8.18 Diferenciales de campos vectoriales

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

La teoría de la diferenciación para campos vectoriales es una extensión directa de la teoría análoga para campos escalares. Sea $f: S \to \mathbf{R}^m$ un campo vectorial definido en un subconjunto S de $\mathbf{R}^n$. Si $\boldsymbol{a}$ es un punto interior de S e $\boldsymbol{y}$ un vector cualquiera de $\mathbf{R}^n$ definimos la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ mediante la fórmula

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h},$$

siempre que tal límite exista. La derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ es un vector de $\mathbf{R}^m$.

Designemos con f_k el k-ésimo componente de f. Observemos que la derivada $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe si y sólo si $f'_k(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ existe para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, en cuyo caso tenemos

$$f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) = (f'_1(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}), \ldots, f'_m(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})\boldsymbol{e}_k,$$

donde $\boldsymbol{e}_k$ es el k-ésimo vector coordenado unidad.

Decimos que $\boldsymbol{f}$ es *diferenciable* en un punto interior $\boldsymbol{a}$ si existe una transformación lineal

$$T_a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

tal que

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{a}) + T_a(\boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|\, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}), \tag{8.16}$$

donde $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \to O$ cuando $\boldsymbol{v} \to O$. La fórmula de Taylor de primer orden (8.16) es válida para todo $\boldsymbol{v}$ tal que $\|\boldsymbol{v}\| < r$ para un cierto $r > 0$. El término $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ es un vector de $\mathbf{R}^m$. La transformación lineal T_a se llama *diferencial total* o simplemente *diferencial* de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.

Para los campos escalares se demostró que $T_a(\boldsymbol{y})$ es el producto escalar del vector gradiente $\nabla f(\boldsymbol{a})$ por $\boldsymbol{y}$. Para los campos vectoriales demostraremos que $T_a(y)$ es un vector cuyo componente k-ésimo es el producto escalar $\nabla f_k(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}$.

TEOREMA 8.9. *Supongamos que f es diferenciable en $\boldsymbol{a}$ con diferencial T_a. Existe entonces la derivada $f'(a; y)$ para todo $\boldsymbol{a}$ de $\mathbf{R}^n$, y tenemos*

$$T_a(y) = f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}). \tag{8.17}$$

Además, si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y si $y = (y_1, \ldots, y_n)$, tenemos

$$T_a(y) = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}\, \boldsymbol{e}_k = (\nabla f_1(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}, \ldots, \nabla f_m(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y}). \tag{8.18}$$

$$E(a, v) = \lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\|v\|} = 0$$

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y)=(e^{xy},x^2+y,2x^3y^2)$ la diferencial de f en $(1,3)$ tendrá que tener alguna relación con las diferenciales de sus componentes en $(1,3)$.

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

$a=(1,3)$

$v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$

$f_1(x,y)=e^{xy}\to\frac{\partial f_1}{\partial x}=ye^{xy}(1,3)=3e^{1(3)}=3e^3$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}=xe^{xy}(1,3)=1e^{1(3)}=e^3$

$f_2(x,y)=x^2+y\to\frac{\partial f_2}{\partial x}=2x(1,3)=2(1)=2$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}=1$

$f_3(x,y)=2x^3y^2\to\frac{\partial f_3}{\partial x}=6x^2y^2(1,3)=6(1)^2(3)^2=54$

$\frac{\partial f_3}{\partial y}=4x^3y(1,3)=4(1)^3 3=12$

los residuos satisfacen

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{f(a+v)-f(a)-T_a(v)}{\|v\|},\quad v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix},\quad T_a=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}$$

* para f_1

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{e^{(1+v_1)(3+v_2)}-e^{1(3)}-\begin{bmatrix}3e^3, e^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{e^{(1+v_1)(3+v_2)}-e^{3}-\begin{bmatrix}3e^3, e^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

* para f_2

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{(1+v_1)^2+(3+v_2)-(1^2+3)-\begin{bmatrix}2, 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{(1+v_1)^2+(3+v_2)-4-\begin{bmatrix}2, 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

* para f_3

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{2(1+v_1)^3(3+v_2)^2-(2(1)^3 3^2)-\begin{bmatrix}54, 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{2(1+v_1)^3(3+v_2)^2-18-\begin{bmatrix}54, 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

la función f nos queda

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{f(x_0+v)-f(1,3)-\left(\begin{bmatrix}3e^3,e^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2,1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}54,12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\right)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

o también

diferencial del campo vectorial

$$\lim_{(v_1\to0,v_2\to0)}\frac{f(x_0+v)-f(1,3)-\begin{bmatrix}3e^3 & e^3\\2 & 1\\54 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=0$$

