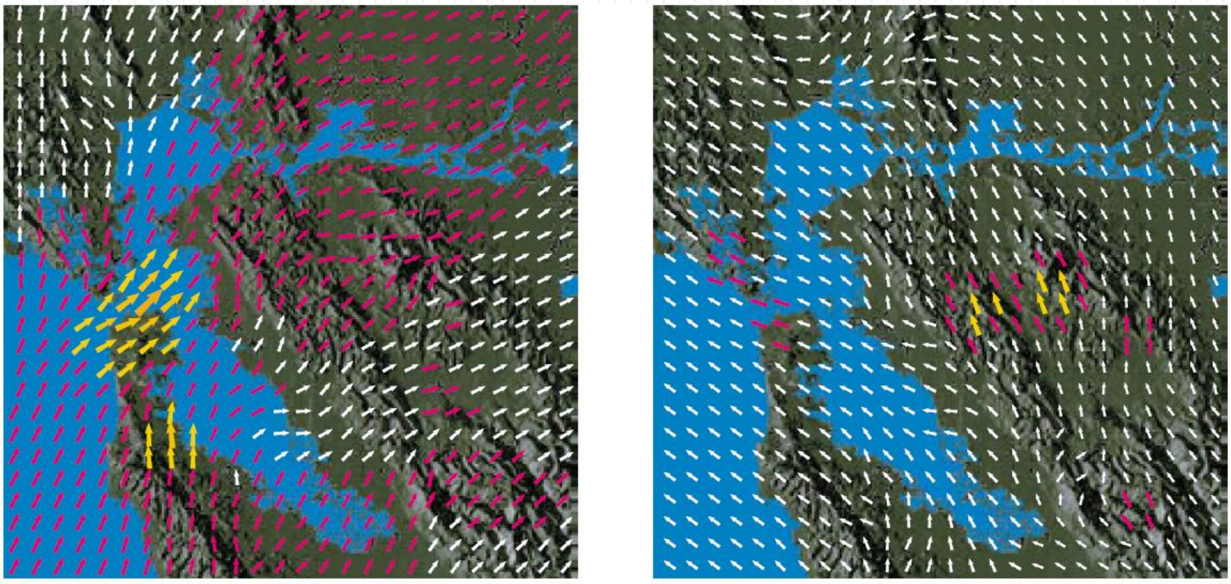
CAMPOS VECTORIALES

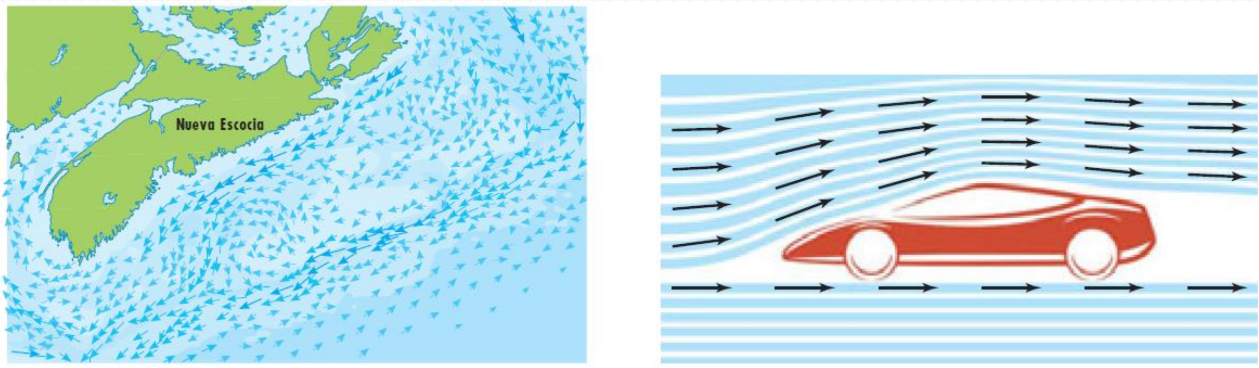
ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara



a) 6:00 p.m., 1 de marzo de 2010

b) 6:00 a.m., 1 de marzo de 2010

FIGURA 1 Campos vectoriales de velocidad que muestran los patrones de viento en la bahía de San Francisco.



a) Corrientes oceánicas fuera de la costa de Nueva Escocia

b) Flujo que se encuentra en un automóvil

FIGURA 2 Campos vectoriales de velocidad

En general, un campo vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) y cuyo rango es un conjunto de vectores en V_2 o (V_3).

1 Definición Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$ (una región plana). Un **campo vectorial sobre** $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

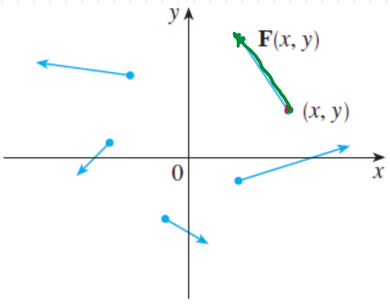
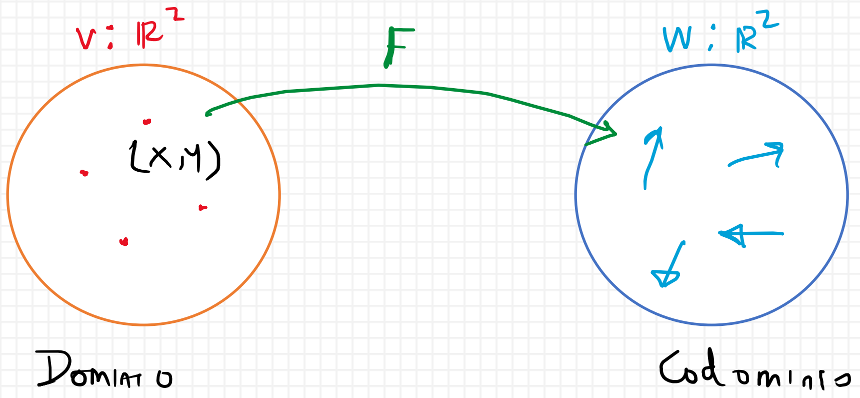


FIGURA 3
Campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$

La mejor manera de representar un campo vectorial es dibujar una flecha que representa al vector $\mathbf{F}(x,y)$ que inicia en el punto (x,y).



Como $\mathbf{F}(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j} = \langle P(x,y), Q(x,y) \rangle$$

$$\mathbf{F}(x,y) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$$

Observe que P y Q son funciones escalares de dos variables y, algunas veces, se les llama **campos escalares** para distinguirlos de los campos vectoriales.

2 Definición Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un **campo vectorial sobre** $\mathbb{R}^3$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

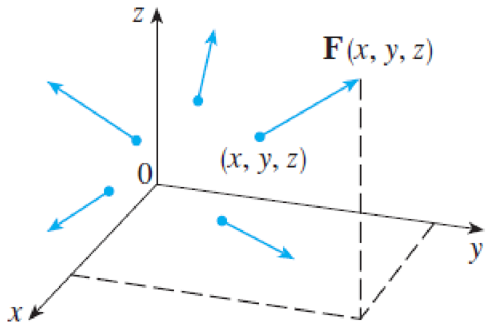


FIGURA 4
Campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Es posible definir la continuidad de los campos vectoriales y demostrar que $\mathbf{F}$ es continua si y solo si sus funciones constituyentes P, Q, R son continuas.

Algunas veces identificamos un punto (x, y, z) con su vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ y escribimos $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en lugar de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Entonces $\mathbf{F}$ se convierte en una función que asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a un vector $\mathbf{x}$.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

V EJEMPLO 1 Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ está definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Describa $\mathbf{F}$ trazando algunos de sus vectores $\mathbf{F}(x, y)$ como en la figura 3.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
(1,0)	<0,1>
(0,1)	<-1,0>
(−1,0)	<0,-1>
(0,−1)	<1,0>
(2,2)	<-2,2>
(−2,2)	<-2,-2>
(−2,−2)	<2,-2>
(2,−2)	<2,2>

$\mathbf{F}(1,0) = -0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} = \mathbf{j}$

$\mathbf{F}(0,1) = -1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = -\mathbf{i}$

$\mathbf{F}(-1,0) = -0\mathbf{i} + (-1)\mathbf{j} = -\mathbf{j}$

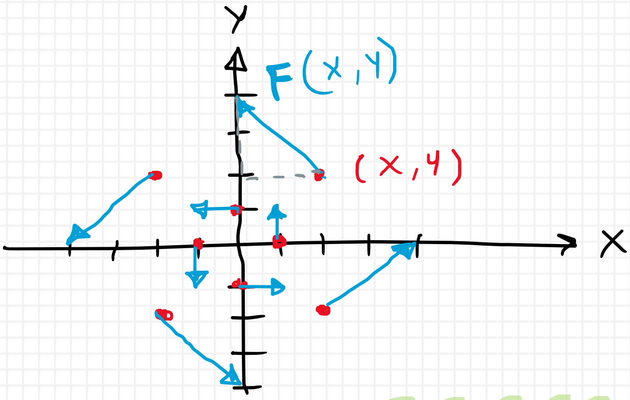
$\mathbf{F}(0,-1) = -(-1)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{i}$

$\mathbf{F}(2,2) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

$\mathbf{F}(-2,2) = -2\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$\mathbf{F}(-2,-2) = -(-2)\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

