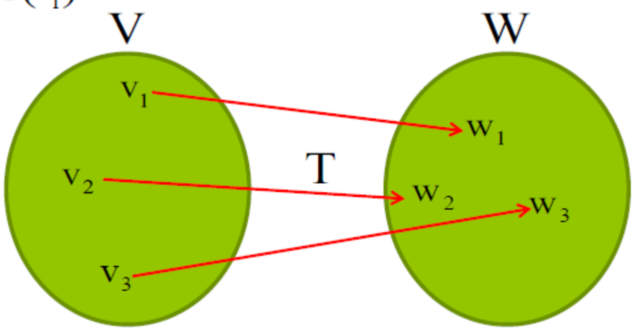
5.1 Definición de una transformación lineal

Sean **V** y **W espacios vectoriales** , una transformación lineal de V en W es una mapeo (correspondencia) $T: V \rightarrow W$ que para $a, b =$ escalares y $v_1, v_2 \in V$ cumple

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2) $T(a v_1) = a T(v_1)$

$T: V \rightarrow W$

T de V en W



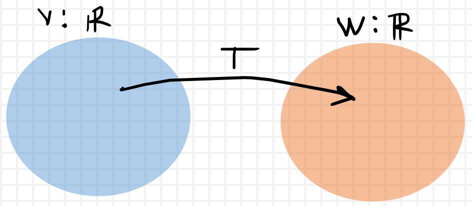
Además, siempre cumple que:

1) $T(0_v) = 0_w$
2) $T(v_i - v_j) = T(v_i) - T(v_j)$

Nota: Una transformación lineal también es conocida como operador lineal

E) ¿Son transformaciones lineales?

a) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x$



Definimos $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2 \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$

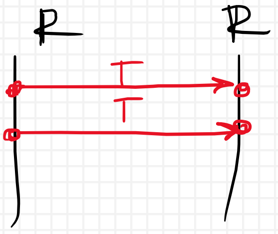
✓ 1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

LI $\rightarrow T(v_1 + v_2) = T(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$

LD $\rightarrow T(v_1) + T(v_2) = T(x_1) + T(x_2) = x_1 + x_2$

¿LI = LD? ✓

$T(x) = x$



✓ 2) $T(a v_1) = a T(v_1)$

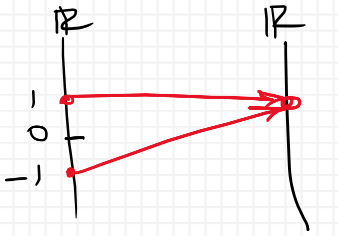
LI $\Rightarrow T(a v_1) = T(a x_1) = a x_1$

LD $\rightarrow a T(v_1) = a T(x_1) = a x_1$

¿LI = LD? ✓

$\therefore$ T sí es una transformación lineal (T.L.)

b) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$

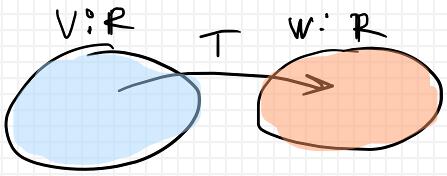


Definimos $v_1 = x_1$, $v_2 = x_2 \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$

✗ 1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$

LI $\rightarrow T(v_1 + v_2) = T(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2$

$= x_1^2 + x_2^2 + 2 x_1 x_2$



LD $\rightarrow T(v_1) + T(v_2) = T(x_1) + T(x_2) = x_1^2 + x_2^2$

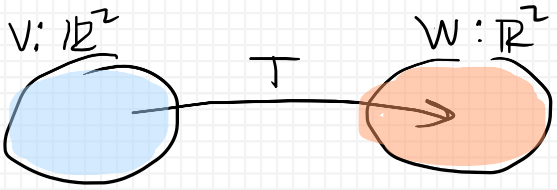
$T(x) = x^2$

¿LI = LD? ✗ $\therefore$ T no es una T.L.

d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x+1\\y\end{bmatrix}$

Definimos $v_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}, \; v_2=\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

