¿El conjunto $V = \{x^2+1, x+2\}$ genera a P_2?

R: el conjunto V no genera a P_2, ya que sólo hay 2 vectores en dicho conjunto. Para que un conjunto pueda generar a P_2 necesitamos 3 vectores L.I. ~~X~~

$P_2 \rightarrow$ polinomios de grado igual o menor que 2

dim $P_2 = 3$

Base $\rightarrow$ conjunto de vectores que cumplen

* I.L.
* genera a todo V

6.1 Bases ortonormales y proyecciones en $\mathbb{R}^n$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

En $\mathbb{R}^n$ se vio que n vectores linealmente independientes constituyen una base. La base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es la de mayor uso. Estos vectores tienen dos propiedades:

i) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $i \neq j$

ii) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

Definición 6.1.1

Conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal** si

ortogonalidad $\rightarrow$ $\boxed{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j}$ (6.1.1)

normalidad $\rightarrow$ $\boxed{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1}$ (6.1.2)

Si sólo se satisface la ecuación (6.1.1) se dice que el conjunto es **ortogonal**.

$u \perp v \longrightarrow u \cdot v = 0$

$|u| = 1 \longrightarrow |u|^2 = u \cdot u$

E) Verificar si la sig. base de $\mathbb{R}^3$ es ortonormal o no.

$$B = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} u_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} u_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

✓ ortogonalidad:

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_1 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_2 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

✓ normalidad:

$$u_1 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$u_2 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$u_3 \cdot u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

$\therefore$ La base dada sí califica como una B.O. de $\mathbb{R}^3$.

De hecho, siempre se cumple que:

Teorema:

Si $\boldsymbol{S}$ es un **conjunto ortogonal** de vectores diferentes de cero, entonces $\boldsymbol{S}$ es **linealmente independiente**.

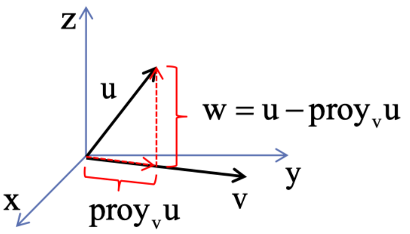
¿Cómo obtener una **base ortonormal** de una que no lo es?

Recuerdan que de dos vectores **u** y **v**, obteníamos un vector ortogonal a **v** por medio de

$$\mathrm{w} = \mathrm{u} - \frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2}\mathrm{v}$$

donde

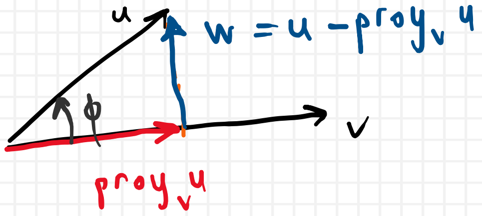
$$\mathrm{proy}_{\mathrm{v}}\mathrm{u} = \frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2}\mathrm{v}$$



Ese principio usaremos en el **Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt**.

$u \cdot v \rightarrow$ u punto v

$|v| \rightarrow$ magnitud de v



$\mathrm{proy}_v u \rightarrow$ proyección de u sobre v

$$\mathrm{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

$v \perp w$

$\mathrm{proy}_v u \perp w$

$\mathrm{proy}_u v \parallel v$

Fórmula de ángulo entre vectores

$$\cos\phi = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$

trigonometría

$$\cos\phi = \frac{c.a.}{hip} = \frac{|\mathrm{proy}_v u|}{|u|}$$

Igualando nos queda

$$\frac{|\mathrm{proy}_v u|}{\cancel{|u|}} = \frac{u \cdot v}{\cancel{|u|}|v|}$$

$$|\mathrm{proy}_v u| = \frac{u \cdot v}{|v|} \longrightarrow \mathrm{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|} \frac{v}{|v|}$$

4.2 Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Sea **H** un sub-espacio de dimensión ***m*** de $\mathbb{R}^n$, y sea $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ una base de **H**. Entonces, podemos construir una base ortonormal como:

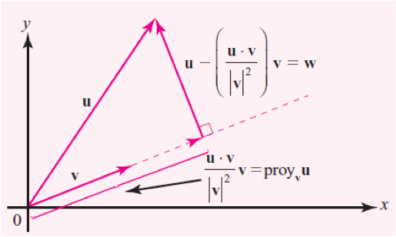
Paso 1: Elección del primer vector unitario.

$$\boxed{\mathrm{u}_1=\frac{v_1}{|v_1|}} \longrightarrow \mathrm{u}_1\cdot\mathrm{u}_1=\frac{v_1}{|v_1|}\cdot\frac{v_1}{|v_1|}=\frac{|v_1|^2}{|v_1|^2}=1$$

Paso 2: Elección de un segundo vector ortogonal a u_1

$$\mathrm{w}=\mathrm{u}-\frac{\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|^2}\mathrm{v} \Rightarrow \mathrm{v}'_2=\mathrm{v}_2-\frac{\mathrm{v}_2\cdot\mathrm{u}_1}{|\mathrm{u}_1|^2}\mathrm{u}_1 \xrightarrow{|\mathrm{u}_1|=1}$$

$$\boxed{\mathrm{v}'_2=\mathrm{v}_2-(\mathrm{v}_2\cdot\mathrm{u}_1)\mathrm{u}_1}$$