$\mathbf{F}(2,-2) = -(-2)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



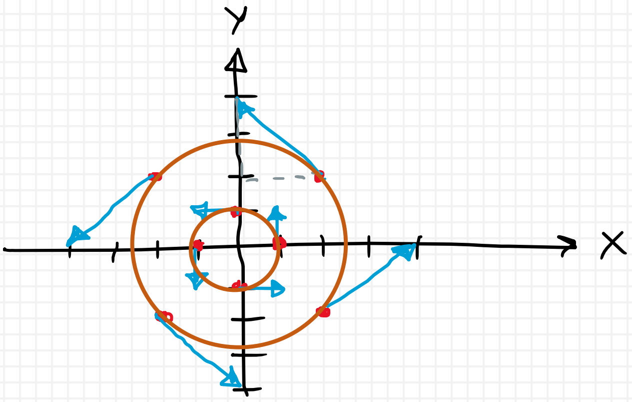
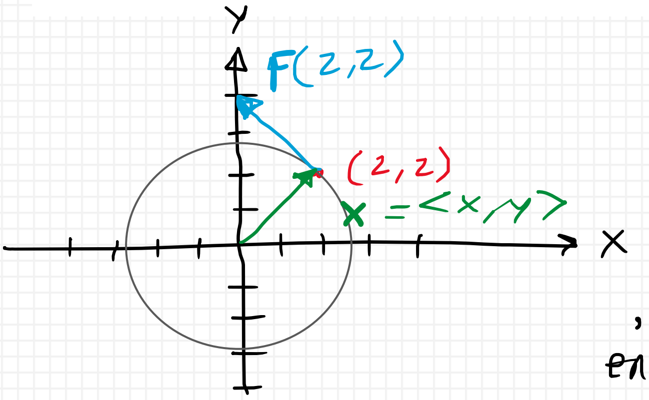


Fig. 5

Al parecer, según la figura 5, cada flecha es tangente a la circunferencia con centro en el origen. Para confirmarlo, calculemos el producto punto del vector de posición $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ con el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:



$\mathbf{x} \perp \mathbf{F}(\mathbf{x})$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$

$= -xy + xy = 0$

$\therefore$ x y F(x) sí son ortogonales entonces cada flecha es tangente a la circunferencia.

Se ve claramente que el radio del círculo

$r = |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

entonces

$r = |\mathbf{F}(\mathbf{x})|$

https://la.mathworks.com/login

https://la.mathworks.com/help/matlab/vector-fields.html

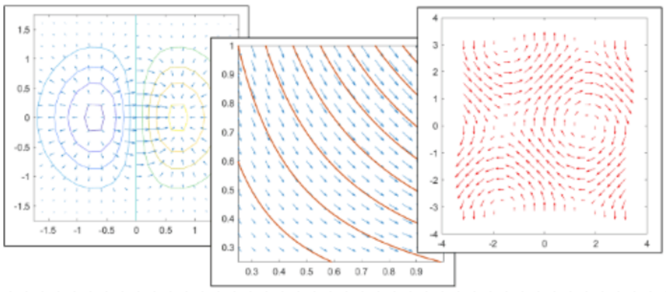
https://matlabacademy.mathworks.com/es/details/matlab-onramp/gettingstarted

Campos de vectores

Gráficas quiver, compass, feather y stream

R2021b

Los campos de vectores pueden modelar la velocidad, la fuerza magnética, el movimiento fluido y los gradientes. Visualice los campos de vectores en una vista 2D o 3D con las funciones `quiver`, `quiver3` y `streamline`. También puede mostrar los vectores en un eje horizontal o desde el origen.



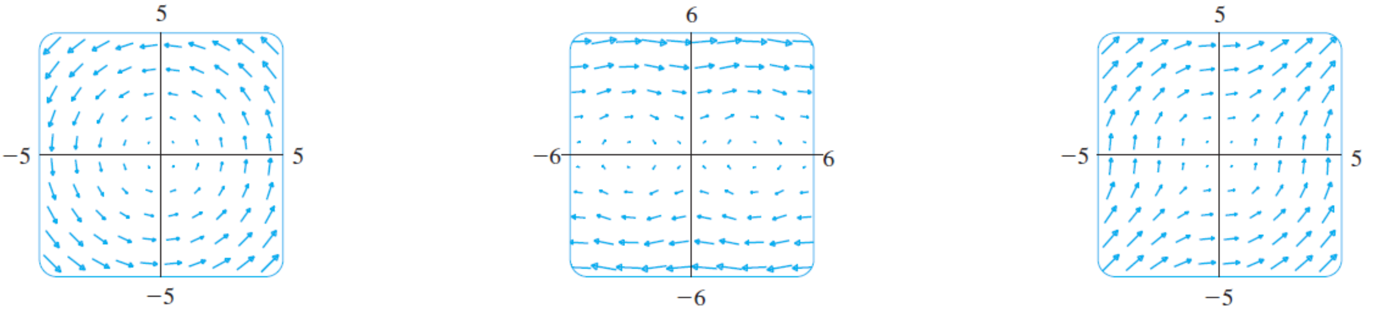


FIGURA 6
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$

FIGURA 7
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \text{sen } x \rangle$

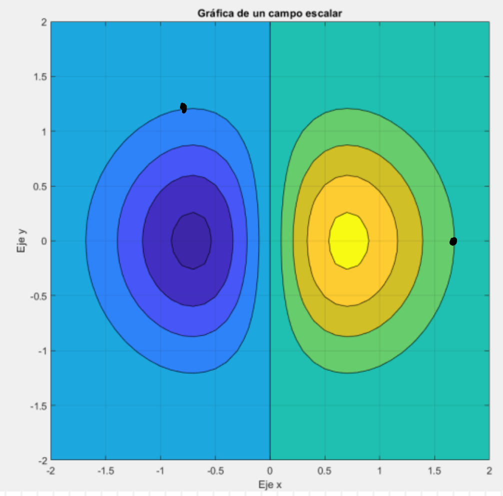
FIGURA 8
$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2) \rangle$

$F(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

```
%Clase 2. 18-08-2022
%FIGURA 6
close; clear; clc;

spacing = 2;
[X,Y] = meshgrid(-5:spacing:5,-5:spacing:5);
U = -Y;
V = X;
quiver(X,Y,U,V)
grid on;

%% FIGURA 7
close; clear; clc;

spacing = 0.5;
[X,Y] = meshgrid(-6:spacing:6,-6:spacing:6);
U = Y;
V = sin(X);
quiver(X,Y,U,V)
grid on;

%% FIGURA 8
close; clear; clc;

spacing = 0.5;
[X,Y] = meshgrid(-6:spacing:6,-6:spacing:6);
U = log(1+Y.^2);
V = log(1+X.^2);
quiver(X,Y,U,V)
grid on;
```

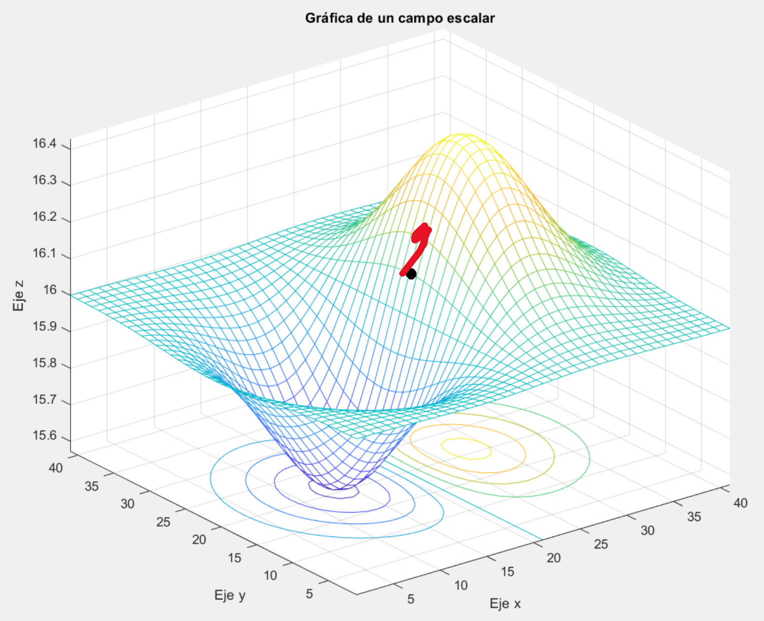
CAMPOS ESCALARES

En general, un campo escalar es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) y cuyo rango es un conjunto de escalares en V.




```
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-2:spacing:2,-
2:spacing:2);
Z = 16+X.*exp(-X.^2-Y.^2);
contourf(X,Y,Z)
title('Gráfica de un campo escalar');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
grid on;
axis equal;
```

```
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-2:spacing:2,-
2:spacing:2);
Z = 16+X.*exp(-X.^2-Y.^2);
contourf(X,Y,Z)
grid on;
axis equal;


meshc(Z)
title('Gráfica de un campo escalar');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
zlabel('Eje z');
```



$$\text{Campo escalar} \xrightarrow{\text{Calcular el gradiente}} \text{Campo vectorial}$$

$F(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$

∇F

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Campo escalar $\xrightarrow{\text{Calcular el gradiente}}$ Campo vectorial

14 Derivadas parciales

Las gráficas de funciones de dos variables son superficies que pueden tomar una variedad de formas, incluyendo algunas que tienen una silla o paso entre montañas. En este lugar, en Utah (conocido como "The wave"), puede verse un punto que es un mínimo en una dirección, pero es un máximo en otra dirección.

