

Matemaattisen mallinnuksen peruskurssi, syksy
2020

Kolmen lajin malli
Ryhmätunnus: TAU05

Jere Mäkinen
H273090
jere.makinen@tuni.fi
Tampereen yliopisto

Antti Lassila
H283210
antti.lassila@tuni.fi
Tampereen yliopisto

4.joulukuuta 2020

Tiivistelmä

Kolmen lajin malli kuvaa ravintoketjua, jossa on kolme tasoa. R (Resource) toimii ravintona lajille C (consumer), joka puolestaan on ravintoa lajille P (predator). Systeemille on olemassa erilaisia ratkaisuja riippuen sen parametrien arvoista. Sopivilla parametri arvoilla systeemillä on olemassa asymptoottisesti stabiili tasapainotila, johon ratkaisut hakeutuvat. Kun tasapainotila saavutetaan, eivät systeemin funktioiden arvot enää muutu. Jos asymptoottisesti stabiileja tasapainopisteitä ei ole, voidaan etsiä jaksollisia ratkaisuja, jotka pöyriivät säännöllisesti tasapainotilan ympärillä. Joillakin parametri arvoilla voi myös syntyä kaoottinen ratkaisu, jonka muutoksissa ei suoraan näy johdonmukaisuutta.

Hyvä keino tutkia ratkaisujen käyttäytymistä on piirtää numeerisesti ratkaisu ratkaisukäyrä kolmiulotteiseen R, C, P -koordinaatistoon. Jos on olemassa asymptoottinen tasapainopiste, tämä käyrä päättyy tähän pisteeseen. Tasapainopiste onkin yksinkertaisin mahdollinen joukko, johon ratkaisut kuuluvat. Jaksollisen ratkaisun käyrä pyörii suljettua silmukkaa, sillä ratkaisukäyrät saavat aina samoja arvoja tietyllä aikavälillä. Kaoottisen ratkaisun käyrä pyörii satunnaisesti R, C, P -avaruudessa, mutta kuitenkin pysyy jossakin invariantissa joukossa, kun mallinnusta jatketaan tarpeeksi pitkälle.

Sisällys

1	Johdanto	5
2	Malli	5
3	Ratkaisut	6
4	Menetelmät	7
4.1	Systeemin tasapainotilat	7
4.2	Tasapainotilojen luokittelu ominaisarvojen avulla	7
4.3	Jaksollisten ratkaisujen tutkiminen	8
5	Tulokset	8
5.1	Tasapainotilojen stabiiliuden tarkastelu tietyillä parametrien arvoilla	9
5.2	Jaksollisen ratkaisun etsiminen	11
5.3	Kaoottinen ratkaisu annetuilla parametrien arvoilla	13
6	Yhteenveto	16

Käytetyt merkinnät

f' = funktion f aikaderivaatta
muutenkin työssä käsitellyt funktiot ovat lähtökohtaisesti ajan funktioita.

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ = funktion f osittaisderivaatta i :nnen muuttujan suhteen

\mathbf{p} = tasapainotila

λ = ominaisarvo

Df = jacobin matriisi funktiosta f

1 Johdanto

Yksi perinteisimmistä differentiaaliyhtälöjä hyödyntävistä malleista on on Lotkan ja Volterran kahden lajin malli, joka muodostuu saalis- ja petopopulaatioista [1]. Kolmen lajin mallissa ravintoketjua käsitellään mallin nimen mukaisesti kolmessa tasossa. Mallin alimmalla tasolla on saalis R (resource), jota ravintonaan käyttää peto C (consumer). Mallin ylimmän tason lajille P (predator) laji C on saaliin roolissa.

Tilannetta kuvaava differentiaalisysteemi tunnetaan. Tämän työn tavoitteena onkin tarkastella mallin ratkaisujen käyttäytymistä eri parametrien arvoilla. Ratkaisuja tarkastellaan systeemin tasapainopisteiden avulla. Mallin ratkaisuja lasketaan numeerisia menetelmiä käyttäen.

