## Diferenciales

En el caso de una función derivable de una variable, $y = f(x)$, definimos la diferencial $dx$ como una variable independiente; es decir, $dx$ puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de $y$ se define entonces como

**9** $$dy = f'(x)dx$$

(Véase sección 3.10.) En la figura 6 se muestra la relación entre el incremento $\Delta y$ y la diferencial $dy$: $\Delta y$ representa el cambio en altura de la curva $y = f(x)$ y $dy$ representa el cambio en altura de la tangente cuando $x$ cambia una cantidad $dx = \Delta x$.

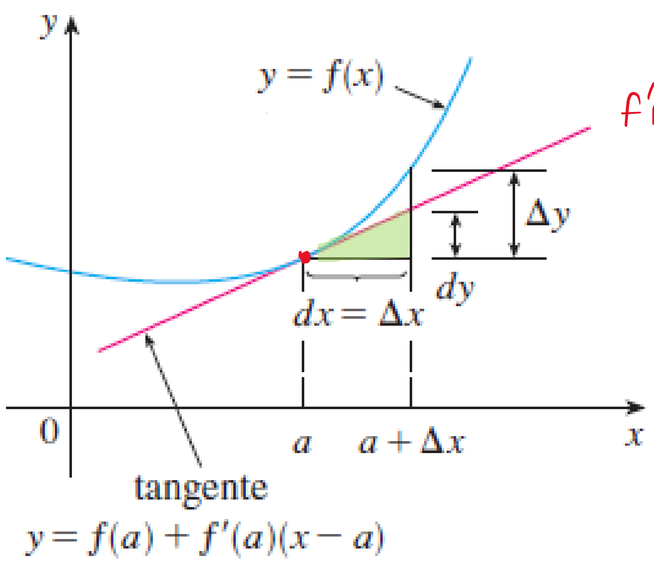



FIGURA 6

$f'(a)$

$$\tan \theta = \frac{c.o.}{c.a.}$$

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(a)\,dx$$

En el caso de una función diferenciable de dos variables, $z = f(x, y)$, definimos las **diferenciales** $dx$ y $dy$ como variables independientes; es decir, pueden tomar cualquier valor. Entonces, la **diferencial** $dz$, también conocida como **diferencial total**, se define como

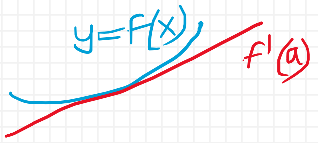
**10** $$\boxed{dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

(Compare con la ecuación 9.) Algunas veces se usa la notación $df$ en lugar de $dz$.

Si tomamos $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, entonces la diferencial de $z$ es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{4}$ se puede escribir como




La figura 7 es el equivalente tridimensional de la figura 6 y en ella se muestra la interpretación geométrica de la diferencial $dz$ y del incremento $\Delta z$: $dz$ representa el cambio en altura del plano tangente, y $\Delta z$ representa el cambio en la altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando $(x, y)$ pasa de $(a, b)$ a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

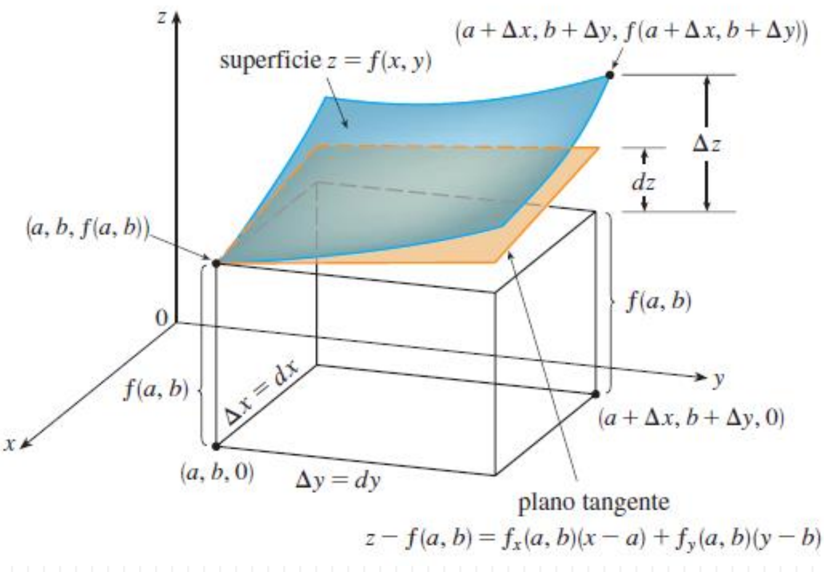
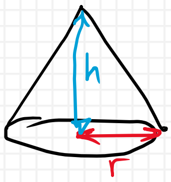



FIGURA 7

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

**EJEMPLO 5** El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0.1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

$$V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$





$$dV = f_r(r,h)dr + f_h(r,h)\,dh$$

$$= \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

error de medición $|\Delta r| \leq 0.1$ y $|\Delta h| \leq 0.1$.

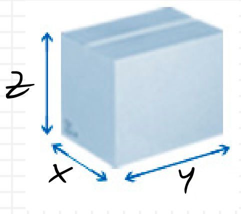
Para estimar el error máximo del volumen calculado consideramos $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$.

$$dV = \frac{2\pi(10)(25)}{3} 0.1 + \frac{\pi(10)^2}{3} 0.1 = 52.3598 + 10.472$$

$$dV = 62.8318 \ cm^3$$

**EJEMPLO 6** Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

$$V(x,y,z) = xyz$$




$$dV = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

$$= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

el error de medición $|\Delta x| \leq 0.2$, $|\Delta y| \leq 0.2$, $|\Delta z| \leq 0.2$.