Funciones de dos variables

La temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra en cualquier momento dado, depende de la longitud x y la latitud y del punto. Se puede pensar que T es una función de dos variables x y y, o como una función del par (x, y). Esta dependencia funcional se indica escribiendo $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y de su altura h. De hecho, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h, y escribimos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

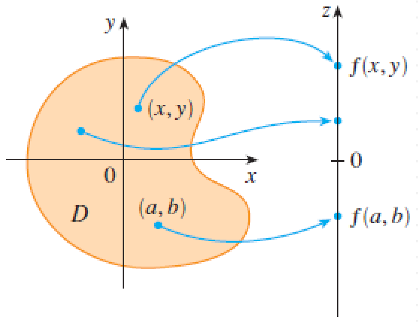


FIGURA 1

Definición Una **función** f **de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo, escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

$\{\ \} \rightarrow$ conjunto , $\mid \rightarrow$ tal que , $\in \rightarrow$ pertenece a

EJEMPLO 1 Para las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

Primero vamos a evaluar $f(3,2)$

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Para determinar el dominio debemos asegurar que evitamos

* singularidad $\frac{1}{0}$ $\longrightarrow$ $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

* indeterminación $\frac{0}{0}$

* $f \in \mathbb{C}$ $\longrightarrow$ $x + y + 1 \geq 0$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0,\ x \neq 1\}$$

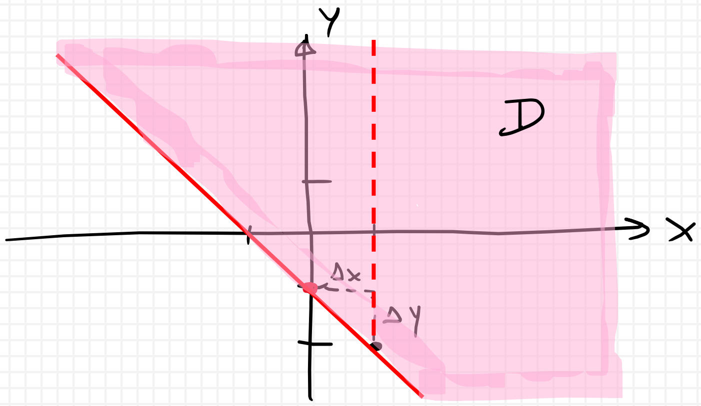
$\sqrt{-9}$,

esta cantidad es negativa tendríamos un número complejo.

$3i$, $i = \sqrt{-1}$

Graficar

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0,\ x \neq 1\}$



$x+y+1=0$

$y=-x-1$

$y=mx+b$

$m=\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$

Comp. $(0,0)$

$x+y+1 \geq 0$

$0+0+1 \geq 0$

$1 \geq 0$ ✓

Gráficas

Otro modo de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

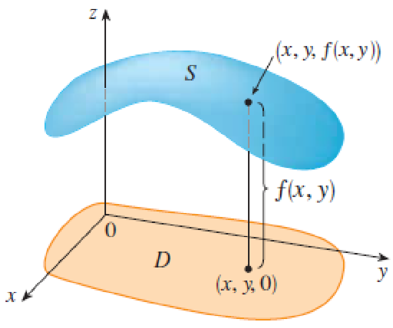


FIGURA 5

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Podemos visualizar la gráfica S de f directamente sobre o abajo de su dominio D en el plano xy (véase figura 5).

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

```
%Gráfica de una función en 3D
%https://www.youtube.com/watch?v=1PNwH_Mmfuk
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-1:spacing:1,-1:spacing:1);

Z = sqrt(9-X.^2-Y.^2);
mesh(X,Y,Z)
title('Gráfica de una función de dos variables');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
zlabel('Eje z');
grid on;
```

$x^2+y^2=r^2$

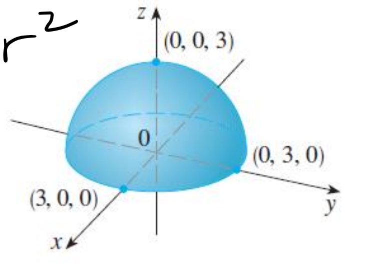


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que debe hacer es recordar que, según la ecuación 1, la derivada parcial con respecto a x es justamente la derivada *ordinaria* de la función g de una sola variable que se obtiene al mantener fija a y. Por lo tanto, tenemos la regla siguiente.

Regla para determinar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

$f_x \rightarrow$ derivada parcial de f con respecto a x

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

$$f_x(2,1) = 3(2)^2 + 2(2)(1)^3 = 16$$

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2,1) = 3(2)^2(1)^2 - 4(1) = 8$$

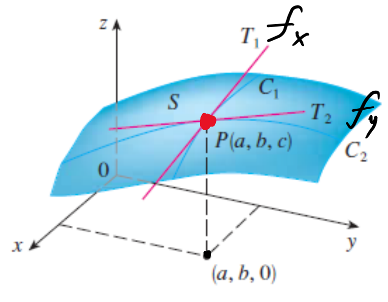


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2.

Interpretaciones de derivadas parciales

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S (la gráfica de f). Si $f(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está situado sobre S. Si hace $y = b$, está enfocando la atención en la curva C_1 en la cual el plano vertical $y = b$ interseca a S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$). De igual manera, el plano vertical $x = a$ interseca a S en una curva C_2. Tanto la curva C_1 como C_2 pasan por el punto P (véase figura 1).

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, de modo que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de modo que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Por lo tanto, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos $y = b$ y $x = a$.

15-40 Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$ **16.** $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

$$f_x(x,y) = -3y$$

$$f_y(x,y) = 5y^4 - 3x$$

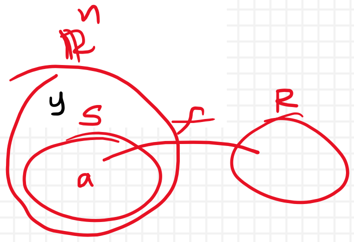
$$f_x(x,y) = 4x^3y^3 + 16xy$$

$$f_y(x,y) = 3x^4y^2 + 8x^2$$

Apostol, T. M. (1984). Calculus II: cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad. Editorial Reverté. https://elibro-net.ezproxy.iteso.mx/es/lc/iteso/titulos/46806

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UN CAMPO ESCALAR RESPECTO A UN VECTOR. *Dado un campo escalar* $f\colon S \to \mathbf{R}$, *donde* $S \subseteq \mathbf{R}^n$. *Sean* $\boldsymbol{a}$ *un punto interior a* S *e* $\boldsymbol{y}$ *un punto arbitrario de* $\mathbf{R}^n$. *La derivada de* f *en* $\boldsymbol{a}$ *con respecto a* $\boldsymbol{y}$ *se representa con el símbolo* $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y})$ y se define

$$f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} \tag{8.4}$$



$f : S \to R$ (f de S en R)

Diferenciales

En el caso de una función derivable de una variable, $y = f(x)$, definimos la diferencial dx como una variable independiente; es decir, dx puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de y se define entonces como

9 $$dy = f'(x)dx$$

(Véase sección 3.10.) En la figura 6 se muestra la relación entre el incremento Δy y la diferencial dy: Δy representa el cambio en altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa el cambio en altura de la tangente cuando x cambia una cantidad $dx = \Delta x$.

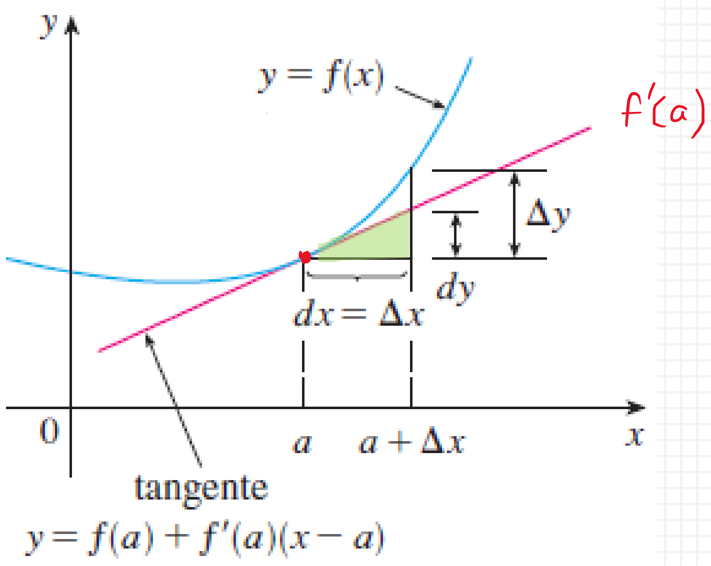


FIGURA 6

$$\tan \theta = \frac{c.o.}{c.a.}$$

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = f'(a)\,dx$$

En el caso de una función diferenciable de dos variables, $z = f(x, y)$, definimos las **diferenciales** dx y dy como variables independientes; es decir, pueden tomar cualquier valor. Entonces, la **diferencial** dz, también conocida como **diferencial total**, se define como

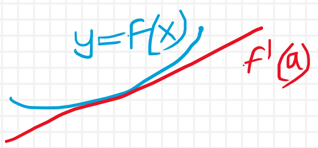
10 $$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(Compare con la ecuación 9.) Algunas veces se usa la notación df en lugar de dz.

