

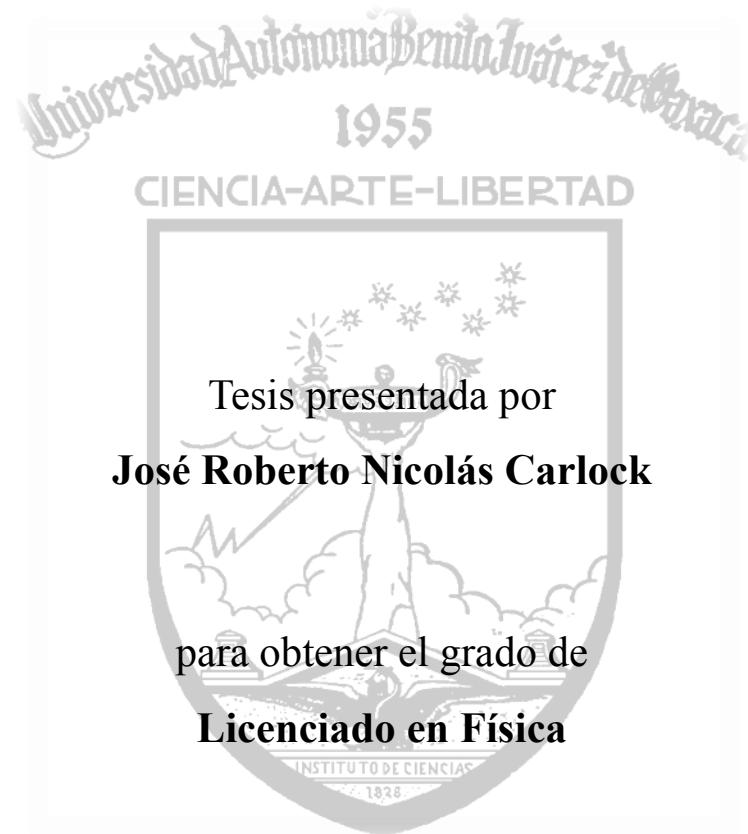


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA BENITO JUÁREZ DE OAXACA

ESCUELA DE CIENCIAS



**Simulación y análisis cualitativo del movimiento de
una partícula cargada dentro de los arreglos de
confinamiento magnético lineal y toroidal de espiras.**



Dirigida por

Dr. Omar Augusto Hernández Flores
Dr. Fernando Luis Pérez Sánchez
(Asesores Internos)

Enero 2010

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Introducción	VII
1. Marco teórico	1
1.1. Movimiento de una partícula cargada	3
1.1.1. Movimiento en campos magnéticos uniformes	5
1.1.2. Movimiento bajo fuerzas no magnéticas	7
1.1.3. Movimiento en campos magnéticos inhomogéneos	9
1.1.4. Invariantes adiabáticas	10
1.2. Campos magnéticos estáticos	12
1.2.1. Ley de Biot-Savart	13
1.2.2. Sobre la solución numérica para Biot-Savart	14
1.3. Dinámica mediante Runge-Kutta	17
1.3.1. Sobre la solución numérica para Lorentz	19
2. Configuraciones magnéticas	21
2.1. Inducción magnética de una espira	21
2.2. Arreglo lineal de espiras	32
2.3. Configuración toroidal	38
2.4. Conclusiones	48
3. Confinamiento magnético	51
3.1. Implementación y simulación	51
3.2. Dinámica en el campo de una espira	58
3.3. Dinámica en el arreglo lineal	60

3.4. Dinámica en la configuración toroidal	61
3.5. Conclusiones	71
4. Conclusión general	75
A. Regla del Trapecio y Simpson	79
B. Método de Runge-Kutta	81
Referencias	82

Agradecimientos

A mis asesores, Dr. Omar Augusto Hernández Flores y Dr. Fernando Luis Pérez Sánchez, por todo el apoyo brindado para llevar con bien la finalización de este trabajo.

A todo el personal administrativo y técnico de esta institución, así como a mis compañeros y maestros que han sido fuente de motivación.

A la Fundación Alfredo Harp Helú por el estímulo económico brindado durante la mayor parte de mis estudios profesionales y a la Coordinación Nacional de Becas para la Educación Superior (CNBES) por el monto otorgado para la culminación de esta tesis.

José Roberto Nicolás Carlock
Enero de 2010.

Resumen

Este trabajo se centra en la descripción, a través de técnicas teórico-computacionales, de la dinámica de una partícula cargada bajo la acción de los campos generados por los arreglos de confinamiento magnético lineal y toroidal de espiras, bajo el régimen estacionario, sin colisiones y en el caso no relativista. Específicamente, solucionamos la ecuación de Lorentz mediante el desarrollo de una implementación en MATLAB® del método de Runge-Kutta de cuarto orden y a partir de los resultados obtenidos, realizamos la simulación del movimiento de la partícula dentro de cada arreglo de confinamiento. Este método requiere la previa caracterización de los arreglos y para ello, aplicamos la ley de Biot-Savart en conjunto con el principio de superposición al caso del campo generado por una espira circular conductora. El cálculo de las integrales de Biot-Savart fue mediante la implementación de las reglas de integración de Simpson y Trapecio, complementando con una visualización tridimensional del campo para describir características como simetría y uniformidad espacial. Finalmente, para describir el comportamiento de la partícula en cada situación de confinamiento, empleamos algunos de los conceptos desarrollados dentro de la Teoría de Guía Central, la cual es una extensión a los resultados para la dinámica en campos uniformes a situaciones donde el campo posee características más generales, como gradiente y curvatura.

Introducción

La fusión nuclear se presenta en este siglo XXI como una de las más importantes y prometedoras fuentes de energía en la historia. Esta propuesta se basa en el mecanismo que proporciona la energía del Sol convirtiendo el hidrógeno en helio, la *fusión nuclear*, la cual consiste en la combinación de núcleos atómicos para generar átomos más pesados. Los átomos de hidrógeno en el Sol se fusionan bajo la presión extrema de la gravedad, liberando importantes cantidades de energía, pero debido a que en la Tierra no se puede producir el mismo mecanismo, la humanidad ha tenido que desarrollar otros medios para conseguirlo [1]. En principio, la fusión es posible con muchos elementos ligeros y para que se produzca, los núcleos atómicos tienen que recibir suficiente energía cinética para superar la mutua repulsión electrostática cuando colisionan. Entre todas las fusiones posibles, la fusión entre los isótopos del hidrógeno, deuterio (D) y tritio (T), los cuales se encuentran en gran abundancia en las aguas del planeta y por tanto un combustible aparentemente inagotable, es la forma más sencilla de producir energía y la que ha sido escogida para las futuras centrales de energía de fusión [2]. Para la fusión D-T la temperatura necesaria es del orden de 150 millones de grados kelvin. A estas temperaturas el combustible está completamente ionizado, formando lo que se conoce como *plasma*. El plasma no debe entrar en contacto con las paredes de la cámara donde tiene lugar la reacción, ya que la superficie de la pared se evaporaría y el plasma se ensuciaría y enfriaría, perdiendo las condiciones para que la fusión se siga produciendo. Por tanto, el plasma, formado por iones de hidrógeno con carga eléctrica positiva (protón) y electrones con carga eléctrica negativa, se confina en una cámara de forma toroidal, alejado de las paredes mediante intensos campos magnéticos, esto se conoce como *confinamiento magnético*, el cual está basado en el fenómeno físico descrito por Lorentz, donde las partículas cargadas orbitan en presencia de campos magnéticos.

Teóricamente, si el campo magnético es lo suficientemente intenso y las líneas de campo forman superficies cerradas, los protones y electrones permanecen confinados en estas superficies hasta que colisionan con otra partícula [3]. Principalmente, dos tipos de máquina se basan en esta idea: el *tokamak* y el *stellarator*, siendo el primero el que presenta los mejores resultados y con mayor desarrollo en la actualidad [1]. La estructura básica de esta máquina consiste en un arreglo de anillos o bobinas, colocados en disposición toroidal. En cada uno de estos anillos se hace pasar un corriente eléctrica para inducir un campo magnético, éste tiene la característica de ser muy uniforme cerca del eje del anillo y con base en la geometría del arreglo, el resultado es un *campo magnético toroidal* capaz de confinar temporalmente partículas cargadas. Para mejorar este confinamiento es necesario inducir una corriente eléctrica dentro del mismo plasma, el cual genere su propio campo magnético, o *campo poloidal* [3, 4]. La reconexión o superposición de estos campos da como resultado el confinamiento magnético esperado teóricamente.

Siendo un área en su mayor parte aplicada, todos los resultados obtenidos en el área de confinamiento magnético de plasmas tipo tokamak permitirán el funcionamiento del mayor experimento de fusión nuclear, ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*), el cual de lograr un proceso autosostenido, dará paso a la construcción del primer prototipo de plantas de energía nuclear de fusión, DEMO (*DEMOstration Power Plant*) [5].

Con esta motivación, el objetivo general de este trabajo es introducirnos en el área de física de plasmas a través del cálculo teórico-computacional de la inducción magnética generada por arreglos de confinamiento magnético basados en anillos o espiras conductoras y el análisis del movimiento de una partícula cargada bajo la acción de estos campos, en un régimen sin colisiones y en el caso no relativista, como un parámetro cualitativo para comprender algunos aspectos de la dinámica de plasmas bajo confinamiento en este tipo de arreglos. Como herramienta computacional, nosotros elegimos MATLAB®[6], por la facilidad y eficacia que brinda para el cálculo y visualización de resultados.

Primeramente, mediante la ley de Biot-Savart realizamos el cálculo teórico de la inducción magnética producida por una espira circular en el caso de corrientes estacionarias. Este cálculo lo empleamos como modelo base para

la construcción de un arreglo lineal y otro toroidal de espiras. Las expresiones obtenidas son evaluadas mediante una implementación de las reglas del Trapecio y Simpson. Posteriormente, solucionamos la ecuación de Lorentz mediante una implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden, con el fin de realizar la simulación de la dinámica de una partícula cargada, inmersa en el campo generado por cada arreglo y analizar los efectos que las características de cada campo ocasionan sobre la dinámica de la partícula.

En el Capítulo 1, establecemos los conceptos elementales de la dinámica de partículas cargadas desarrollados dentro de la *Teoría de Guía Central* [4, 7]. En esta teoría, las partículas se mueven en ausencia de colisiones alrededor de las líneas de campo magnético describiendo trayectorias de tipo helicoidal conforme a la fuerza de Lorentz tal que, debido a la magnitud del campo, el radio y frecuencia de giro son las escalas de longitud y tiempo que caracterizan al sistema, incluso en presencia de colisiones, donde la frecuencia de giro es mayor que la frecuencia de los choques [4]. Esta teoría es válida sólo para el caso de campos electromagnéticos que varían lentamente en el espacio y tiempo con respecto a estas escalas características, de manera que los campos pueden ser considerados como producidos por fuentes estacionarias. Además, si estos campos presentan curvatura, gradiente u otras fuerzas diferentes a la magnética actúan sobre la partícula de prueba, como la eléctrica o gravitacional, la trayectoria de las partículas se modifica al incorporar velocidades de deriva asociadas a cada una de las perturbaciones sobre el campo, de esta forma, una de las principales características de la dinámica es un dominante movimiento giratorio sobre las lentes velocidades de deriva [8]. Así también, en este capítulo presentamos los conceptos de la ley de Biot-Savart que utilizamos para el cálculo de la inducción magnética producida por los arreglos de espiras, abundamos sobre las técnicas numéricas para la solución de las expresiones obtenidas, así como aspectos de la implementación del método de Runge-Kutta para la solución de la ecuación de Lorentz no relativista.

En el Capítulo 2, consideramos el campo magnético producido por una espira circular como modelo base para la construcción de los diferentes arreglos de confinamiento. Mediante la aplicación de la ley de Biot-Savart obtenemos expresiones para el cálculo de la inducción magnética generada por una espira en el caso de corrientes estacionarias. En la construcción del arreglo lineal, empleamos translaciones sobre las ecuaciones de nuestro modelo base

y para el arreglo toroidal, empleamos tanto translaciones como rotaciones. Para realizar el cálculo de las integrales, implementamos dos de las técnicas fundamentales de integración numérica, la regla de Simpson y del Trapecio. Comparamos la precisión de la integración conforme nos acercamos a puntos sobre la espira (fuente del campo), región caracterizada por ocasionar divergencia de la integral de Biot-Savart. Para cada arreglo presentamos la visualización tridimensional de los campos, así como gráficas de su magnitud sobre diversos planos de simetría, con el fin de analizar tanto la intensidad como geometría del campo.

En el Capítulo 3, desarrollamos una implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden, para simular la dinámica de una partícula cargada dentro de las diferentes configuraciones de espiras en el caso no relativista. Para ello, consideramos la expresión de Lorentz en conjunto con las expresiones obtenidas para el campo magnético generado por cada arreglo. En cada caso, presentamos una animación así como la trayectoria final de la partícula en el espacio. Analizamos como diversos factores sobre el campo, como gradiente, geometría, otras fuerzas y la combinación de estos, afectan la trayectoria de la partícula y como la superposición de los campos apropiados permiten en última instancia el confinamiento.

Además, los capítulos 2 y 3 contienen nuestras observaciones, discusión de resultados y las conclusiones respectivas. Al final de estos, presentamos la conclusión general. Así mismo, en forma de anexos incluimos una síntesis de las técnicas computacionales empleadas en el trabajo, las reglas integración de Trapecio y Simpson, el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Capítulo 1

Marco teórico

El análisis de la dinámica de una partícula cargada dentro de campos electromagnéticos, es un problema de gran importancia en la física de gases altamente ionizados o plasmas. Debido a la naturaleza del sistema (de muchas partículas cargadas) y al carácter fundamental de las leyes de la física que describen el movimiento de un partícula cargada (Newton-Lorentz), el entendimiento de éste fenómeno conforma una parte elemental en la base teórica para estudios más especializados en el área, como el tratamiento de plasma como un fluido magnetohidrodinámico o desde el marco de la teoría cinética¹.

Una justificación formal de este tipo de reduccionismo dentro del marco teórico de la física de plasmas, esto es, del estudio de un sistema de muchas partículas cargadas con todas sus posibles interacciones y efectos, a específicamente el análisis del comportamiento de una sola partícula como medio para la comprensión de la dinámica colectiva, va más allá del alcance de este trabajo² y no abundaremos en el tema. No obstante, podemos argumentar este punto haciendo notar que dentro de la física y otras ciencias naturales, para llegar a comprender las características fundamentales de la dinámica de un sistema, es deseable comenzar con el análisis de fenómenos específicos o simplificaciones (aspecto local), buscando la interrelación de todos los procesos y su consistencia en una teoría general (aspecto global). Siempre esperando que los resultados de tales aproximaciones revelen la esencia de lo

¹Por ejemplo, en las refs. [3, 4, 9] se puede observar la importancia del problema de una partícula cargada dentro del contexto general de la física de plasmas.

²*Ídem.*

que sucede. Por lo tanto, desde el punto de vista del confinamiento magnético, resulta razonable comenzar el estudio de la dinámica de plasmas a través del análisis de sus constituyentes en las situaciones más simples, esperando que este análisis revele algunas características fundamentales o bien, nuevas formas de abordar el problema.

Así pues, este trabajo se centra en la descripción de la dinámica de una partícula cargada bajo la acción de campos electromagnéticos estáticos, en ausencia de colisiones y para el caso no relativista, mediante la implementación de técnicas computacionales que faciliten el cálculo de las soluciones y la visualización de los resultados, tal que, la herramienta teórico-computacional desarrollada en esta primera aproximación, nos permita obtener una buena comprensión cualitativa de la dinámica de un plasma y los posibles efectos colectivos cuando éste se encuentre sujeto a campos electromagnéticos externos, particularmente en situaciones de confinamiento magnético basados en arreglos de espiras conductoras. Nosotros consideraremos dos tipos de arreglos, el lineal y toroidal de espiras, debido a su carácter fundamental dentro de la teoría de dinámica de plasmas y confinamiento magnético³.

Específicamente, solucionaremos la ecuación de Lorentz mediante la implementación del método de Runge-Kutta de cuarto orden y realizaremos la simulación del movimiento de una partícula dentro de cada arreglo de confinamiento a partir de los resultados obtenidos. Este método requiere la previa caracterización del campo, es decir, de los arreglos de confinamiento magnético lineal y toroidal de espiras. Para ello, aplicaremos la ley de Biot-Savart en conjunto con el principio de superposición, al caso del campo generado por una espira circular conductora. El cálculo de las integrales de Biot-Savart será mediante la implementación de las reglas de integración de Simpson y Trapecio, complementando con una visualización tridimensional del campo para describir características como simetría y uniformidad espacial. Finalmente, para describir el comportamiento de la partícula en cada situación de confinamiento, emplearemos algunos de los conceptos desarrollados dentro de la *Teoría de Guía Central*, la cual es una extensión a los resultados para la dinámica en campos uniformes, a situaciones donde el campo posee características más generales.

³Ídem.

1.1. Movimiento de una partícula cargada

Dentro del marco Newton-Lorentz, la ecuación de movimiento para una partícula de masa m y carga q , en interacción con el campo electromagnético estático dado por $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, en ausencia de colisiones y en el caso no relativista, se expresa en su forma vectorial por,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.1)$$

Esta ecuación representa un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, acopladas, ordinarias, cuya solución analítica general es difícil de obtenerse, aunque hay situaciones como la de campos uniformes donde llegar a una solución analítica es posible. Sin embargo, en casos donde los campos no tienen este comportamiento elemental, los resultados teóricos pueden ser complementados mediante la búsqueda y el análisis de una solución numérica. No obstante, dado que las características fundamentales de la solución para el caso de campos uniformes son bien conocidas⁴, particularmente, que dentro de un campo magnético uniforme las partículas describen trayectorias de tipo helicoidal con un radio ρ y frecuencia de giro Ω característicos y que en la presencia de un campo eléctrico uniforme la trayectoria se modifica por la adición de una velocidad de deriva \mathbf{v}_E , encontramos que dentro de la Teoría de Guía Central se han empleado estos resultados en un marco basado en el método de perturbaciones⁵ para realizar una extensión a la teoría elemental de campos uniformes, a situaciones donde el campo posee características más generales, como curvatura, gradientes o variaciones temporales. En esta teoría, la velocidad \mathbf{v} en (1.1) es aproximada bajo las siguientes condiciones,

- a) los campos electromagnéticos varían lentamente en el espacio con respecto al radio de giro característico ρ y en el tiempo con respecto al inverso de la frecuencia de este giro Ω ,
- b) los campos eléctricos y magnéticos son producidos por fuentes externas al sistema de partículas cargadas y aquellos campos generados por las partículas no modifican el campo externo, el cual es dominante sobre la dinámica,

⁴Este tema será tratado con mayor detalle en las secciones siguientes.

⁵Ver el tratado en las refs. [4, 8, 9].

- c) las interacciones de tipo Coulomb, las colisiones de fusión nuclear y los efectos gravitatorios son ignorados.

Bajo estas consideraciones, el principal resultado de la teoría de guía central radica en que el movimiento de una partícula cargada dentro de un campo magnético puede entenderse como la perturbación de la trayectoria helicoidal de la partícula en un campo uniforme, a través de la adición de velocidades de deriva asociadas a cada una de las características espaciales o temporales, presentes en el campo electromagnético. Es decir, cuando una partícula cargada se encuentra sujeta a la acción de un campo magnético externo (sobre todo si esta es la interacción dominante), la partícula se moverá describiendo una trayectoria de tipo helicoidal tomando como eje de movimiento una de las líneas de campo, tal que en presencia de una perturbación, la velocidad de deriva asociada hará que la partícula se mueva sobre las líneas de campo a una nueva posición, esto es, otro eje donde pueda continuar su movimiento. No obstante, ésta es una primera concepción de la dinámica y aunque efectiva⁶, no se debe olvidar la posibilidad de constantes de movimiento que puedan restringir en otras formas la dinámica, lo cual veremos más adelante. De esta forma, la solución aproximada para la velocidad \mathbf{v} puede ser expresada como sigue,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_D, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_p, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{v}_\perp y \mathbf{v}_\parallel son las componentes de la velocidad perpendicular y paralela al campo magnético respectivamente, \mathbf{v}_D está asociada a las velocidades de deriva, las cuales son producidas principalmente por el campo eléctrico \mathbf{v}_E , el gradiente del campo magnético $\mathbf{v}_{\nabla B}$, su curvatura \mathbf{v}_c y la polaridad (dependencia temporal) del campo electromagnético, \mathbf{v}_p . Recordemos que estamos dentro del régimen de campos estáticos y por lo tanto, no consideraremos los efectos asociados a la dependencia temporal del campo. No obstante, aunque la condición (a) nos permite considerar el caso de campos que varían lentamente en el tiempo con respecto al inverso de la frecuencia de giro ($\ll \Omega^{-1}$) y los campos pueden ser considerados como si fueran generados por fuentes

⁶Ibid.

estacionarias, este caso tampoco será considerado explícitamente en este trabajo.

La aproximación proporcionada por la teoría de guía central facilita de manera sustancial el análisis de la dinámica de sistemas de partículas cargadas, pues conceptualmente, el movimiento de cada partícula queda descompuesto en términos de velocidades asociadas a diferentes características del campo, las cuales pueden ser aisladas para su estudio así como para el cómputo de una solución. Sin embargo, puesto que ya hemos planteado que resolveremos la ecuación de Lorentz numéricamente mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden y que en base a la solución obtenida simularemos el movimiento de la partícula dentro de los arreglos de espiras, el objetivo de este trabajo no es implementar de forma computacional la teoría de guía central, la cual va más allá del alcance del autor⁷, sino el utilizar sus resultados como una herramienta teórica para describir de manera cualitativa el comportamiento de la partícula en las situaciones de nuestro interés, los arreglos de confinamiento magnético. Con esto en consideración, en las siguientes secciones presentamos algunas de las características esenciales de la dinámica de una partícula cargada desde el marco de la teoría de guía central.

1.1.1. Movimiento en campos magnéticos uniformes

Consideremos el movimiento de una carga de prueba q con masa m , dentro de un campo magnético \mathbf{B} , uniforme en el tiempo y el espacio, descrito por la ecuación de Lorentz no relativista,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.4)$$

En este caso, la energía cinética K es constante porque el campo actúa de forma siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. Por ejemplo, tomando el producto punto de (1.4) con \mathbf{v} , vemos que el lado derecho de la expresión resultante siempre es cero, así mismo, considerando $dv^2 = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$, vemos que $v^2 = \text{const.}$ y dado que la masa es constante, $K = \text{const.}$ Así también, si consideramos,

⁷Por ejemplo, ver las refs. [7] y [11], para el marco teórico formal necesario para la implementación y la aplicación en un trabajo similar al presente, respectivamente.

