

Differentiaaliyhtälöt

Kolmen lajin malli

Perinteisessä Lotkan ja Volterran mallissa tarkasteltiin vain kahta lajia, saalista ja petoa. Kolmen lajin mallissa on ravintoketjun kolme tasoa: R (resource) joka on alimmalla tasolla, C (consumer) joka on sekä peto koska se käyttää resurssia R että saalis koska P (peto, predator) taas käyttää C :tä ravintona. Tälle tilanteelle voidaan kirjoittaa seuraava systeemi

$$\begin{aligned} R' &= R(1 - R) - \frac{x_c y_c C R}{R + R_0} \\ C' &= x_c C \left(-1 + \frac{y_c R}{R + R_0} \right) - \frac{x_p y_p C P}{C + C_0} \\ P' &= x_p P \left(-1 + \frac{y_p C}{C + C_0} \right) \end{aligned}$$

Tämä on erikoistapaus Yodzis-Innes-mallista.¹ Luonnollisesti tarkastellaan vain aluetta

$$\Omega = \{(R, C, P) \in \mathbb{R}^3 \mid R \geq 0, C \geq 0, P \geq 0\}$$

Biologisesti mielekkäissä tapauksissa voidaan olettaa seuraavaa parametrien arvoista:

$$\begin{array}{ll} 0 < R_0 < 1 & 0 < C_0 < 1 \\ 0 < x_p < 1 & 0 < x_c < 1 \\ y_c \geq 1 & y_p \geq 1 \end{array}$$

1. Valitse jotkin parametrien arvot ja etsi kaikki tasapainopisteet Ω :ssa. Onko asymptoottisesti stabiileja tasapainopisteitä? Onko sellaisia asymptoottisesti stabiileja tasapainopisteitä, että mikään muuttujista ei ole nolla?

¹Anna Kuparisen tutkimusryhmä Jyväskylän yliopistossa tutkii tämäntyyppisiä malleja.

<https://www.jyu.fi/science/en/bioenv/research/natural-resources-and-environment/eco-evo>

2. Tasapainopiste on siis yksinkertaisin mahdollinen invariantti joukko. Biologisissa ja muissa malleissa esiintyy kuitenkin tilanteita, että mikään tasapainopiste ei ole asymptoottisesti stabiili. Tällöin voidaan kysyä olisiko stabiileja jaksollisia ratkaisuja. Etsi sellaisia parametrien arvoja, että mikään tasapainopisteistä ei ole asymptoottisesti stabiili, ja tutki numeerisesti voisiko olla jaksollisia ratkaisuja.
3. Joskus sitten käy niin, että jaksollisetkaan ratkaisut eivät ole stabiileja. Tällöin voi kuitenkin olla olemassa stabiili invariantti joukko. Tätä invarianttia joukkoa kutsutaan joskus oudoksi attraktoriksi (strange attractor). Ratkaisu on siis siinä mielessä stabiili että se lähestyy invarianttia joukkoa kun $t \rightarrow \infty$, mutta ratkaisun rata on kuitenkin kaoottinen siinä mielessä, että se näyttää pyörivän satunnaisesti eri puolilla invarianttia joukkoa. Tästä mallista on löydetty biologisesti järkeviä parametrin arvoja jotka mahdollistavat kaoottiset ratkaisut. Testaa tätä valitsemalla parametrit seuraavasti:

$$\begin{array}{ll}
 R_0 = 0.161 & C_0 = 0.5 \\
 0.071 < x_p < 0.225 & x_c = 0.4 \\
 y_c = 2.01 & y_p = 5.0
 \end{array}$$

Kokeile eri parametrin x_p arvoja ja katso miten ratkaisun luonne muuttuu.