Si tomamos $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, entonces la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal $\boxed{4}$ se puede escribir como



La figura 7 es el equivalente tridimensional de la figura 6 y en ella se muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y del incremento Δz: dz representa el cambio en altura del plano tangente, y Δz representa el cambio en la altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

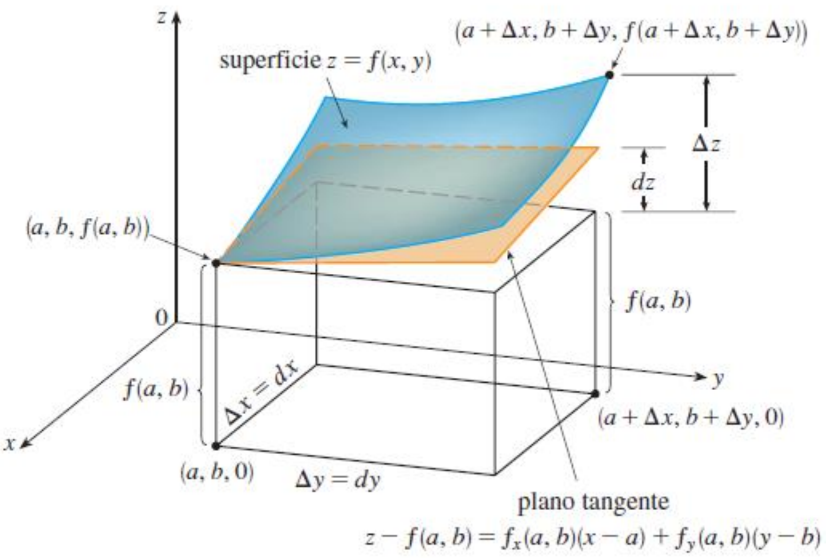
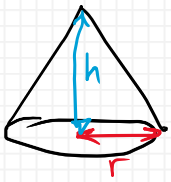


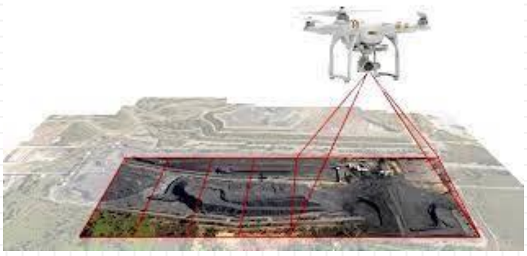
FIGURA 7

EJEMPLO 5 El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, con un posible error en la medición de 0.1 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

$$V(r,h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$





$$dV = f_r(r,h)\,dr + f_h(r,h)\,dh$$

$$= \frac{2\pi r h}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

error de medición $|\Delta r| \le 0.1$ y $|\Delta h| \le 0.1$.

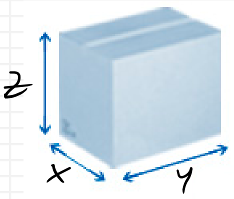
Para estimar el error máximo del volumen calculado consideramos $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$.

$$dV = \frac{2\pi(10)(25)}{3}0.1 + \frac{\pi(10)^2}{3}0.1 = 52.3598 + 10.472$$

$$dV = 62.8318 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO 6 Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

$$V(x,y,z) = xyz$$



$$dV = f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz$$

$$= yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

el error de medición $|\Delta x| \le 0.2$, $|\Delta y| \le 0.2$, $|\Delta z| \le 0.2$.

Para calcular el error más grande del volumen calculado consideramos $dx = dy = dz = 0.2$.

$$dV = 60(40)0.2 + 75(40)0.2 + 75(60)0.2 =$$

$$= 480 + 600 + 900 = 1980$$

El error máximo del volumen calculado es de 1980 cm^3

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

14.5 Regla de la cadena

Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones derivables, entonces y es indirectamente una función derivable de t y

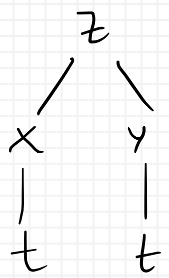
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \boxed{1}$$

Para funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable x y y es a su vez una función de la variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para derivar z como una función de t. Supongamos que f es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que éste es el caso cuando f_x y f_y son continuas (teorema 14.4.8).

2 Regla de la cadena (caso 1) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables de t. Entonces z es una función derivable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \operatorname{sen} 2t$ y $y = \cos t$, determine dz/dt cuando $t = 0$.



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy + 3y^4)\, 2\cos 2t + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)$$

cuando $t = 0$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)2 + (0+0)0 = 6$$

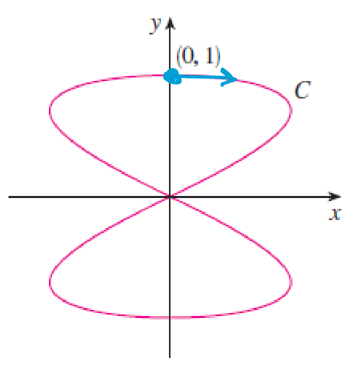


FIGURA 1
La curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos t$

si $t = 0$

$x = \operatorname{sen}(2(0)) = 0$

$y = \cos(0) = 1$

Ahora consideremos la situación en donde $z = f(x, y)$ pero cada x y y es una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces z es indirectamente una función de s y de t y deseamos hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ mantenemos fija a s y calculamos la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 Regla de la cadena (caso 2) Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

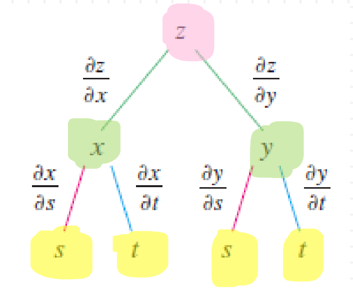


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 2e^x \operatorname{sen}(y) ts + e^x \cos(y) s^2$$

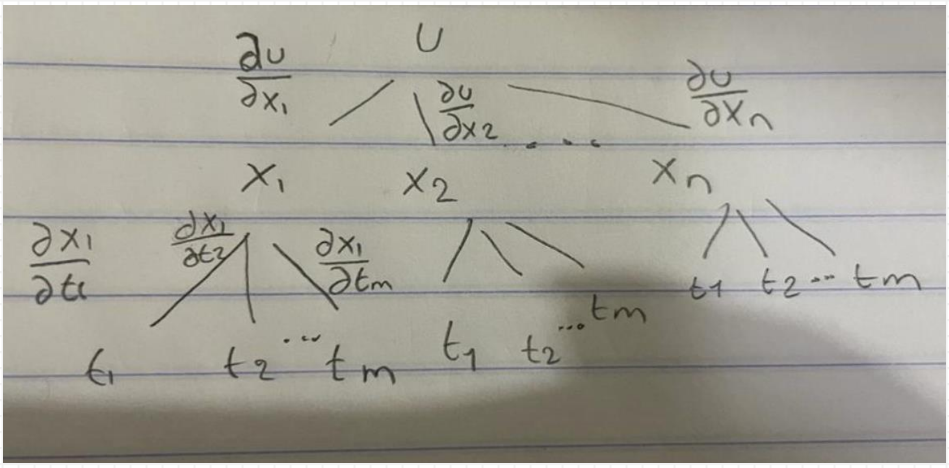
Ahora consideramos la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La demostración es similar a la del caso 1.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

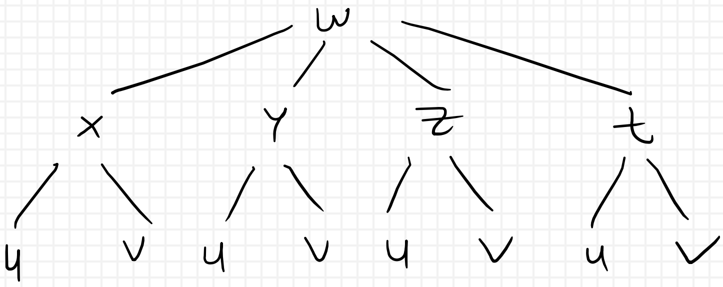
4 Regla de la cadena (versión general) Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.



V EJEMPLO 4 Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.



$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Definición (Divergencia).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

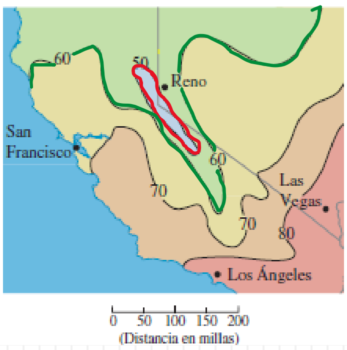
se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

14.6 Derivadas direccionales y el vector gradiente



En el mapa del clima de la figura 1, se muestra un mapa de contorno de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 PM, de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia si viajamos hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viajamos hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si queremos saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección? En esta sección se estudia un tipo de derivada, que se denomina *derivada direccional*, que permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas direccionales

Recuerde que si $z = f(x, y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

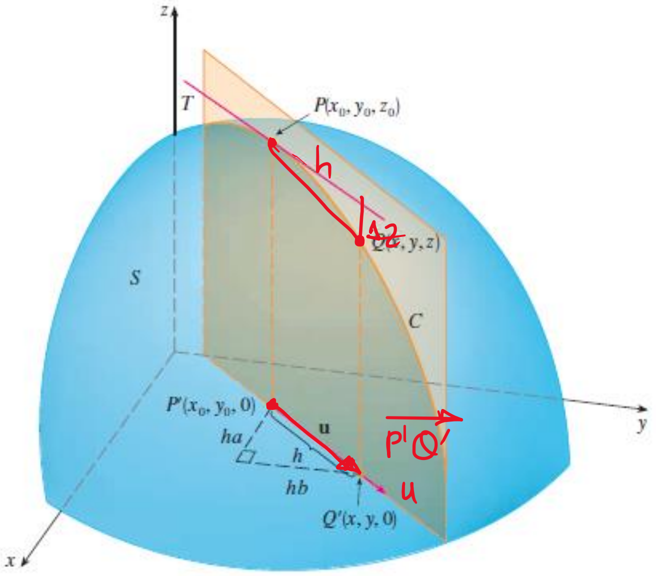
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

1

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios **i** y **j**.

Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de **u** interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de **u**.



Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a **u** y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$T = \frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de **u**, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de **u**.

2 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

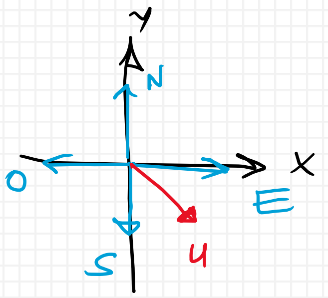
$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

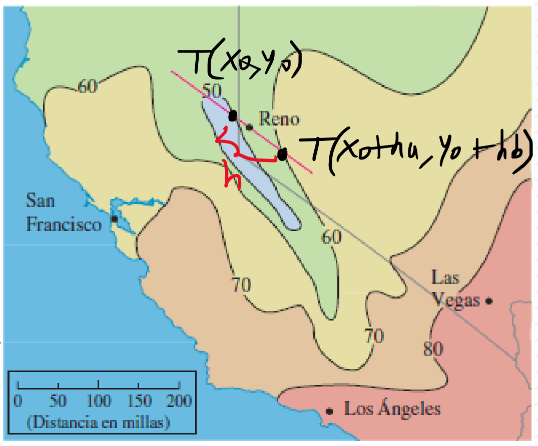
si este límite existe.

Al comparar la definición 2 con las ecuaciones $\boxed{1}$, observamos que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.

EJEMPLO 1 Con ayuda del mapa del clima ilustrado en la figura 1 estime el valor de la derivada direccional de la función de la temperatura en Reno en la dirección sureste.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara





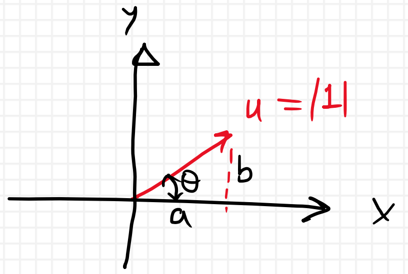
$$D_u T \approx \frac{60^\circ - 50^\circ}{75\,mi} = 0{,}1333\ ^\circ F/mi$$

Cuando calculamos la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general aplicamos el teorema siguiente.

3 Teorema Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

u es un vector unitario $\rightarrow |u| = 1$



$$u = \langle a, b \rangle$$
$$= \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{a}{1}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{1}$$

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\mathbf{u}$ es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b, \qquad u = \langle a, b \rangle$$

$$u = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle = \left\langle \cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \right\rangle$$

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b$$
$$= (3x^2 - 3y)\cos\frac{\pi}{6} + (-3x + 8y)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$
$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\right]$$

$$D_u f(1,2) = \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + (8 - 3\sqrt{3})2\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de $\mathbf{u}$. Es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y el plano vertical que pasa por $(1, 2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ mostrada en la figura 5.

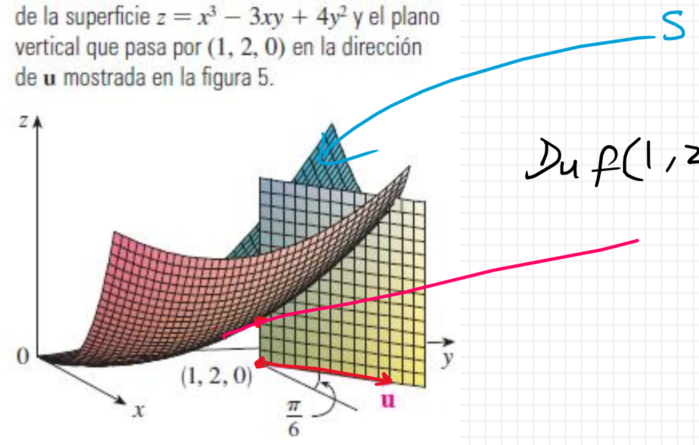


FIGURA 5

$$D_u f(1,2) = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2} = 3.9$$

El vector gradiente

Observe que de acuerdo con el teorema 3, la derivada direccional de una función derivable se puede escribir como el producto punto de dos vectores:

7
$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto se presenta no sólo al calcular las derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Por eso se le da un nombre especial, *gradiente de f*, y una notación especial (**grad** f o ∇f, que se lee "nabla f").

8 Definición Si f es una función de dos variables x y y, entonces el **gradiente** de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Calcular el gradiente de f

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \\ &= (\cos x + y e^{xy})\mathbf{i} + x e^{xy}\mathbf{j} \\ &= \langle \cos x + y e^{xy}, x e^{xy} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla f(0,1) &= \langle \cos(0) + 1 e^{0(1)}, (0) e^{0(1)} \rangle \\ &= \langle 2, 0 \rangle \end{aligned}$$

Con esta notación para el vector gradiente, podemos escribir la expresión (7) para la derivada direccional como

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

9
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

V EJEMPLO 4 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$.

$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
$= \langle 2, 5 \rangle$

Para que un vector sea unitario $|\mathbf{v}| = 1$. Entonces, primero hacemos

$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \neq 1$ $\therefore$ $\mathbf{v}$ no es un vector unitario

$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ $\qquad \mathbf{v}$

Para calcular el vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ hacemos

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{29}}\langle 2, 5 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

Ahora bien,

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u} = \langle 2xy^3, 3x^2y^2 - 4 \rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

$$= 2xy^3\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) + \frac{(3x^2y^2 - 4)5}{\sqrt{29}}$$

$$= \frac{4xy^3 + 15x^2y^2 - 20}{\sqrt{29}}$$

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,i + \frac{\partial f}{\partial y}\,j = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$

$$= \langle 2xy^3, 3x^2y^2 - 4 \rangle$$

Finalmente

$$D_u f(2,-1) = \frac{4(2)(-1)^3 + 15(2)^2(-1)^2 - 20}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

Funciones de tres variables

14
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

con

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

V EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, a) determine el gradiente de f y b) encuentre la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + 2j - k) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

$$|v| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

El vector gradiente se calcula como:

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

$$= \operatorname{sen} yz\, i + xz \cos yz\, j + xy \cos yz\, k$$

La derivada direccional es:

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \cdot u$$

$$\ldots \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

V EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, a) determine el gradiente de f y b) encuentre la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

$$= \frac{\operatorname{sen} yz}{\sqrt{6}} + \frac{2xz \cos yz}{\sqrt{6}} - \frac{xy \cos yz}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} yz + (2xz - xy)\cos yz}{\sqrt{6}}$$

$$D_u f(1,3,0) = \frac{\cancel{\operatorname{sen}(3(0))} + (\cancel{2(1)(0)} - 1(3))\cos(3(0))}{\sqrt{6}}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

Calcula la velocidad media cuando $f(t) = e^t$ en el intervalo de tiempo $[0, 1]$.

- ( ) $v = e$
- ( ) $v = e^2$
- (•) $v = e - 1$
- ( ) Ninguna de las anteriores.

$*\ f'(t) = e^t$

$$v = e^{(1)} - e^{(0)} = \underline{e - 1}$$

$*\ f(t) = 3t - 2$

$$f'(t) = \underline{3}$$

En general

Si $m > n$

$$f(x) = \sqrt[m]{x^n} \rightarrow f'(x) = \frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$$

Si $n > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \rightarrow f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

ante

Ley de exponentes

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}, \quad f'(x) = -nx^{-n-1}$$

$$= -nx^{-(n+1)}$$

$$= \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$f(x) = \sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}, \quad f'(x) = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m} - 1}$$

$$= \frac{n}{m} x^{\left(\frac{n-m}{m}\right)} = \frac{n}{m} \sqrt[m]{x^{n-m}}$$

$$= \underline{\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}}$$

Maximización de la derivada direccional

Suponga que tenemos una función f de dos o tres variables y consideramos todas las derivadas direccionales posibles de f en un punto dado. Éstas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Cabe entonces, plantear las preguntas: ¿en cuál de estas direcciones f cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas las proporciona el teorema siguiente.

15 Teorema Supongamos que f es una función derivable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

Significancia del vector gradiente

Ahora se resumen los modos en los que el vector gradiente es importante. Primero se considera una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 15, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Además, también sabemos que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P (refiérase a la figura 9). Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque, a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia. Así, parece razonable que si nos movemos en dirección perpendicular, se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. Una vez más, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ señala la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de f siguen siendo constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (véase la figura 11).