Työssä esitellään ensin tilannetta kuvaava systeemi ja siihen liittyvät oletukset. Tämän jälkeen esitellään keinoja tasapainopisteiden etsimiseen ja analysointiin. Työn tulososio on jaettu kolmeen osaan: ensin käsitellään mallia itse valituilla parametrien arvoilla, sen jälkeen tutkitaan mallin jaksollisia ratkaisuja ja lopuksi käsitellään ennalta tunnettuja parametreja, jotka johtavat kaaottiseen ratkaisuun.

2 Malli

Malli muodostuu kolmesta populaatiosta, joiden koot vaikuttavat muiden populaatioiden muutoksiin. Laji R on ravintoa lajille C , joka puolestaan on ravintoa lajille P . Luonnollisestikin mitä enemmän ravintoa lajilla on, sitä nopeammin populaatio kasvaa. Toisaalta mitä enemmän petoja on, sitä nopeammin saalispopulaatio pienenee. Populaatioiden muutoksille ajan suhteen voidaan muodostaa seuraavanlainen differentiaaliyhtälösysteemi

$$\begin{aligned} R' &= R(1 - R) - \frac{x_c y_c C R}{R + R_0} \\ C' &= x_c C \left(-1 + \frac{y_c R}{R + R_0}\right) - \frac{x_p y_p C P}{C + C_0} \\ P' &= x_p P \left(-1 + \frac{y_c C}{C + C_0}\right) \end{aligned}$$

On selvää, että on mielekästä tarkastella vain tilanteita, jossa R, C ja P ovat epänegatiivisia. Rajataan tarkastelu siis alueeseen

$$\Omega = \{(R, C, P) \in \mathbb{R}^3 | R \geq 0, C \geq 0, P \geq 0\}.$$

Lisäksi biologisesti mielekkäissä tapauksissa voidaan parametrien arvoista odottaa seuraavaa

$$\begin{aligned} 0 &\leq R_0 \leq 1 & 0 &\leq C_0 \leq 1 \\ 0 &\leq x_p \leq 1 & 0 &\leq x_c \leq 1 \\ y_c &\geq 0 & y_p &\geq 1 \end{aligned}$$

Kokoamalla systeemin differentiaaliyhtälöt yhteen vektoriin saadaan muoto, jolla systeemiin on helpompi viitata jatkossa

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} R' \\ C' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1-R) - \frac{x_c y_c C R}{R+R_0} \\ x_c C(-1 + \frac{y_c R}{R+R_0}) - \frac{x_p y_p C P}{C+C_0} \\ x_p P(-1 + \frac{y_c C}{C+C_0}) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$$

3 Ratkaisut

Tässä työssä tämän systeemin ratkaisuja etsitään numeerisesti matlab-laskenta-ohjelmiston avulla. Ratkaisujen etsimiseen käytetään ohjelmistosta valmiiksi löytyvää ode45-funktiota, joka ratkaisee differentiaaliyhtälösystemin alkaen annetusta alkuarvosta annetulla aikavälillä. Menetelmä perustuu Runge-Kutan menetelmään. Klassinen Runge-Kutan menetelmä funktiolle f askelpituudella h etenee askeleittain seuraavalla tavalla:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

missä

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_k, y_k) \\ k_2 &= hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= hf(x_k + h, y_k + k_3). \end{aligned}$$

Ode45 on mukaelma tästä.[1] Funktio vaatii siis toimiakseen jotkin alkuarvot. Alkuarvot valitaan melko läheltä tasapainopisteiden arvoja, sillä ratkaisujen käytös niiden lähellä on mielenkiintoista.

Tässä työssä keskitytään tarkastelemaan systeemin tasapainopisteitä ja ratkaisujen jaksollisuutta. Systeemin ratkaisu on jaksollinen jos

$$\mathbf{F}(t+T) = \mathbf{F}(t), t \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisukäyrät siis saavat samoja arvoja aikavälillä T . Piirrettäessä ratkaisukäyrässä näkyy jaksollisessa ratkaisussa tasaista värähtelyä. Myös kaaotisilla ratkaisulla ilmenee värähtelyä, mutta se ei ole säännöllistä, vaan ratkaisujen arvot näyttävät käyttäytyvän satunnaisesti.