Paso 3: Elección de un segundo vector unitario

$$\boxed{\mathrm{u}_2=\frac{\mathrm{v}'_2}{|\mathrm{v}'_2|}}$$

Paso 4: Continuación del proceso

$$\mathrm{v}'_3=\mathrm{v}_3-(\mathrm{v}_3\cdot\mathrm{u}_1)\mathrm{u}_1-(\mathrm{v}_3\cdot\mathrm{u}_2)\mathrm{u}_2 \longrightarrow \mathrm{u}_3=\frac{\mathrm{v}'_3}{|\mathrm{v}'_3|}$$

$$\mathrm{v}'_4=\mathrm{v}_4-(\mathrm{v}_4\cdot\mathrm{u}_1)\mathrm{u}_1-(\mathrm{v}_4\cdot\mathrm{u}_2)\mathrm{u}_2-(\mathrm{v}_4\cdot\mathrm{u}_3)\mathrm{u}_3 \longrightarrow \mathrm{u}_4=\frac{\mathrm{v}'_4}{|\mathrm{v}'_4|}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{v}'_m=\mathrm{v}_m-(\mathrm{v}_m\cdot\mathrm{u}_1)\mathrm{u}_1-(\mathrm{v}_m\cdot\mathrm{u}_2)\mathrm{u}_2-\cdots-(\mathrm{v}_m\cdot\mathrm{u}_{m-1})\mathrm{u}_{m-1} \longrightarrow \mathrm{u}_m=\frac{\mathrm{v}'_m}{|\mathrm{v}'_m|}$$

Entonces, $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ es un conjunto de **vectores ortonormales**.

Pero, por el teorema visto anteriormente sabemos que $\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ son linealmente independiente (ya que son ortogonales) entonces

$\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ es una base ortonormal de H

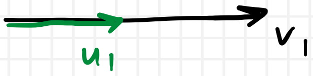
4.2 Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Sea **H** un sub-espacio de dimensión ***m*** de $\mathbb{R}^n$, y sea $S=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ una base de **H**. Entonces, podemos construir una base ortonormal como:

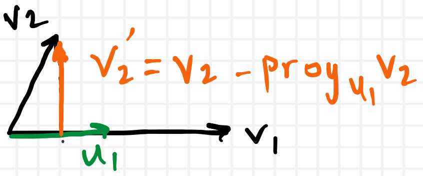
Paso 1.- elección del primer vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$



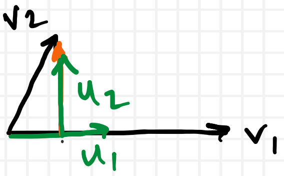
Paso 2.- elección del segundo vector que sea ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - \text{proy}_{u_1} v_2$$
$$= v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{|u_1|^2} u_1$$
$$= v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1$$



Paso 3.- elección del segundo vector unitario

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|}$$



Paso 4.- elección del tercer vector que sea ortogonal a u_1 y u_2

$$v_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1) u_1 - (v_3 \cdot u_2) u_2$$

Paso 5.- elección del tercer vector unitario

$$u_3 = \frac{v_3'}{|v_3'|}$$

$$\vdots$$

$$v_m' = v_m - (v_m \cdot u_1) u_1 - (v_m \cdot u_2) u_2 - \cdots - (v_m \cdot u_{m-1}) u_{m-1}$$

$$u_m = \frac{v_m'}{|v_m'|}$$

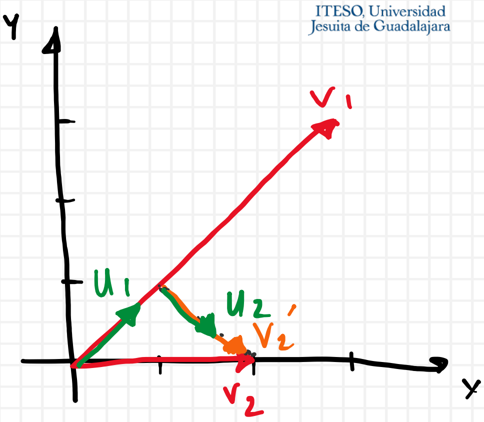
La B.O. es $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

5

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Ⓔ Construya una B.O. iniciando con la base $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Se puede ver claramente que la base dada no es una B.O., por tanto, aplicaremos el P.O.G.S.



Paso 1.- elección del 1er vector unitario

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{|v_1|} v_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|v_1| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Paso 2.- elección del 2do vector que es ortogonal a u_1

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Paso 3.- elección del 2do vector unitario.

$$u_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \frac{1}{|v_2'|} v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$|v_2'| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Conclusión: la B.O. para $\mathbb{R}^2$ obtenida a partir de la base dada, aplicando el POGS, es:

$$B.O. = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

comprobación:

✓ ortogonalidad

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 0$$

✓ normalidad

$$u_1 \cdot u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1$$

$$u_2 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 1$$