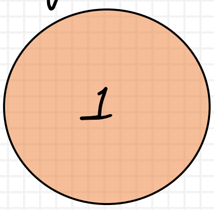


$LI \rightarrow 1u=1(0)=0=u\rightarrow LD$

$\therefore$ el conjunto $V=\{0\}$ con las operaciones normales sí califica como un E.V. De hecho se le conoce como E.V. trivial.

b) El conjunto definido por $V=\{1\}$ con las operaciones normales.

conjunto V



+ S. V. & M. E. normal + ¿10 axiomas? = ¿EV V?

Definimos $u=1$, $v=1$, $w=1 \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

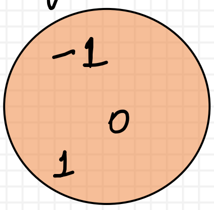
X 1) $u+v \in V$

$u+v = 1+1 = 2$ ¿$\in V$? X

$\therefore$ el conjunto $V=\{1\}$ con las operaciones normales no califica como un E.V.

c) El conjunto definido por $V=\{-1,0,1\}$ con las operaciones normales

conjunto V



+ S. V. & M. E. normal + ¿10 axiomas? = ¿EV V?

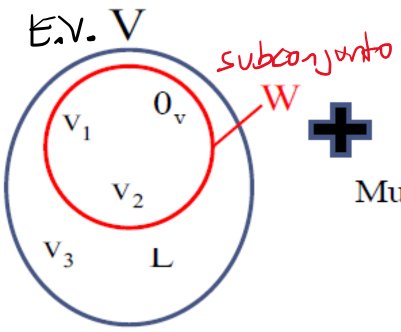
Definimos $u=-1 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

X 6) $\alpha u \in V$

$\alpha u = \alpha(-1) = -\alpha$ ¿$\in V$? X

$\therefore$ el conjunto $V=\{-1,0,1\}$ con las operaciones normales no califica como un E.V.

Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V, entonces W es un sub-espacio vectorial de V si también es un espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en V.

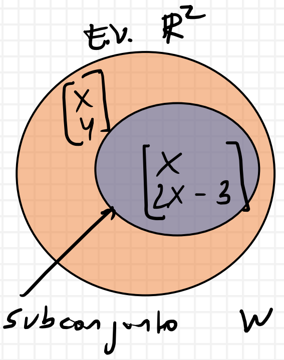


+ Suma de vectores & Multiplicación por escalar **+** 10 axiomas **=** SUB-ESPACIO VECTORIAL

Nota: Debido a que W debe ser también un espacio vectorial por si mismo, debe contener también al vector cero de V. Además, las operaciones definidas para W tienen que ser las mismas que para V.

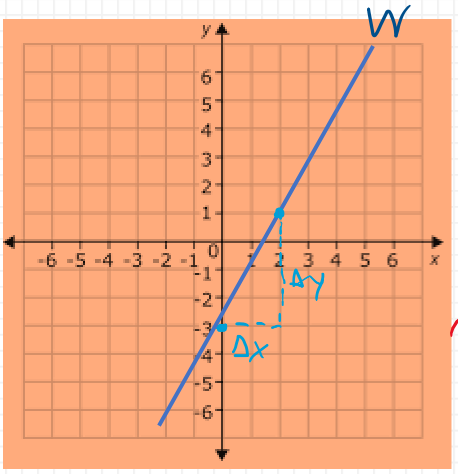
¿Son sub-espacios Vectoriales de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales?

a) Todos los puntos sobre una recta que no pasa por el origen $W = \{[x, y]^T : y = 2x - 3\}$



+ S.V. & M.E. normales + ¿10 axiomas? = ¿S.E.V. W?

Para definir el vector generalizado en un subconjunto tenemos que despejar una variable de la restricción y sustituir en el vector generalizado del E.V.