4 Menetelmät

Tässä luvussa tarkastellaan menetelmiä systeemin tasapainotilojen selvittämiseen ja niiden luokitteluun ja analysointiin. Lisäksi esitetään keinoja ratkaisun jaksollisuuden tarkasteluun.

4.1 Systeemin tasapainotilat

Ratkaisujen käyttäytymistä voidaan tutkia selvittämällä systeemin tasapainotilat. Tasapainotilassa jokaisen systeemin funktion muutosnopeus on nolla.[1] Voidaan siis sanoa, että piste \mathbf{p} on systeemin $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ tasapainotila jos

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = 0.$$

Tasapainopisteet saadaan selville yksinkertaisesti ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$F = \begin{bmatrix} R(1 - R) - \frac{x_c y_c C R}{R + R_0} \\ x_c C(-1 + \frac{y_c R}{R + R_0}) - \frac{x_p y_p C P}{C + C_0} \\ x_p P(-1 + \frac{y_c C}{C + C_0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Tuloksena saadaan siis sellaiset arvot funktioille R, C ja P , että systeemin tila ei muutu. Tasapainotilan läheisyydessä puolestaan ratkaisukäyrät voivat lähestyä tasapainotilaa, etääntyä siitä tai pyöriä sen ympärillä.

4.2 Tasapainotilojen luokittelu ominaisarvojen avulla

Tasapainopisteiden laatua voidaan tutkia funktion F jacobin matriisiin ominaisarvojen avulla tasapainotilassa. Jacobin matriisi muodostetaan differentiaaliyhtälöryhmästä derivoimalla tietyn muuttujan suhteen vuorotellen yhtälöitä. Yleisesti kolmen funktion ja kolmen muuttujan tapauksessa jacobin matriisi on muotoa

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Kun sijoitetaan jacobin matriisiin tasapainotilan mukaiset funktion arvot, voidaan matriisista ratkaista sen ominaisarvot. Matriisin ominaisarvot ovat sellaisia lukuja λ , että

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

missä A on neliömatriisi ja \mathbf{x} on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.[1] Ominaisarvojen selvittäminen käsin voi olla jo 3×3 -matriisille melko työlästä, joten tässä työssä ominaisarvojen selvittäminen tapahtuu matlab-laskentaohjelmistolla, jossa on olemassa valmiit komennot näiden selvittämiseen.

Kun ominaisarvot on selvitetty keskitytään tarkastelemaan niiden reaalisuutta

ja reaaliosan etumerkkiä. Tasapainopiste on asympotoottisesti stabiili, jos jokaisen ominaisarvon reaaliaosa on negatiivinen. Ratkaisu käyrät lähestyvät asympotoottisesti stabiilia tasapainotilaa, kun $t \rightarrow \infty$. Jos tällaisia tasapainotiloja ei ole, voidaan tarkastella voisiko löytyä jaksollisia ratkaisuja.

4.3 Jaksollisten ratkaisujen tutkiminen

Jaksollisten ratkaisujen tarkastelu tulee ajankohtaiseksi, kun systeemillä ei ole asympotoottisesti stabiileja tasapainotiloja. Mahdollinen jaksollisuus voidaan todeta tutkimalla ratkaisukäyrää kuvasta. Jaksollisuus näkyy käyrästä värähtelynä. Ratkaisujen arvot pysyvät tasapainotilan läheisyydessä, eivätkä karkaa siitä äärettömän kauas. Jossain tapauksissa ratkaisu voi näyttää jaksolliselta, mutta kun mallinnusta jatketaan tarpeeksi pitkälle pääty se kuitenkin tasapainotilaan.

Jaksollisuutta ja toisaalta sen laatua voi tarkastella piirtämällä numeerisista ratkaisuista käyrän R, C, P -avaruuteen [2]. Tämä käyrä visualisoi ratkaisua kuvaavaa invarianttia joukkoa. Jos systeemi päätyy tasapainotilaan tämä käyrä päättyy tätä tasapainotilaa vastaavaan pisteeseen. Tasapainopiste on yksinkertaisin mahdollinen invariantti joukko. Jos kyseessä on stabiili jaksollinen ratkaisu, käyrä alkaa kiertää kehää tasapainotilan ympärillä muuttumattomalla radalla. Stabiilia jaksollista ratkaisua kuvaava joukko on siis silmukka tasapainopisteen ympärillä. Kaoottisen ratkaisun käyrä ei lähesty mitään vakioireittiä. Kaoottinenkin ratkaisu on siinä mielessä stabiili, että ratkaisu lähestyy jotakin invarianttia joukkoa ajan kuluessa. Esimerkit eri tapauksista tulevat ilmi tuloksia käsiteltäessä.