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ es el vector unitario en la dirección del campo, al sustituir (1.5) en (1.4), vemos que el campo no afecta la velocidad de la partícula sobre su componente paralela al campo, así que $v_{\parallel} = \text{const.}$, y por tanto $v_{\perp}^2 = v^2 - v_{\parallel}^2 = \text{const.}$ Este es un resultado válido no solo para campos uniformes sino para todo campo magnético estático. Ahora bien, dado que K y la magnitud del campo B son constantes, y que éste siempre actúa a ángulos rectos sobre la velocidad, podemos ver que la partícula describe un movimiento circular uniforme restringido al plano normal al vector \mathbf{b} , de tal forma que la fuerza centrípeta asociada es igual en magnitud a la fuerza de Lorentz a una distancia constante, conocida como radio de Larmor,

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}, \quad (1.6)$$

así mismo, este movimiento tiene asociada una frecuencia de giro Ω , conocida también como frecuencia de ciclotrón, que se define a través de $v_{\perp} = \Omega\rho$, tal que,

$$\Omega = \frac{|q|B}{m}. \quad (1.7)$$

Las condiciones bajo las cuales estas cantidades fueron derivadas y la conservación de la energía cinética, restringen el movimiento de la partícula a una trayectoria en espiral, con radio y frecuencia de giro constantes, cuya dirección de rotación depende del signo de su carga. El eje sobre el cual la partícula ejecuta sus giros es lo que llamamos *guía central* y como veremos, ésta se modifica mediante la adición de diversas velocidades de deriva asociadas a diferentes características del campo electromagnético.

La aplicación del concepto de guía central al problema del campo uniforme, permite la descomposición del vector posición de la partícula \mathbf{r} , a través de la posición de la guía \mathbf{R} y un vector $\boldsymbol{\rho}$, que describe la posición de la partícula desde el sistema de referencia de la guía central,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}. \quad (1.8)$$

Para la elección de ρ consideremos que el movimiento circular uniforme de la partícula, el cual se encuentra restringido al plano descrito por \mathbf{b} , puede ser caracterizado por la fuerza centrípeta dada por $\mathbf{F}_c = -mv_\perp^2 \boldsymbol{\rho}/\rho^2$, tal que la igualdad de \mathbf{F}_c con la fuerza de Lorentz en (1.4) da como resultado,

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{m}{qB^2} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.9)$$

Así mismo, comparando (1.2) con la derivada temporal de (1.8), notamos que $\mathbf{v}_\perp = d\rho/dt$ y que la velocidad de la guía está dada por,

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_D, \quad (1.10)$$

la cual está en completa congruencia para el caso del campo uniforme, pues la velocidad paralela al campo $\mathbf{v}_\parallel = v_\parallel \mathbf{b}$, es constante y la velocidad de deriva es cero. Así también, notemos que $\boldsymbol{\rho}$ describe completamente el movimiento giratorio y por tanto, el objetivo dentro de la teoría de guía central es la descripción de la dinámica de una partícula cargada a partir del comportamiento de \mathbf{R} .

1.1.2. Movimiento bajo fuerzas no magnéticas

Consideremos ahora los efectos de una fuerza constante \mathbf{F} diferente a la de Lorentz, en adición al campo uniforme \mathbf{B} ,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}. \quad (1.11)$$

El movimiento de la partícula debido a \mathbf{F} puede ser separado de aquel producido por \mathbf{B} tomando como sistema de referencia la posición de la guía central. Para ello, consideramos $\mathbf{v}_g = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp$ a partir de la derivada de (1.8), donde $\mathbf{v}_\perp = d\rho/dt$ puede ser calculada a partir de (1.9) considerando que el campo \mathbf{B} es constante, tal que tenemos,

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v} + \frac{m}{qB^2} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{B} \right),$$

sustituyendo (1.11) en la ecuación anterior y considerando $\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = B^2(\mathbf{v} - v_{\parallel}\mathbf{b})$, obtenemos,

$$\mathbf{v}_g = v_{\parallel}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}, \quad (1.12)$$

la cual muestra que, en general, la velocidad de deriva asociada a una fuerza constante independiente de la magnética, depende del tipo de carga y es perpendicular a la fuerza y el campo magnético. Además, la componente de la fuerza paralela al campo no contribuye en la velocidad de deriva sino que sólo produce una aceleración en la dirección paralela al campo.

Campo Eléctrico

El análisis de los efectos de un campo eléctrico constante \mathbf{E} sobre el plasma es muy importante, pues como se verá, éste es uno de los principales factores de confinamiento. La velocidad de deriva asociada al campo eléctrico de acuerdo a (1.12), está dada por,

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.13)$$

Esta velocidad no depende del signo de la carga o masa de las partículas, lo cual ocasiona que éstas deriven en la misma dirección e intensidad, es decir, se crea un flujo neto del plasma que no genera corriente alguna. Este resultado es sumamente interesante, pues dado que un plasma consiste en un sistema de partículas cargadas, la presencia de una campo eléctrico occasionaría separación de las cargas en direcciones opuestas conforme a su signo, sin embargo, la sola presencia de un campo magnético modifica esta propiedad intuitiva de la dinámica de partículas cargadas.

Por otro lado, en el caso de la dinámica descrita por (1.11) con $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, encontramos que la energía del sistema W es constante. Para ver esto, note- mos que $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, se cumplen. Tomando el producto punto de \mathbf{v} con (1.11) y considerando que $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi = d\phi/dt$, pues la parcial temporal de ϕ es cero, se puede concluir que la energía $W = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{const.}$ Cuando $\mathbf{E} = 0$, la cantidad que se conserva es la energía cinética K , como habíamos visto anteriormente.

1.1.3. Movimiento en campos magnéticos inhomogéneos

Hasta el momento sólo hemos considerado los efectos debidos a campos o fuerzas constantes. En el caso de inhomogeneidades en el campo electromagnético, como gradiente o curvatura, los resultados obtenidos aún pueden ser utilizados siempre que la condición (a) sea satisfecha, es decir, que la variación espacial del campo sea mucho menor que el radio de giro, $\nabla B/B \ll \rho^{-1}$, pues esta es la condición utilizada dentro del marco formal de la teoría de perturbaciones dentro de la teoría de guía central para aproximar la velocidad de la guía. Nosotros no pretendemos profundizar en esta teoría, no obstante a partir de los resultados para campos uniformes y los argumentos pertinentes, podemos derivar las expresiones para las velocidades de deriva respectivas⁸. Ahora, dos son los principales efectos producidos por inhomogeneidades en el campo magnético estático. El primero de ellos está asociado con el gradiente del campo. Para poder emplear (1.12), notemos que podemos definir un momento magnético μ asociado al giro de cada partícula, como el producto de la corriente en el circuito $q\Omega/2\pi$ por el área encerrada $\pi\rho^2$,

$$\mu = \frac{v_\perp^2}{2B}, \quad (1.14)$$

tal que, la fuerza promedio sobre el periodo de giro puede describirse como la fuerza sobre el dipolo magnético debido al gradiente del campo, $\mathbf{F} = -m\mu\nabla B$. Sustituyendo en (1.12), la velocidad de deriva asociada al gradiente está dada por,

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \left(\frac{mv_\perp^2}{2qB^2} \right) \mathbf{b} \times \nabla B. \quad (1.15)$$

Una forma de comprender la naturaleza de este efecto, consiste en observar la dependencia del radio de Larmor (1.6) con la magnitud del campo, el cual ahora depende de la posición $B(\mathbf{r})$. Cuando la partícula gira sobre una región con gradiente, su radio de giro es pequeño sobre la parte donde la magnitud del campo es grande y cuando se translada a la región donde el campo es débil, el radio es grande y cubre una mayor distancia, el resultado es un movimiento neto perpendicular al gradiente.

⁸Ver las refs. [8, 9] para un estudio formal y más extenso.

El segundo efecto es causado por la curvatura de las líneas de campo. La base de este efecto consiste en que una partícula moviéndose con velocidad v_{\parallel} a lo largo de una línea de campo, experimenta una fuerza centrífuga $\mathbf{F} = mv_{\parallel}^2 \mathbf{R}_c / R_c^2$, donde \mathbf{R}_c es el radio de curvatura de la trayectoria de la guía. Empleando (1.12), la velocidad de deriva asociada a la curvatura del campo está dada por,

$$\mathbf{v}_c = - \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{qBR_c^2} \right) \mathbf{b} \times \mathbf{R}_c. \quad (1.16)$$

Esta notación es buena para un análisis cualitativo de la dinámica, pero para un desarrollo analítico, la curvatura puede describirse localmente en términos del campo mediante $\nabla_{\parallel} \mathbf{b} = -\mathbf{R}_c/R_c^2$, donde $\nabla_{\parallel} \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ define la variación del campo en la dirección paralela al movimiento de la partícula. Ahora notemos que ambas velocidades de deriva dependen de la carga de las partículas, por tanto son opuestas para cargas con signo contrario, dando como resultado una densidad de corriente dentro del plasma, la cual, además de que puede llevar la separación de las cargas, tiene asociado un campo magnético que interacciona mediante superposición con el campo externo, sin embargo estos efectos no son considerados de acuerdo con (b). Considerando la magnitud de estas velocidades,

$$v_{\nabla B} = \left(\frac{mv_{\perp}^2}{2|q|B^2} \right) |\nabla B|, \quad v_c = \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{|q|B^3} \right) |\nabla_{\parallel} \mathbf{B}|, \quad (1.17)$$

notemos también que la intensidad de estos efectos es directamente proporcional a la velocidad de las partículas como a las variaciones del campo magnético en las direcciones correspondientes e inversamente proporcional al cuadrado y cubo de su magnitud respectivamente.

1.1.4. Invariantes adiabáticas

En el movimiento dentro de campos magnéticos, otra cantidad de interés es el momento magnético asociado al giro de cada partícula. Podemos ver que en el caso del campo magnético uniforme donde K es constante, el momento magnético es una constante de movimiento acorde con (1.14), pero en el caso del campo eléctrico no es así debido a la adición de la velocidad de deriva. No obstante, cuando un sistema efectúa un movimiento periódico, la integral de

acción $I = \oint pdq$, donde p es el momento generalizado y q es la coordenada correspondiente, tomada sobre el periodo característico, es una constante de movimiento⁹. Además, cuando el sistema varía en el tiempo por debajo del periodo característico, esta integral permanece constante y es conocida como *invariante adiabática*. Dentro de la física de plasmas, la primera invariante adiabática de movimiento es el momento magnético μ .

Considerando la integral de acción del movimiento periódico sobre el radio de Larmor, donde $mv_{\perp}\rho$ es el momento angular y ϕ es la coordenada asociada, tenemos,

$$\oint pdq = 2\pi mv_{\perp}\rho = (4\pi m^2/q)\mu,$$

donde, $(4\pi m^2/q)$ es constante y dada la validez de la condición (a), el momento magnético μ es constante sobre el periodo de giro de la partícula. Notemos que este resultado es válido no sólo para campos uniformes sino para todo campo magnético que satisfaga la condición (a) en su parte temporal.

Esta invarianza o conservación de μ , sugiere que el movimiento de las partículas está restringido a regiones que satisfagan las condiciones iniciales de energía. Una aplicación de este resultado permite explicar la inversión que sufre la trayectoria de una partícula sobre la componente de su velocidad paralela al campo, al encontrar regiones de campo magnético intenso, un fenómeno importante en sistemas conocidos como *espejos magnéticos*. Dado que la fuerza de Lorentz sólo actúa a ángulos rectos sobre la trayectoria, los cambios sobre v_{\parallel} sólo son explicados por la conservación de la energía, $K = mv^2/2 = \mu B + v_{\parallel}^2/2$, y conservación de μ . El criterio para la reflexión puede ser obtenido a través de K , considerando que la rapidez paralela final $v_{\parallel} = 0$, cuando la partícula se encuentra en la región del campo con intensidad crítica B_c , de esta forma,

$$\frac{v_{\parallel,0}}{v_{\perp,0}} > \left(\frac{B_c}{B_0} - 1 \right)^{1/2}, \quad (1.18)$$

donde, $v_{\parallel,0}$ y $v_{\perp,0}$, son las condiciones iniciales para la velocidad y $B_0 < B_c$, es la magnitud del campo en la posición inicial.

⁹Ver la ref. [12], Sección 12.5. *Adiabatic Invariants*

Similarmente, existen otras invariantes adiabáticas, como la invariante longitudinal o segunda invariante, definida sobre el periodo orbital de partículas atrapadas en regiones botella, esto es, regiones localizadas entre dos puntos de reflexión de acuerdo al fenómeno descrito anteriormente, sin embargo, éstas no serán tratadas en este trabajo¹⁰.

1.2. Campos magnéticos estáticos

Ahora consideremos la herramienta teórica para caracterizar los arreglos de confinamiento magnético. Primeramente, los campos magnéticos son generados por arreglos de espiras que satisfacen la condición para corrientes estacionarias,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.19)$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente y ρ la densidad de carga. Supondremos $\rho = 0$ y que la corriente está confinada a moverse en un circuito unidimensional, tal que podemos utilizar la sustitución $\mathbf{J}dv \rightarrow Idl$ para los elementos de corriente. Bajo esta condición, el cálculo de la inducción magnética puede realizarse empleando los conceptos de la magnetostática, ya sea la ley de Biot-Savart, la ley de circuitos de Ampere, el potencial vectorial o el potencial escalar magnético. La aplicación de algún método en particular depende de aspectos como la simetría, la posibilidad de uso del principio de superposición o la complejidad para caracterizar la fuente y en menor medida, cuando se requiere de técnicas numéricas, el manejo del error producido durante los cálculos.

En el caso de la espira, aunque partiendo del concepto de potencial vectorial magnético es posible llegar a expresiones para la inducción en términos de armónicos tanto esféricos como cilíndricos, las relaciones obtenidas son de mucha más utilidad para un análisis teórico y por tanto se recomienda regresar a la expresión del potencial \mathbf{A} en su forma de integral para el cómputo numérico¹¹ donde además habrá que calcular $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, siendo en este

¹⁰Para un tratado mayor del tema ver las refs. [3, 8].

¹¹Ver la ref. [14], pág. 141

caso necesario el manejo del error producido por la integral de \mathbf{A} y su rotacional. Por otra parte y desde este punto de vista, del manejo del error y simplicidad, notamos que no hay la simetría deseada para evaluar la integral de línea en la ley de circuitos de Ampere de forma práctica y su aplicación no resulta conveniente con fines numéricos, aunque muy importante en el análisis teórico de configuraciones magnéticas cerradas¹². Por otro lado, el hacer uso del concepto del potencial escalar magnético implica considerar el cómputo tanto de la integral de superficie de φ^* y el gradiente $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi^*$, lo cual ciertamente no ofrece mucha funcionalidad.

1.2.1. Ley de Biot-Savart

Así, con fines prácticos y desde el punto de vista de manejo del error, consideramos que el método para hallar la inducción magnética producida por una espira consiste en calcular numéricamente la integral de Biot-Savart,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.20)$$

donde $I d\mathbf{l}'$ es el elemento de corriente en el conductor C descrito por \mathbf{r}' , $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A·m. En nuestro caso, \mathbf{r}' es la parametrización de la espira y $d\mathbf{l}' = d\mathbf{r}'$. Para considerar la contribución de otras fuentes, el cálculo es completado con el principio de superposición. La expresión para la k -ésima espira dentro de un arreglo de N espiras está dada por,

$$\mathbf{B}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_k} \frac{d\mathbf{l}'_k \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|^3}, \quad (1.21)$$

donde la corriente I es la misma en cada espira. Notemos además que cada \mathbf{r}'_k está parametrizada dentro del mismo sistema de referencia, tal que las expresiones para \mathbf{B}_k y \mathbf{B}_{k+1} pueden ser diferentes, aunque bajo la transformación apropiada podemos obtener su igualdad dado que estamos hablando de un sistema superpuesto, el campo de la espira circular. De esta forma, el campo total está dado por,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{B}_k(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

¹²Ver la ref. [3], pág. 49

La aplicación de la ley de Biot-Savart al caso específico del campo producido por una espira circular y la extensión de este modelo a los arreglos de espiras, será tratado en el siguiente capítulo.

1.2.2. Sobre la solución numérica para Biot-Savart

Desde el punto de vista de la solución numérica para (1.20), notemos que la integral diverge en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ y dado que estamos interesados en el cálculo de la inducción sobre puntos no muy lejanos a la fuente, es conveniente restringir nuestros cálculos a una región $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \geq \delta$, donde $\delta \ll a$ sea escogida con la finalidad de evitar los valores con baja precisión generados durante la integración. Esto es debido a que conforme nos acercamos a \mathbf{r}' , la pendiente de la curva de integración aumenta drásticamente y para obtener una mejor precisión en el cálculo, requerimos incrementar el número de subdivisiones en el intervalo de integración, lo cual aumenta la aritmética computacional y con ello, la generación de un error de redondeo considerable.

En base a este problema, consideramos que las reglas de cuadratura compuestas (Apéndice A) ofrecen buenos resultados, pues éstas poseen una gran estabilidad con respecto al error de redondeo ya que son independientes del número de subintervalos de integración¹³ y por tanto, del número de iteraciones que se necesitan para aproximar el valor de la integral con la precisión deseada. Con esta propiedad, el criterio de elección del número de subintervalos de integración puede estar basado en la función de error asociada a cada regla, o bien, empleando métodos estadísticos sobre un conjunto de cálculos con diferente número de subdivisiones en el intervalo de integración. Debido a que usar la función de error como criterio para la elección de los subintervalos requiere del cálculo de derivadas de orden superior y la estabilidad de éstas es difícil de determinar, por simplicidad, nosotros hemos optado por el uso de estadística.

De esta forma, una vez que δ queda determinada, la restricción que empleamos en los cálculos consiste en tomar la región descrita por $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq \delta$, la cual es un toro con radio principal a y radio secundario δ . Considerando que las componentes de \mathbf{r}' satisfacen la ecuación,

¹³Ver la ref. [15], pág. 122

$$z'^2 + (\sqrt{x'^2 + y'^2} - a)^2 = \delta^2, \quad (1.23)$$

para que $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ sea tomado como un resultado aceptable, las componentes de \mathbf{r} deberán satisfacer simultáneamente,

$$|\sqrt{x^2 + y^2} - a| \geq \delta, \quad (1.24)$$

$$|z| \geq \sqrt{\delta^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2}, \quad (1.25)$$

de otra forma $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$. En el Apéndice C podemos ver la aplicación de este método en la implementación en MATLAB de la regla de Simpson para el cálculo de la inducción de un arreglo lineal de espiras. Por otro lado, la forma de las integrales de Biot-Savart dentro de las reglas compuestas, la extensión de este modelo a los arreglos de espiras y la descripción del método empleado para la designación del número de subintervalos de integración, serán presentados en el siguiente capítulo.

Dentro del análisis anterior, es conveniente mencionar la necesidad de comparar los resultados obtenidos numéricamente con aquellos obtenidos mediante una relación analítica. En el caso del arreglo de confinamiento lineal de espiras, es posible hacer la comparación con los resultados para el campo producido por una espira sobre su eje de simetría, obtenida precisamente con la ley de Biot-Savart,

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \sum_{k=1}^N \frac{a^2}{\{(z - \zeta_k)^2 + a^2\}^{3/2}} \mathbf{k}, \quad (1.26)$$

donde a es el radio de las espiras y ζ_k es una distancia de separación constante entre las espiras a lo largo del eje z . Sin pérdida de continuidad, el caso de una espira es analizado en conjunto con el arreglo lineal. En el caso del arreglo toroidal, la comparación se puede llevar a cabo mediante la expresión para el campo producido por un solenoide toroidal ideal, derivada a partir de la ley de Ampere,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{NI}{r} \right), \quad (1.27)$$

donde r se mide desde el eje de simetría del solenoide y se encuentra entre su radio menor y radio mayor. La expresión para el campo producido por un solenoide lineal ideal también puede obtenerse mediante la ley de Ampere, sin embargo, aprovechamos la existencia de una solución obtenida mediante la misma herramienta teórica que nosotros empleamos.

Por último, dentro de los métodos numéricos es práctica común el manejar cantidades adimensionales durante los cálculos y al final de estos, multiplicar por un factor para obtener las unidades correspondientes. Notemos que el campo magnético, además de ser una función de la posición, depende de parámetros como la corriente eléctrica y el radio de las espiras. En el cálculo de la inducción magnética mediante Biot-Savart, es posible definir una integral adimensional al tomar el radio de las espiras $|\mathbf{r}'| = a$, como factor para este propósito. Para ello, consideremos el vector adimensional $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/a$. Sustituyendo en (1.20), obtenemos la siguiente expresión,

$$\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \oint_C \frac{d\tilde{\mathbf{l}}' \times (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}')}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3}, \quad (1.28)$$

donde, $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}'/a$ y $d\tilde{\mathbf{l}}' = d\mathbf{l}'/a$, definen vectores adimensionales. Ahora, definiendo $\beta = \mu_0 I / 4\pi a$, la cual contiene toda la información sobre las unidades, podemos extender este resultado al caso de la superposición de campos en (1.21) y obtener la siguiente relación general,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \sum_{k=1}^N \oint_{C_k} \frac{d\tilde{\mathbf{l}}'_k \times (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'_k)}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'_k|^3}, \quad \beta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}, \quad (1.29)$$

donde $\tilde{\mathbf{B}} = \beta^{-1} \mathbf{B}$ denota la expresión adimensional del campo. Dada la generalidad de esta expresión en Biot-Savart, todas nuestras relaciones para el cálculo de la inducción tienen esta forma, donde β queda determinada una vez escogido el radio de las espiras a y la intensidad de la corriente I . Esto es posible empleando los resultados teóricos para el arreglo lineal (1.26) y toroidal (1.27), los cuales nos permiten calcular el valor de β en base a la magnitud del campo en las regiones centrales de cada arreglo B_0 . En el caso de un arreglo lineal de N espiras, consideremos $B_0 = B(z = 0)$ en (1.26) de forma que,

$$\beta_L = \frac{B_0(\zeta^2 + a^2)^{3/2}}{2\pi a^3 N}. \quad (1.30)$$

En el caso del solenoide toroidal (1.27), tomemos $B_0 = B(r = b)$, donde b es el radio de la circunferencia sobre la cual el solenoide se construye, de esta forma,

$$\beta_T = \frac{bB_0}{2aN}. \quad (1.31)$$

1.3. Dinámica mediante Runge-Kutta

Los conceptos de la teoría de guía central en conjunto con las invariantes adiabáticas, permiten predecir una gran variedad de fenómenos de interés en base a las características espaciales del campo electromagnético. Aunque podemos inferir algunas características de la dinámica de partículas dentro de un campo electromagnético particular, la descripción exacta del movimiento aun es complicada debido a que las propiedades teóricas dependen altamente de la simetría del sistema. No obstante, como ya hemos planteado, para complementar el análisis de la dinámica de una partícula cargada en interacción con los campos generados por los arreglos de confinamiento magnético, realizaremos la simulación de su movimiento a partir de la solución numérica de la ecuación de Lorentz. Para este fin, nosotros elegimos el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Apéndice B) debido a su precisión y simplicidad de implementación computacional.