y $a \in \mathbb{R}$



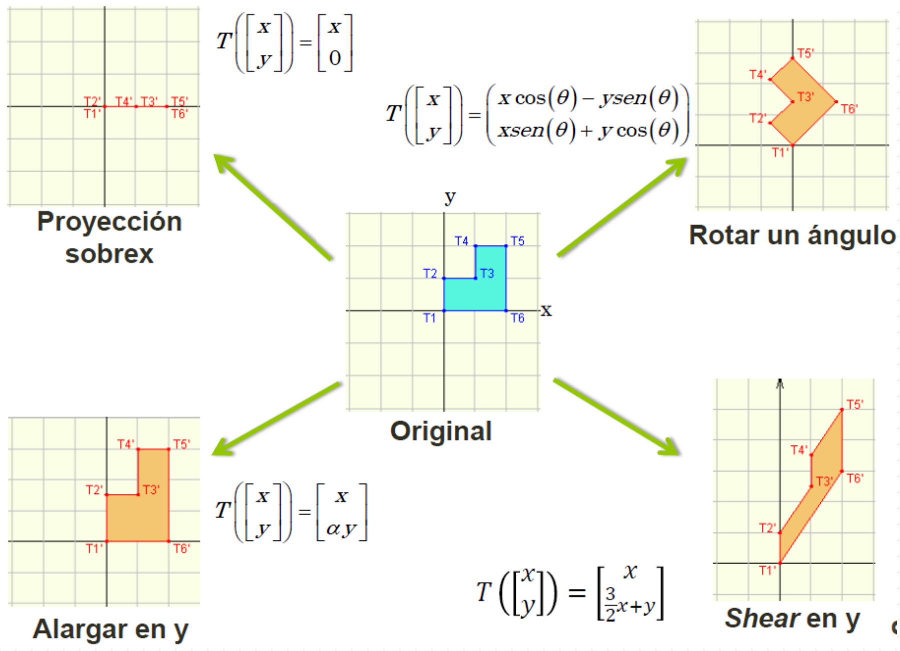
1) $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$

LI $\to T(v_1+v_2)=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+x_2+1\\y_1+y_2\end{bmatrix}$

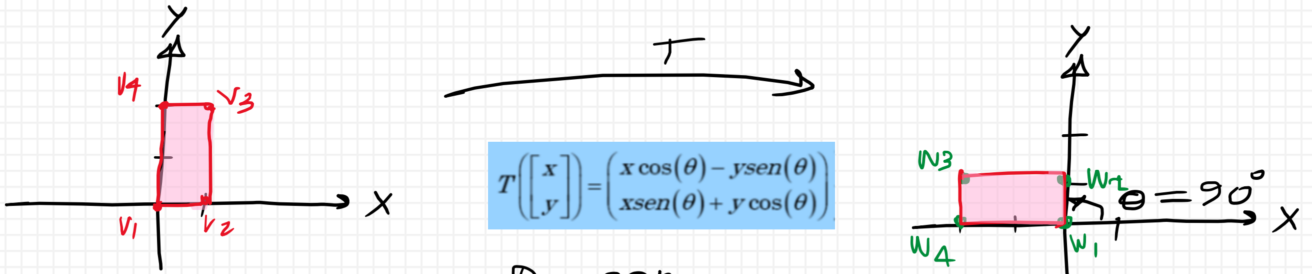
LD $\to T(v_1)+T(v_2)=T\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1+1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2+1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+2\\y_1+y_2\end{bmatrix}$

¿LI = LD? ✗ $\therefore$ T no es una T.L.

5.2 Representaciones geométricas de una transformación lineal



(E) Rotar 90° la sig. imagen.



$\theta = 90°$

$w_1 = T(v_1) = T\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\cos 90° - 0\,\mathrm{sen}\,90°\\ 0\,\mathrm{sen}\,90° + 0\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$w_2 = T(v_2) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\cos 90° - 0\,\mathrm{sen}\,90°\\ 1\,\mathrm{sen}\,90° + 0\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$w_3 = T(v_3) = T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\cos 90° - 2\,\mathrm{sen}\,90°\\ 1\,\mathrm{sen}\,90° + 2\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

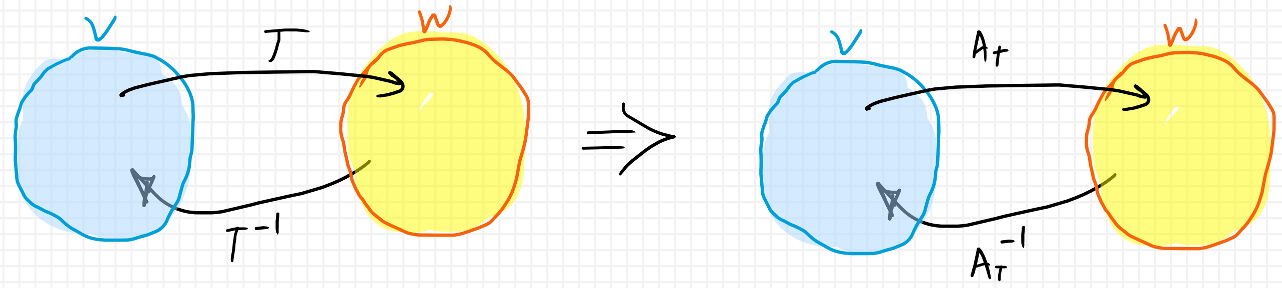
$w_4 = T(v_4) = T\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\cos 90° - 2\,\mathrm{sen}\,90°\\ 0\,\mathrm{sen}\,90° + 2\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$

5.3 Representación matricial de una transformación lineal

Sea $T: V \rightarrow W$ donde $V \in \mathbb{R}^n$ y $W \in \mathbb{R}^m$. Entonces la matriz asociada a la transformación T es $A_T \in M_{mn}$.
Además, la inversa de la transformación T está definida por la matriz $A_T^{-1} \in M_{nm}$.