5 Tulokset

Aiemmin määritellyn funktion \mathbf{F} jacobin matriisi on

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{C R x_c y_c}{(R+R_0)^2} - \frac{C x_c y_c}{R+R_0} - 2R + 1 & -\frac{R x_c y_c}{R+R_0} & 0 \\ C x_c \left(\frac{y_c}{R+R_0} - \frac{R y_c}{(R+R_0)^2} \right) & x_c \left(\frac{R y_c}{R+R_0} - 1 \right) - \frac{P x_p y_p}{C+C_0} + \frac{C P x_p y_p}{(C+C_0)^2} & -\frac{C x_p y_p}{C+C_0} \\ 0 & P x_p \left(\frac{y_p}{C+C_0} - \frac{C y_p}{(C+C_0)^2} \right) & x_p \left(\frac{C y_p}{C+C_0} - 1 \right) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ominaisarvot saadaan tästä sijoittamalla valitut parametrit ja tasapainotilan mukaiset arvot R, C ja P ja käyttämällä matlabin eig-komentoa saatuun matriisiin. Kaikissa tehtävän osissa ollaan kiinnostuneita vain tasapainopisteistä $\mathbf{p} \in \Omega = \{(R, C, P) \in \mathbb{R}^3 | R \geq 0, C \geq 0, P \geq 0\}$. Tutkimisessa on käytetty liitteenä olevaa Kolmen_lajin_malli.m koodia.

5.1 Tasapainotilojen stabiiliuden tarkastelu tietyillä parametrien arvoilla

Tehtävän ensimmäisessä osassa tarkastellaan systeemin tasapainotiloja vapaasti valituilla parametriarvoilla. Parametrien arvoiksi valittiin

$$\begin{array}{ll} R_0 = 0.8 & C_0 = 0.8 \\ x_p = 0.01 & x_c = 0.4 \\ y_c = 3.25 & y_p = 5 \end{array}$$

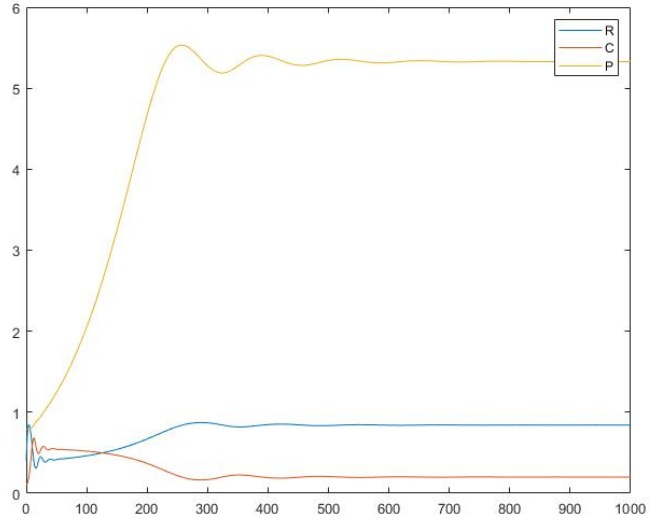
Kun parametrit sijoitetaan yhtälöön 1 ja ratkaistaan nollakohdat, niin saadaan kuusi tasapainopistettä, joista neljä kuuluu joukkoon Ω . Nämä tasapainopisteet ovat

$$\begin{array}{ll} \mathbf{p}_1 = (0, 0, 0) & \mathbf{p}_2 = (1, 0, 0) \\ \mathbf{p}_3 = (0.3556, 0.5728, 0) & \mathbf{p}_4 = (0.8416, 0.2, 5.3296) \end{array}$$

Kun tutkitaan matriisin 2 ominaisarvoja eri tasapainopisteissä, huomataan, että tasapainotilaa \mathbf{p}_4 vastaavat ominaisarvot ovat kaikki reaalisaltaan negatiivisia. Kyseessä on asympotoottisesti stabiili tasapainotila. Lisäksi mikään muuttujista ei tässä tasapainopisteessä ole nolla. Tasapainopisteitä vastaavat ominaisarvot järjestyksessä ovat.