Primeramente, considerando las condiciones iniciales, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, asociadas al sistema descrito por Lorentz en (1.1), el cual reescribimos a continuación,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

donde $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ está dado por cualquiera de las expresiones obtenidas mediante Biot-Savart, en particular (1.29), dependiendo del arreglo de espiras bajo análisis y \mathbf{E} describe un campo eléctrico uniforme. Notemos que este sistema tiene la forma general,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (1.32)$$

tal que podemos reducir el problema actual de segundo orden, a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante las sustituciones $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ y $\mathbf{v} = (x_4, x_5, x_6)$. De esta forma, reescribiendo (1.1) en función de sus componentes, podemos ver que el problema queda en la forma familiar de un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{aligned} x'_1 &= f_1(x_4), & x'_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_5, x_6), \\ x'_2 &= f_2(x_5), & x'_5 &= f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6), \\ x'_3 &= f_3(x_6), & x'_6 &= f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{aligned} \quad (1.33)$$

o en forma compacta,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_0, \quad (1.34)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$ y $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_6)$. Aquí, el parámetro temporal es suprimido durante el desarrollo de las ecuaciones sin afectar la generalidad del método, pues las funciones a utilizar son independientes del tiempo. De este modo, la implementación del método de Runge-Kutta resulta de las siguientes expresiones (Apéndice B),

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde el subíndice n denota la n -ésima iteración en desarrollo dentro de la partición del intervalo de tiempo $[t_i, \dots, t_n + nh, \dots, t_f]$, donde t_i y t_f , son los tiempos inicial y final respectivamente y h es el tamaño de paso prefijado tal que, $t_{n+1} = t_n + h$. Además, notemos que para calcular el vector \mathbf{k}_2 , necesitamos calcular previamente cada uno de los valores asociados a \mathbf{k}_1 . La solución obtenida a partir de este método consiste en un conjunto de puntos

$(x(t_n), y(t_n), z(t_n))$, cuya gráfica describe completamente la trayectoria de la partícula dentro del campo generado por los arreglos y además, nos permitirá realizar la simulación de su movimiento. Así también, el conjunto de puntos $(x'(t_n), y'(t_n), z'(t_n))$ nos brinda toda la información acerca de la velocidad de la partícula permitiéndonos calcular otras cantidades de interés.

1.3.1. Sobre la solución numérica para Lorentz

Considerando que el método de Runge-Kutta es un proceso iterativo en el intervalo de tiempo de interés, con $h = (t_f - t_i)/M$, donde M es el tamaño de la partición, notamos que el valor de h no puede escogerse arbitrariamente dado que nosotros hemos identificado las escalas espacial y temporal fundamentales del sistema, el radio de Larmor y la frecuencia de ciclotrón respectivamente,

$$\rho = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}, \quad \Omega = \frac{|q|B}{m}. \quad (1.37)$$

Así también, notemos que el periodo $\tau = 2\pi\Omega^{-1}$ es una cantidad dependiente de B , el cual es una función de la posición. De forma que, para que el campo sea utilizado como un patrón para determinar el paso temporal del método, es conveniente determinar un valor fijo y característico al sistema. Este puede ser la intensidad del campo evaluada en las condiciones iniciales, pues ciertamente es de esperarse que la partícula se mueva en regiones que conserven su momento magnético o bien, se puede escoger la intensidad del campo en la región central de la configuración magnética donde la magnitud del campo se mantiene aproximadamente constante y la cual, es la región de interés dentro del análisis. Por otro lado, podemos considerar el uso de un método de paso temporal variable pues en regiones con intensidad de campo fuerte, la frecuencia aumenta y es conveniente acortar la escala temporal, mas no la espacial. Pero por los argumentos presentados anteriormente, determinamos mantener un método práctico donde τ es fijado a partir de la intensidad del campo en la región central del arreglo B_0 , la cual define una cota superior para el valor de h , es decir,

$$h = \tau/M, \quad (1.38)$$

donde M debe ser escogida teniendo en mente que mientras la condición $h \ll \tau$ se satisfaga, podemos obtener una mejor resolución de la trayectoria.

Ahora, en un plasma de laboratorio sometido a un campo $B_0 = 5$ T y a una temperatura $kT = 10$ keV, los isótopos de hidrógeno (deuterio y tritio) tienen asociado un radio de giro del orden de 10^{-3} metros y una frecuencia de 10^8 ciclos por segundo (Tabla 1.1). Este tipo de escalas no es del todo conveniente, pues el manejo de cantidades grandes puede generar errores dentro de la aritmética computacional, no obstante, es posible evitar este inconveniente definiendo relaciones entre las cantidades fundamentales del sistema, como la carga de la partícula q y su masa m . En particular, fijaremos $q/m = \pm 1$, para iones positivos y negativos respectivamente. Haciendo esto, no sólo se tendrá un cómputo más estable sino que se reducen las complicaciones para la visualización de las trayectorias. De esta forma, cuando $|q/m| = 1$, el periodo orbital τ está en proporción directa con el campo,

$$\tau = 2\pi\Omega^{-1} = 2\pi/B_0, \quad (1.39)$$

y el radio de giro a razón de v_\perp/B_0 . Si dejamos que la rapidez absorba la magnitud de m/q , la rapidez será del orden del campo. Para ver esto, consideremos las condiciones para el plasma descrito anteriormente sobre un protón. En este caso, los valores para la razón $|e|/m = 1$ C/kg, rapidez perpendicular al campo $v_\perp = 1.32$ m/s, frecuencia $\Omega = 5$ s⁻¹ y radio de giro $\rho = 0.26$ m, proporcionan una aritmética más estable y una visualización más cómoda.

p	$ e /m_p$	$v_\perp = (2kT/m)^{1/2}$	Ω	ρ
1p	9.58×10^7	1.38×10^6	4.79×10^8	2.88×10^{-3}
2p	4.79×10^7	9.76×10^5	2.39×10^8	4.08×10^{-3}
3p	3.19×10^7	7.97×10^5	1.59×10^8	5.01×10^{-3}

Tabla 1.1: Radios y frecuencias de giro para los isótopos de hidrógeno.

En base a estas observaciones, de la solución obtenida mediante el método de Runge-Kutta y empleando las herramientas de visualización de MATLAB, es como planeamos realizar la simulación y comenzar el análisis del movimiento de la partícula dentro de los arreglos de confinamiento magnético.

Capítulo 2

Configuraciones magnéticas

En este capítulo nos centramos en el cálculo de campos magnéticos generados por los diferentes arreglos de espiras. Dado que las configuraciones propuestas se basan en la inducción generada por un conjunto de espiras conductoras idénticas para las cuales es válido el principio de superposición, es posible restringir nuestro análisis a la inducción producida por una espira genérica y a través de transformaciones, como rotaciones y translaciones sobre el modelo base, extender nuestros resultados a los arreglos de interés.

2.1. Inducción magnética de una espira

Como primer modelo, calculamos la inducción magnética generada por una espira circular de radio a (Fig. 2.1) la cual transporta una corriente I . El cálculo se desarrolló en puntos $\mathbf{r} = (x, y, z) \neq \mathbf{r}'$, donde la fuente fue descrita mediante $\mathbf{r}' = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$ con $0 \leq \phi \leq 2\pi$. De esta forma, las componentes del campo pueden ser expresadas en la forma adimensional dada por (1.28),

$$\tilde{B}_x = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{z} \cos \phi d\phi}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3}, \quad (2.1)$$

$$\tilde{B}_y = \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{z} \sin \phi d\phi}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{B}_z = \int_0^{2\pi} \frac{\{1 - (\tilde{x} \cos \phi + \tilde{y} \sin \phi)\} d\phi}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3}, \quad (2.3)$$

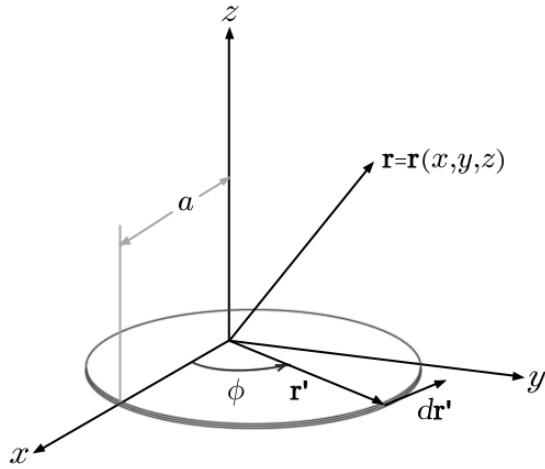


Figura 2.1: Espira simple.

$$|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3 = \{\tilde{r}^2 - 2(\tilde{x} \cos \phi + \tilde{y} \sin \phi) + 1\}^{3/2}, \quad (2.4)$$

donde $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/a$, y $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}'/a$. La magnitud del campo está dada por $B = \beta \tilde{B}$, donde $\beta = \mu_0 I / 4\pi a$, acorde con (1.29).

Por inspección, notamos que estas integrales deben ser calculadas en cada punto del espacio $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, donde la única variable de integración es ϕ , todas las integrales tienden a cero para $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ y como anteriormente comentamos, tienen buen comportamiento siempre que \mathbf{r} se encuentre lo suficientemente alejado de \mathbf{r}' , razón por la cual, nosotros hemos considerado fijar un valor de restricción δ . Así mismo, vemos que estas integrales son elípticas y su evaluación requiere de técnicas numéricas¹ y para este fin, nosotros elegimos las reglas de integración de Trapecio y Simpson (Apéndice A). Por ejemplo, bajo la regla del Trapecio las integrales toman la siguiente forma,

¹Ver por ejemplo, G. B. Arfken, et al, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed., Elsevier Academic Press (2005), pág. 370.

$$\tilde{B}_x \approx h \left[\frac{\tilde{z}}{\{\tilde{r}^2 - 2\tilde{x} + 1\}^{3/2}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{z} \cos \phi_j}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3} (\phi_j) \right], \quad (2.5)$$

$$\tilde{B}_y \approx h \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{z} \sin \phi_j}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3} (\phi_j) \right], \quad (2.6)$$

$$\tilde{B}_z \approx h \left[\frac{1 - \tilde{x}}{\{\tilde{r}^2 - 2\tilde{x} + 1\}^{3/2}} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\{1 - (\tilde{x} \cos \phi_j + \tilde{y} \sin \phi_j)\}}{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3} (\phi_j) \right], \quad (2.7)$$

donde $|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3 = \{\tilde{r}^2 - 2(\tilde{x} \cos \phi_j + \tilde{y} \sin \phi_j) + 1\}^{3/2}$, con $\phi_j \in \{0, jh, \dots, 2\pi\}$, y h es el tamaño de paso prefijado en la partición del intervalo de integración $[0, 2\pi]$. Sin embargo, el manejo de esta notación no es práctica dado que en MATLAB es posible definir los integrandos en (2.1)-(2.3) como funciones de la posición (x, y, z) y la variable de integración ϕ , e implementar las reglas de un modo más eficiente a la vez que podemos desarrollar un código más limpio.

Ahora bien, considerando el resultado obtenido mediante la ley de Ampere para la inducción de una línea conductora, donde las líneas de campo forman círculos concéntricos alrededor del conductor, podemos esperar con gran certeza que el campo posea simetría en la dirección de ϕ o simetría polar, tal que, primeramente podemos restringir el cómputo a los puntos sobre el plano $y = 0$, con $x > 0$, obteniendo una descripción general del campo a la vez que incrementamos la rapidez de los cálculos. Haciendo uso de esta simetría, nosotros empleamos el siguiente procedimiento para determinar el valor de δ . El objetivo es emplear las reglas de Simpson y Trapecio, con distinto número de subintervalos n en la integración, para analizar la divergencia de la magnitud del campo B conforme ésta es calculada en regiones próximas a valores cercanos a la fuente $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ y a través del uso de estadística, determinar la región de baja confiabilidad caracterizada por δ , que tendrá que ser restringida en análisis posteriores.

- 1) Tomamos la recta l que va del origen y pasa por algún punto de \mathbf{r}' , y la dividimos en subintervalos iguales alrededor de $|\mathbf{r}'| = a$, es decir, $l = \{a - jh, \dots, a - h, a, a + h, \dots, a + jh\}$, donde h es la distancia de separación entre puntos adyacentes y j es escogido en base al tamaño de la región de análisis. Por la simetría, podemos escoger cualquier recta que cumpla con las condiciones previas.

- 2) En cada punto l_j , calculamos la magnitud de \mathbf{B} bajo diferente número de subintervalos n y para cada regla de integración. Así, en cada punto tenemos un conjunto de datos B_n para la regla de Simpson y otro para Trapecio.
- 3) Para cada conjunto de datos $B_n(l_j)$ calculamos la media μ y varianza σ^2 muestrales. A partir de estos resultados determinamos el parámetro δ , el cual depende de los valores de B alrededor de $|\mathbf{r}'|$ con mayor error asociado y de la exactitud con la que se quiere conocer el campo sobre puntos cercanos a la fuente \mathbf{r}' .
- 4) Tomando como criterio de elección la desviación estándar s , escogemos las curvas (conjunto de puntos $B_n(l_j)$ para n fijo) de mejor ajuste en el punto. Por ejemplo, se pueden escoger aquellas curvas que se encuentren a $s/2$ de la media en el punto.
- 5) A partir de la curva que cumpla con la condición anterior y que cuente con el menor n , determinamos δ y le asociamos el número de subintervalos n con el cual la curva fue calculada.

Bajo este orden, nosotros consideramos el caso de la inducción magnética generada por una espira de radio $a = 5\text{m}$, la cual transporta una corriente de $I = 1 \text{ MA}$. Primeramente y a manera de simplificar, decidimos analizar el intervalo $l = \{5 \pm 0.4\}$, tomando un espaciado $h = 0.025$, donde el cálculo de las integrales se llevó a cabo con cada uno de los valores de n en el conjunto $S = \{72, 96, 120, \dots, 360, 628\}$. En la Fig. 2.2, mostramos las curvas resultantes así como la curva asociada a la media del conjunto, calculadas a través de Simpson y Trapecio respectivamente y en la Fig. 2.3, comparamos la desviación estándar asociada a cada una de estas curvas. Así mismo, en la Tabla 2.1 mostramos los resultados obtenidos mediante la regla de Simpson B_S , para la media y desviación estándar del conjunto de valores en cada punto, además del número ideal de subintervalos n en relación con la desviación estándar $n(s)$ deseada. En la Tabla 2.2, mostramos los resultados obtenidos a partir de la regla de Trapecio B_T .

A partir de estos resultados determinamos el parámetro δ en el criterio de restricción, el cual depende de los valores de B con mayor error de integración asociado, en este caso, aquellos alrededor de $|\mathbf{r}'| = 5$ son los que presentan menor confiabilidad debido a la divergencia de la integral en ese

l	$\mu(B_S)$	$s(B_S)$	$n(s)$	$n(s/2)$	$n(s/4)$
4.6000	0.5967	0.0007	96	96	120
4.6250	0.6309	0.0011	96	96	120
4.6500	0.6700	0.0017	96	96	120
4.6750	0.7148	0.0025	96	120	120
4.7000	0.7670	0.0038	96	120	120
4.7250	0.8283	0.0058	96	120	120
4.7500	0.9013	0.0087	96	120	120
4.7750	0.9900	0.0130	120	120	120
4.8000	1.0998	0.0192	120	120	144
4.8250	1.2395	0.0277	120	120	144
4.8500	1.4238	0.0387	120	144	144
4.8750	1.6792	0.0507	144	168	168
4.9000	2.0612	0.0629	72	72	72
4.9250	2.7121	0.1379	96	96	96
4.9500	4.1691	0.6715	120	120	144
4.9750	10.9941	4.7046	120	144	168
5.0250	10.7323	4.7269	120	144	168
5.0500	3.9108	0.6869	120	120	144
5.0750	2.4630	0.1446	96	96	96
5.1000	1.8213	0.0625	72	72	72
5.1250	1.4475	0.0502	144	168	168
5.1500	1.1992	0.0391	120	144	144
5.1750	1.0211	0.0287	120	144	144
5.2000	0.8868	0.0204	120	120	144
5.2250	0.7818	0.0143	120	120	120
5.2500	0.6975	0.0099	96	120	120
5.2750	0.6283	0.0068	96	120	120
5.3000	0.5706	0.0047	96	120	120
5.3250	0.5217	0.0032	96	120	120
5.3500	0.4798	0.0022	96	120	120
5.3750	0.4435	0.0015	96	96	120
5.4000	0.4118	0.0011	96	96	120

Tabla 2.1: Resultados para la media μ y desviación estándar s obtenidos para la magnitud de la inducción con la regla de Simpson B_S , bajo distinto número de subintervalos así como el n óptimo (5.0 no fue evaluado).

l	$\mu(B_T)$	$s(B_T)$	$n(s)$	$n(s/2)$	$n(s/4)$
4.6000	0.5976	0.0022	96	96	120
4.6250	0.6323	0.0033	96	96	120
4.6500	0.6722	0.0051	96	96	120
4.6750	0.7184	0.0079	96	96	120
4.7000	0.7727	0.0122	96	120	120
4.7250	0.8374	0.0189	96	120	120
4.7500	0.9163	0.0297	96	120	120
4.7750	1.0147	0.0471	96	120	120
4.8000	1.1416	0.0760	120	120	120
4.8250	1.3122	0.1251	120	120	144
4.8500	1.5546	0.2122	120	120	144
4.8750	1.9280	0.3760	120	144	144
4.9000	2.5739	0.7112	120	144	144
4.9250	3.9134	1.4963	120	144	168
4.9500	7.6864	3.8528	120	144	168
4.9750	28.1103	16.9375	120	144	168
5.0250	27.8860	16.9646	120	144	168
5.0500	7.4617	3.8765	120	144	168
5.0750	3.6890	1.5175	120	144	168
5.1000	2.3517	0.7294	120	144	144
5.1250	1.7090	0.3911	120	144	144
5.1500	1.3394	0.2245	120	120	144
5.1750	1.1007	0.1351	120	120	144
5.2000	0.9338	0.0840	120	120	120
5.2250	0.8105	0.0535	96	120	120
5.2500	0.7154	0.0348	96	120	120
5.2750	0.6397	0.0229	96	120	120
5.3000	0.5779	0.0153	96	120	120
5.3250	0.5265	0.0103	96	120	120
5.3500	0.4830	0.0070	96	96	120
5.3750	0.4456	0.0048	96	96	120
5.4000	0.4133	0.0033	96	96	120

Tabla 2.2: Resultados para la media μ y desviación estándar s obtenidos para la magnitud de la inducción con la regla del Trapecio B_T , bajo distinto número de subintervalos así como el n óptimo (5.0 no fue evaluado).

punto. Por ejemplo, si queremos emplear la regla de Simpson excluyendo de nuestros cálculos la región determinada por $\delta = 0.2$, en base a la Tabla 2.1 podemos ver que es posible calcular el campo con tres valores posibles para n , dependiendo del criterio elegido sobre la desviación estándar, es decir, si deseamos realizar el cómputo del campo a una distancia de la fuente de $\delta = 0.2$ y si queremos que nuestros resultados varíen de la media² en no más de un cuarto de la desviación estándar, entonces tendremos que dividir el intervalo de integración en $n = 144$ partes. Notemos además que si s toma su valor entero, el valor para el error estándar estimado $\hat{\sigma} = s/\sqrt{\Sigma(S)}$, donde $\Sigma(S) = 14$ es la cardinalidad de S , es a lo más 0.5 % de la media muestral μ , lo cual indica que se ha obtenido una estimación puntual relativamente precisa de la magnitud del campo, Tabla 2.3.

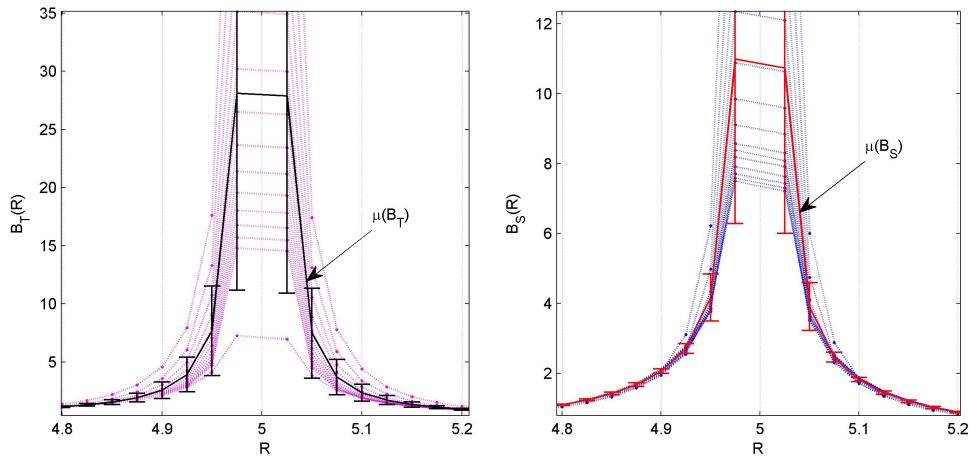


Figura 2.2: Curvas obtenidas mediante Simpson B_S y Trapecio B_T , con sus curvas medias y desviación estándar. Notar el aumento en la desviación estándar conforme los puntos se acercan al valor de divergencia de las integrales.

Aunque n es muy similar para ambas técnicas, la regla de Simpson ofrece la menor desviación estándar sobre cada punto (Fig. 2.3), reflejando que la rapidez de convergencia de las integrales mediante esta técnica es mayor y por tanto se requiere de un número menor de subintervalos para realizar la

²la cual es nuestro principal valor de referencia a falta de comprobación por otros medios.

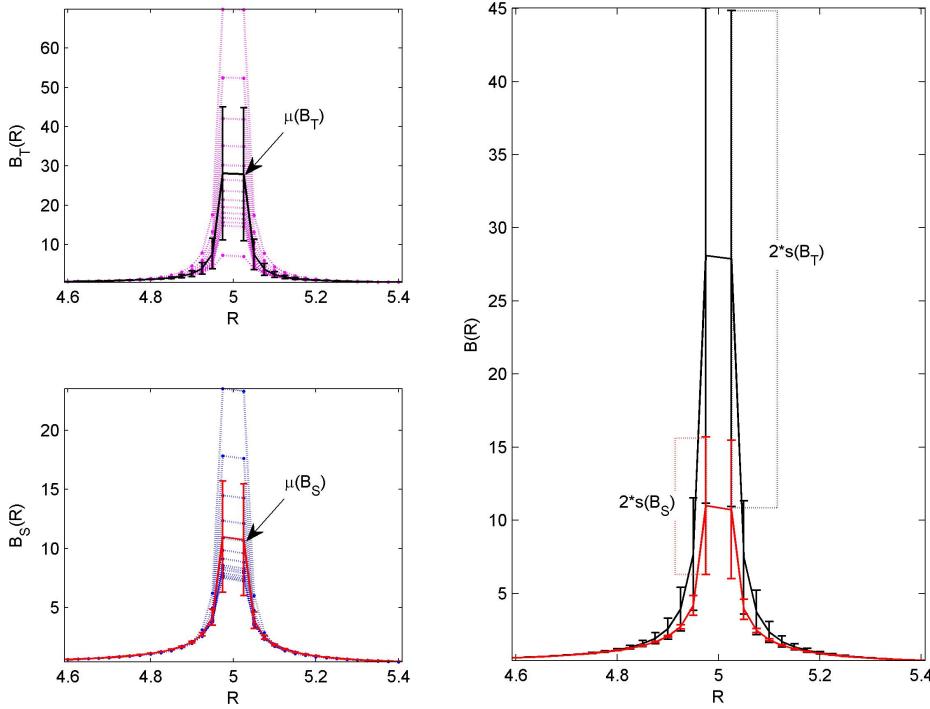


Figura 2.3: Valores para B (Teslas) mediante la regla de Simpson y del Trapecio con diferente número de subintervalos n . En la gráfica conjunta se puede apreciar que la regla de Simpson ofrece menor desviación estándar que Trapecio conforme nos acercamos a la fuente.

integración con una buena precisión. Por lo tanto, considerando que la mayor parte de la dinámica se realiza en la región central de los arreglos de espiras, donde la magnitud del campo se conoce con gran precisión, nuestros resultados ofrecen una buena estimación para los casos extremos donde la dinámica se desarrolle cerca de las fuentes de los campos.

