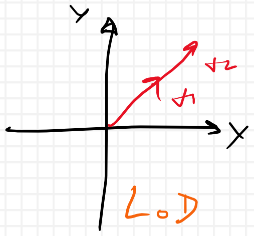
Definición 5.4.1

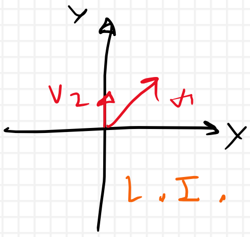
Dependencia e independencia lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{5.4.3}$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.





$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix}$

$v_2 = \alpha v_1$ $\qquad$ $v_2 \neq \alpha v_1$

$v_2 = 2 v_1$

$2v_1 - v_2 = 0_v$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0_v$

EJEMPLO 5.4.4 Determinación de la dependencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}11\\-6\\12\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0_v$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-3\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}11\\-6\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 11 & 0\\-3 & 0 & -6 & 0\\0 & 4 & 12 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l}\to c_1 = -2c_3\\ \to c_2 = -3c_3\\ \to 0 = 0\end{array}$$

como c_1, c_2, c_3 no todos son ceros concluimos que v_1, v_2, v_3 son L.D.

EJEMPLO 5.4.3 Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$

Determine si los vectores $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0_v$

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\-2 & -2 & 1 & 0\\3 & 0 & 7 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l}\to c_1 = 0\\ \to c_2 = 0\\ \to c_3 = 0\end{array}$$

Como $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, concluimos que v_1, v_2, v_3 son L.I.

e) $v_1=\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}4\\7\\-6\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}18\\-11\\4\end{bmatrix}, v_4=\begin{bmatrix}2\\-7\\3\end{bmatrix}$

Respuesta:

$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4=0_v$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

$$c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}4\\7\\-6\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}18\\-11\\4\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}2\\-7\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2&4&18&2\\-3&7&-11&-7\\4&-6&4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4 vectores de $\mathbb{R}^3$

$4>3$

Esto nos lleva a un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas c_1,c_2,c_3,c_4

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2&4&18&2&0\\-3&7&-11&-7&0\\4&-6&4&3&0\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-\frac{141}{192}&0\\0&1&0&-\frac{3}{4}&0\\0&0&1&\frac{69}{192}&0\end{array}\right]$$

$\rightarrow c_1=\frac{141}{192}c_4$

$\rightarrow c_2=3/4\,c_4$

$\rightarrow c_3=-\frac{69}{192}c_4$

El sistema tiene soluciones infinitas,

Son linealmente dependientes.

Teorema 3:
Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n>m$

Corolario: Un conjunto de vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ tiene a lo más n vectores.

Teorema 4:
Un conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ genera todo $\mathbb{R}^n$.

Teorema 5: Sea $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$

$c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n=0_v$

$Ac=0$

$c=A^{-1}0$

entonces las columnas (vistas como vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^n$) son **linealmente dependientes si y solo si** el sistema $Ac=0$ tiene soluciones **no triviales.**

Teorema 6: Si el sistema anterior, $Ac=0$, tiene solo **la solución trivial** entonces los vectores columnas son linealmente independientes.

En otras palabras, si $\det(A)=0$ las columnas de A son **linealmente dependientes**, y si $\det(A)\neq 0$ las columnas de A son **linealmente independientes**.

Los teoremas anteriores se obtienen directamente del método que hemos usado para probar dependencia lineal de un conjunto de vectores.

E verificar dependencia lineal de $v_1=\begin{bmatrix}2\\-1\\4\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}$

Como tenemos 3 vectores de $\mathbb{R}^3$, podemos usar el teorema 6

$A=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}2&1&3\\-1&0&-1\\4&2&5\end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\-1&0&-1\\4&2&5\end{vmatrix}=-1\neq 0 \quad \therefore\ v_1,v_2,v_3$ son L.I.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

(E) ¿Para qué valores de a los siguientes vectores $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}0\\a\\0\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}$ son L.I?

$$A = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\0 & a & 0\\0 & 0 & 3\end{vmatrix} = 3a$$

Para que v_1, v_2 y v_3 sean L.I., $|A| \neq 0$

$$3a \neq 0 \rightarrow a \neq 0$$

BASES

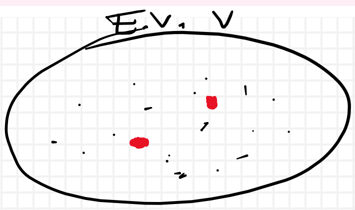
Definición 5.5.1

Base

Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.



Ya se han analizado algunos ejemplos de bases. En el teorema 5.4.7, por ejemplo, se vio que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. De esta forma,

Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ se define

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Base canónica

Puesto que los vectores $\mathbf{e}_i$ son las columnas de una matriz identidad (que tiene determinante 1), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base en $\mathbb{R}^n$. Esta base especial se denomina **base canónica** en $\mathbb{R}^n$. Ahora se encontrarán bases para algunos otros espacios.