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = (-0.4, -0.01, 1) \\ \lambda_2 = (-1, -0.01, 0.3222) \\ \lambda_3 = (0.3556, 0.5728, 0) \\ \lambda_4 = (-0.6917, -0.0077 + 0.0478i, -0.0077 - 0.0478i). \end{array}$$

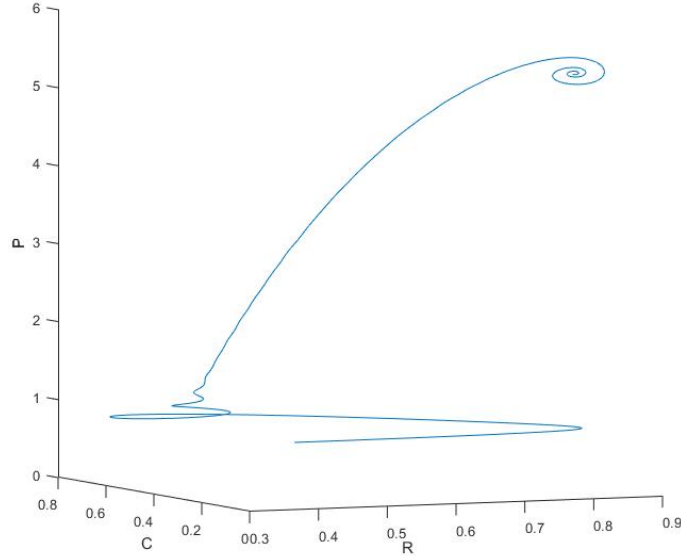
Kuvassa 1 on havainnollistettu muuttujien R , C ja P käyttäytymistä ajan funktiona.



Kuva 1. Asymptoottisesti stabiilin ratkaisun käyttäytyminen

Kuvasta 1 huomataan, että R , C ja P tasaantuvat vakioarvoihin, jotka ovat tasapainopisteen \mathbf{p}_4 mukaiset arvot. Kun tasapainotila on saavutettu eivät funktioiden arvot enää tietenkään muutu, sillä jokaisen käyrän derivaatta saa arvokseen nollan.

Samaan johtopäätökseen voidaan päätyä myös tutkimalla ratkaisun R, C, P -käyrää.



Kuva 2. R, C, P -käyrä ratkaisulle asympotoottisesti stabiilin tasapainotilan tapauksessa.

Kuvasta 2 nähdään, että käyrä lähestyy tasapainopistettä ja sen saavutettuaan se ei enää etene. Molemmista kuvista 1 ja 2 nähdään, kuinka tasapainotilaa vastaavien ominaisarvojen kompleksisuus vaikuttaa ratkaisun käytökseen. Kompleksisuuden vuoksi käyrä ei lähesty tasapainotilaa suoraan vaan pyörien ensin sen ympärillä.

5.2 Jaksollisen ratkaisun etsiminen

Tehtävän toisessa vaiheessa etsitään sellaisia parametrien arvoja, joilla systeemille syntyy jaksollinen ratkaisu. Tätä varten käytetään parametrien arvoja

$$\begin{array}{ll} R_0 = 0.8 & C_0 = 0.8 \\ x_p = 0.5 & x_c = 0.7 \\ y_c = 8 & y_p = 15 \end{array}$$

Kun näillä parametreilla ratkaistaan yhtälöryhmä 1 saadaan neljä tasapainotilaa

$$\begin{array}{ll} \mathbf{p}_1 = (0, 0, 0) & \mathbf{p}_2 = (1, 0, 0) \\ \mathbf{p}_3 = (0.8, 0.0571, 0.24) & \mathbf{p}_4 = (0.1143, 0.1446, 5.0) \end{array}$$