Nota: Esto significa que para que una transformación tenga inversa, su matriz asociada **debe ser cuadrada y ser no singular**.

A_T es no singular $\rightarrow |A_T| \neq 0 \longrightarrow A_T^{-1}$ existe



Ejemplo: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y+2x \\ 5y \end{bmatrix}$

a) Encuentre su representación matricial.

b) Determine si la transformación tiene inversa y de ser así, calcularla

Para encontrar la representación matricial de T hacemos:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y+2x \\ 5y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ y+2x \\ 5y \end{bmatrix}$$

$(3 \times 2)(2 \times 1) = (3 \times 1)$

La rep. matricial de T es:

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Para que una transformación tenga inversa $|A_T| \neq 0$. En este caso, como A_T no es cuadrada su determinante no se puede calcular y por tanto concluimos que T^{-1} no existe.

E

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

1) Obtener la representación matricial de $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$

Además, verifique si la transformación tiene inversa, y de ser así calcular

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$(2\times 2)(2\times 1) = (2\times 1)$$

La rep matricial de T es:

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para verificar si la T^{-1} existe

$$|A_T| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \quad \therefore \quad A^{-1} \text{ sí existe.}$$

De hecho es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.1667 \\ 0 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

5.4 Rango y núcleo de una transformación lineal. Transformaciones inversas

Dominio: Espacio vectorial de origen.

Codominio: Espacio vectorial de destino

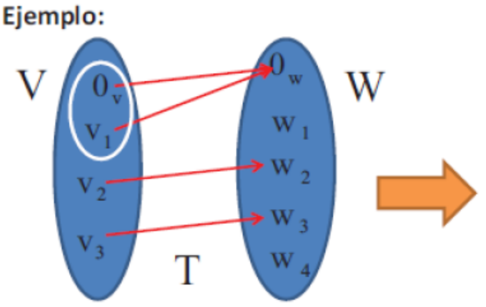
Imagen: Conjunto de todos los elementos del *codominio* que tienen un elemento correspondiente en el dominio. Es un *subespacio vectorial del codominio* (W).

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$$

Núcleo: Conjuntos de todos los elementos del dominio cuyo vector correspondiente en el codominio es el vector cero 0_W. Es un subespacio vectorial del dominio (V).

$$\mathrm{nu}(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

Ejemplo:



$$\text{Dominio} = \{0_v, v_1, v_2, v_3\}$$
$$\text{Imagen}(\mathrm{Im}) = \{0_w, w_2, w_3\}$$
$$\text{Codominio} = \{0_w, w_1, w_2, w_3, w_4\}$$
$$\text{Núcleo de } T = \mathrm{nu}(T) = \{0_v, v_1\}$$

Nulidad y Rango de una Transformación Lineal

Sean $T : V \to W$ una transformación lineal de V en W, y sea $\mathrm{Im}(T)$ la imagen de **T**, y sea $\mathrm{nu}(T)$ el núcleo de **T**. Entonces,

$$\text{Nulidad de } T = \nu(T) = \dim\{\mathrm{nu}(T)\}$$

$$\text{Rango de } T = \rho(T) = \dim\{\mathrm{Im}(T)\}$$

Además, siempre se cumple que

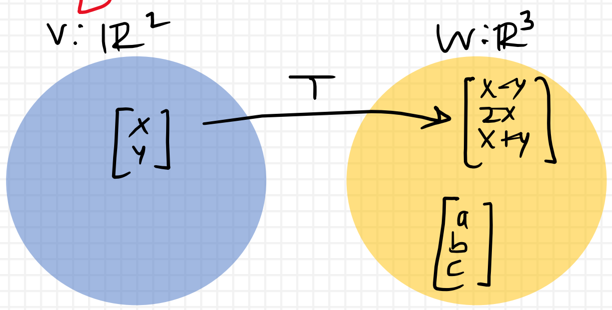
$$\dim V = \dim\{\mathrm{nu}(T)\} + \dim\{\mathrm{Im}(T)\} = \nu(T) + \rho(T)$$

E) Encuentre dominio, codominio, imagen, núcleo, nulidad y rango de:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}$

Dominio: $\mathbb{R}^2$

Codominio: $\mathbb{R}^3$



La imagen de la transformación es:

$$Im(T) = \{ w \in W : w = T(v) \}$$

Antes de sustituir la $Im(T)$, vamos a encontrar A_T

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}, \quad A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(3\times2)(2\times1) = (3\times1)$

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{E.G.} \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a+\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & a-b+c \end{array}\right]$$

¿Qué condiciones se deben de cumplir para que el SEL tenga al menos una solución?

$$a - b + c = 0$$

Por tanto,

$$Im(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0 \right\}$$

El rango de la transformación $\rho(T) = \dim(Im(T))$.

Necesitamos encontrar una base para la imagen de T.

$$\begin{bmatrix} b-c \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} c$$

el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera a la $Im(T)$ y es LI, por tanto forma una base para la $Im(T)$

$$\rho(T) = \dim(Im(T)) = 2$$