Para calcular el error más grande del volumen calculado consideramos $dx = dy = dz = 0.2$.

$$dV = 60(40)0.2 + 75(40)0.2 + 75(60)0.2 =$$

$$= 480 + 600 + 900 = 1980$$

El error máximo del volumen calulado es de $1980 \ cm^3$.

## 14.5 Regla de la cadena

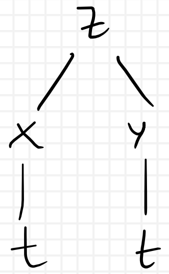
Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde $f$ y $g$ son funciones derivables, entonces $y$ es indirectamente una función derivable de $t$ y

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Para funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable $x$ y $y$ es a su vez una función de la variable $t$. Esto significa que $z$ es indirectamente una función de $t$, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para derivar $z$ como una función de $t$. Supongamos que $f$ es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que éste es el caso cuando $f_x$ y $f_y$ son continuas (teorema 14.4.8).

**2 Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de $x$ y $y$, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de $t$. Entonces $z$ es una función derivable de $t$ y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$




**EJEMPLO 1** Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \operatorname{sen} 2t$ y $y = \cos t$, determine $dz/dt$ cuando $t = 0$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)\, 2\cos 2t + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)$$

cuando $t = 0$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)2 + (0+0)0 = 6$$

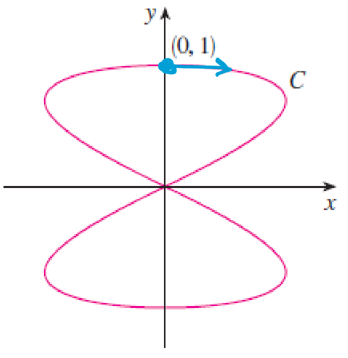



**FIGURA 1**
La curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

si $t = 0$

$x = \operatorname{sen}(2(0)) = 0$

$y = \cos(0) = 1$

Ahora consideremos la situación en donde $z = f(x, y)$ pero cada $x$ y $y$ es una función de dos variables $s$ y $t$: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces $z$ es indirectamente una función de $s$ y de $t$ y deseamos hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ mantenemos fija a $s$ y calculamos la derivada ordinaria de $z$ con respecto a $t$. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

**3 Regla de la cadena (caso 2)** Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de $x$ y $y$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de $s$ y $t$. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

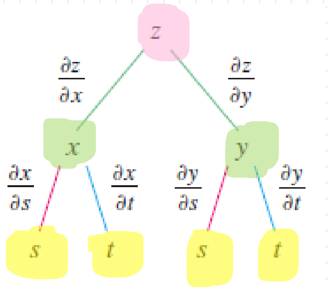


**FIGURA 2**

**EJEMPLO 3** Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2e^x \operatorname{sen}(y)ts + e^x \cos(y) s^2$$

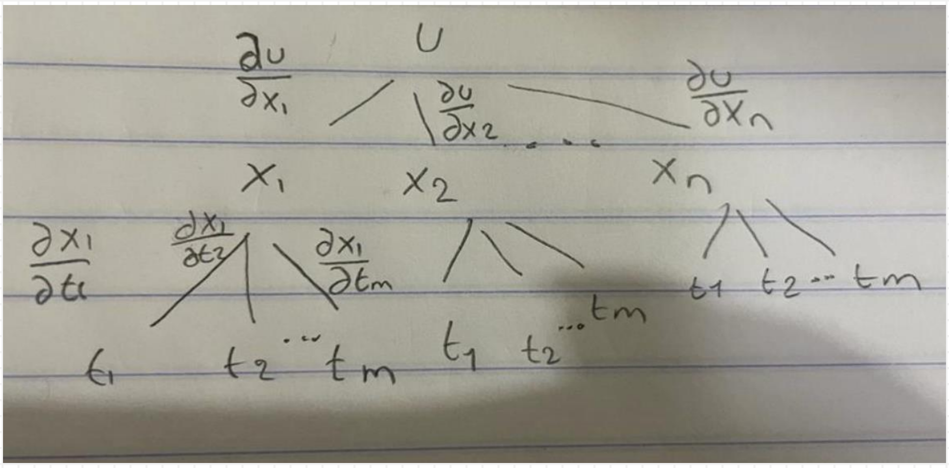
ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Ahora consideramos la situación general en la cual una variable dependiente $u$ es una función de $n$ variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de $m$ variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que hay $n$ términos, uno para cada variable intermedia. La demostración es similar a la del caso 1.

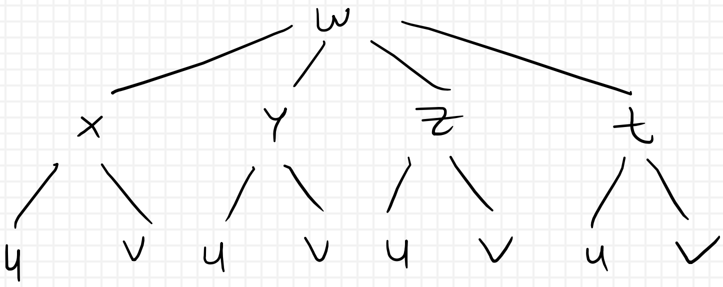
**4 Regla de la cadena (versión general)** Supongamos que $u$ es una función derivable de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada $x_j$ es una función derivable de las $m$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces $u$ es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.




**V EJEMPLO 4** Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.




$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

Definición (Divergencia).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de $M$ , $N$ y $P$ .

Nótese que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de $M$ , $N$ y $P$.

Nótese que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$