Kun nämä tasapainopisteet sijoitetaan systeemin jacobin matriisiin 2 ja selvitetään saadun matriisin ominaisarvot, voidaan liitteenä okevan koodin Kol-

men_lajin_malli.m avulla huomata, ettei asympotoottisesti stabiileja tasapainotiloja löydy vaan tasapainopisteitä vastaavat ominaisarvot ovat erimerkkisiä. Ominaisarvot eri tasapainotiloille järjestyksessä ovat

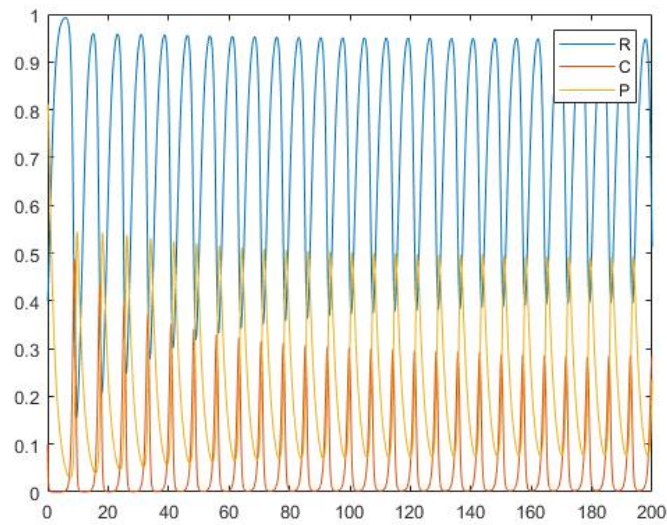
$$\lambda_1 = (-0.7, -0.5, 1)$$

$$\lambda_2 = (-1, -0.5, 2.4111)$$

$$\lambda_3 = (-0.5835, 0.0117 - 1.0842i, 0.0117 - 1.0842i)$$

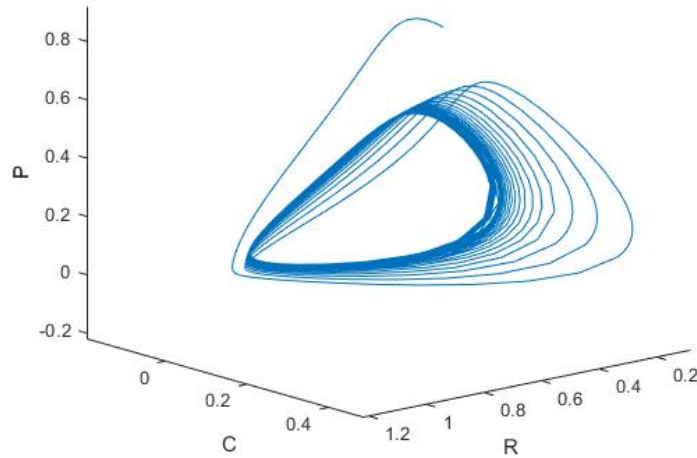
$$\lambda_4 = (0.6481, -0.0018 - 0.7365i, -0.0018 - 0.7365i)$$

Kun systeemi ratkaistaan numeerisesti matlabin ode45-funktiolla, saadaan kuvan 3 mukaiset käyrät funktioille R , C ja P .



Kuva 3. Jaksolliselta vaikuttava ratkaisu.

Kuvan 3 perusteella ratkaisu näyttää hyvinkin jaksolliselta. Käyrät toistuvat samanmuotoisina ja kokoisina. Haetaan tälle päätelmälle vielä tukea piirtämällä ratkaisusta kuvaaja R, C, P -koordinaatistossa (kuva 4).



Kuva 4. Jaksollisen ratkaisun R, C, P -käyrä.