Finalmente, dado que el sistema posee simetría polar, podemos analizar y describir la inducción magnética en todo el espacio considerando un plano de simetría. En la Fig. 2.4, mostramos la magnitud del campo sobre el plano xy para el caso de una espira, la cual fue calculada a partir de la regla de

$a \pm \delta$	μ	s	$n(s)$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}(\%)$	$\hat{\sigma}/\mu(\%)$
4.8000	1.0998	0.0192	120	5.131×10^{-3}	0.5131	0.4666
5.2000	0.8868	0.0204	120	5.452×10^{-3}	0.5452	0.6148

$a \pm \delta$	μ	$s/4$	$n(s/4)$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}(\%)$	$\hat{\sigma}/\mu(\%)$
4.8000	1.0998	4.8×10^{-3}	144	1.283×10^{-3}	0.1283	0.1166
5.2000	0.8868	5.1×10^{-3}	144	1.363×10^{-3}	0.1363	0.1537

Tabla 2.3: Análisis de la precisión del método de restricción a partir del error estándar estimado $\hat{\sigma}$.

Simpson con $n = 96$. En esta imagen notamos que el campo siempre es de mayor magnitud en regiones próximas a la espira y mantiene un valor finito en su región central, de forma que el gradiente del campo siempre se dirige hacia la espira. Así también, basándonos en las líneas de campo notamos que el campo presenta una marcada curvatura en regiones cercanas a la espira. Complementando esta descripción, en la Fig. 2.5 presentamos un modelo tridimensional del campo magnético, el cual fue generado en MATLAB mediante el cómputo de (2.1)-(2.3), a través de la implementación de la regla de Simpson, tomando $n = 96$ subintervalos y restringiendo con $\delta = 0.5$. En esta visualización podemos observar la alta simetría del sistema, así como una cierta uniformidad del campo en la región central de la espira, las cuales son características de gran importancia en la construcción de arreglos de confinamiento magnético.

En las secciones siguientes veremos cómo, la ley de Biot-Savart, el principio de superposición y los resultados obtenidos en el modelo presente, son aplicados al cálculo de la inducción generada por los arreglos lineal y toroidal de espiras.

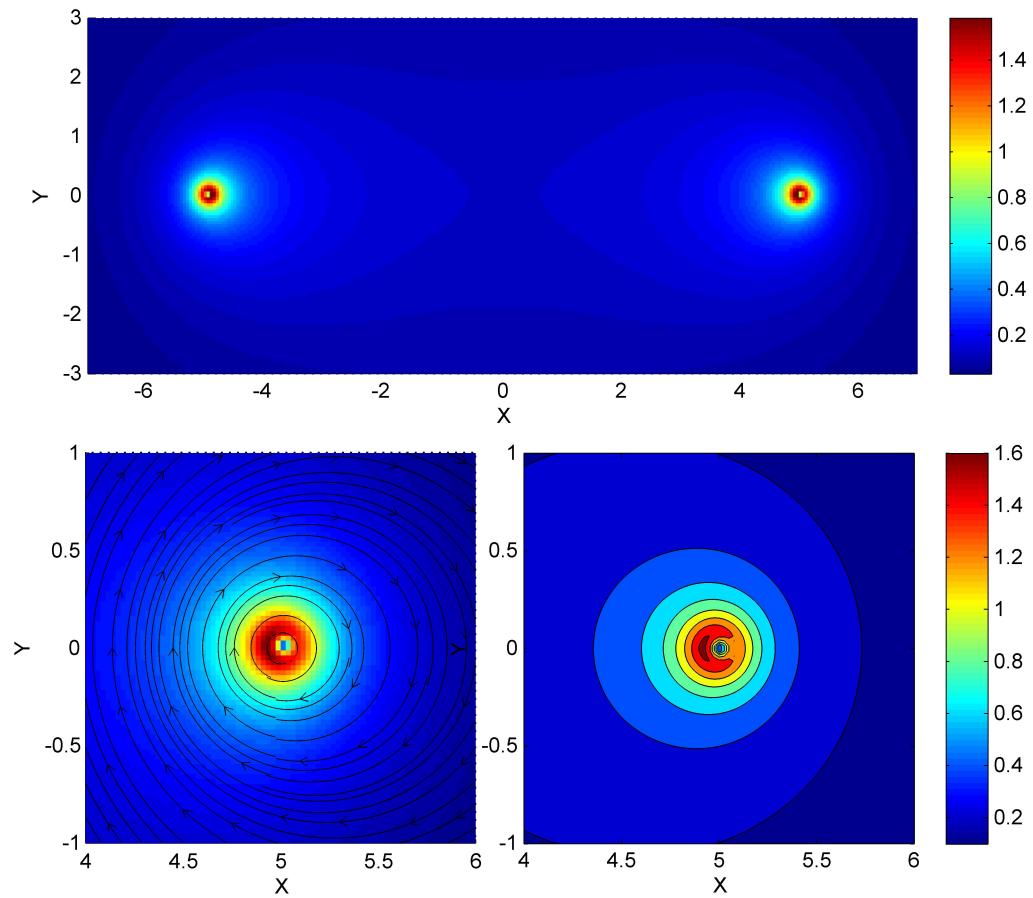


Figura 2.4: **Gráfica de la inducción magnética (Teslas)** sobre un plano de simetría xy . En esta gráfica notamos que el campo es más intenso en las región central de la espira.

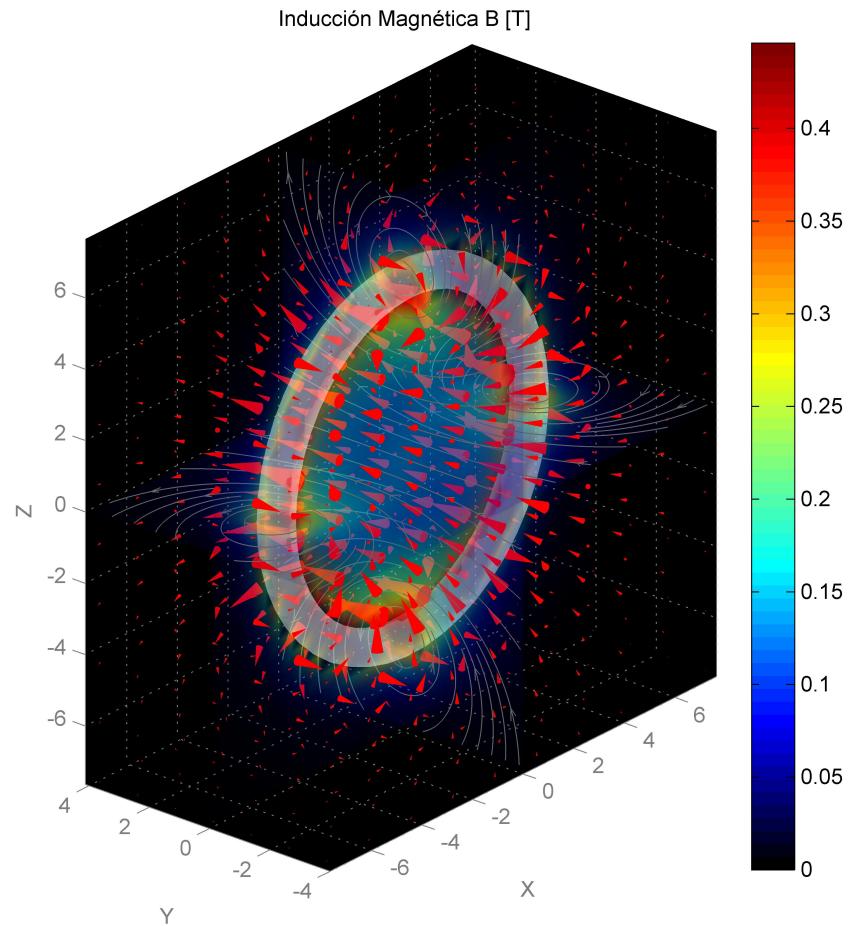


Figura 2.5: Inducción magnética generada por una espira anillo con radio de 5 m por el cual circula una corriente de 1 MA. Los conos en rojo proporcionan una medida cualitativa, tanto de la magnitud como dirección del campo y la escala de color maneja la intensidad del campo en Teslas. El anillo en color blanco representa la zona de baja confiabilidad restringida en los cálculos.

2.2. Arreglo lineal de espiras

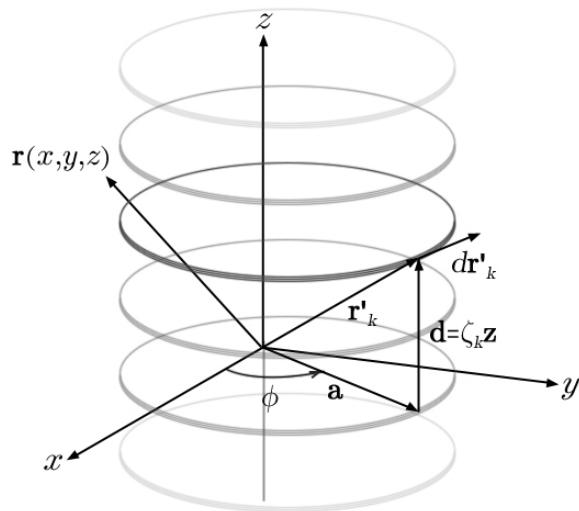


Figura 2.6: Arreglo lineal de espiras.

Una aplicación inmediata del modelo anterior es al cálculo de la inducción magnética producida por un arreglo lineal de N espiras. En este modelo, las espiras son distribuidas uniformemente sobre el eje z (Fig. 2.6). La k -ésima espira está descrita por $\mathbf{r}'_k = (a \cos \phi, a \sin \phi, \zeta_k)$ con $0 \leq \phi \leq 2\pi$, donde para $k = 1$, $\zeta_k = 0$, y para $k > 1$ se satisface $\zeta_{k+1} - \zeta_k = \zeta$, la cual es una distancia de separación constante entre las espiras. Los elementos de corriente están dados por $Id\mathbf{r}'_k$. Ahora, haciendo uso de la expresión para el campo producido por la k -ésima espira y del principio de superposición en (1.29), las componentes del campo $\tilde{\mathbf{B}}$ quedan de la siguiente forma,

$$\tilde{B}_x = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \{ \tilde{z} - (\zeta_k/a) \} \cos \phi d\phi, \quad (2.8)$$

$$\tilde{B}_y = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \{ \tilde{z} - (\zeta_k/a) \} \sin \phi d\phi, \quad (2.9)$$

$$\tilde{B}_z = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \{ 1 - [\tilde{x} \cos \phi + \tilde{y} \sin \phi] \} d\phi, \quad (2.10)$$

$$|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3 = \{ \tilde{r}^2 - 2[\tilde{x} \cos \phi + \tilde{y} \sin \phi] + [\tilde{z} - (\zeta_k/a)]^2 - \tilde{z}^2 + 1 \}^{3/2}, \quad (2.11)$$

donde $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/a$ y $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}'/a$.

Como es de esperarse, para $k = 1$ ($\zeta_k = 0$) las integrales se reducen a (2.1)-(2.3), del modelo para una espira, sin embargo, este resultado es una consecuencia de un hecho más general. Teniendo cuidado de no confundir el sistema primado (x', y', z') con las componentes de la fuente \mathbf{r}' o \mathbf{r}'_k , presentadas en (1.20) y (1.22), las cuales pertenecen al espacio no primado (x, y, z) , podemos aplicar el cambio de variable $x' = x$, $y' = y$ y $z' = z - \zeta_k$, a las expresiones del arreglo lineal y notar que las componentes del campo generado por la k -ésima espira definen la translación sobre el eje z de las componentes de la inducción magnética del modelo para una espira, es decir, las expresiones en (2.8)-(2.10) – ahora expresadas en términos de las coordenadas primadas (x', y', z') – toman la forma de (2.1)-(2.3). En particular, las componentes de \mathbf{r}'_k bajo la transformación anterior cambian a $(a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$.

El valor de este tipo de transformaciones en nuestro trabajo radica, no precisamente en la simplificación de las expresiones (la cual puede llegar a favorecer los cálculos), sino en la aplicación siguiente. Supongamos que desde un sistema de referencia fijo S , queremos calcular la inducción magnética producida por un arreglo más complejo de espiras, de antemano sabemos que cada espira es una copia de nuestro modelo original, o bien, en el sistema de referencia S' de cada espira, la inducción está dada por (2.1)-(2.3). Además, conocemos o intuimos el tipo de transformación que sufrió el sistema de referencia de cada espira, el cual pudo haber sido una translación, rotación o ambas, y en el caso de una reflexión habrá que tener cuidado con la

orientación del sistema. Entonces, con ayuda del principio de superposición podemos evaluar o llegar a expresiones en S aplicando las transformaciones inversas sobre cada sistema S' .

Y en efecto, aplicando la translación $x' = x$, $y' = y$ y $z' = z - \zeta_k$, sobre las expresiones (2.1)-(2.3) en el modelo para una espira (sistema S' en el análisis anterior), podemos llegar a (2.8)-(2.10) del arreglo lineal (sistema S). Sin pérdida de generalidad, para obtener la expresión de \mathbf{r}'_k a partir de $\mathbf{r}' = (a \cos \phi, a \sin \phi, 0)$ consideramos la siguiente operación,

$$\begin{pmatrix} x'_k \\ y'_k \\ z'_k \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}_{S'} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_k \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Aunque en este ejemplo la transformación resulta sencilla e intuitiva, su potencial será notorio en el modelo para la configuración toroidal. No obstante, notemos que el cálculo de las expresiones que describen el campo producido por los arreglos de espiras, pueden ser obtenidas mediante la parametrización de las fuentes \mathbf{r}'_k del sistema, o bien, a través de aplicar transformaciones sobre el modelo base para una espira.

A pesar de estas observaciones, el cálculo de las integrales (2.8)-(2.10) requiere de las técnicas numéricas y los resultados obtenidos para el modelo de una espira. Así mismo, es necesario comparar los resultados obtenidos numéricamente con aquellos obtenidos mediante expresiones analíticas conocidas. En el caso del arreglo lineal de espiras, conocemos que la solución analítica para la inducción magnética sobre el eje de simetría de la espira está dada por (1.26). En la Fig. 2.7, comparamos los valores del campo sobre el eje de la espira (eje z) obtenidos mediante la integración de (2.8)-(2.10) con la regla del Trapecio, con aquellos por evaluación de (1.26), para los casos de $N = 1, 3$ y 5 espiras. En esta gráfica apreciamos una gran correspondencia entre los resultados obtenidos a través de la regla del Trapecio con la solución analítica. Entonces, conociendo de antemano la eficacia de la regla de Simpson sobre la del Trapecio, confiamos que nuestra propuesta aborda con gran precisión el cálculo de los campos. Así también, otro aspecto que resalta en la gráfica es la uniformidad del campo dentro del arreglo en relación con el aumento del número de espiras.

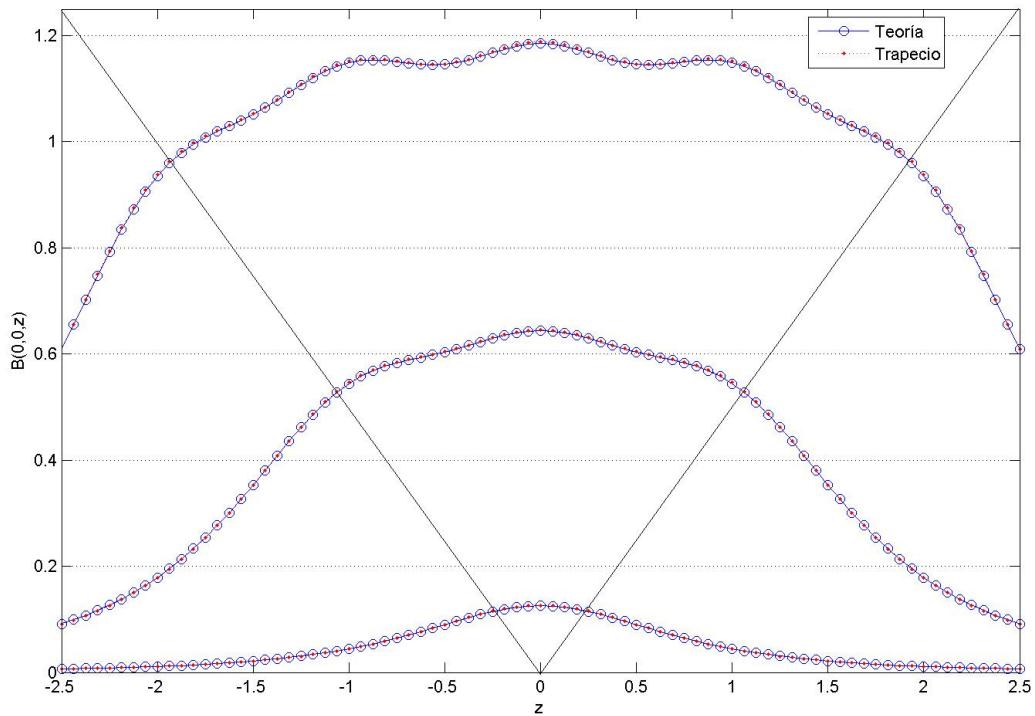


Figura 2.7: Curva teórica y curva experimental para $B(z)$. Como podemos ver, el resultado obtenido con la regla compuesta del Trapecio (curva en rojo) hace una muy buena aproximación a la curva generada a partir de la expresión analítica (curva en azul). Se muestran los resultados para un arreglo de $N = 1,3$ y 5 espiras.

La uniformidad del campo observada en la gráfica anterior es complementada con la Fig 2.8, donde en base a las líneas de campo notamos que la distribución del campo a lo largo del arreglo es aproximadamente uniforme, así mismo, la marcada curvatura presente en el modelo de un espira es sustancialmente reducida. En esta gráfica aprovechamos la simetría cilíndrica del sistema para calcular el campo sobre el plano xy . En la Fig. 2.9 presentamos un modelo tridimensional del campo magnético generado por un arreglo de $N = 3$ espiras, donde fijamos $a = 3$ m, $I = 1$ MA y $\zeta = 1,5$ m. Las componentes del campo (2.8)-(2.10) fueron evaluadas mediante la regla de Simpson, con $n = 96$ y $\delta = 0,5$. En esta imagen apreciamos como la superposición del campo producido por una espira nos permite construir campos

magnéticos uniformes sobre una determinada región del espacio, en este caso la parte interna del arreglo lineal. Las propiedades de uniformidad e intensidad que heredan y requieren los arreglos de confinamiento magnético, nos permiten ver la importancia del análisis del campo producido por una espira como modelo base para la creación de estas configuraciones magnéticas.

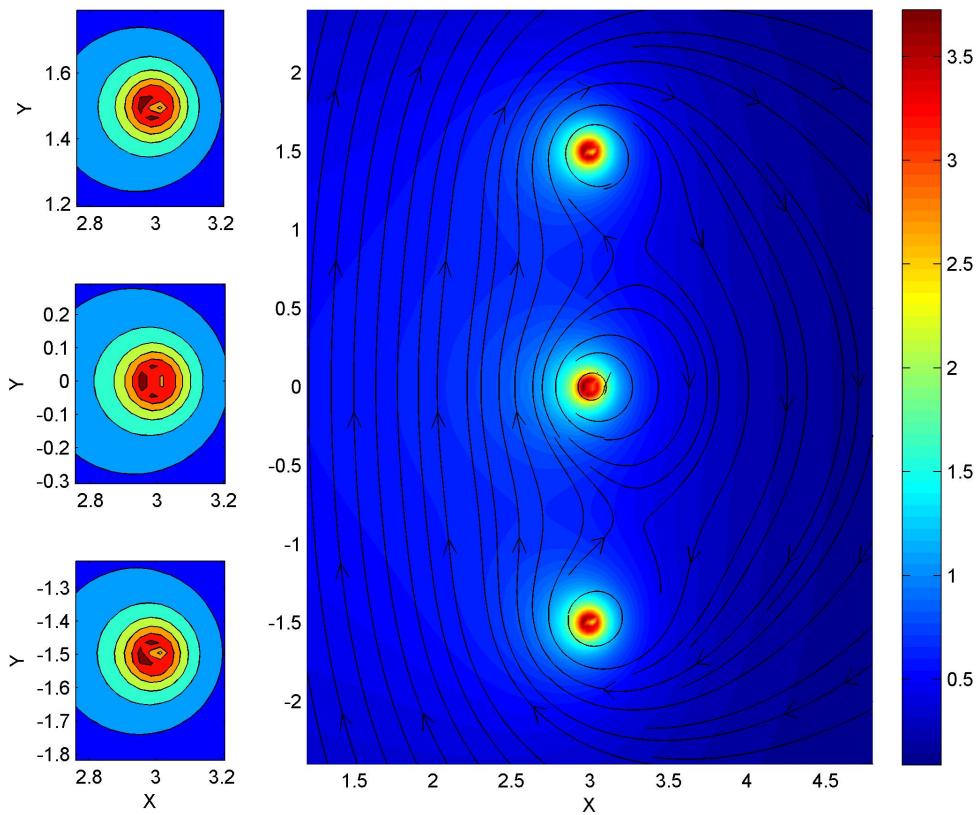


Figura 2.8: Gráfica de la inducción magnética (Teslas) en un plano de simetría. Como en el caso de un espira, la distribución de la magnitud del campo favorece la región interna del arreglo.

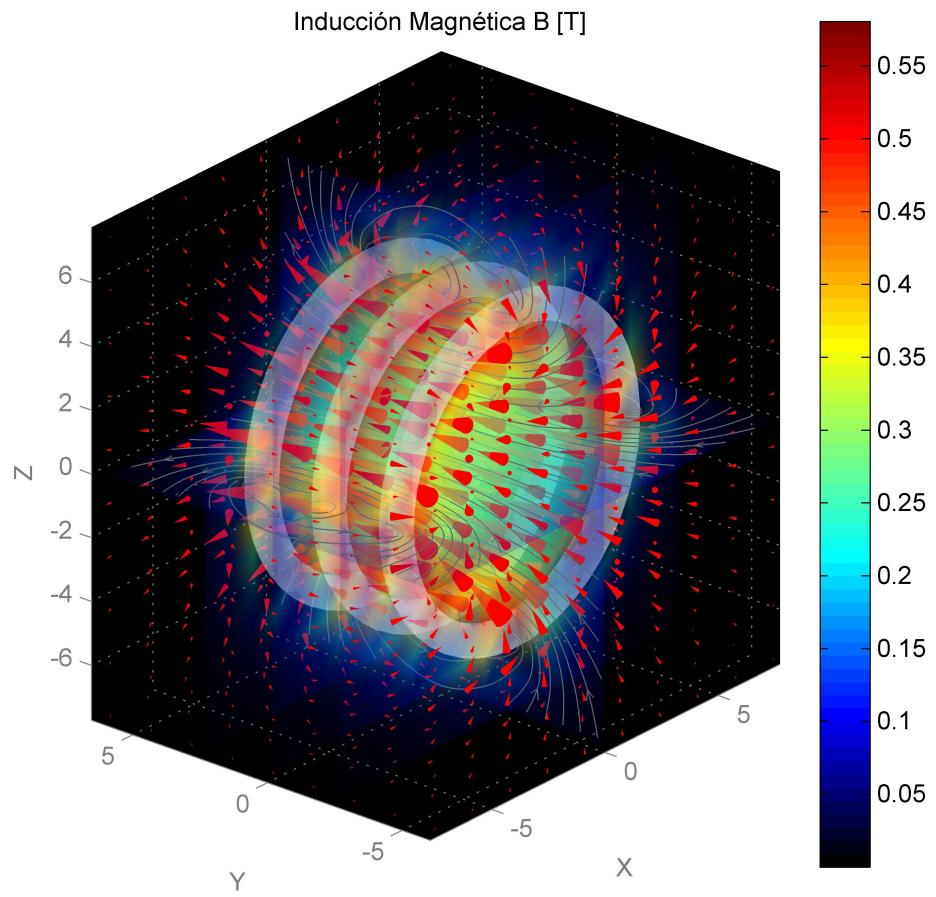


Figura 2.9: **Inducción magnética generada por un arreglo lineal de espiras.** Los conos en rojo indican la magnitud y dirección del campo. La escala de color maneja la intensidad del campo en Teslas.