El diferencial total es $T_a=\begin{bmatrix}3e^3 & e^3\\2 & 1\\54 & 12\end{bmatrix}$

La ecuación (8.18) puede también escribirse en forma más sencilla como un producto matricial,

$$T_a(y) = Df(a)y\,,$$

siendo $Df(a)$ la matriz $m \times n$ cuya fila k-ésima es $\nabla f_k(a)$, e y una matriz columna $n \times 1$. La matriz $Df(a)$ se llama *matriz jacobiana* de f en a. Su elemento kj es la derivada parcial $D_j f_k(a)$. Así pues, tenemos

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

$$f(a_1, \ldots \to a_n) = (f_1, \ldots, f_m)$$

La matriz jacobiana $Df(a)$ está definida en cada punto en el que existan las mn derivadas parciales $D_j f_k(a)$.

La diferencial T_a se expresa también poniendo $f'(a)$. La derivada $f'(a)$ es una transformación lineal; la matriz jacobiana $Df(a)$ es una representación matricial de esa transformación.

La fórmula de Taylor de primer orden toma la forma

$$f(a + v) = f(a) + f'(a)(v) + \|v\|\, E(a, v)\,, \tag{8.19}$$

donde $E(a, v) \to O$ cuando $v \to O$. Se parece a la fórmula de Taylor unidimensional. Para calcular los componentes del vector $f'(a)(v)$ podemos utilizar el producto matricial $Df(a)v$ o la fórmula (8.18) del teorema 8.9.

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^2 \to f : \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6)$ es diferenciable en todo su dominio, hallar su matriz jacobiana en un punto $x \in f : \mathbb{R}^2$

$$DF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 6y \\ 15x^2 & 12y^5 \end{bmatrix}$$

$$\dim(Df(x)) = 2 \times 2$$

#Componentes de f

variables independientes de f

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^2 \to f : \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y) = (\mathrm{sen}(x + y), xe^{x+y}, x + y)$ es diferenciable en todo su dominio, hallar su matriz jacobiana en el punto $(0, 0)$

$$\dim(DF(0,0)) = 3 \times 2$$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ xe^{x+y} + e^{x+y} & xe^{x+y} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \cos(0+0) & \cos(0+0) \\ 0e^{0+0} + e^{0+0} & 0e^{0+0} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8.20 La regla de la cadena para diferenciales de campos vectoriales

ITESO, Universidad Jesuita de Guadalajara

TEOREMA 8.11. REGLA DE LA CADENA. *Sean $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ dos campos vectoriales tales que la función compuesta $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ esté definida en un entorno del punto $\boldsymbol{a}$. Supongamos que $\boldsymbol{g}$ sea diferenciable en $\boldsymbol{a}$, con diferencial $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$. Pongamos $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ y supongamos que $\boldsymbol{f}$ es diferenciable en $\boldsymbol{b}$, con diferencial $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{b})$. Entonces $\boldsymbol{h}$ es diferenciable en $\boldsymbol{a}$, y la diferencial $\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{a})$ viene dada por*

$$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{b}) \circ \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}),$$

que es la composición de las transformaciones lineales $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{b})$ y $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$.

Ejemplo.-Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ diferenciables, hallar $(f \circ g)'$ si $g(x,y) = (xy, 5x, y^3)$ y $f(x,y,z) = (3x^2 + y^2 + z^2, 5xyz)$

$$(f \circ g)' = f' \circ g' = Df(g(x,y))\, Dg(x,y)$$

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$Df(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 2y & 2z \\ 5yz & 5xz & 5xy \end{bmatrix}_{g(x,y)}$$

$$= \begin{bmatrix} 6(xy) & 2(5x) & 2(y^3) \\ 5(5x)y^3 & 5(xy)y^3 & 5(xy)5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix}$$

$$f' \circ g' = Df(g(x,y))\, Dg(x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} 6xy & 10x & 2y^3 \\ 25xy^3 & 5xy^4 & 25x^2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & x \\ 5 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy^2+50x & 6x^2y+6y^5 \\ 50xy^4 & 100x^2y^3 \end{bmatrix}$$