Campo escalar $\xrightarrow{\text{Calcular el gradiente}}$ Campo vectorial

14 Derivadas parciales

Las gráficas de funciones de dos variables son superficies que pueden tomar una variedad de formas, incluyendo algunas que tienen una silla o paso entre montañas. En este lugar, en Utah (conocido como "The wave"), puede verse un punto que es un mínimo en una dirección, pero es un máximo en otra dirección.

Funciones de dos variables

La temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra en cualquier momento dado, depende de la longitud x y la latitud y del punto. Se puede pensar que T es una función de dos variables x y y, o como una función del par (x, y). Esta dependencia funcional se indica escribiendo $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende de su radio r y de su altura h. De hecho, sabemos que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h, y escribimos $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Definición Una **función f de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

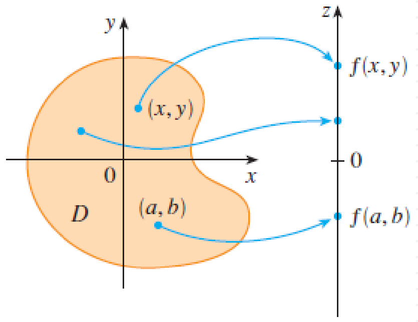


FIGURA 1

A menudo, escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

$\{\ \}$ → conjunto , $|$ → tal que , $\in$ → pertence a

EJEMPLO 1 Para las funciones siguientes, evalúe $f(3, 2)$ y determine y grafique el dominio.

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

Primero vamos a evaluar $f(3,2)$

$$f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Para determinar el dominio debemos asegurar que evitamos

* singularidad $\frac{1}{0}$ → $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

* indeterminación $\frac{0}{0}$

* $f \in \mathbb{C}$ → $x + y + 1 \geq 0$

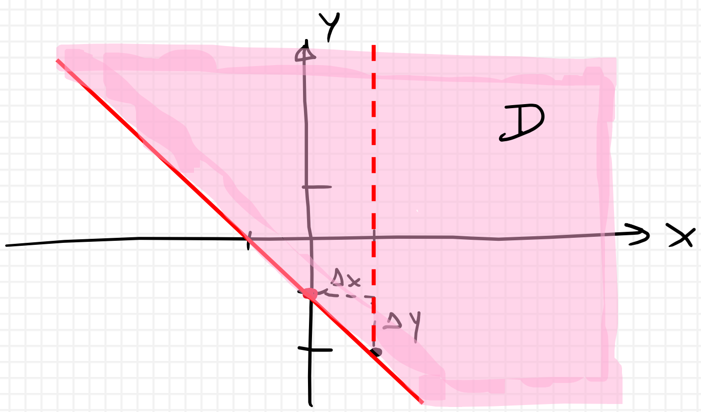
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 \geq 0,\ x \neq 1\}$$

$\sqrt{-9}$ ← esta cantidad es negativa tendríamos un número complejo.

$3i$, $i = \sqrt{-1}$

Graficar

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0,\ x \neq 1\}$



$x+y+1=0$

$y = -x-1$

$y = mx+b$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{1} = -1$

Comp. $(0,0)$

$x+y+1 \geq 0$

$0+0+1 \geq 0$

$1 \geq 0$ ✓

Gráficas

Otro modo de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica

Definición Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

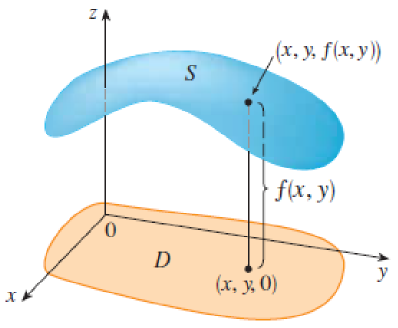


FIGURA 5

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Podemos visualizar la gráfica S de f directamente sobre o abajo de su dominio D en el plano xy (véase figura 5).

V EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

```
%Gráfica de una función en 3D
%https://www.youtube.com/watch?v=1PNwH_Mmfuk
close; clear; clc;

spacing = 0.1;
[X,Y] = meshgrid(-1:spacing:1,-1:spacing:1);

Z = sqrt(9-X.^2-Y.^2);
mesh(X,Y,Z)
title('Gráfica de una función de dos variables');
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
zlabel('Eje z');
grid on;
```

$x^2 + y^2 = r^2$

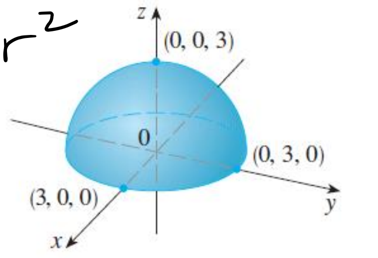


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Notaciones para derivadas parciales Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que debe hacer es recordar que, según la ecuación 1, la derivada parcial con respecto a x es justamente la derivada *ordinaria* de la función g de una sola variable que se obtiene al mantener fija a y. Por lo tanto, tenemos la regla siguiente.

Regla para determinar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

f_x → derivada parcial de f con respecto a x

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$

$f_x(2, 1) = 3(2)^2 + 2(2)(1)^3 = 16$

$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$

$f_y(2, 1) = 3(2)^2(1)^2 - 4(1) = 8$

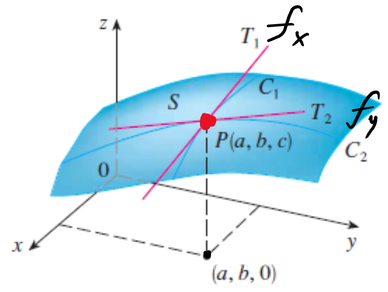


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2.

Interpretaciones de derivadas parciales

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S (la gráfica de f). Si $f(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está situado sobre S. Si hace $y = b$, está enfocando la atención en la curva C_1 en la cual el plano vertical $y = b$ interseca a S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$). De igual manera, el plano vertical $x = a$ interseca a S en una curva C_2. Tanto la curva C_1 como C_2 pasan por el punto P (véase figura 1).

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, de modo que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de modo que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Por lo tanto, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos $y = b$ y $x = a$.

15-40 Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$ **16.** $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

$f_x(x, y) = -3y$

$f_y(x, y) = 5y^4 - 3x$

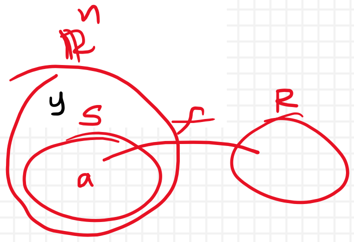
$f_x(x, y) = 4x^3y^3 + 16xy$

$f_y(x, y) = 3x^4y^2 + 8x^2$

Apostol, T. M. (1984). Calculus II: cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones para ecuaciones diferenciales y probabilidad. Editorial Reverté. https://elibro-net.ezproxy.iteso.mx/es/lc/iteso/titulos/46806

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UN CAMPO ESCALAR RESPECTO A UN VECTOR. *Dado un campo escalar $f\colon S \to \mathbf{R}$, donde $S \subseteq \mathbf{R}^n$. Sean $\boldsymbol{a}$ un punto interior a S e $\boldsymbol{y}$ un punto arbitrario de $\mathbf{R}^n$. La derivada de f en $\boldsymbol{a}$ con respecto a $\boldsymbol{y}$ se representa con el símbolo $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y})$ y se define*

(8.4) $$f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h}$$



$f : S \to R$ (f de S en R)