2.3. Configuración toroidal

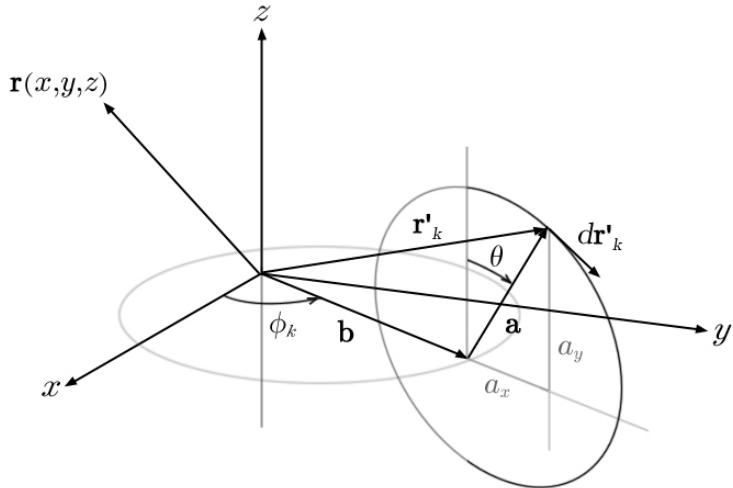


Figura 2.10: Configuración toroidal de espiras.

Como propusimos en la sección anterior, es posible calcular el campo magnético de esta configuración mediante una parametrización de las espiras o por la aplicación de transformaciones sobre el modelo base. Para ver esto, nosotros calculamos las componentes del campo $\tilde{\mathbf{B}}$ a través de la parametrización directa de las fuentes \mathbf{r}'_k y posteriormente, mediante una rotación y una translación sobre las expresiones obtenidas, llegamos a las componentes del campo para una espira $\tilde{\mathbf{B}}''$. Así notamos que, mediante la aplicación inversa de estas transformaciones sobre el modelo base, podemos obtener las componentes de la inducción de la configuración toroidal.

En este modelo, las N espiras están distribuidas uniformemente sobre la región toroidal descrita por $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 = a^2$, donde $b \geq a$, Fig. 2.10. Cada una de las espiras queda parametrizada por,

$$\mathbf{r}'_k = ((b + a \sin \theta) \cos \phi_k, (b + a \sin \theta) \sin \phi_k, a \cos \theta), \quad (2.13)$$

donde $\phi_k = (2\pi/N)(k - 1)$, con $k = \{1, \dots, N\}$, determina la posición de la

k -ésima espira sobre la región toroidal y $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es la variable de integración. Sean $I\mathbf{dr}'_k$ los elementos de corriente, empleando (1.21) en conjunto con el principio de superposición, las componentes del campo magnético son las siguientes,

$$\tilde{B}_x = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \{(\tilde{z} \cos \theta - \eta \sin \theta - 1) \sin \phi_k + \tilde{y} \sin \theta\} d\theta, \quad (2.14)$$

$$\tilde{B}_y = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \{(1 + \eta \sin \theta - \tilde{z} \cos \theta) \cos \phi_k - \tilde{x} \sin \theta\} d\theta, \quad (2.15)$$

$$\tilde{B}_z = \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} (\tilde{y} \cos \phi_k - \tilde{x} \sin \phi_k) \cos \theta d\theta, \quad (2.16)$$

$$|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3 = \{ \tilde{r}^2 + \eta^2 + 2\eta \sin \theta - 2\tilde{z} \cos \theta - 2(\eta + \sin \theta)(\tilde{x} \cos \phi_k + \tilde{y} \sin \phi_k) + 1 \}^{3/2}, \quad (2.17)$$

donde $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/a$ y $\tilde{\mathbf{r}}' = \mathbf{r}'/a$, son definidas acorde con (1.29) y $\eta = b/a$. Ahora, empleando transformaciones sobre estas integrales podemos obtener las expresiones de la espira base. Para determinar estas transformaciones recordemos que una forma de construir el toro es tomar el círculo C (o espira) de radio a centrado en el origen del plano zx (sistema derecho), desplazarlo b unidades sobre el eje x y rotar el sistema alrededor del eje z . Esta descripción sugiere que las siguientes transformaciones,

$$\tilde{\mathbf{B}}'' = \mathbf{R}_\phi \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}'' = \tilde{\mathbf{x}}' - \boldsymbol{\eta}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{R}_\phi \tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.20)$$

donde las cantidades bi-primadas están expresadas en términos de las coordenadas del sistema S'' , $\tilde{\mathbf{x}}'$ nos indica un paso intermedio de suma importancia dentro de la transformación³, \mathbf{R}_ϕ es la matriz de rotación dada por,

³No confundir el sistema primado (x', y', z') , con las componentes de la fuente \mathbf{r}' o \mathbf{r}'_k , presentadas en (1.20) y (1.22), las cuales pertenecen al espacio no primado S

$$\mathbf{R}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi_k & \sin \phi_k & 0 \\ -\sin \phi_k & \cos \phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

y $\boldsymbol{\eta} = (\eta, 0, 0)$, permiten que nuestro sistema S sea expresado dentro de las coordenadas del espacio en S'' , es decir, nos permiten reducir el arreglo toroidal a la expresión para el caso de una espira. Para ver esto, calculemos la componente \tilde{B}_y'' del campo $\tilde{\mathbf{B}}''$ de la espira, a partir de (2.14)-(2.16) para el campo del toro. Considerando sólo los numeradores (un pequeño abuso en la notación), de la rotación en (2.18) tenemos,

$$\tilde{B}_y'' = -\tilde{B}_x \sin \phi_k + \tilde{B}_y \cos \phi_k \quad (2.22)$$

$$= -[\Lambda \sin \phi_k + \tilde{y} \sin \theta] \sin \phi_k + [-\Lambda \cos \phi_k - \tilde{x} \sin \theta] \cos \phi_k \quad (2.23)$$

$$= -\Lambda - (\tilde{y} \sin \phi_k + \tilde{x} \cos \phi_k) \sin \theta, \quad (2.24)$$

donde $\Lambda = \tilde{z} \cos \theta - \eta \sin \theta - 1$. Ahora, de (2.20) identifiquemos $\tilde{x}' = \tilde{y} \sin \phi_k + \tilde{x} \cos \phi_k$, en la expresión entre paréntesis de la última ecuación y utilizando (2.19) tenemos,

$$\tilde{B}_y'' = 1 - \tilde{z}' \cos \theta + (\eta - \tilde{x}') \sin \theta = 1 - (\tilde{z}'' \cos \theta + \tilde{x}'' \sin \theta). \quad (2.25)$$

Igualmente, empleando (2.19) y (2.20) en $|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3$, podemos expresar esta cantidad en las coordenadas apropiadas. De esta forma, aplicando (2.18)-(2.20) a las ecuaciones (2.14)-(2.16), obtuvimos las expresiones siguientes,

$$\tilde{B}_x'' = \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \tilde{y}'' \sin \theta d\theta, \quad (2.26)$$

$$\tilde{B}_y'' = \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \{1 - [\tilde{z}'' \cos \theta + \tilde{x}'' \sin \theta]\} d\theta, \quad (2.27)$$

$$\tilde{B}_z'' = \int_0^{2\pi} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^{-3} \tilde{y}'' \cos \theta d\theta, \quad (2.28)$$

$$|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{r}}'|^3 = \{(\tilde{r}'')^2 - 2[\tilde{z}'' \cos \theta + \tilde{x}'' \sin \theta] + 1\}^{3/2}, \quad (2.29)$$

las cuales, comparadas con (2.1)-(2.3), donde la espira está centrada en el plano xy , corresponden a las componentes para la inducción magnética de una espira con centro en $z''x''$. Para obtener la igualdad consideramos,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Pero como mencionamos, nosotros estamos interesados en las transformaciones inversas, las cuales aplicadas a la espira base (sistema S'') generen el arreglo toroidal. Por lo tanto, con ayuda del análisis previo las transformaciones que buscamos son,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{R}_\phi^{-1} \tilde{\mathbf{B}}'', \quad (2.31)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{x}}'' + \boldsymbol{\eta}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}_\phi^{-1} \tilde{\mathbf{x}}', \quad (2.33)$$

$$\mathbf{R}_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi_k & -\sin \phi_k & 0 \\ \sin \phi_k & \cos \phi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos ver que (2.32) y (2.33), aplicadas a la espira $\mathbf{r}''_k = (a \sin \theta, 0, a \cos \theta)$, nos proporcionan la parametrización del toro y por tanto, aplicadas al sistema de la espira S'' podemos generar el arreglo toroidal. Considerando $\eta \rightarrow b$, tenemos que $\mathbf{x}' = (b + a \sin \theta, 0, a \cos \theta)$, de modo que,

$$\mathbf{r}'_k = \mathbf{R}_\phi^{-1} \begin{pmatrix} b + a \sin \theta \\ 0 \\ a \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b + a \sin \theta) \cos \phi_k \\ (b + a \sin \theta) \sin \phi_k \\ a \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

La importancia de utilizar transformaciones sobre el modelo de la espira, radica en la simplificación de los cálculos para caracterizar los arreglos y en la posibilidad de crear diferentes configuraciones a partir de la sola rotación, translación y superposición del modelo original para una espira. No obstante, aún requerimos de técnicas numéricas para la evaluación.

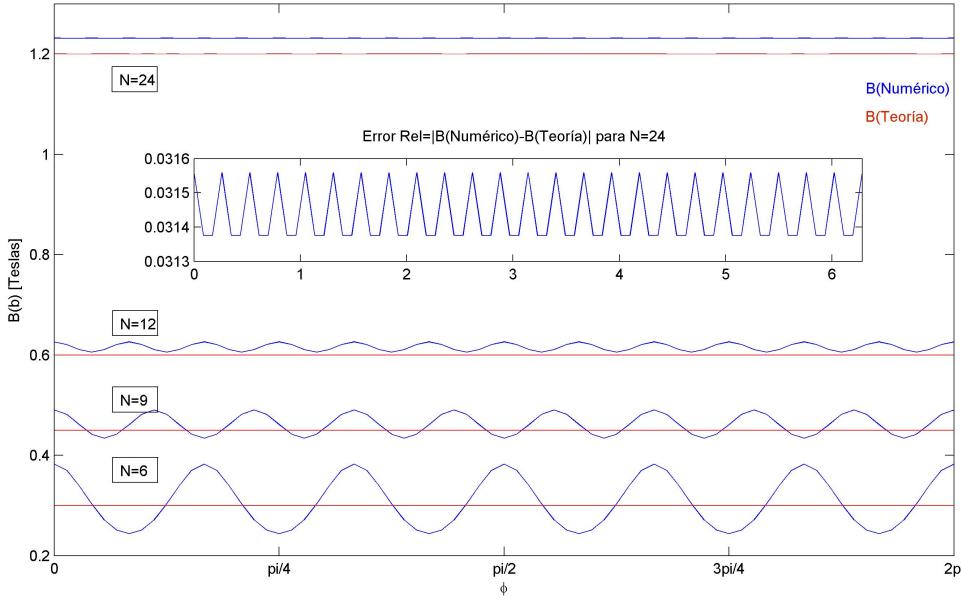


Figura 2.11: Comparación entre los resultados numéricos y teóricos para el toro. Conforme N aumenta, las variaciones en los valores del modelo computacional y teóricos se reducen. Cuando $N = 24$ el error relativo es aproximadamente 0,003, lo cual confirma el modelo teórico para el solenoide compacto. Mostramos $N=6,9,12$ y 24 .

Para comparar nuestros resultados numéricos con la solución analítica para la inducción dentro de un solenoide toroidal ideal en (1.27), consideramos una circunferencia dentro del arreglo toroidal $r = (b \cos \phi, b \sin \phi, 0)$ e integramos con Simpson para diferente número de espiras $N = \{6, 9, 12, 24\}$. Los resultados mostrados en la Fig. 2.11, nos indican que la diferencia entre los valores numéricos y teóricos disminuyen conforme el número de espiras aumenta. Esto se debe a que el resultado para el solenoide ideal considera un toro con embobinado compacto, mientras que en nuestro modelo las espiras mantienen una marcada separación. Otro aspecto que notamos en la gráfica anterior y que podemos notar con más claridad en las Figs. 2.12 y 2.13, es el aumento en la uniformidad de la magnitud del campo dentro de la región central del arreglo conforme el número de espiras aumenta.

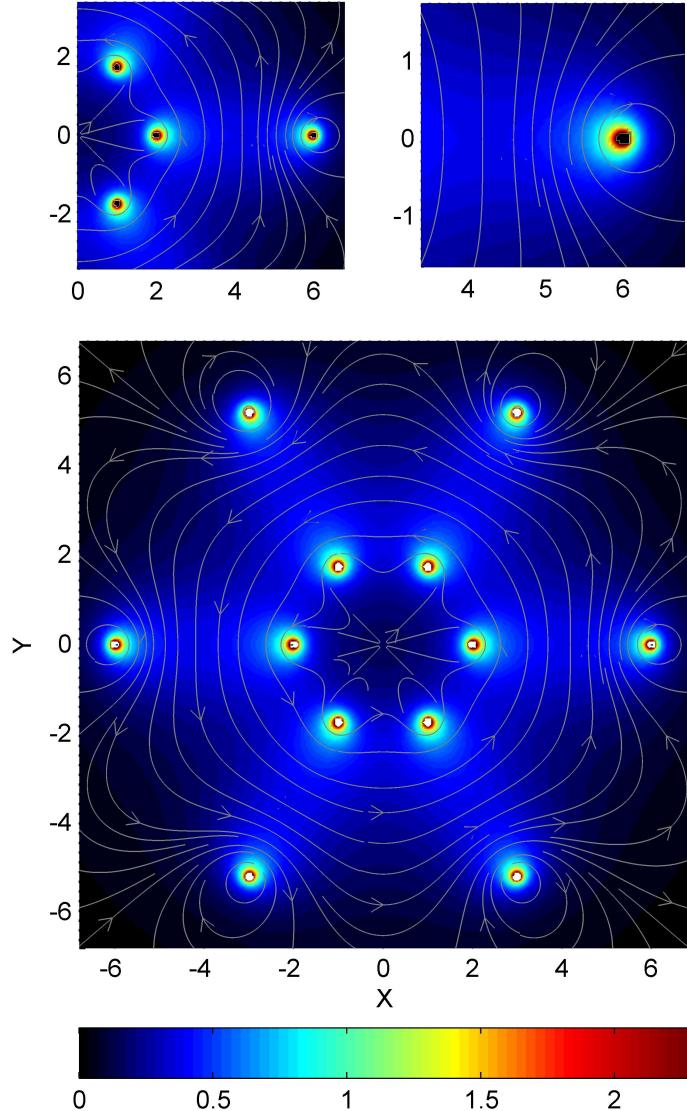


Figura 2.12: **Inducción generada por una configuración toroidal de 6 espiras.** Dentro de un arreglo con bajo número de espiras, el campo en la región de interés es altamente inhomogéneo en dirección y magnitud.

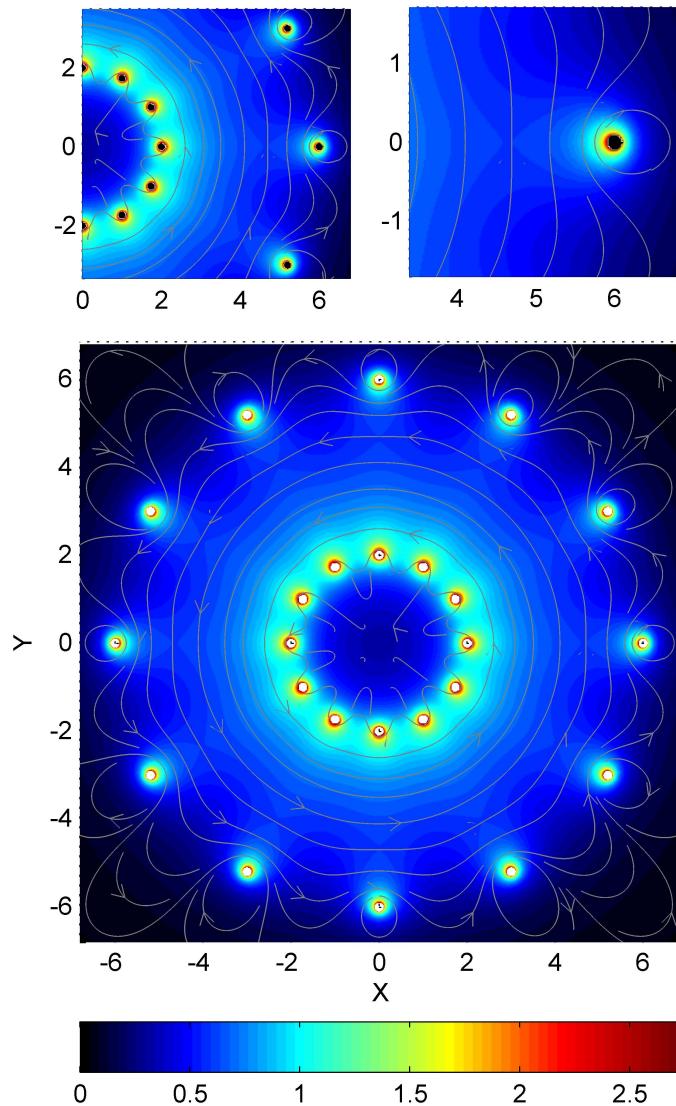


Figura 2.13: Inducción magnética generada por una configuración toroidal de 12 espiras. Con el aumento en el número de espiras obtenemos la configuración del campo con las características deseadas de uniformidad.

Complementando estas observaciones, en la Fig. 2.14 mostramos la magnitud del campo calculada sobre el plano de simetría xz . En esta gráfica y las anteriores, vemos que el campo presenta su máximo en las regiones cercanas a las espiras, aunque con una mayor distribución hacia la región interna del arreglo. Esto ocasiona que la magnitud y dirección del gradiente mantenga una tendencia hacia estas regiones. Así también, notamos que la curvatura del campo alrededor de las espiras disminuye con el aumento de éstas debido a la superposición de los campos, no obstante, la misma geometría del sistema nos genera un campo curvo, el campo toroidal.

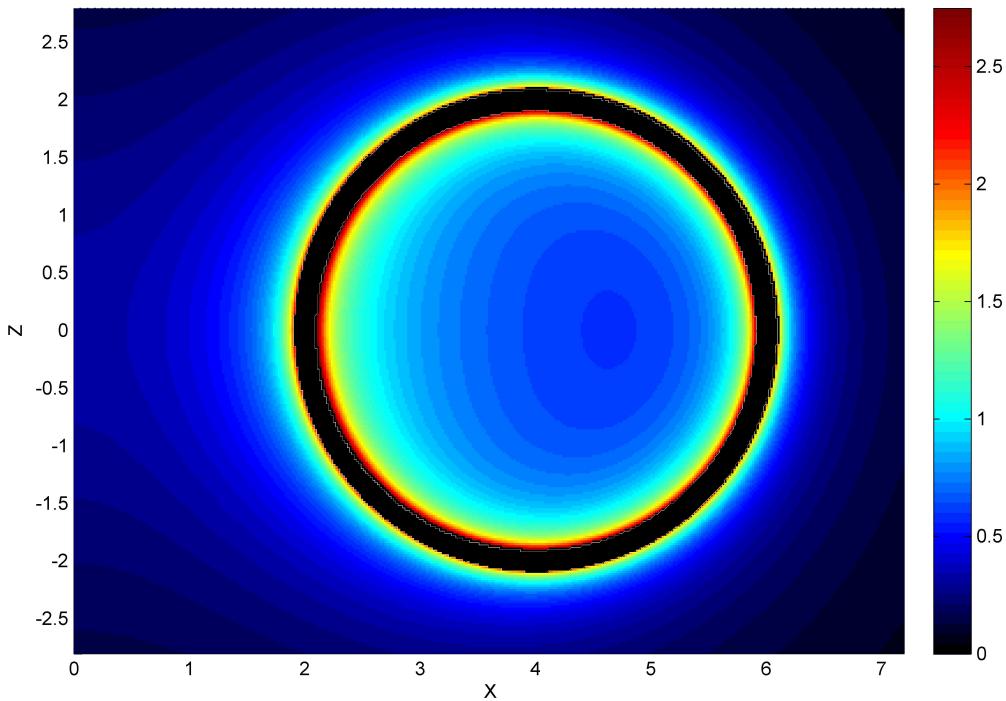


Figura 2.14: Gráfica del campo (Teslas) producido por un toro sobre el plano de simetría xz . En base a la geometría, en la parte central obtenemos un contenedor magnético cerrado.

Finalmente, con el fin de apreciar y analizar la simetría del sistema, en la Fig. 2.15 presentamos un modelo tridimensional de la inducción magnética generada por una configuración toroidal de $N = 12$ espiras. Fijamos $b = 4$ m, $a = 2$ m, $I = 1$ MA y $\phi_k = (\pi/6)(k - 1)$. Las componentes del campo (2.14)-(2.16) fueron evaluadas mediante la regla de Simpson, con $n = 120$ y $\delta = 0,2$. En esta visualización, a diferencia del arreglo lineal de espiras, notamos que los conos rojos (que nos indican la dirección y magnitud del campo) no se extienden fuera del arreglo toroidal, sino que permanecen dentro de éste indicándonos que se ha formado una región cerrada donde el campo magnético es altamente uniforme. Esta es una de las características que permiten el confinamiento de partículas cargadas.