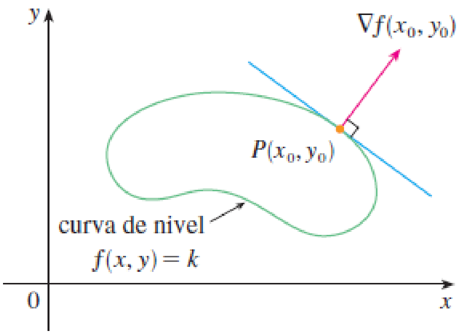


FIGURA 11

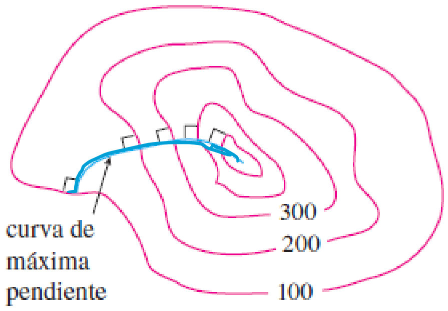
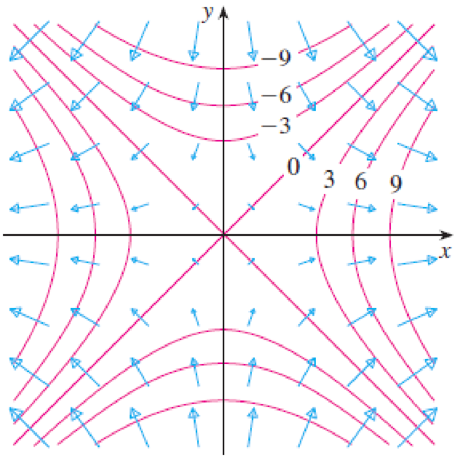


FIGURA 12

Si consideramos un mapa topográfico de una colina y representamos mediante $f(x, y)$ la altura por arriba del nivel del mar de un punto de coordenadas (x, y), entonces se puede dibujar una curva de máxima pendiente como en la figura 12, haciéndola perpendicular a todas las curvas de nivel. Este fenómeno también se puede observar en la figura 12 de la sección 14.1, donde Lonesome Creek sigue una curva con el descenso más empinado.

Los sistemas algebraicos computarizados poseen comandos para dibujar muestras de vectores gradiente. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (a, b). En la figura 13 se ilustra una gráfica de éstas (que se denominan *campo del vector gradiente*) para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobrepuesta en un mapa de contorno de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente apuntan "pendiente arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.



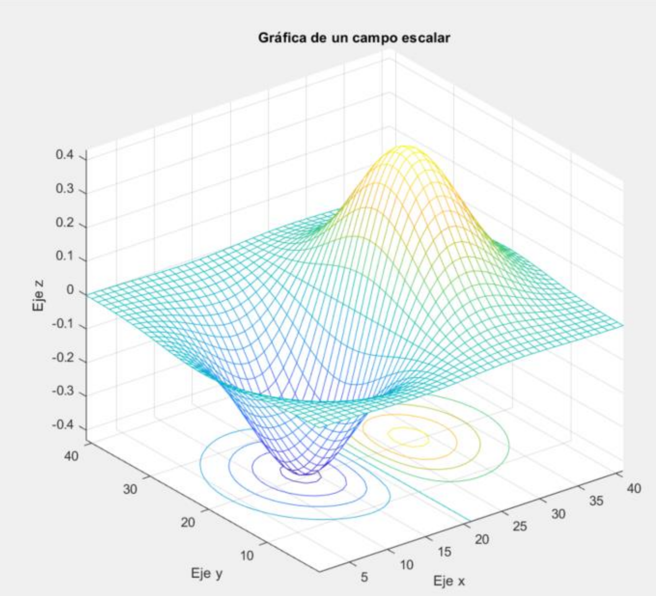
Campo escalar → Calcular el gradiente → Campo vectorial

Considere el campo escalar

$$f(x,y) = x\,e^{-x^2-y^2}$$

① Primero, grafique

```
%Graficar el campo escalar
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-2:spacing:2,-2:spacing:2);
Z = X.*exp(-X.^2-Y.^2);

meshc(Z)    %Superficie con la curva de nivel
title('Gráfica de un campo escalar');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
zlabel('Eje z');
```



② obtener el vector gradiente

$$f(x,y) = x\,e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{d\,uv}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$$

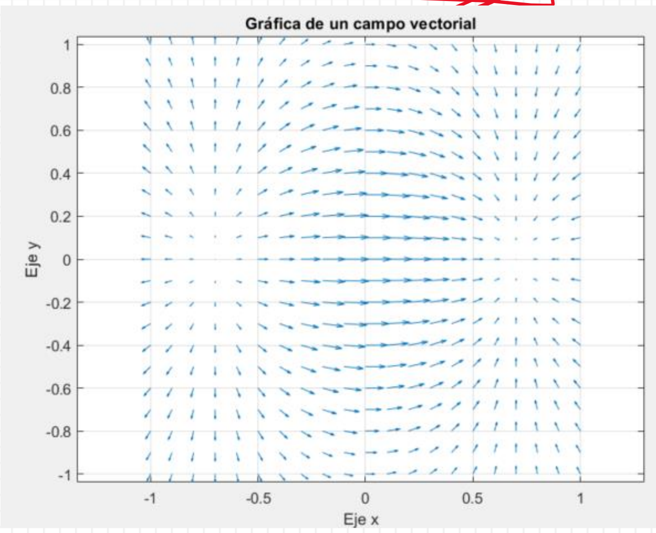
$$\frac{de^u}{du} = u'\,e^u$$

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

$$= \left(e^{-x^2-y^2}(1) + x\left(-2x\,e^{-x^2-y^2}\right)\right)\mathbf{i} + x\left(-2y\,e^{-x^2-y^2}\right)\mathbf{j}$$

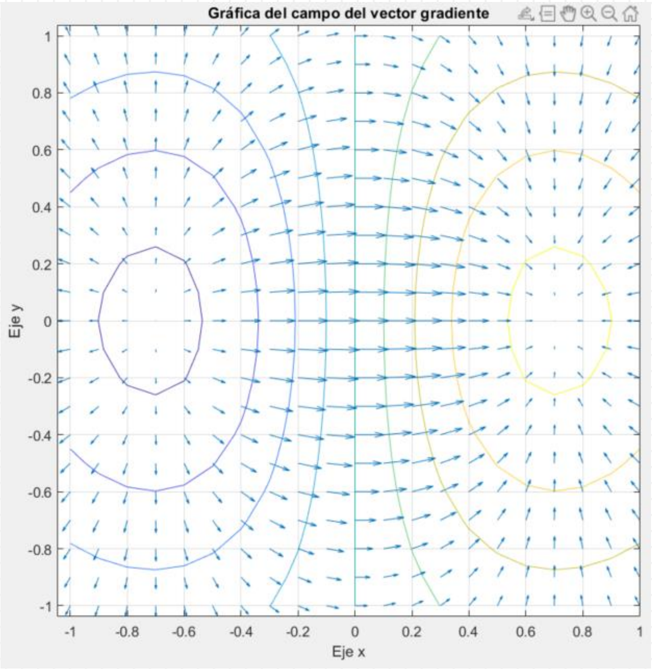
$$\nabla f(x,y) = (1-2x^2)\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j}$$

```
%Graficar el campo vectorial que encontramos
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-1:spacing:1,-1:spacing:1);
U =(1-2.*X.^2).*exp(-X.^2-Y.^2); % 1era componente del vector gradiente
V =-2.*X.*Y.*exp(-X.^2-Y.^2);     % 2da componente del vector gradiente

quiver(X,Y,U,V)
axis equal
grid on;
title('Gráfica de un campo vectorial');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
```



Gráfica del campo del vector gradiente

```
%Graficar el campo del vector gradiente
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-1:spacing:1,-
1:spacing:1);
Z = X.*exp(-X.^2-Y.^2);
contour(X,Y,Z)
grid on;
axis equal;

hold on;

U = (1-2*X.^2).*exp(-X.^2-Y.^2);
V = -2*X.*Y.*exp(-X.^2-Y.^2);
quiver(X,Y,U,V);
title('Gráfica del campo del vector
gradiente');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
```



Considere

$\nabla f(x,y,z) = (1-2x^2)\, e^{-x^2-y^2}\, \mathbf{i} - 2xy\, e^{-x^2-y^2}\, \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

calcular divergencia

calcular el rotacional

Definición (**Divergencia**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Definición (**Rotacional**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

Considere

$F(x,y,z) = (1-2x^2)\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$

* calcular divergencia

* calcular el rotacional

Definición (**Divergencia**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}$$

se define su divergencia como el campo escalar

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F}$

Definición (**Rotacional**).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F}$

Considere

$$F(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - 2xy\,e^{-x^2-y^2}\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k}$$

* calcular divergencia
* calcular el rotacional

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

$$M(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$N(x,y,z) = -2xy\,e^{-x^2-y^2}$$

$$P(x,y,z) = 0$$

5. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (regla del producto)

$$\nabla\cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = (1-2x^2)(-2x e^{-x^2-y^2}) + e^{-x^2-y^2}(-4x)$$

$$= -2xe^{-x^2-y^2} + 4x^3 e^{-x^2-y^2} - 4x e^{-x^2-y^2}$$

$$= 4x^3 e^{-x^2-y^2} - 6x e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = -2xy(-2y e^{-x^2-y^2}) + e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$= 4xy^2 e^{-x^2-y^2} - 2x e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

$$\nabla\cdot F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= 4x^3 e^{-x^2-y^2} \underline{- 6x e^{-x^2-y^2}} + 4xy^2 e^{-x^2-y^2} \underline{- 2x e^{-x^2-y^2}}$$

$$= (4x^3 + 4xy^2 - 8x)e^{-x^2-y^2}$$

Definición (Rotacional).- Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\mathbf{i} + N(x,y,z)\mathbf{j} + P(x,y,z)\mathbf{k}.$$

se define su rotacional como el campo vectorial

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

siempre que existan esas derivadas parciales de M, N y P.