Base canónica para P_n

En P_n el conjunto de vectores

$$\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$$

genera todo el espacio P_n y son linealmente independientes, son una base para P_n.
A esta base se le conoce como **base canónica de** P_n .

Base canónica para M_{22}

Anteriormente se vio que el conjunto de matrices

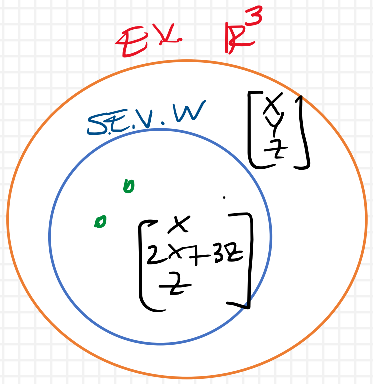
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

genera todo el espacio M_{22} y se puede notar que son linealmente independientes (***ninguna es combinación lineal de las otras***) por lo tanto ese conjunto es una base para M_{22} .
A esta base se le conoce como **base canónica de** M_{22} .

Una base para un sub-espacio de $\mathbb{R}^3$

Encuentra una base para el conjunto de vectores que se encuentran en el sub-espacio vectorial

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x, & y, & z \end{bmatrix}^T : 2x - y + 3z = 0 \right\}$$



Primero debemos escribir el vector generalizado para el S.E.V. W.

$$\begin{bmatrix} x \\ 2x+3z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

El conjunto $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera todo el S.E.V. W. Además, es L.I. ya que $v_2 \neq \alpha v_1$. Por lo tanto dicho conjunto califica como una base para el S.E.V. W.

Verifique si el conjunto es una base de V y obtenga las coordenadas del vector v respecto a esa base.

a) $\left\{\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$ y $v=\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix}$

Para que un conjunto califique como una base se debe cumplir que sean L.I. y que generen todo el E.V. Primero verificamos I.L.

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = -11 \neq 0 \quad \therefore \quad V_1, V_2, V_3 \text{ son L.I.}$$

Además, del teorema 4 sabemos que 3 vectores L.I. de $\mathbb{R}^3$ genera todo $\mathbb{R}^3$ por tanto, el conjunto dado sí califica como una base para $\mathbb{R}^3$.

Para obtener las coordenadas de v respecto a la base dada hacemos

$$v = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3$$

$$\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 0 & -3\\ -2 & -1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{G.J.} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -13/11\\ 0 & 1 & 0 & 6/11\\ 0 & 0 & 1 & 12/11\end{array}\right] \begin{array}{l}\rightarrow C_1 = -13/11\\ \rightarrow C_2 = 6/11\\ \rightarrow C_3 = 12/11\end{array}$$

Las coordenadas de v respecto a la base dada son:

$$C_1 = -13/11$$
$$C_2 = 6/11$$
$$C_3 = 12/11$$

Coordenadas de un vector respecto a una base.

Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base para el espacio vectorial V y si $v \in V$ entonces existe un **conjunto único** de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ tales que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

Al conjunto de escalares $c_1, c_2, \cdots, c_n$ se le llama **coordenadas de** v **respecto a la base** $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Definición: Si el espacio vectorial *V* tiene una base con un número finito de vectores, entonces:

- La **dimensión de** *V* es el **número** de vectores en su base.
- *V* es un **espacio vectorial de dimensión finita**.
- Si $V = \{0_v\}$ entonces tiene **dimensión cero**.
- La dimensión de *V* se denota por $\dim V$

Ejemplo:

¿Cuál es la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$? $\dim \mathbb{R}^n = n$

¿Cuál es la dimensión del espacio P_n ? $\dim P_n = n+1$

¿Cuál es la dimensión del espacio M_{22} ? $\dim M_{22} = 4$

¿Cuál es la dimensión de $V = \{0_v\}$? $\dim V = 0$

¿Cuál es la dimensión del espacio M_{mn}? $\dim M_{mn} = mn$

¿Cuál es la dimensión del espacio de todos los polinomios *P*? $\dim P = \infty$

Teorema 7: Suponga que $\dim V = n$. Si $u_1, \cdots, u_m$ es un conjunto de vectores **linealmente independientes**, entonces $m \leq n$.

Teorema 8: Sea ***H*** un sub-espacio de un **espacio de dimensión finita** *V* entonces

$$\dim H \leq \dim V$$

Discusión: ¿Qué dimensión tienen todos los sub-espacios de $\mathbb{R}^3$? ¿Y de $\mathbb{R}^2$?

≤ 3 ≤ 2

0, 1, 2, 3

S.E.L. no-homogéneos

$$Ax = b$$

Desp. x

$$A^{-1}(Ax = b)$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

3 tipos soluciones:

* sol. única
* infinitas
* sin sol.

S.E.L. homogéneos

$$Ax = 0$$

Desp. x

$$x = A^{-1}0$$

2 tipos soluciones:

* sol. única (trivial)
* infinitas

$|A| \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ existe $\rightarrow x = 0$

$|A| = 0 \rightarrow A^{-1}$ no existe