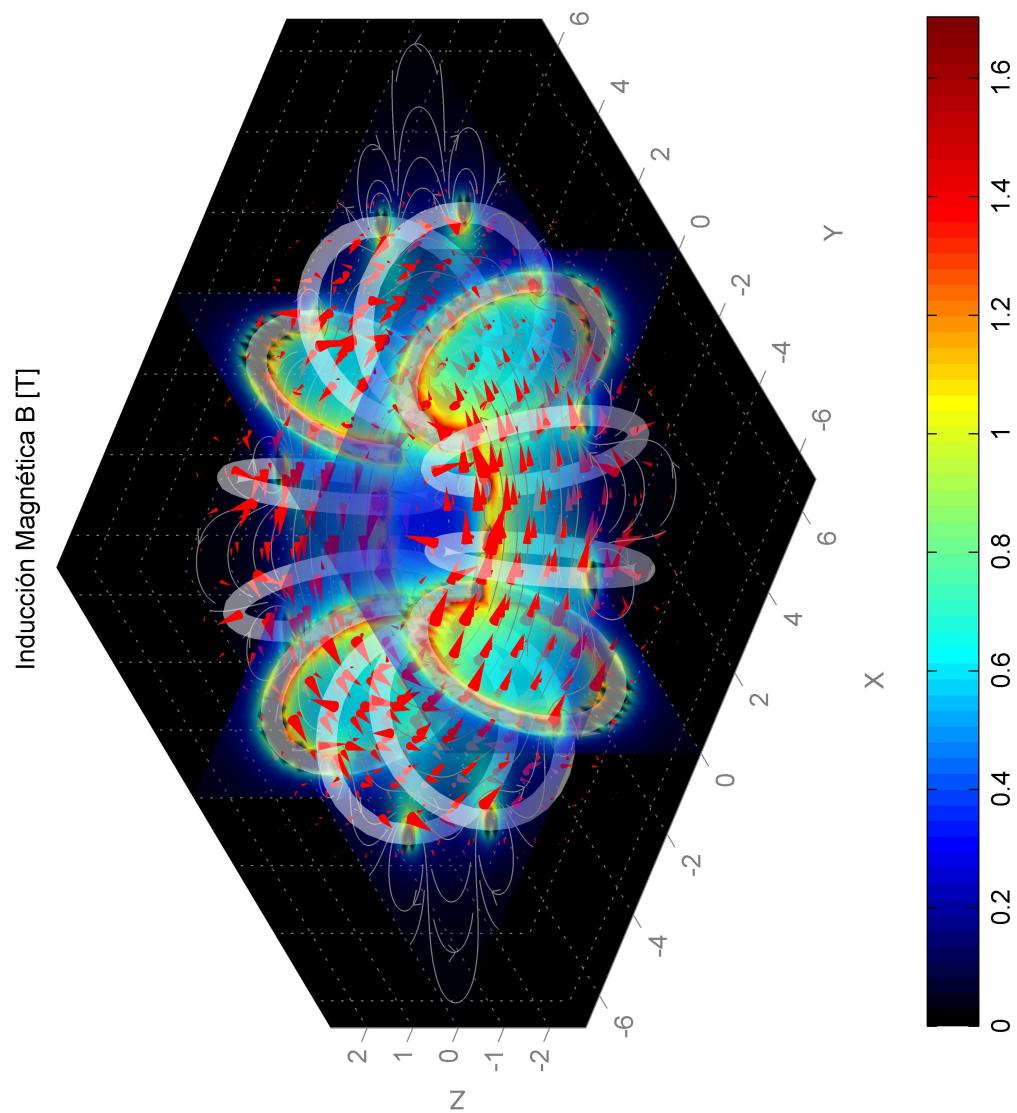


Figura 2.15: Inducción magnética generada por una configuración toroidal de espiras. Los conos en rojo indican la magnitud y dirección del campo. La escala de color maneja la intensidad del campo en Teslas.

2.4. Conclusiones

En este capítulo mostramos cómo la caracterización y cálculo del campo magnético estacionario generado por un espira conductora (Fig. 2.1), nos sirve como modelo base para la construcción de los arreglos de confinamiento magnético lineal (Fig. 2.6) y toroidal de espiras (Fig. 2.10).

En la primera sección, obtuvimos las expresiones (2.1)-(2.3) para el campo producido por una espira centrada en el plano xy , utilizando la expresión adimensional para la ley de Biot-Savart (1.28). Por inspección vimos que estas expresiones requieren ser evaluadas numéricamente y restringidas en el cálculo, a una distancia δ alrededor de la fuente \mathbf{r}' . Para esto, en MATLAB implementamos las reglas compuestas de Simpson y Trapecio, con el objetivo de tener control sobre el código.

Considerando la simetría polar del sistema, establecimos un método para determinar δ en base al grado de confiabilidad de las técnicas de integración sobre puntos cercanos a la fuente del campo. En lugar de evaluar la función de error de cada regla, lo cual implica calcular la cuarta derivada y encontrar una cota para cada función de las componentes del campo (Apéndice A), nosotros empleamos métodos estadísticos para determinar la región de baja confiabilidad como función de la desviación estándar (Pág. 23). Con respecto a este método, encontramos que conforme nos acercamos a los puntos de divergencia de las integrales, la desviación estándar aumenta (Fig. 2.2) y para compensar este resultado requerimos de aumentar el tamaño de la muestra, es decir, de integrar con mayor número de subintervalos. Además, en términos de rapidez de cálculo, la regla del Trapecio ofrece una buena aproximación, pero en términos de precisión, la regla de Simpson ofrece mejores resultados con menor número de subintervalos en la integración (Fig. 2.3). Por lo tanto, considerando que la mayor parte de la dinámica se realiza en la región central de los arreglos de espiras, donde la magnitud del campo se conoce con gran precisión, nuestros resultados ofrecen una buena estimación para los casos extremos donde la dinámica se desarrolle cerca de las fuentes de los campos (Tabla 2.3).

Así también, la simetría de la espira nos permitió restringir el cálculo y descripción de su campo a planos de simetría (Fig. 2.4). Este análisis fue complementado con la ayuda de una visualización tridimensional del campo

(Fig. 2.5), donde apreciamos la alta simetría del sistema y sus propiedades de uniformidad en la región central de la espira.

En las secciones siguientes, estos resultados fueron aplicados al cálculo del campo magnético producido por las diferentes configuraciones de espiras. Mostramos que las expresiones para el campo del arreglo lineal (2.8)-(2.10) obtenidas a partir de la parametrización de cada espira, pueden ser obtenidas mediante la translación del modelo de una espira, en conjunto con el principio de superposición. Igualmente, las expresiones (2.14)-(2.16) obtenidas por la parametrización del arreglo toroidal (2.13), pueden ser generadas a partir de la translación y rotación en (2.18)-(2.20), del modelo base. No obstante, la evaluación de las integrales aún requiere de técnicas numéricas.

En ambos arreglos, encontramos una alta correspondencia entre los resultados obtenidos numéricamente con aquellos evaluados de las soluciones analíticas en (1.26) y (1.27), incluso integrando con la regla de Trapecio (Fig. 2.7). Entonces, conociendo de antemano la eficacia de la regla de Simpson sobre la del Trapecio, nuestra propuesta aborda con gran precisión el cálculo de los campos. También encontramos que el aumento en la uniformidad del campo dentro de los arreglos es proporcional al número de espiras (Figs. 2.7 y 2.11). Esto lo comprobamos en la Fig. 2.8, donde la magnitud del campo se mantiene aproximadamente constante sobre el eje del arreglo, aunque encontramos un gradiente cilíndrico dirigido hacia las espiras. Además, con ayuda de las líneas de campo notamos que la curvatura dentro del arreglo se reduce sobre una región más amplia que en el caso de la espira. En el caso del campo toroidal, la curvatura asociada a las espiras igualmente disminuye dentro del arreglo como consecuencia de la superposición, sin embargo, la geometría del sistema nos genera un campo curvo (Figs. 2.12 y 2.13), cuyo gradiente aumenta hacia las espiras aunque con un mayor incremento hacia el eje simétrico del arreglo (Fig. 2.14).

Para finalizar con el análisis anterior y como una aplicación de los resultados obtenidos hasta el momento, en las Figs. 2.9 y 2.15, presentamos las visualizaciones tridimensionales de los campos generados por los arreglos lineal y toroidal respectivamente, las cuales fueron calculadas con la regla de Simpson y construidas a partir de la solución para las expresiones del campo correspondiente. Estas imágenes nos brindan una mejor comprensión acerca de las características de los campos y su dependencia con la geometría del

arreglo. Mientras en el arreglo lineal, el campo es uniforme y su curvatura ha sido reducida en la región central del arreglo debido a la superposición de los campos, en el arreglo toroidal, las propiedades de uniformidad se mantienen dentro de la configuración, aunque la curvatura es dominante en todo el campo.

El siguiente paso en este trabajo es incorporar las técnicas numéricas desarrolladas en este capítulo a la solución de la ecuación de Lorentz en (1.1) mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

Capítulo 3

Confinamiento magnético

La base del confinamiento magnético de plasma es el hecho de que las partículas cargadas describen trayectorias en espiral alrededor de las líneas de campo magnético. El radio de giro es inversamente proporcional a la intensidad del campo y por lo tanto, para campos intensos, las partículas se mueven muy cerca de las líneas de campo. Además, cuando el radio de giro es mucho menor que las dimensiones del arreglo, la trayectoria sobre las líneas de campo proporciona confinamiento en la dirección perpendicular al movimiento mientras que en la dirección paralela se requiere de otros medios, los cuales son principalmente basados en la geometría del sistema. Como mencionamos, esta geometría en conjunto con los conceptos de la teoría de guía central nos permiten inferir diversos fenómenos en la dinámica, sin embargo, la descripción exacta del movimiento es difícil. No obstante, la simulación computacional del movimiento de una partícula cargada dentro de cada uno de los arreglos anteriormente caracterizados, nos permite complementar nuestro análisis.

3.1. Implementación y simulación

El algoritmo empleado para la solución de la ecuación de Lorentz y la simulación del movimiento, contempla las siguientes etapas:

- Adquisición de datos.
- Compilador local.
- Aritmética y lógica.

- Registro y resultados.
- Visualización de la trayectoria.

Cada etapa se ejecuta de manera independiente y bajo este orden. A manera de ejemplificar nuestro programa, a continuación mostramos el código de nuestra implementación en MATLAB para el caso del campo producido por el arreglo toroidal, al cual hemos añadido un campo eléctrico uniforme. Para facilitar la lectura, agregamos comentarios dentro del código salvo donde requerimos una descripción más extensa. En caso de requerir información sobre la programación o sintaxis, recomendamos consultar la sección de Ayuda del software, aunque trataremos de ser lo más claros posibles.

La sección de **ADQUISICIÓN DE DATOS** es la interface de nuestro programa. En esta parte, las cantidades fundamentales del sistema, como el radio de las espiras, la magnitud del campo magnético, la distancia de restricción δ y las condiciones iniciales del problema de Lorentz, son definidas directamente en el código y son la única información necesaria para realizar el cómputo de la solución. El resto de las técnicas y métodos utilizan cantidades que son derivadas a partir de estos datos o durante el mismo proceso de cómputo.

% ADQUISICIÓN DE DATOS

```

Coil_Radio = 8;           % Radio de las espiras
Secondary_Radio = 12;     % Radio secundario b del Toro
Num_Coils = 20;          % Número de espiras
Coil_Thickness = 0.5;     % Grosor de las espiras (delta)

Toroidal_Field = 0.187*2; % Beta para el campo toroidal
Electric_Field = 2;       % Beta para el campo eléctrico
Ion = 1;                  % Signo de la carga

Initial_Time = 0;          % Tiempo Inicial
Final_Time = 120*3;        % Tiempo final
Step_Size = 0.05;          % Paso temporal

X0 = [12 0 -4];           % Condiciones iniciales
U0 = [1.32 0.5 0]*2;

```

En el **COMPILADOR LOCAL**, la información adquirida en la primera parte del proceso es guardada dentro de variables globales, las cuales nos evitan la declaración repetitiva de cantidades que serán utilizadas a lo largo de todo

el código. Algunas cantidades fundamentales para el proceso son calculadas a partir de estos primeros datos, como el número de iteraciones M . Dado el intervalo temporal y tamaño de paso deseado, el número de iteraciones $M = (t_f - t_i)/h$, funciona como un parámetro de control sobre el tiempo en el método iterativo de RK (Runge-Kutta). En MATLAB empleamos un ciclo `for` y contadores para el tiempo transcurrido en el sistema y tiempo real de cómputo. Así mismo, en esta parte definimos cantidades cuyo valor puede ser prefijado, como los subintervalos de integración n . Por otro lado, la geometría de los arreglos nos permite definir un mecanismo de control sobre la posición de la partícula, durante el cómputo de la trayectoria. Esto con el fin de mejorar el tiempo de cómputo, pues si la partícula abandona la zona de interés no es necesario continuar con el proceso.

```
% COMPILADOR LOCAL

global D PHI;
global A B S COILS;
global TF TI H LOOPS;
global MT EO Q;

A = Coil_Radio;
B = Secondary_Radio;
S = Coil_Thickness;
COILS = Num_Coils;

MT= Toroidal_Field;
EO= Electric_Field;
Q= Ion;

X=[X0 U0]';
TF = Final_Time;
TI = Initial_Time;
H = Step_Size;
LOOPS = (TF-TI)/H; % Número de iteraciones

n = 120; % Subintervalos de integ.
PHI = pi*(-n:2:n)/n; % Intervalo de integración
D = 2*pi*(0:1:COILS-1)/COILS; % Posición polar (phi_k)...
% de las espiras del toro

BL=[1.25*A+B 1.25*A+B B]; % Frontera (mecanismo de control)
C=zeros(); % Registro de la trayectoria
```

En la sección de ARITMÉTICA Y LÓGICA, como su nombre lo indica, se lleva a cabo el cómputo de la trayectoria X y las operaciones lógicas sobre los mecanismos de control del proceso. Las funciones `tic` y `toc` nos permiten iniciar un contador tipo cronómetro que nos ayuda a medir el tiempo real de cómputo y el `counter` al inicio del ciclo registra el tiempo del sistema, en caso de que la partícula abandone la zona de interés, el ciclo se rompe, se imprime un mensaje, el contador toma su último valor y registra el tiempo de cómputo hasta ese punto. Además, el núcleo de nuestro programa se encuentra en esta sección, la función `K_Vectors`. Esta función toma como argumento el arreglo X y regresa el valor de los vectores k_i a través de nuestra implementación de RK, tal que el nuevo valor de X puede calculado y almacenado en el vector de registro C .

```
% ARITMÉTICA Y LÓGICA

tic
counter=TI;
for i=1:LOOPS

    % Registro de las trayectorias -----
    C(1,i)=X(1); C(2,i)=X(2); C(3,i)=X(3);
    C(4,i)=X(4); C(5,i)=X(5); C(6,i)=X(6);

    % Método Runge Kutta -----
    K1 = K_Vectors(X);
    K2 = K_Vectors(X+(H/2)*K1);
    K3 = K_Vectors(X+(H/2)*K2);
    K4 = K_Vectors(X+H*K3);

    X = X + (H/6)*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4);

    % Validación -----
    if (abs(X(1))>=(A+B)||...
        abs(X(2))>=(A+B)||...
        abs(X(3))>=A)
        sprintf('Particle Out Of Bounds')
        break
    end

    counter=counter+H;
```

```

end
totalloops=i;
final_toc=toc;

```

La función `K_Vectors`, además de contener nuestro algoritmo para RK, incorpora las técnicas numéricas para el cálculo de las componentes del campo. En este ejemplo, empleamos la función `trapz` de la biblioteca de MATLAB, la cual emplea la regla compuesta del trapecio para el cómputo de las integrales.

```

function [K] = K_Vectors(Xn)

global D PHI Q;
global A B AP COILS;
global MT EO;

X = Xn; % Variable auxiliar de cálculo

Bx=@(x,y,z,a,b,v,u)...
    (((z/a).*cos(u)-(b/a).*sin(u)-1).*sin(v)+(y/a).*sin(u))./...
    sqrt((x/a).^2+(y/a).^2+(z/a).^2+1+(b/a).^2+2*(b/a).*sin(u)...
    -2*((b/a)+sin(u)).*((x/a).*cos(v)+(y/a).*sin(v))...
    -2*(z/a).*cos(u)).^3;

By=@(x,y,z,a,b,v,u)...
    -(((z/a).*cos(u)-(b/a).*sin(u)-1).*cos(v)+(x/a).*sin(u))./...
    sqrt((x/a).^2+(y/a).^2+(z/a).^2+1+(b/a).^2+2*(b/a).*sin(u)...
    -2*((b/a)+sin(u)).*((x/a).*cos(v)+(y/a).*sin(v))...
    -2*(z/a).*cos(u)).^3;

Bz=@(x,y,z,a,b,v,u)...
    (((y/a).*cos(v)-(x/a).*sin(v)).*cos(u))./...
    sqrt((x/a).^2+(y/a).^2+(z/a).^2+1+(b/a).^2+2*(b/a).*sin(u)...
    -2*((b/a)+sin(u)).*((x/a).*cos(v)+(y/a).*sin(v))...
    -2*(z/a).*cos(u)).^3;

f1 = @(X4) X4;
f2 = @(X5) X5;
f3 = @(X6) X6;
f4 = @(X5,X6,BY,BZ) X5.*BZ-X6.*BY + E(1);
f5 = @(X4,X6,BX,BZ) -X4.*BZ+X6.*BX + E(2);
f6 = @(X4,X5,BX,BY) X4.*BY-X5.*BX + E(3);

k1 = f1(X(4));

```

```

k2 = f2(X(5));
k3 = f3(X(6));

% Campo toroidal -----
bx=0; by=0; bz=0;
for r=1:COILS
    Tx = trapz(PHI,Bx(X(1),X(2),X(3),A,B,D(r),PHI));
    Ty = trapz(PHI,By(X(1),X(2),X(3),A,B,D(r),PHI));
    Tz = trapz(PHI,Bz(X(1),X(2),X(3),A,B,D(r),PHI));
    bx=bx+Tx; by=by+Ty; bz=bz+Tz;
end

Btor=[bx by bz]';

% Campo total -----
BT = MT*Btor;
bx=BT(1); by=BT(2); bz=BT(3);

k4 = f4(X(5),X(6),by,bz)*Q;
k5 = f5(X(4),X(6),bx,bz)*Q;
k6 = f6(X(4),X(5),bx,by)*Q;

K = [k1 k2 k3 k4 k5 k6]';

end

```

En la sección de **REGISTRO Y RESULTADOS**, calculamos e imprimimos la información de interés obtenida a partir del vector de registro C. En el código de ejemplo, calculamos la energía cinética inicial y aquella al tiempo de la finalización el ciclo. El comando **save** permite guardar todas las variables y la información usada en el código hasta este punto. Estos resultados son los que en última instancia nos servirán para la simular el movimiento de la partícula. En relación a esto, MATLAB proporciona buenas herramientas de visualización. Para evitar problemas con la memoria de cómputo disponible, se acostumbra separar el proceso de cálculo de la implementación gráfica, es por ello que durante los cálculos toda la información de interés debe ser guardada.

```

% REGISTRO Y RESULTADOS

KI=sqrt(C(4,1).^2+C(5,1).^2+C(6,1).^2);

```

```

KF=sqrt(C(4,i).^2+C(5,i).^2+C(6,i).^2);

sprintf('Computing Time = %g seconds',final_toc)
sprintf('System Time = %g seconds',H*totalloops)
sprintf('Initial Kinetic Energy = %g J',KI)
sprintf('Final Kinetic Energy = %g J',KF)

save 'Toro.mat';

```

Finalmente, para la VISUALIZACIÓN DE LA TRAYECTORIA nos basamos en el demo del Atractor de Lorenz propuesto en la sección de Ayuda de MATLAB. El procedimiento se basa en utilizar un ciclo y la herramienta `line`, para graficar la información almacenada en C. En las secciones siguientes veremos los resultados obtenidos mediante este método.

```

% VISUALIZACIÓN DE LA TRAYECORIA

L = 50;
XT = [C(1,1) C(2,1) C(3,1)]';
Xd = XT*ones(1,L);

head = line( ...
    'color','r', ...
    'Marker','.', ...
    'markerSize',10, ...
    'erase','xor', ...
    'xdata',C(1,1), 'ydata',C(2,1), 'zdata',C(3,1));
body = line( ...
    'color','y', ...
    'LineStyle','-', ...
    'erase','none', ...
    'xdata',[], 'ydata',[], 'zdata',[]);
tail = line( ...
    'color','g', ...
    'LineStyle','-', ...
    'erase','none', ...
    'xdata',[], 'ydata',[], 'zdata',[]);

% Animación -----
for i=1:TLOOPS

    % Actualizacion de la trayecctoria

    XT = [C(1,i) C(2,i) C(3,i)]';
    Xd = [XT Xd(:,1:L-1)];

```

```

set(head,'xdata',Xd(1,1),'ydata',Xd(2,1),'zdata',Xd(3,1))
set(body,'xdata',Xd(1,1:L),'ydata',Xd(2,1:L),'zdata',Xd(3,1:L))
set(tail,'xdata',Xd(1,L-1:L),'ydata',Xd(2,L-1:L),'zdata',Xd(3,L-1:L))
drawnow;
% pause(0.01)

end

% Trayectoria final -----
plot3(C(1,:),C(2,:),C(3,:),'g','LineWidth',1);
end

```

3.2. Dinámica en el campo de una espira

La dinámica de una partícula cargada dentro del campo producido por una espira es importante por su carácter fundamental en el presente trabajo. Aunque el principal efecto sobre la trayectoria de una carga de prueba es simplemente la modificación en su dirección de movimiento, sin lograr confinamiento, los efectos asociados principalmente al gradiente nos mostraron un fenómeno interesante que tiene que ver con la matemática discreta involucrada en el método RK.

Primeramente analizamos la dinámica de una partícula cargada dentro del campo producido por una espira de radio $a = 10$ m, la cual tiene asociado un campo de $B_0 = 5$ T en su porción central. Como partícula de prueba consideramos un protón que parte de $\mathbf{r}_0 = (1, 0, 0)$ m, con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = (5, 5, 0)$ m/s, para el cual nos interesa su comportamiento durante los primeros 30 segundos. De acuerdo con (1.39), este protón completará su radio giro en $\tau = 2\pi/B_0 = 1,26$ s, siendo ésta la cota superior para el tamaño de paso h en (1.38). Con la rapidez inicial dada, el radio de giro esperado es $r_L = v_\perp/B_0 = 1,41$ m. La elección de ésta rapidez es con fines de apreciación, pues recordemos que la rapidez absorbe la magnitud de m/q tal que en el caso del protón, el producto $|m_p/q|v_\perp = 1,32$ m/s y el radio de giro esperado es de 0,26 m acorde con la Tabla 1.1.

En este ejemplo observamos que cuando elegimos $h = \tau/5$ en el tamaño de paso de RK, el radio de giro converge sobre sí hasta hacerse muy cercano a cero (Fig. 3.1), pero cuando escogemos $h = \tau/10$ los resultados son los esperados, es decir, el movimiento de la partícula presenta una deriva

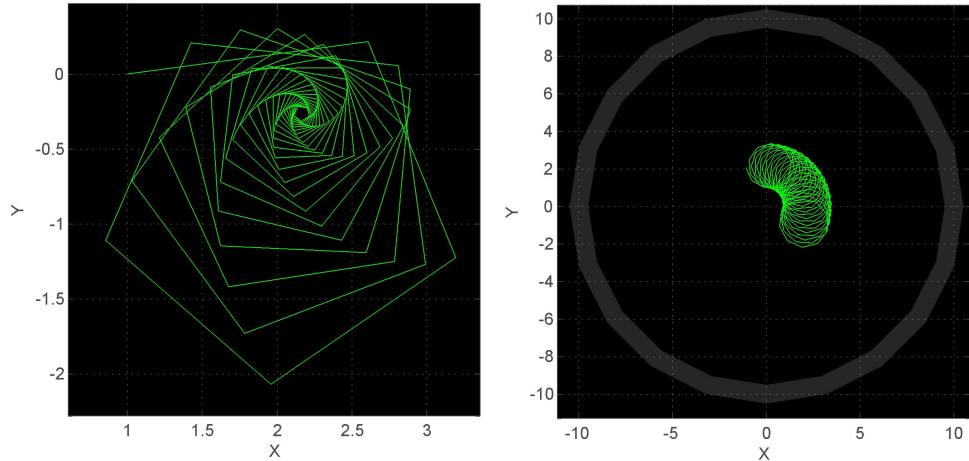


Figura 3.1: **Efectos de la elección de h .** Trayectoria degenerada para $h = \tau/5$ (Izq.). Trayectoria con las características esperadas cuando $h = \tau/10$ (Der.). En ambas imágenes el campo apunta hacia afuera de la hoja.

asociada al gradiente del campo, tal que su guía central se moverá en una circunferencia acorde con (1.15), la conservación del momento angular y la simetría del campo. Esto nos lleva a inferir que en algún punto del proceso se está subestimando el valor de la rapidez, la cual determina el radio de giro. Siendo que sólo el método de RK hace uso de este valor derivado a partir de la elección de h , determinamos que éste es el causante de tal error. Por lo tanto, con este resultado comprobamos la condición sugerida para el tamaño de paso en (1.39), es decir, $h \ll \tau$. Este efecto de subestimación lo veremos nuevamente para el caso del toro.

