Høgskolen i Østfold

Statistikk og statistisk programmering, våren 2022

Obligatorisk oppgave 3

Innleveringsfrist: Fredag 25. februar 2022, kl. 23.59

Leveres på Canvas.

Oppgave 7 og 10 skal løses ved hjelp av Python. Disse må løses for å få godkjent obligen. De andre oppgavene skal i utgangspunktet løses uten bruk av Python.

Vi ønsker at dere leverer selve Python-fila, og ikke bare bilde av koden. I tillegg skal dere levere en pdf-fil med svar på resterende oppgaver. Dere kan også skrive Python-koden i Word så vi selv kan kopiere det over i egen fil. Outputen dere får når kjører fila tar dere et bilde av og limer inn i pdf-en.

Oppgave 1

En keramiker produserer fem tekanner. Sannsynligheten for at en kanne må vrakes, er $p = 0.4$. Anta at hvorvidt en kanne blir vraket er uavhengig av hvorvidt de andre kannene blir vraket. La X være antall vrakede kanner blant de fem.

a) Finn $P(X = 3)$.

b) Tegn opp sannsynlighetsfordelingen til X.

Oppgave 2

I en eske ligger det ni lyspærer. Fire av disse er defekte. Fem av lyspærene velges tilfeldig ut.

La X betegne antall defekte lyspærer i utvalget på fem.

a) Hvilken sannsynlighetsfordeling har X?

b) Hva er sannsynligheten for at det finnes to eller flere defekte lyspærer i utvalget?

c) Hva er sannsynligheten for at det er minst én defekt lyspære i utvalget?

d) Hva er sannsynligheten for at det er minst to og maksimum fire defekte lyspærer i utvalget?

e) Finn forventningsverdien og variansen til X.

Oppgave 3

I en skog bor det 64 elger. Av disse er 14 merket. En elgjeger feller til sammen åtte elger. La X være antall merkede elger blant de felte.

a) Anta at X er hypergeometrisk fordelt. Finn $P(X = 3)$ og $P(X \leq 3)$.

b) Anta så at X er binomisk fordelt, og finn da $P(X = 3)$ og $P(X \leq 3)$.

I en stor skog er det 640 elger. Av disse er 140 merket. En elgjeger feller til sammen åtte elger. La Y være antall merkede elger blant de felte.

c) Anta at Y er hypergeometrisk fordelt. Finn $P(Y = 3)$ og $P(Y \leq 3)$.

d) Anta så at Y er binomisk fordelt, og finn da $P(Y = 3)$ og $P(Y \leq 3)$.

e) Sammenlign resultatene i a), b), c) og d).

Oppgave 4

I terningspillet «ener» kaster spillerne én terning på omgang. I en omgang skal hver spiller etter hvert kast addere antall øyne på terningen til det antall øyne han/hun har fått i de tidligere kastene i omgangen. Spilleren kan avslutte omgangen når han vil, og kan da addere de poengene han har fått i denne omgangen til poeng fra tidligere omganger. Spilleren kan også holde på så lenge han vil, så lenge han ikke får en ener på terningen. Men får spilleren en ener, mister han/hun alle poengene som er opptjent i denne omgangen. Den første som kommer til 101 poeng (eller en annen sum man blir enige om før spillet starter), har vunnet.

Eksempel: I en omgang slår Modgunn når det er hennes tur først en firer og så en treer. Så tør hun ikke mer, og gir seg. Hun vil da stå med 4 + 3 = 7 poeng fra denne omgangen, og kan addere disse poengene til de poengene hun har opptjent fra før. Audgeir slår en femmer, en firer og så en ener. Fordi han slår en ener, vil han ikke få med seg noen poeng fra denne omgangen, men blir stående med de poengene han har opptjent i tidligere omganger.

La X betegne antall ganger man kan slå en terning til første ener dukker opp.

a) Begrunn at X har en geometrisk sannsynlighetsfordeling.

b) Finn sannsynligheten for at den første ener man får, er i det tredje kastet.

c) Finn forventningsverdien til X. Hva uttrykker forventningsverdien i dette tilfellet.

d) Finn standardavviket til X.

e) Forklar at $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ er en geometrisk rekke med tre ledd.

f) Finn et uttrykk for $P(X \leq x)$.
Hint: Bruk følgende formel for summen av de n første leddene i en geometrisk rekke

med a_1 som første ledd og k som kvotient:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-k^n}{1-k}$$

g) Hvor mange ganger må man minst kaste terningen for at sannsynligheten for å ha fått en ener i løpet av disse kastene er minst 0.99?

Oppgave 5

På en bensinstasjon selges gjennomsnittlig tre kanner spylervæske i timen.

La X betegne antall kanner spylervæske som selges i løpet av et tidsrom på tjue minutter.

a) Hvilken sannsynlighetsfordeling er det rimelig å anta at X har dersom vi kan si at hvert salg er uavhengig av de andre?

b) Angi formelen for denne sannsynlighetsfordelingen.

c) Finn forventningsverdi, varians og standardavvik til X.

d) Finn $P(X = 1)$ og $P(X = 3)$ uten bruk av tabell.

e) Finn sannsynligheten for at det selges to kanner i løpet av tjue minutter ved bruk av tabell.

f) Finn sannsynligheten for at det selges mer enn fire kanner i løpet av tjue minutter ved bruk av tabell.

g) Finn ved bruk av tabell sannsynligheten for at det selges mer enn to kanner men ikke flere enn fem kanner, i løpet av tjue minutter.