Nótese que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y}^{\,0} - \frac{\partial N}{\partial z}^{\,0}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z}^{\,0} - \frac{\partial P}{\partial x}^{\,0}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$M(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$N(x,y,z) = -2xy\,e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2xy\left(-2xe^{-x^2-y^2}\right) + e^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$= (4x^2y - 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (1-2x^2)\left(-2y\,e^{-x^2-y^2}\right) + e^{-x^2-y^2}(0)^{\,0}$$

$$= (4x^2y - 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0i + 0j + 0k$$

En esta sección se definen dos operaciones que se pueden ejecutar sobre los campos vectoriales y que desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones del cálculo vectorial al flujo de fluidos y a la electricidad y magnetismo. Cada operación es similar a la derivación, pero una genera un campo vectorial mientras que la otra proporciona un campo escalar.

Rotacional

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen las derivadas parciales de P, Q y R, entonces el **rotacional** de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ definido por

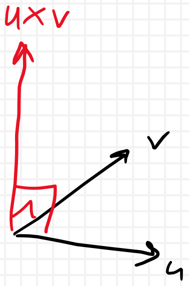
$$\boxed{\text{rot }\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}} \tag{1}$$

Como un auxiliar nemotécnico, escribimos la ecuación 1 usando la notación del operador. Introducimos el operador diferencial vectorial ∇ ("nabla") como

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Tiene significado cuando opera sobre una función escalar para producir el gradiente de f.

$$F = \nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$



Si pensamos que ∇ es un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, también podemos considerar el producto cruz formal de ∇ y el campo vectorial $\mathbf{F}$ como sigue:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & R \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} k$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$= \text{rot }\mathbf{F}$$

Por tanto, la manera más sencilla de recordar la definición 1 es por medio de la expresión simbólica

$$\boxed{\text{rot }\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}} \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine el rotacional de $\mathbf{F}$.

$$\text{rot }\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$F(x,y,z) = \underset{P}{xz}\, i + \underset{Q}{xyz}\, j \underset{R}{- y^2} K$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = xy \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = x$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = yz \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\text{rot}F = (-2y - xy)\,i + (x - 0)\,j + (yz - 0)\,k$$

$$\text{rot}F = y(-x-2)\,i + x\,j + yz\,k$$

Divergencia

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ entonces la **divergencia de F** es la función de tres variables definida por

9
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que el rot **F** es un campo vectorial, pero div **F** es un campo escalar. En términos del operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, la divergencia de **F** se puede expresar simbólicamente como el producto punto de ∇ y **F**:

10
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, encuentre div **F**.

$F(x,y,z) = xz\,i + xyz\,j - y^2 k$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} =$

$\partial P/\partial x = z$

$\partial Q/\partial y = xz(1)$

$\partial R/\partial z = 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = z + xz$

Ejercicio Clase

06 Martes Septiembre

Considere:

$\nabla f(x,y,z) = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2}\,i - 2xye^{-x^2-y^2}\,j + 0k$

Divergencia:

$\operatorname{div} F = \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy} + \frac{dP}{dz}$

$\frac{dM}{dx} = (4x^3-6x)e^{-x^2-y^2}$

$\frac{dN}{dy} = 2x(2y^2-1)e^{-y^2-x^2}$

$\frac{dP}{dz} = 0$

$\operatorname{div} f = 4x^3e^{-x^2-y^2} - 6xe^{-x^2-y^2} + 4xy^2e^{-y^2-x^2} - 2xe^{-y^2-x^2}$

$\operatorname{div} F = (e^{-x^2-y^2})(4x^3-8x+4xy^2)$

Rotacional

$\operatorname{Rot} F = [0-0]i + [0-0]j + [-2ye^{-y^2-x^2} - (4x^2-2)ye$

$\operatorname{Rot} F = 0i + 0j + [-2ye^{-y^2-x^2} - 4x^2ye^{-x^2-y^2} + 2ye^{-x^2-y^2}]k$

$\operatorname{ROT} F = 0i + 0j - 4x^2ye^{-x^2-y^2}k$

8.18 Diferenciales de campos vectoriales

La teoría de la diferenciación para campos vectoriales es una extensión directa de la teoría análoga para campos escalares. Sea $f\colon S \to \mathbf{R}^m$ un campo vectorial definido en un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$. Si $\boldsymbol{a}$ es un punto interior de S e $\boldsymbol{y}$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^n$ definimos la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ mediante la fórmula

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h},$$

siempre que tal límite exista. La derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ es un vector de $\mathbf{R}^m$.

Designemos con f_k el k-ésimo componente de f. Observemos que la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe si y sólo si $f'_k(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, en cuyo caso tenemos

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = (f'_1(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}), \ldots, f'_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_k,$$

donde $\boldsymbol{e}_k$ es el k-ésimo vector coordenado unidad.

Decimos que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable* en un punto interior $\boldsymbol{a}$ si existe una transformación lineal

$$T_a\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

tal que

(8.16) $$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{a}) + T_a(\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|\, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}),$$

donde $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{O}$ cuando $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{O}$. La fórmula de Taylor de primer orden (8.16) es válida para todo $\boldsymbol{v}$ tal que $\|\boldsymbol{v}\| < r$ para un cierto $r > 0$. El término $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ es un vector de $\mathbf{R}^m$. La transformación lineal T_a se llama *diferencial total* o simplemente *diferencial* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.

Para los campos escalares se demostró que $T_a(\boldsymbol{y})$ es el producto escalar del vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$ por $\boldsymbol{y}$. Para los campos vectoriales demostraremos que $T_a(y)$ es un vector cuyo componente k-ésimo es el producto escalar $\nabla f_k(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}$.

TEOREMA 8.9. *Supongamos que f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ con diferencial T_a. Existe entonces la derivada $f'(a; y)$ para todo $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{R}^n$, y tenemos*

(8.17) $$T_a(y) = f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}).$$

Además, si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y si $y = (y_1, \ldots, y_n)$, tenemos

(8.18) $$T_a(y) = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{e}_k = (\nabla f_1(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}, \ldots, \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}).$$

$$E(a, v) = \lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\|v\|} = 0$$

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (e^{xy}, x^2+y, 2x^3y^2)$ la diferencial de f en $(1,3)$ tendrá que tener alguna relación con las diferenciales de sus componentes en $(1,3)$.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

$a = (1,3)$

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$f_1(x,y) = e^{xy} \to \frac{\partial f_1}{\partial x} = ye^{xy}(1,3) = 3e^{1(3)} = 3e^3$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = xe^{xy}(1,3) = 1e^{1(3)} = e^3$

$f_2(x,y) = x^2+y \to \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x(1,3) = 2(1) = 2$

$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$

$f_3(x,y) = 2x^3y^2 \to \frac{\partial f_3}{\partial x} = 6x^2y^2(1,3) = 6(1)^2(3)^2 = 54$

$\frac{\partial f_3}{\partial y} = 4x^3y(1,3) = 4(1)^3 3 = 12$

los residuos satisfacen

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\|v\|}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad T_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

* para f_1

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{e^{(1+v_1)(3+v_2)} - e^{1(3)} - \begin{bmatrix} 3e^3, e^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{e^{(1+v_1)(3+v_2)} - e^{3} - \begin{bmatrix} 3e^3, e^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

* para f_2

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{(1+v_1)^2 + (3+v_2) - (1^2+3) - \begin{bmatrix} 2, 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{(1+v_1)^2 + (3+v_2) - 4 - \begin{bmatrix} 2, 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

* para f_3

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{2(1+v_1)^3(3+v_2)^2 - (2(1)^3 3^2) - \begin{bmatrix} 54, 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{2(1+v_1)^3(3+v_2)^2 - 18 - \begin{bmatrix} 54, 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

la función f nos queda

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{f(x_0+v) - f(1,3) - \left(\begin{bmatrix} 3e^3, e^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2, 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 54, 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

o también

diferencial del campo vectorial

$$\lim_{(v_1\to 0, v_2 \to 0)} \frac{f(x_0+v) - f(1,3) - \begin{bmatrix} 3e^3 & e^3 \\ 2 & 1 \\ 54 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

El diferencial total es $T_a = \begin{bmatrix} 3e^3 & e^3 \\ 2 & 1 \\ 54 & 12 \end{bmatrix}$

La ecuación (8.18) puede también escribirse en forma más sencilla como un producto matricial,

$$T_a(y) = Df(a)y\,,$$

siendo $Df(a)$ la matriz $m \times n$ cuya fila k-ésima es $\nabla f_k(a)$, e y una matriz columna $n \times 1$. La matriz $Df(a)$ se llama *matriz jacobiana* de f en a. Su elemento kj es la derivada parcial $D_j f_k(a)$. Así pues, tenemos

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

$f(a_1, \ldots, a_n) = (f_1, \ldots, f_m)$

La matriz jacobiana $Df(a)$ está definida en cada punto en el que existan las mn derivadas parciales $D_j f_k(a)$.

La diferencial T_a se expresa también poniendo $f'(a)$. La derivada $f'(a)$ es una transformación lineal; la matriz jacobiana $Df(a)$ es una representación matricial de esa transformación.

La fórmula de Taylor de primer orden toma la forma

(8.19) $$f(a + v) = f(a) + f'(a)(v) + \|v\|\, E(a, v)\,,$$

donde $E(a, v) \to O$ cuando $v \to O$. Se parece a la fórmula de Taylor unidimensional. Para calcular los componentes del vector $f'(a)(v)$ podemos utilizar el producto matricial $Df(a)v$ o la fórmula (8.18) del teorema 8.9.