Una de las cantidades que son calculadas previamente al cómputo de las trayectorias, es el parámetro β que determina la magnitud del campo dentro del código acorde con (1.29). Este parámetro es calculado mediante (1.30), tomando $N = 1$ y $\zeta = 0$. En este caso obtenemos $\beta = \tau^{-1}$. En nuestro ejemplo, $\beta = 0.796$.

3.3. Dinámica en el arreglo lineal

De la misma forma podemos simular la trayectoria de un protón en el caso del arreglo lineal de espiras. El arreglo lineal nos muestra la posibilidad de confinar partículas en una región mediante campos intensos. Como mencionamos, la superposición de los campos producidos por cada una de las espiras genera un campo muy uniforme dentro del arreglo. Partículas que entren en esta región es de esperarse que presenten características muy similares a aquellas que se mueven en un campo uniforme. Esto lo podemos notar en la Fig. 3.2, donde mostramos varias trayectorias calculadas con $h = \tau/10$, para un arreglo de $N = 5$ espiras, las cuales generan un campo de $B_0 = 5$ T en su interior. Sin embargo, notemos que aunque la principal característica del campo es su gradiente, los efectos asociados a éste no son notables sobre estas trayectorias. Esto es debido a la velocidad y posición de las partículas al ingresar al arreglo, es decir, de la conservación de su energía y momento magnético.

Como vimos en la sección de invariantes adiabáticas, la conservación del momento magnético juega un papel importante en la descripción de los fenómenos de reflexión, transmisión y confinamiento de las partículas. En la gráfica anterior podemos notar dos partículas que exhiben reflexión, es decir, las condiciones sobre su velocidad y la magnitud del campo al ingreso del arreglo, cumplieron en cierto punto con la condición de reflexión en (1.18), mientras que el resto cruzaron rápidamente el arreglo de tal forma que la deriva asociada al gradiente fue despreciable. No obstante, cuando las condiciones son adecuadas, vemos lo que sucede en la Fig. 3.3. Aquí, las partículas presentan un notable confinamiento basado en la reflexión de las trayectorias a lo largo del arreglo. En particular, notemos la trayectoria en color cyan en la imagen superior derecha dentro de la figura, la cual muestra claramente la deriva asociada al gradiente del campo. Así también notemos que en este caso, la guía central de movimiento no es de fácil descripción como en la Fig. 3.2 o en el caso del campo de una espira. Aunque nuestra descripción es a nivel cualitativo, estos resultados nos muestran la importancia del uso de técnicas teórico-computacionales para el análisis de sistemas complejos.

Desde el punto de vista del confinamiento magnético, el arreglo lineal nos muestra la importancia en la intensidad, uniformidad y geometría del campo, como características esenciales para aumentar el tiempo y la calidad

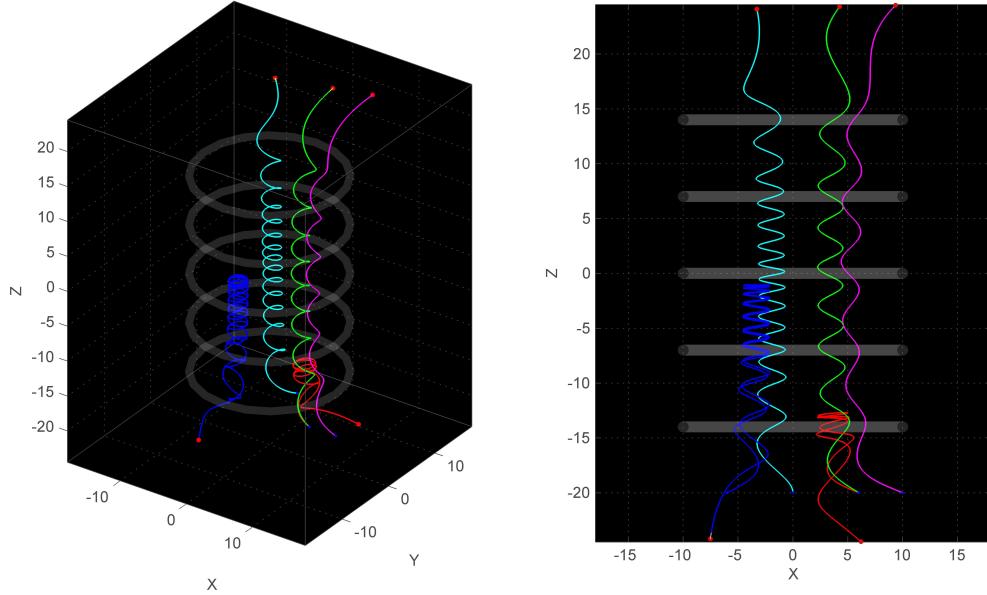


Figura 3.2: Trayectorias que exhiben reflexión y transmisión. Cuando las partículas pasan el arreglo en un tiempo muy corto, la deriva asociada al gradiente no es notable. En estos ejemplos, el tiempo de confinamiento no fue mayor al medio minuto.

del confinamiento. Sin embargo, este campo es altamente dependiente en la energía y localización de las partículas dentro del arreglo. Por tanto, la necesidad de un campo cerrado se hace presente y el arreglo toroidal es el primer candidato.

3.4. Dinámica en la configuración toroidal

Como planteamos en la introducción de este trabajo, el concepto de *Tokamak* es el más investigado y desarrollado en la actualidad. Éste consiste en una arreglo toroidal de bobinas, similar al desarrollado en la última parte del capítulo anterior. Como vimos en su respectiva visualización tridimensional, este campo es altamente uniforme dentro del arreglo y por su simetría, podemos ver que es la extensión inmediata del arreglo lineal. Sin embargo, ahora el principal efecto sobre la trayectoria de las partículas es la velocidad

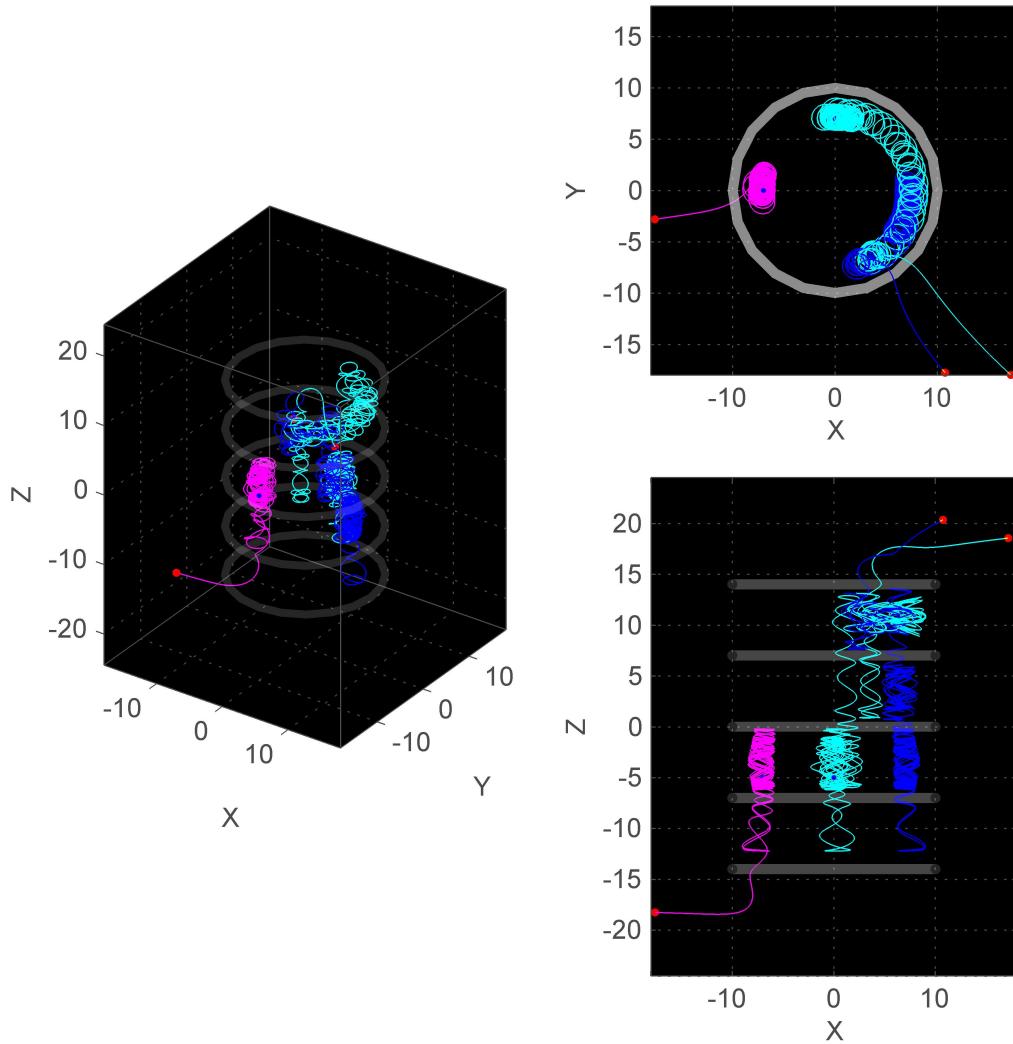


Figura 3.3: **Trayectorias que exhiben confinamiento parcial.** Notemos que aunque la partícula recorre el arreglo, su movimiento transversal es sobre regiones que conservan su momento magnético y energía. También es notable la deriva asociada al gradiente del campo. En estos ejemplos, el tiempo de confinamiento es superior al minuto y medio.

de deriva asociada a la curvatura del campo. Para nuestras simulaciones consideramos un protón dentro de un arreglo de $N = 20$ espiras de radio $a = 8$ m y radio secundario $b = 12$ m (Fig. 2.10), el cual produce un campo de $B_0 = 5$ T en su región central.

En la Fig. 3.4 vemos que efectivamente, la deriva asociada a la curvatura del campo es dominante sobre los efectos esperados debidos a su gradiente, es decir, un movimiento circular de la guía central como en el arreglo lineal, de tal forma que la trayectoria final es de tipo helicoidal. Además, debido a la geometría del sistema, un protón moviéndose dentro del arreglo presenta una deriva en la dirección $Z+$, la cual es contraria para iones negativos acorde con (1.16). En un plasma, esta separación de cargas produce pérdida de confinamiento y la creación de un campo eléctrico. Suponiendo que la fuerza atractiva entre los elementos del plasma evita mayor separación en la dirección de deriva, el campo eléctrico generado es similar al campo en un condensador de placas paralelas. Este campo tiene asociado una velocidad de deriva que hace que todas las partículas, sin importar el signo de su carga, abandonen la región de confinamiento del arreglo en la dirección radial (geometría cilíndrica) de acuerdo con (1.13). En la Fig. 3.5, agregamos un campo eléctrico de 2 V/m en la dirección $Z-$, al campo magnético generado por el arreglo toroidal. En esta figura podemos comprobar la pérdida de confinamiento a causa del campo eléctrico.

En base a los resultados previos, el confinamiento de partículas cargadas en un sistema toroidal simple no es posible. No obstante, como también mencionamos en la introducción de este trabajo, para lograr el confinamiento esperado teóricamente, las líneas de campo magnético deben generar superficies cerradas dentro de la configuración. Esto se logra mediante la superposición de un campo poloidal \mathbf{B}_θ (un campo similar al de una espira) dentro del campo toroidal \mathbf{B}_ϕ , es decir, es necesario inducir una corriente eléctrica dentro del mismo plasma el cual genere su propio campo. Esta superposición produce un campo magnético helicoidal, $\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi + B_\theta \mathbf{e}_\theta$, donde generalmente $|B_\theta| \ll |B_\phi|$, el cual provoca que los arrastres por curvatura y gradiente se cancelen en promedio¹. Este resultado puede ser mejor entendido al considerar que, mientras que en el campo toroidal el principal efecto es ocasionado por la curvatura de las líneas de campo las cuales forman trayectorias circula-

¹Ver la ref. [3], Sección 3.2, *Closed Toroidal Confinement Systems*.

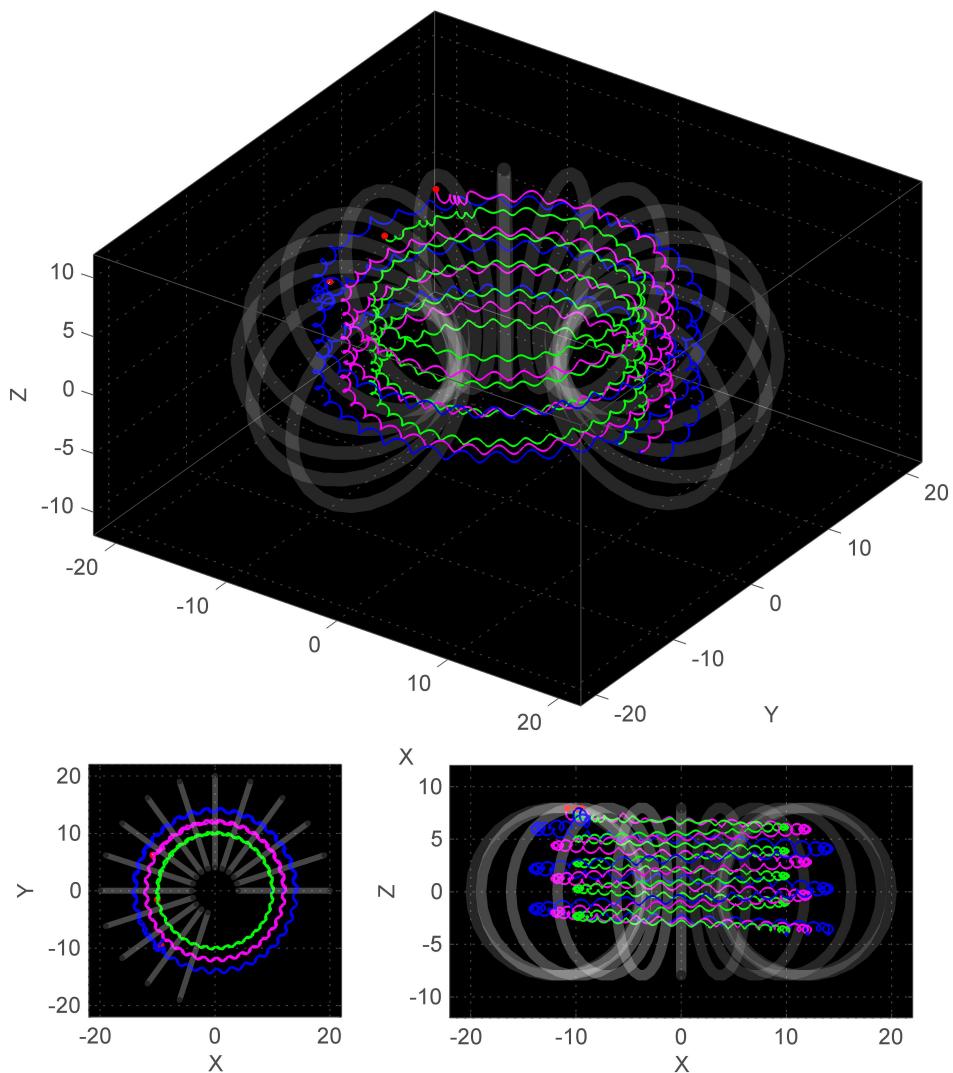


Figura 3.4: **Trayectorias en un campo toroidal.** La teoría predice que la partícula recorrerá el arreglo sobre regiones que conservan su momento magnético y energía. Sin embargo, los efectos asociados principalmente la curvatura del campo generan reducen la calidad del confinamiento. Tiempo de confinamiento menor al minuto y medio.

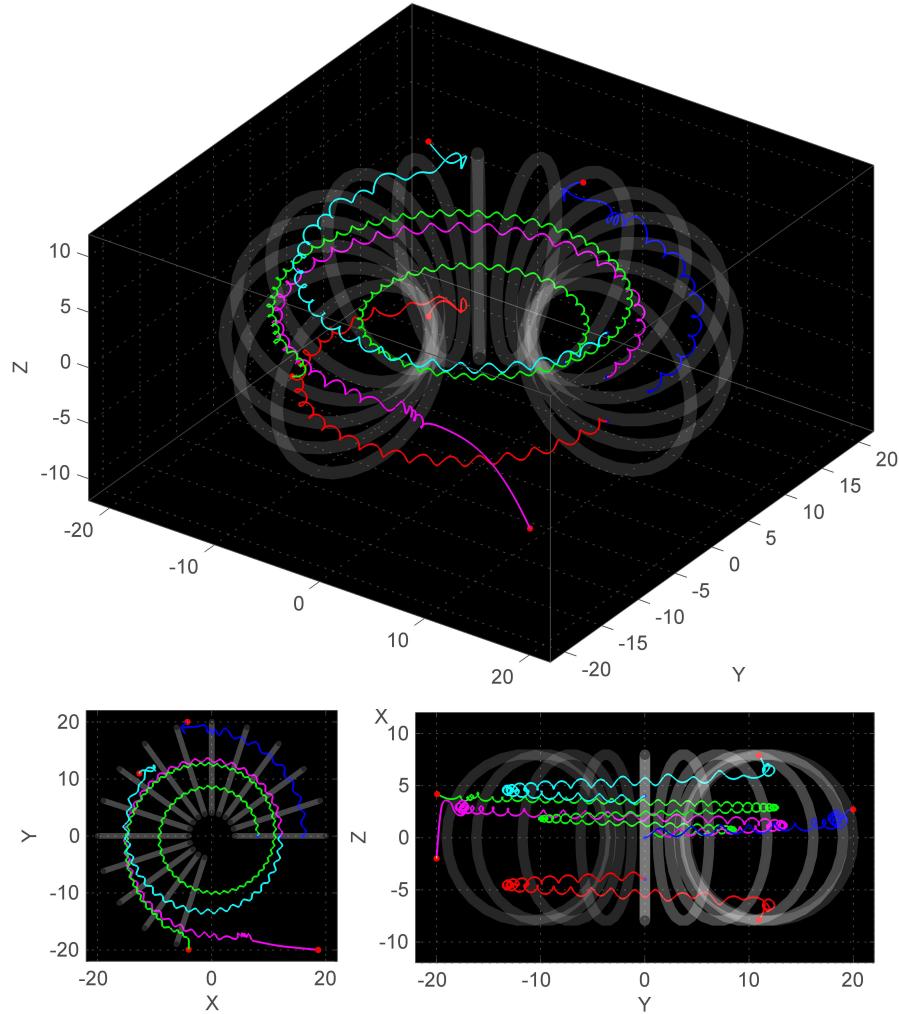


Figura 3.5: Trayectorias en un campo toroidal con campo eléctrico. Este caso describe el principal problema en confinamiento de plasmas en máquinas tipo Tokamak. La trayectoria en rojo está asociada a un ion negativo y tiene la misma dirección deriva que los iones positivos. El tiempo de confinamiento es menor al minuto.

res dentro del arreglo con una geometría puramente cilíndrica (Fig. 3.4), con la adición del campo poloidal se refuerzan los efectos debidos al gradiente y se agregan aquellos asociados a una curvatura adicional o torsión, haciendo que en promedio, el arrastre por curvatura se cancele debido a la helicidad de las líneas de campo, lo cual se esperaba en el campo toroidal simple.

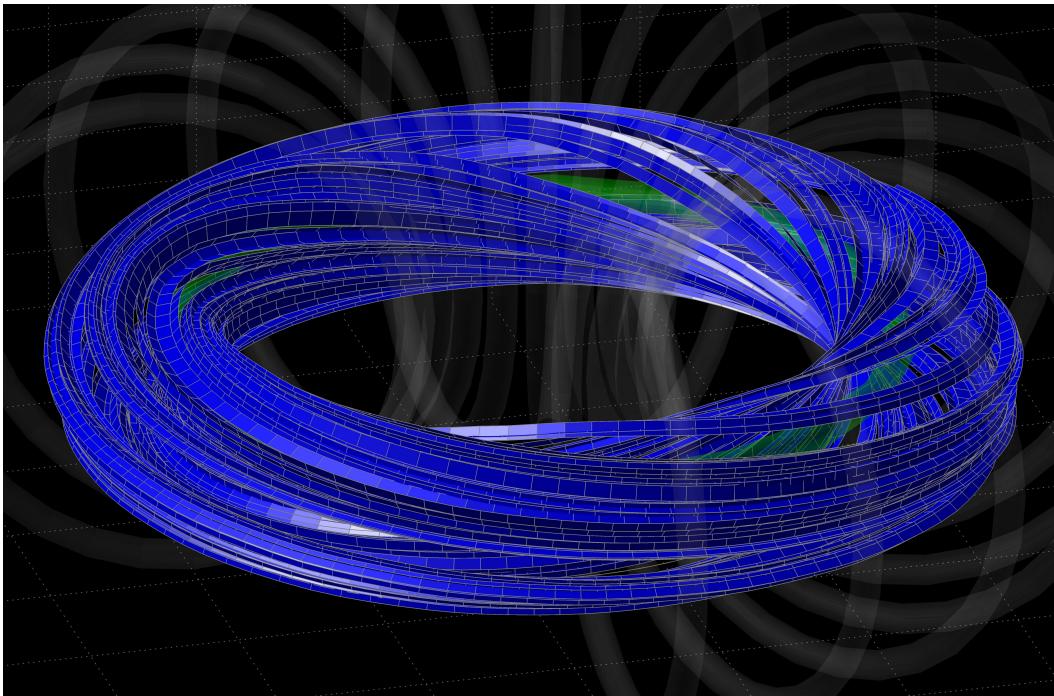


Figura 3.6: **Campo toroidal y poloidal.** La superposición de estos campos causa que las líneas de campo formen superficies dentro del arreglo. En el campo toroidal simple, las líneas no poseen torsión. En este ejemplo $\beta_T = 2\beta_P$.