Oppgave 6

Antall trailere som ankommer til et bestemt omlastningsområde i løpet av en dag har vist seg å være poissonfordelt med parameter 3. Området kan maksimalt betjene fire trailere per dag. Dersom det kommer flere enn fire trailere til stedet, blir de omdirigert.

a) Hvilket antall trailere har størst sannsynlighet for å ankomme området på en bestemt dag?

b) Hvor stor er sannsynligheten for at trailere på en bestemt dag blir omdirigert?

c) Området skal utvides slik at det kan betjene flere trailere per dag. Hvor mange trailere må den bygges for dersom sannsynligheten for å kunne betjene alle ankomne trailere en bestemt dag skal være minst 0.90.

Oppgave 7

Lag et Python-program som ber brukeren taste inn parameteren λt og en øvre grense for den stokastiske variabelen X som sannsynligheten skal beregnes for, og som tegner poisson-fordelingen basert på disse opplysningene.

Kjør programmet med en del ulike verdier for λt, og legg merke til hvordan poissonfordelingen begynner å ligne en normalfordeling når verdien til parameteren λt øker.

Oppgave 8

Levetiden T til en lyspære antas å være eksponentialfordelt med forventet levetid 1500 timer.

a) Finn sannsynligheten for at pæren ryker i løpet av 1000 timer.

b) Finn sannsynligheten for at pæren virker mer enn ett år.

c) Anta at det har gått ett år og at lyspæren fremdeles virker. Hvor sannsynlig er det at den vil lyse i 1000 timer til?

Oppgave 9

Et bakeri baker en type brød. Vekten av et tilfeldig valgt brød har vist seg å kunne oppfattes som en normalfordelt stokastisk variabel. Forventningsverdien avhenger blant annet av steketid og av innstillingene på den maskinen som deler deigen i porsjoner. Standardavviket i ferdig brød er 10 g.

På brødposene har bakeriet trykket at brødets vekt er 750 g.

Anta at forventningsverdien er 760 g.

a) Hvor stor er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt brød skal veie mer enn 790 g?

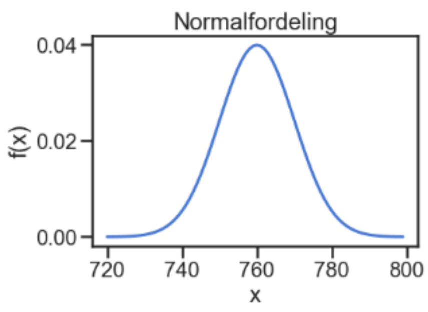
b) Hvor stor er sannsynligheten for at et tilfeldig valgt brød skal veie mindre enn 750 g?

c) For bakeriet er det viktig at vekten av denne type brød er minst 750 g slik at ingen kunder skal føle seg lurt. Bakeriet ønsker derfor å justere oppskriften slik at forventningsverdien blir så stor at de sikrer seg mot dette. Hvor stor må forventningsverdien minst være for at sannsynligheten høyst skal være 0.001 for at et tilfeldig valgt brød veier mindre enn 750 g? Vi antar at standardavviket ikke endrer seg, men fortsatt er 10 g.

Oppgave 10

a) Lag et Python-program som tegner normalfordelingen som benyttes forrige oppgave, altså $N(760, 10)$. Tegn fordelingen for verdier mellom 720 og 800.

Angi «Normalfordeling» som tittel på plottet, og med angivelse av x og $f(x)$ på aksene, altså omtrent som dette:



b) Lag et Python-program som ber brukeren taste inn en vekt, og så beregner sannsynligheten for at et brød veier mer enn denne vekten og skriver ut dette sammen med en passende ledetekst.

Oppgave 11

I heisene ved HiØ er det oppgitt at hver av dem skal tåle inntil 13 personer eller 1000 kg, det vil si gjennomsnittlig 76.9 kg per person.

Vi kaller vekten til en tilfeldig valgt voksen kvinne for K, og vekten til en tilfeldig valgt voksen mann kaller vi M.

Du kan i denne oppgaven anta at vekten til voksne kvinner har sannsynlighetsfordelingen $K \sim N(69,12)$, og at vekten til voksne menn har sannsynlighetsfordelingen $M \sim N(86,15)$ (disse tallene har jeg bare funnet på i farta, så de er neppe korrekte).

a) Hva er sannsynligheten for at en tilfeldig valgt mann veier mindre enn 76.9 kg?

b) En kvinne og en mann møtes i heisen. Vekten til disse er uavhengige av hverandre. Hva er sannsynligheten for at kvinnen veier mer enn mannen?

c) Sju kvinner og seks menn går inn i en av heisene. Vekten til disse 13 personene er uavhengige. Hva er sannsynligheten for at totalvekten for disse 13 personene er større enn heisens maksimalt tillatte last på 1000 kg?

Oppgave 12

En terning kastes 10 ganger, og det registreres hvor mange 6-ere som oppnås i løpet av disse 10 kastene. Vi kan kalle antall 6-ere i løpet av 10 terningkast for X_1.

a) Begrunn hvilken fordeling X_1 har. Finn sannsynligheten for at vi får fire 6-ere i løpet av disse 10 kastene.

Så gjentas dette forsøket, og vi kaller antall 6-ere i forsøk nummer 2 for X_2.

Forsøket gjentas flere ganger slik at det totalt blir gjort 30 forsøk. Det totale antall 6-ere i løpet av 30 forsøk, kaller vi Y.

b) Begrunn kort at Y er tilnærmet normalfordelt. Angi forventningsverdi og standardavvik for Y.

c) Finn sannsynligheten for at det totale antall 6-ere i løpet av de 30 forsøkene overstiger 55.