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^2 \to f : \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6)$ es diferenciable en todo su dominio, hallar su matriz jacobiana en un punto $x \in f : \mathbb{R}^2$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 6y \\ 15x^2 & 12y^5 \end{bmatrix}$$

$$\dim(Df(x)) = \underset{\uparrow}{2} \times \underset{\uparrow}{2}$$

componentes de f

variables independientes de f

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^2 \to f : \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (\text{sen}(x + y), xe^{x+y}, x + y)$ es diferenciable en todo su dominio, hallar su matriz jacobiana en el punto $(0, 0)$

$$\dim(DF(0,0)) = 3 \times 2$$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ xe^{x+y} + e^{x+y} & xe^{x+y} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \cos(0+0) & \cos(0+0) \\ 0e^{0+0} + e^{0+0} & 0e^{0+0} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.20 La regla de la cadena para diferenciales de campos vectoriales

TEOREMA 8.11. REGLA DE LA CADENA. *Sean f y g dos campos vectoriales tales que la función compuesta $h = f \circ g$ esté definida en un entorno del punto a. Supongamos que g sea diferenciable en a, con diferencial $g'(a)$. Pongamos $b = g(a)$ y supongamos que f es diferenciable en b, con diferencial $f'(b)$. Entonces h es diferenciable en a, y la diferencial $h'(a)$ viene dada por*

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a),$$

que es la composición de las transformaciones lineales $f'(b)$ y $g'(a)$.

Ejemplo.-Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diferenciables, hallar $(f \circ g)'$ si $g(x, y) = (xy, 5x, y^3)$ y $f(x, y, z) = (3x^2 + y^2 + z^2, 5xyz)$

$$(f \circ g)' = f' \circ g' = Df(g(x,y))\, Dg(x,y)$$

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$Df(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 2y & 2z \\ 5yz & 5xz & 5xy \end{bmatrix}_{g(x,y)}$$

$$= \begin{bmatrix} 6(xy) & 2(5x) & 2(y^3) \\ 5(5x)y^3 & 5(xy)y^3 & 5(xy)5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix}$$

$$f' \circ g' = Df(g(x,y))\, Dg(x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^2 + 50x & 6x^2y + 6y^5 \\ 50xy^4 & 100x^2y^3 \end{bmatrix}$$

8.21 Forma matricial de la regla de la cadena

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Sea $h = f \circ g$, donde g es diferenciable en a y f diferenciable en $b = g(a)$. La regla de la cadena establece que

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a).$$

Podemos expresar la regla de la cadena en función de las matrices jacobianas $Dh(a)$, $Df(b)$, y $Dg(a)$ que representan las transformaciones lineales $h'(a)$, $f'(b)$, y $g'(a)$, respectivamente. Puesto que la composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de sus matrices, obtenemos

(8.26) $$Dh(a) = Df(b)\, Dg(a), \qquad \text{donde} \quad b = g(a).$$

Ésta es la llamada *forma matricial de la regla de la cadena.* También puede escribirse como un conjunto de ecuaciones escalares expresando cada matriz en función de sus elementos.

Ejemplo.-Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to f : \mathbb{R}^2$ diferenciables, hallar $(f \circ g)'$ si $g(x,y) = (xy, 5x, y^3)$ y $f(x,y,z) = (3x^2 + y^2 + z^2, 5xyz)$

$$(f \circ g)' = f' \circ g'$$

$$Dh(a) = Df(g(a))\,Dg(a) = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

$2 \times \boxed{3 \quad 3} \times 2$

2×2

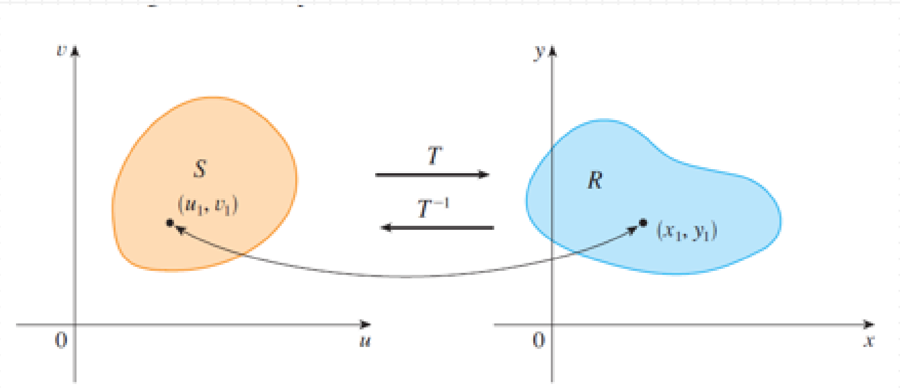
$$= \begin{bmatrix} 6xy^2 + 50x + 0 & 6x^2y + 0 + 6y^5 \\ 25xy^4 + 25xy^4 + 0 & 25x^2y^3 + 0 + 75x^2y^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6xy^2 + 50x & 6x^2y + 6y^5 \\ 50xy^4 & 100x^2y^3 \end{bmatrix}$$

$$Dg(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

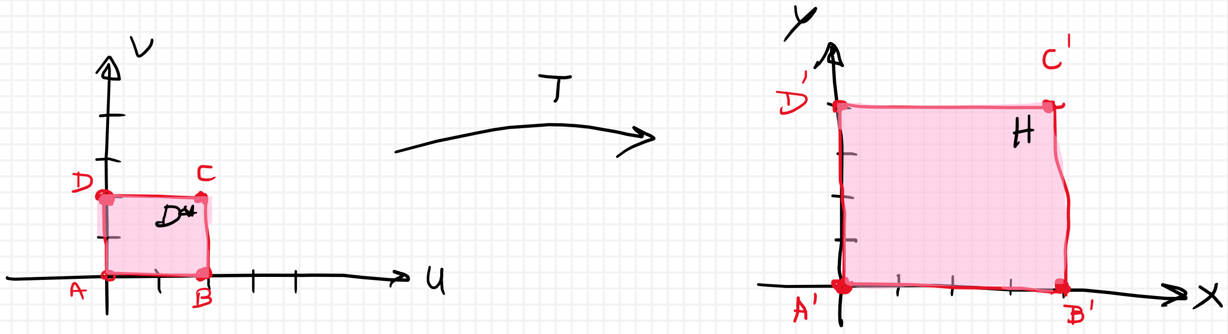
$$Df(g(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 2y & 2z \\ 5yz & 5xz & 5xy \end{bmatrix}_{g(a)}$$

$$= \begin{bmatrix} 6(xy) & 2(5x) & 2(y^3) \\ 5(5x)y^3 & 5(xy)y^3 & 5(xy)5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix}$$



DOMINIO IMAGEN

$$T\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}y \end{bmatrix}$$



$u = \frac{1}{2}x \rightarrow x = 2u$

$v = \frac{1}{2}y \rightarrow y = 2v$

$$\rightarrow J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El determinante del Jacobiano

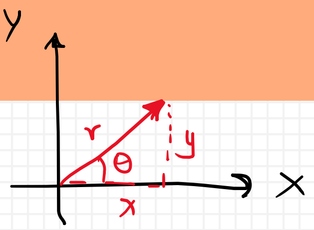
$$|J_F| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

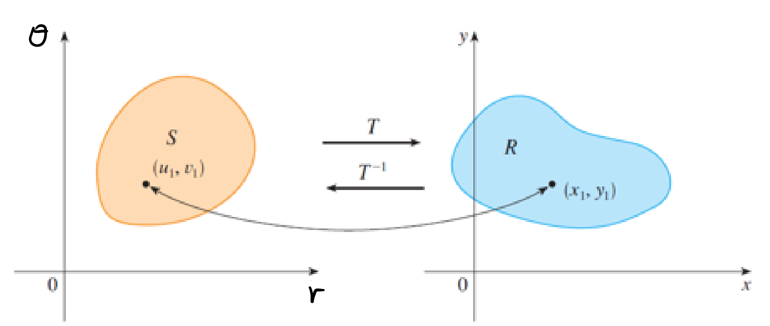
$$\text{Área}(H) = \text{Área}(D^*)\,|J_F|$$

$$\text{Área}(H) = \text{Área}(D^*)\ 4$$

La transformación de coordenadas polares (r, θ) a coordenadas cartesianas (x, y) está dada por la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{+} \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ cuyas componentes son

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$





$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$|J_F| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\,\text{sen}^2\theta) = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$

$$= r$$

implícito, implícita (adjetivo).- Que está incluido en una cosa, sin que esta lo diga o lo especifique.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

Derivación implícita

La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se empezó a tratar en las secciones 3.5 y 14.3. Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

6 $$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Debemos escribir la ec. dada en la forma:

$$F(x,y) = 0$$

$$x^3 + y^3 = 6xy$$

$$\underbrace{x^3 + y^3 - 6xy}_{F(x,y)} = 0$$

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 0 - 6y = 3x^2 - 6y$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = 0 + 3y^2 - 6x = 3y^2 - 6x$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}}^{0} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad$ y $\qquad \dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

así que esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y obtenemos la primera fórmula de las ecuaciones 7 de la página 930. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7 $$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

EJEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Primero escribimos la ec. dada en la forma

$F(x,y,z) = 0$

y nos queda

$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$

$$\underbrace{x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 6yz$

$F_z = \dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 6xy$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

$F_y = 3y^2 + 6xz$

El examen queda el jueves 22 de septiembre en clase de manera virtual.

Viene todo lo que vimos

- Me queda pendiente subir una tarea de derivación implícita.
- Reporte de lectura del tema 1.8 (este tema queda fuera del examen del 1er parcial)