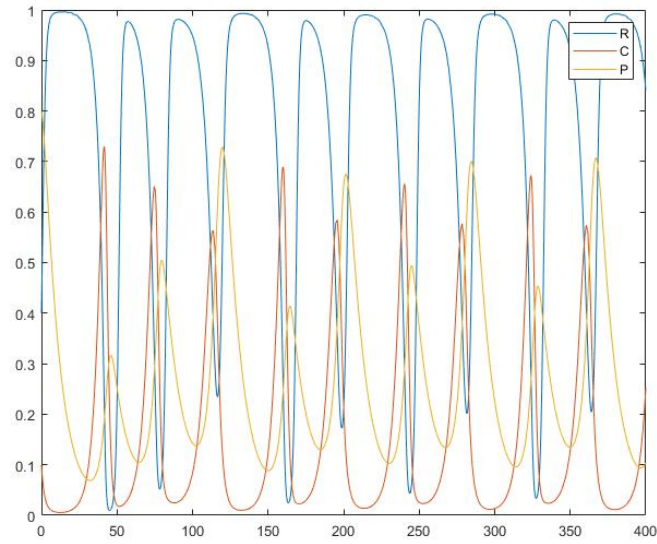
Kuvan 4 mukainen käyrä näyttää lähestyvän yhtä silmukkaa tasapainopisteen ympärillä. Tämä tukee päätelmää ratkaisun jaksollisuudesta, sillä jaksollisella ratkaisulla invariantti joukko, jossa ratkaisu pysyy on jonkinlainen suljettu silmukka, sillä ratkaisu saa aina samoja arvoja tietyllä aika välillä, kuten luvussa 3 aiemmin todettiin.

5.3 Kaottinen ratkaisu annetuilla parametrien arvoilla

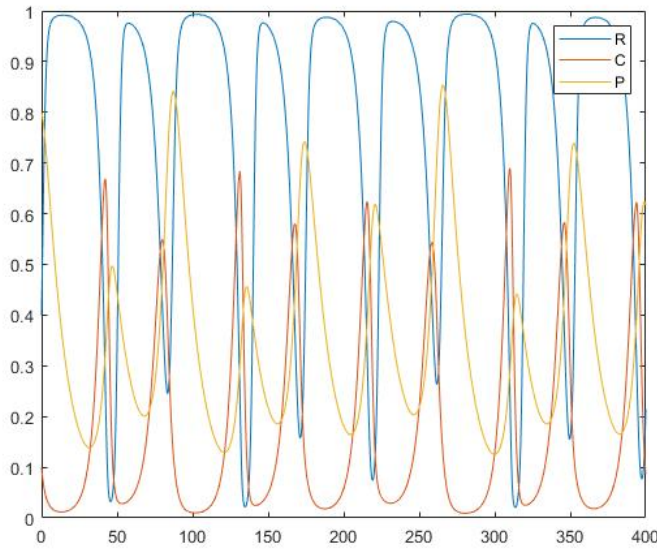
Tehtävän viimeisessä osassa tarkastellaan systeemiä annetuilla biologisesti mielekkäillä parametrien arvoilla, joilla syntyy kaottinen ratkaisu [2]. Nämä parametrien arvot ovat

$$\begin{aligned} R_0 &= 0.161 & C_0 &= 0.5 \\ 0.071 < x_p &< 0.225 & x_c &= 0.4 \\ y_c &= 2.01 & y_p &= 5 \end{aligned}$$

Näillä parametrien arvoilla ratkaisukäyrissä näkyy jaksollisen kaltaisia muutoksia, mutta nämä muutokset näyttävät satunnaisilta. Muutama erilainen muoto näyttäisi käyrässä toistuvan, mutta vaihtelu muotojen välillä ei näytä noudattelevan mitään kaavaa. Ratkaisu siis näyttää pysyvän jossakin invariantissa joukossa, mutta liikkuvan siinä satunnaisesti. Parametrin x_p kasvattaminen annetuissa rajoissa nopeuttaa käyrien muutoksia. Tämä voidaan huomata vertailemalla kuvia 5 ja 6.