Definimos $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix} \in W$

3) $0_v + u = u$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + x_1 \\ b + 2x_1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 3 \end{bmatrix}$$

$a + x_1 = x_1$

$a = x_1 - x_1 = 0$

$b + 2x_1 - 3 = 2x_1 - 3$

$b = 2x_1 - 3 - 2x_1 + 3 = 0$

$0_v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ¿$\in W$? ✗

$y = 2x - 3$

$0 = 2(0) - 3$

$0 = -3$ ✗

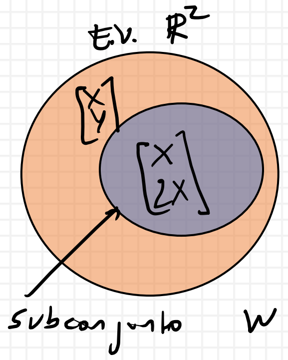
$\therefore$ el subconjunto W del espacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales no califica como un S.E.V.

Prueba Simple de Sub-Espacio Vectoriales

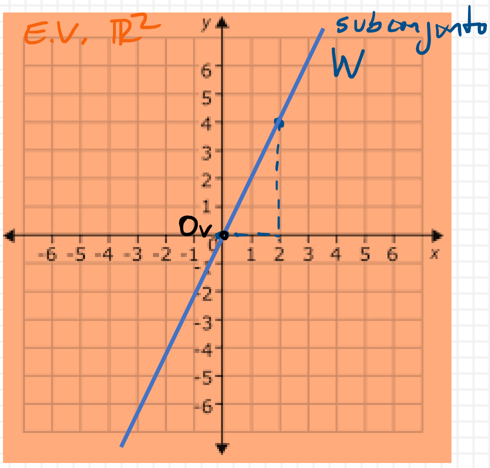
Sea V un espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V, entonces W es un **sub-espacio vectorial de V** si se **cumplen las dos propiedades de cerradura**, es decir:

1) Si $x, y \in W$ entonces $x + y \in W$ **(cerrado bajo la suma)**
2) Si $\alpha =$ escalar entonces $\alpha x \in W$ **(cerrado bajo la mult. por escalar)**

b) Todos los puntos sobre una recta que pasa por el origen $W = \{[x, y]^T : y = 2x\}$



+ S.V. + M.E. normales + ¿prueba simple? = ¿S.E.V. W?



Definimos $u = \begin{bmatrix}x_1\\2x_1\end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix}x_2\\2x_2\end{bmatrix} \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $u+v \in W$

$u+v = \begin{bmatrix}x_1\\2x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_2\\2x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+x_2\\2x_1+2x_2\end{bmatrix}$ ¿$\in W$?

$y = 2x$

$2x_1 + 2x_2 = 2(x_1+x_2)$

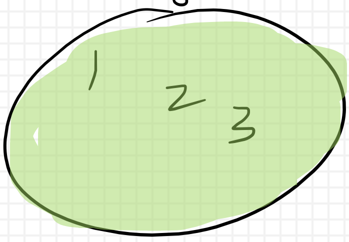
2) $\alpha u \in W$

$\alpha u = \alpha\begin{bmatrix}x_1\\2x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha x_1\\\alpha 2x_1\end{bmatrix}$ ¿$\in W$?

$y = 2x$

$\alpha 2x_1 = 2(\alpha x_1)$

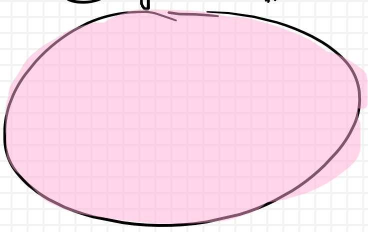
∴ El subconjunto W del E.V. de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales sí califica como un SEV conjunto A



¿$1 \in A$? ✓

¿$4 \in A$? ✗

Conjunto $\mathbb{R}^2$



¿$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$? ✓

¿$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$? ✗

¿Qué se debe cumplir para que 2 matrices sean iguales?

* Misma dimensión
* elementos correspondientes iguales

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

¿Son sub-espacios Vectoriales de $\mathbb{R}^2$ con las operaciones normales?

a) Todos los puntos sobre una recta que no pasa por el origen $W = \{[x, y]^T : y = 2x - 3\}$

$\{ \ \}$ → conjunto

$:$ → tal que

$y = 2x - 3$ → restricción

¿$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$? ✗

$y = 2x - 3$

$1 = 2(1) - 3$

$1 = -1$ ✗

¿$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in W$? ✓

$y = 2x - 3$

$-1 = 2(1) - 3$

$-1 = -1$ ✓