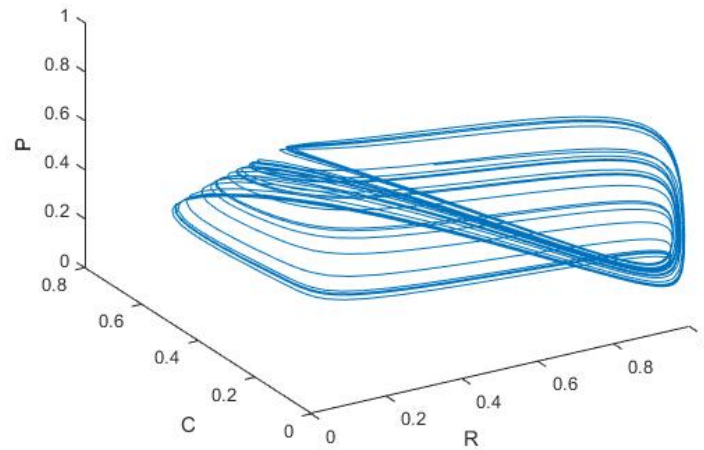


Kuva 5. Kaoottinen ratkaisu, $x_p = 0.22$.



Kuva 6. Kaoottinen ratkaisu, $x_p = 0.08$.

Kun saatu ratkaisu esitetään R, C, P -koordinaatistossa saadaan kuvan 7 mukainen käyrä.



Kuva 7. Kaoottisen ratkaisun R, C, P –käyrä.

Erona jaksolliselle ratkaisulle piirrettyyn kuvaan nyt käyrä ei lähesty mitään yksittäistä reittiä kohden, vaan pyörii satunnaisen näköisesti ympäri noudatellen kierroksillaan kuitenkin samanmuotoista reittiä. Tässäkin näkyy se, kuinka kaoottisenkaan ratkaisun käytös ei ole täysin satunnaista vaan noudattelee tiettyjä lainalaisuuksia eli ratkaisu pysyy jossakin invariantissa joukossa kun mallinusta jatketaan ajassa pidemmälle.

6 Yhteenveto

Työssä on esitetty esimerkkitapaukset systeemille kolmessa erilaisessa tapauksessa: asympotoottisesti stabiili tasapainotila, jaksollinen ratkaisu ja kaoottinen ratkaisu. Systeemin ratkaisuja on haettu numeerisesti matlabin ode45-menetelmällä, jota voidaan pitää melko luotettavana keinona ratkaisujen selvittämiseen. Toinen varteenotettava vaihtoehto olisi ollut käyttää eulerin menetelmää, mutta sen luotettavuus ei useinkaan ole yhtä hyvä kuin ode45:n taustalla olevalla Runge-Kutan menetelmällä, varsinkaan kun systeemiä mallinnetaan pidemmälle aikajaksolle. Tokikaan numeerisesti ei tarkkoja tuloksia saada, mutta keskeisempää tässä tarkastelussa onkin saada tietoa siitä, miten ratkaisut käyttäytyvät eri tilanteissa.

Mallinnuksen tulokset vastaavat teoriaosiossa läpikäytyä odotettu käytöstä eri tapauksien kohdalla. Ratkaisut hakeutuvat kohti asympotoottisesti stabiilia tasapainotilaa. Jos sellaista ei löydy ratkaisut voivat jäädä pyörimään tasapainotilan ympärillä. Jaksollisessa tapauksessa ratkaisut muodostavat suljetun silmukan. Kaoottinen tapaus ei lähesty mitään yhtä silmukkaa, mutta ratkaisut pyörivät jossakin invariantissa joukossa kun mallinusta jatketaan pitkälle.

Tasapainotilojen selvittämisessä ja jacobin matriisin ominaisarvojen selvittämisessä ei epätarkkuutta tai virhettä pitäisi päästä syntymään. Kyse on kuitenkin yksinkertaisista operaatioista, kuten yhtälöryhmän ratkaisusta ja 3×3 -neliömatriisin ominaisarvojen selvittämisestä. Tässä vaiheessa ei siis jouduta tekemään approksimaatioita laskentaohjelmiston tekemiä pyöristyksiä lukuunottamatta.

Viitteet

- [1] Riikka Kangaslampi. ”Differentsiaaliyhtälöt”. *Tampereen yliopisto* (2020).
- [2] Kevin McCann ja Peter Yodzis. ”Biological Conditions for Chaos in a Three-Species Food Chain”. eng. *Ecology (Durham)* 75.2 (1994), s. 561–564. ISSN: 0012-9658.

Liitteet

Kolmen_lajin_malli.m, laskujen ja kuvaajien tekemiseen käytetty koodi