Para modelar este sistema, consideramos que el campo poloidal inducido es de naturaleza estacionaria y lo simulamos con una espira centrada dentro del arreglo toroidal. La geometría del campo resultante la vemos en la Fig. 3.6. En esta figura utilizamos la herramienta `streamribbons` de MATLAB para graficar la trayectoria y torsión de una sola línea de campo. Como vemos, las líneas de campo ahora cumplen con la condición teórica para el confinamiento magnético. Así mismo, otra característica de este sistema es el gradiente dentro de la configuración toroidal-poloidal. Este lo podemos

ver en la Fig. 3.7, donde calculamos la magnitud del campo en el plano de simetría xz . Notemos que la distribución de la magnitud del campo sugiere que cuando las partículas encuentren las porciones de mayor intensidad, en las regiones superior e inferior del arreglo, estas pueden sufrir reflexiones de acuerdo con sus condiciones de energía y momento magnético.

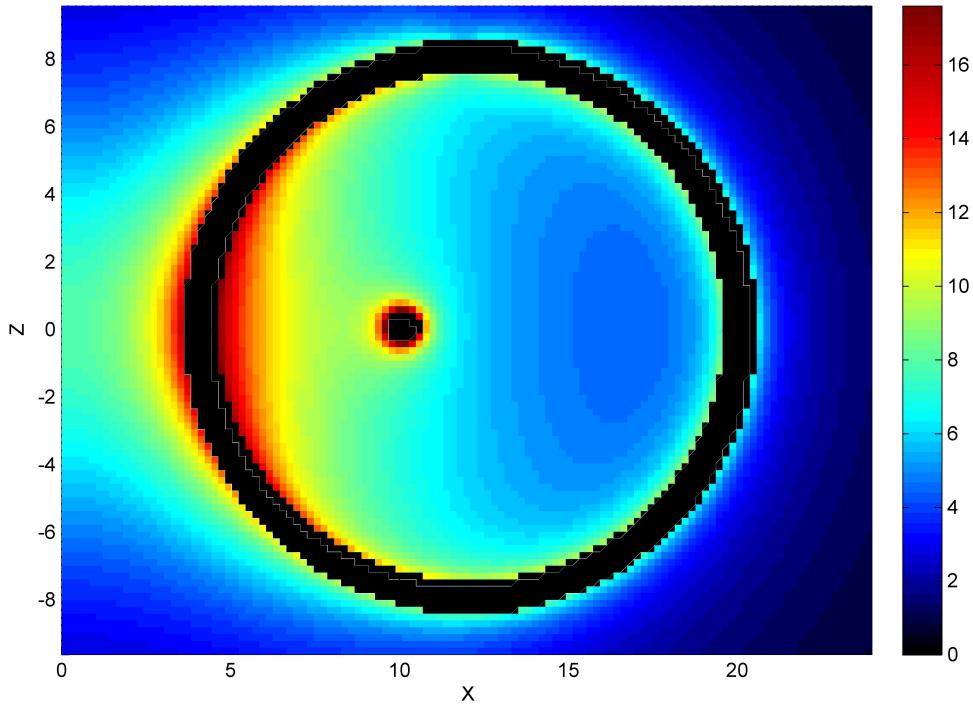


Figura 3.7: **Intensidad campo toroidal y poloidal.** Nótese que la forma en banana del gradiente sugiere que la partícula sufrirá reflexiones dentro de las porciones superior e inferior del arreglo. En este ejemplo $\beta_T = \beta_P$ y la espira fue desplazada hacia el interior del arreglo para mejor apreciación de la distribución de intensidad del campo.

En la Fig. 3.8 vemos que, efectivamente, el campo helicoidal permite el confinamiento de partículas esperado teóricamente. En esta figura podemos apreciar la trayectoria típica de una partícula confinada dentro del arreglo e igualmente, comprobamos la observación hecha con anterioridad, sobre la re-

flexión que experimentarían las partículas en sus trayectorias al encontrarse en las regiones de mayor intensidad del campo. Para esta simulación consideramos la configuración toroidal previa en adición con el campo producido por una espira de radio $a = 12$ m (igual al radio secundario del arreglo toroidal), con la condición $\beta_T = 2\beta_P$. Además, en esta imagen agregamos la trayectoria de un partícula calculada con la mitad del tamaño de paso necesario h , con el objetivo de observar una vez más el efecto de subestimación del método de RK. Notemos que las dos trayectorias presentes en la imagen parten de la misma posición, pero debido al efecto de subestimación, una queda completamente degenerada. Finalmente, en la Fig. 3.9, mostramos algunas trayectorias cuyas condiciones iniciales en la posición fueron tomadas fuera de la región central del arreglo. Esta figura nos muestra la importancia de mantener las partículas lo más cerca posible de esta región, donde el confinamiento es seguro.

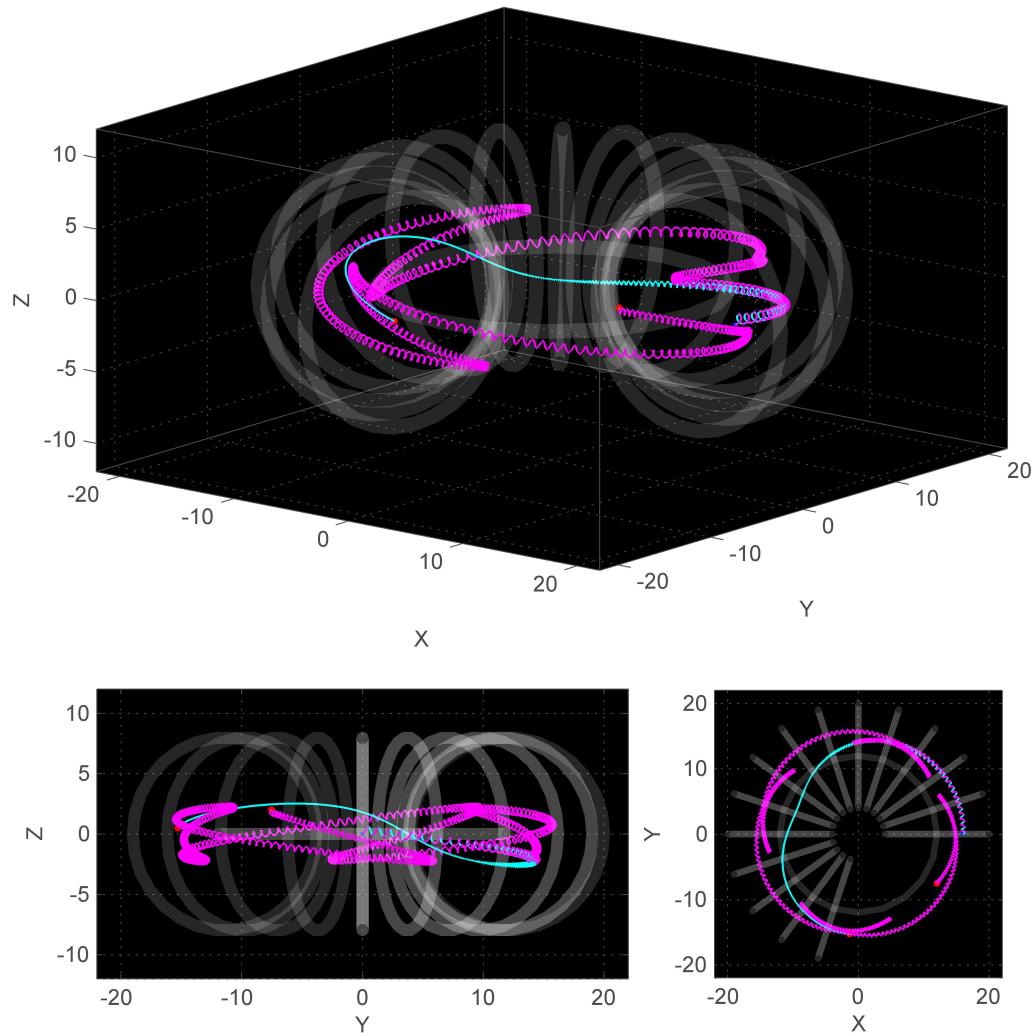


Figura 3.8: **Trayectorias en el campo helicoidal.** Trayectoria para un partícula confinada dentro del campo (magenta) y trayectoria degenerada (cyan) por la elección del tamaño de paso en el método de RK por debajo del valor requerido.

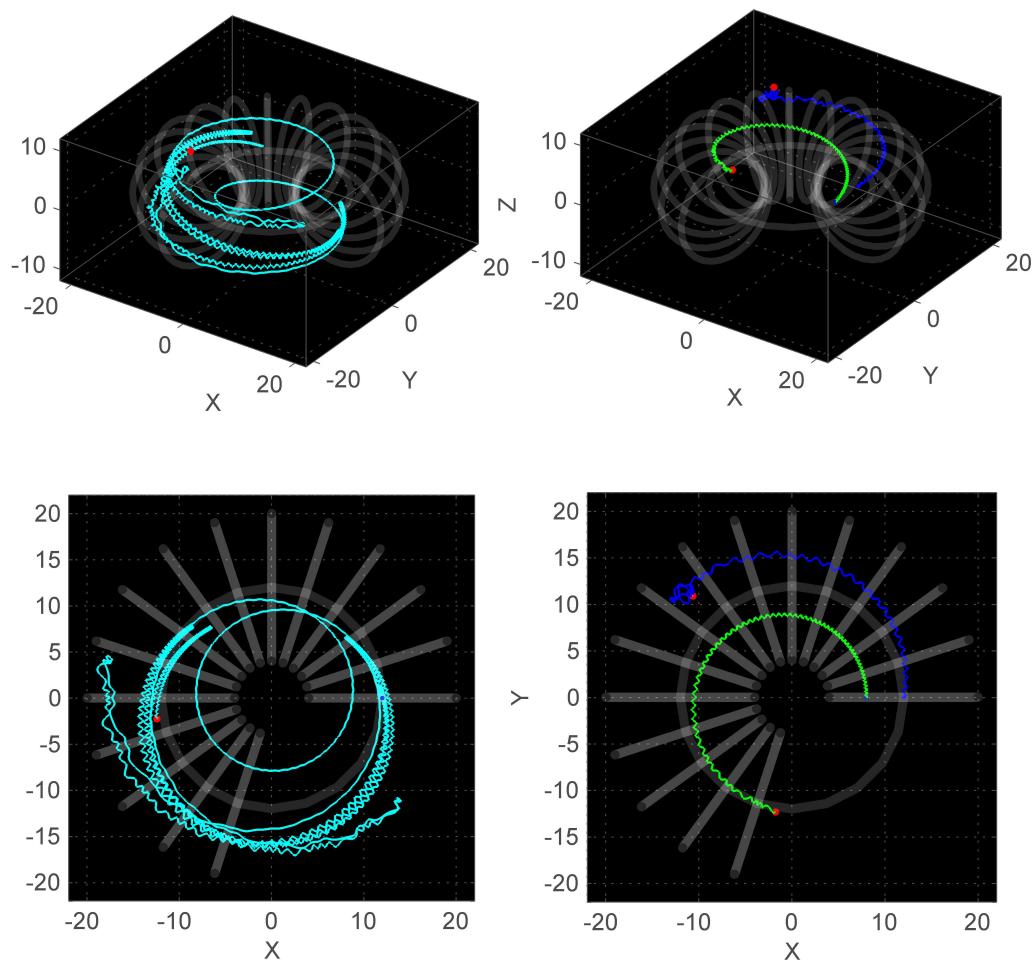


Figura 3.9: **Trayectorias en el campo helicoidal.** Otras trayectorias dentro del campo para partículas con condiciones iniciales fuera de la región central del arreglo.

3.5. Conclusiones

En este capítulo, mediante la implementación en MATLAB del método de Runge-Kutta de cuarto orden, desarrollamos un programa que nos permitió resolver la ecuación de Lorentz en (1.1), simular el movimiento y analizar la dinámica de partículas cargadas dentro de las configuraciones magnéticas previamente analizadas. Nuestro programa quedó estructurado de la siguiente manera:

- **Adquisición de datos**, donde asignamos los valores deseados a los parámetros de interés, como los parámetros β que determinan la intensidad de los campo en las regiones centrales de los arreglos, el tamaño de paso h , el intervalo de tiempo de la simulación y las condiciones iniciales.
- **Compilador local**, donde la información fundamental del sistema es guardada en variables globales para facilitar la escritura y simplificar el código. Hasta este punto, suponemos que siempre se ingresarán valores numéricos al programa y por lo tanto, no encontramos necesario el hacer chequeo de tipos por el momento.
- **Aritmética y lógica**, es el núcleo del programa. Aquí se realiza el cálculo de las trayectorias a partir de la implementación y enlace, entre el método de Runge-Kutta de cuarto orden y las técnicas numéricas desarrolladas para el cómputo de los campos, obtenidas mediante Biot-Savart.
- **Registro y resultados**, es la sección encargada de guardar los resultados de los cálculos, de generar información en base a estos datos, exportar el archivo con la información para implementar la visualización y elaborar el reporte final de cómputo.
- **Visualización**, es la encargada de la parte gráfica y desarrollo de la simulación. Para la cual, tomamos como referencia el demo del Atractor de Lorenz propuesto en la Ayuda de MATLAB.

En relación a la implementación de RK, encontramos que el tamaño de paso h es de suma importancia para obtener una trayectoria con la exactitud deseada, en especial cuando no haremos uso de un método de paso variable.

La elección de h debe ser por debajo de $\tau = 2\pi/\Omega_0$ y existe un valor crítico para el cual el método de Runge-Kutta produce degeneración sobre las trayectorias. Sin embargo, este valor crítico no fue calculado. Con respecto a las técnicas numéricas de integración, encontramos que nuestras versiones resultan en un aumento considerable del tiempo de cómputo, aunque con resultados equivalentes en la trayectoria final. Así mismo, aunque durante el cómputo de las trayectorias el número de subintervalos n queda determinado por el parámetro de restricción δ y éste ya no es usado dentro de los cálculos, consideramos que éste puede ser utilizado para implementar una técnica de integración variable, es decir, ajustar la precisión de los cálculos en base a la posición.

En la dinámica de una partícula cargada dentro del campo producido por una espira vimos que el principal efecto sobre la trayectoria está asociado al gradiente del campo (Fig. 3.1). Por la simetría del sistema y la conservación del momento magnético, la guía central de una partícula moviéndose en el porción central del plano de la espira describe una trayectoria circular acorde con (1.15).

El arreglo lineal nos muestra la posibilidad de confinar partículas en una región mediante campos intensos. La superposición de los campos producidos por cada una de las espiras genera un campo muy uniforme dentro del arreglo, tal que de las partículas que entran en esta región es de esperarse que presenten características muy similares a aquellas que se mueven en un campo uniforme (Fig. 3.2). Desde el punto de confinamiento magnético, el arreglo lineal nos muestra la importancia en la intensidad, uniformidad y geometría del campo, como características esenciales para aumentar el tiempo y la calidad del confinamiento (Fig. 3.3). Sin embargo, este campo es altamente dependiente en la energía y localización de las partículas dentro del arreglo.

El campo toroidal es la extensión inmediata del arreglo lineal. Este es un campo cerrado y altamente uniforme dentro del arreglo, sin embargo, el principal efecto sobre la trayectoria de las partículas es la velocidad de deriva asociada a la curvatura del campo acorde con (1.16), la cual ocasiona separación de cargas y pérdida de confinamiento (Fig. 3.4). Durante la separación de cargas se crea un campo eléctrico cuya velocidad de deriva hace que todas las partículas, sin importar el signo de su carga, abandonen la región de confinamiento (Fig. 3.5) de acuerdo con (1.13). En base a estos

resultados, concluimos que el confinamiento de partículas cargadas en un sistema toroidal simple no es posible. Para lograr el confinamiento esperado teóricamente, las líneas de campo magnético deben generar superficies cerradas dentro de la configuración. Esto se logra mediante la superposición de un campo poloidal \mathbf{B}_θ (un campo similar al de una espira) dentro del campo toroidal \mathbf{B}_ϕ . Esta superposición produce un campo magnético helicoidal, $\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi + B_\theta \mathbf{e}_\theta$, donde generalmente $|B_\theta| \ll |B_\phi|$, el cual provoca que los arrastres por curvatura y gradiente se cancelen en promedio (Fig. 3.6). El campo helicoidal permite el confinamiento de partículas esperado teóricamente (Fig. 3.8). Además, la trayectoria típica de una partícula confinada dentro del arreglo experimenta reflexiones al encontrarse en las regiones de mayor intensidad del campo, acorde con la conservación del momento magnético de la partícula (Fig. 3.7). Por último, el confinamiento de partículas cuyo movimiento se desarrolle lejos de la región central del arreglo, no es seguro (Fig. 3.9).

Aunque nuestro análisis fue a nivel cualitativo, las técnicas y métodos desarrollados en este capítulo nos permitieron lograr una mejor entendimiento acerca de la dinámica involucrada en el confinamiento magnético de plasmas.

Capítulo 4

Conclusión general

El objetivo general de este trabajo fue introducirnos en el área de física de plasmas a través de simulación y descripción teórico-computacional de la dinámica de una partícula cargada bajo la acción de los campos generados por los arreglos de confinamiento magnético lineal y toroidal de espiras.

Para este fin, nosotros solucionamos la ecuación de Lorentz mediante la implementación en MATLAB del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este método requiere la previa caracterización del campo generado por los arreglos de confinamiento magnético. Para ello aplicamos la ley de Biot-Savart en conjunto con el principio de superposición, al caso del campo producido por una espira circular conductora, el cual nos sirvió como modelo base para la construcción de los arreglos de lineal y toroidal de espiras. Encontramos que la caracterización de los campos puede llevarse a cabo mediante la parametrización de cada una de las fuentes del arreglo o mediante la aplicación de transformaciones sobre las expresiones para el campo de una espira, siendo ambas técnicas equivalentes. El cálculo de las integrales de Biot-Savart fue mediante la implementación en MATLAB de las reglas integración de Simpson y Trapecio. Con base en la simetría de los arreglos establecimos un método para determinar el grado de confiabilidad de las técnicas de integración sobre los puntos de divergencia de la integral de Biot-Savart. En lugar de evaluar la función de error de cada regla, nosotros empleamos métodos estadísticos para determinar una región de baja confiabilidad como función de la desviación estándar. Encontramos que conforme nos acercamos a los puntos de divergencia de las integrales, la desviación estándar aumenta. En términos de rapidez de cómputo, la regla del Trapecio ofrece una buena

aproximación, pero en términos de precisión, la regla de Simpson ofrece mejores resultados con menor número de subintervalos en la integración. Por lo tanto, considerando que la mayor parte de la dinámica se realiza en la región central de los arreglos de espiras, donde la magnitud del campo se conoce con gran precisión, nuestros resultados ofrecen una buena estimación para los casos extremos donde la dinámica se desarrolle cerca de las fuentes de los campos. Así también, la geometría de los arreglos nos permitió analizar las características de los campos sobre planos de simetría y complementar nuestras observaciones con visualizaciones tridimensionales de los campos.

Una vez que las configuraciones magnéticas fueron caracterizadas, desarrollamos con éxito un programa en MATLAB que nos permitió resolver la ecuación de Lorentz, simular el movimiento y analizar la dinámica de una partícula cargada dentro de las configuraciones magnéticas. En la implementación de RK, encontramos que el tamaño de paso en las iteraciones es de suma importancia para obtener una trayectoria con la precisión y exactitud deseada, en especial cuando no hacemos uso de un método de paso variable. Así mismo, existe un valor crítico para el cual el método de RK produce degeneración sobre las trayectorias. Sin embargo, este valor crítico no fue calculado. Con respecto a las técnicas numéricas de integración, encontramos que nuestras versiones resultan en un aumento considerable del tiempo de cómputo, aunque con resultados equivalentes en la trayectoria final. Consideramos que la precisión de nuestras técnicas de integración puede mejorar al hacerlas dependientes de la posición. No obstante, las técnicas y métodos desarrollados nos permitieron lograr una mejor entendimiento acerca de la dinámica involucrada en el confinamiento magnético de plasmas. En el caso de una partícula cargada dentro del campo producido por una espira vimos que el principal efecto sobre la trayectoria está asociado al gradiente del campo. El arreglo lineal nos muestra que la superposición de los campos producidos por cada una de las espiras genera un campo altamente uniforme dentro del arreglo, el cual nos muestra la importancia en la intensidad, uniformidad y geometría del campo, como características esenciales para aumentar el tiempo y la calidad del confinamiento. Sin embargo, este campo es altamente dependiente en la energía y localización de las partículas dentro del arreglo. El campo toroidal es un campo cerrado y altamente uniforme dentro del arreglo y el principal efecto sobre la trayectoria de las partículas es la velocidad de deriva asociada a la curvatura del campo, la cual ocasiona separación de cargas y pérdida de confinamiento. Durante la separación de

cargas se crea un campo eléctrico, el cual ocasiona que todas las partículas, sin importar el signo de su carga, abandonen la región de confinamiento. En base a estos resultados, concluimos que el confinamiento de partículas cargadas en un sistema toroidal simple no es posible. Comprobamos que el confinamiento esperado teóricamente se logra mediante el campo helicoidal, generado por la superposición del campo poloidal y el toroidal, el cual provoca que los arrastres por curvatura y gradiente se cancelen en promedio. Por último, vimos que el confinamiento de partículas cuyo movimiento se desarrolle lejos de la región central del arreglo, no es seguro.

No obstante, este primer desarrollo sólo es aplicable al caso de campos estacionarios y para el cálculo de trayectorias de partículas en ausencia total de colisiones. Además, notemos que los conceptos de la teoría de guía de central y de invariantes adiabáticas sólo fueron utilizados para explicar las características observadas en las trayectorias y no propiamente como herramientas de cálculo. De esta forma consideramos que la siguiente etapa de este estudio puede consistir en extender nuestro modelo a campos con dependencia temporal. Bajo esta condición, la inclusión de un método de paso variable en el cálculo de las trayectorias será sin duda necesaria, así como contemplar la implementación de la teoría de guía central.

Finalmente, aunque nuestro análisis fue a nivel cualitativo, los resultados obtenidos en este trabajo nos muestran la importancia del uso de técnicas teórico-computacionales para el análisis de sistemas complejos.

Apéndice A

Regla del Trapecio y Simpson

Reglas básicas

Sea $f \in C^2[a, b]$, la regla del Trapecio es,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3, \quad (\text{A.1})$$

para alguna ξ en (a, b) .

Sea $f \in C^4[a, b]$, la regla de Simpson es,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5, \quad (\text{A.2})$$

para alguna ξ en (a, b) .

Reglas compuestas

Sea $f \in C^2[a, b]$. Con $h = (b-a)/n$, donde n es un entero positivo y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$, la regla del Trapecio compuesta para n subintervalos es,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad (\text{A.3})$$

para alguna ξ en (a, b) .

Sea $f \in C^4[a, b]$. Con $h = (b - a)/n$, donde n es un entero positivo par y $x_j = a + jh$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$, la regla de Simpson compuesta para n subintervalos es,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad (\text{A.4})$$

para alguna ξ en (a, b) .

Apéndice B

Método de Runge-Kutta

El método iterativo de Runge-Kutta de cuarto orden¹, para la aproximación al problema con condiciones iniciales,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m), \quad (\text{B.2})$$

de un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden, está dado por,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (\text{B.3})$$

donde h es el tamaño de paso prefijado en $t_{n+1} = t_n + h$, para $n \geq 0$, y los vectores \mathbf{k}_i se definen como,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1\right), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_2\right), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

y con error local $O(h^5)$.

¹Para demostraciones y aplicaciones, tanto del método de Runge-Kutta como de las técnicas de integración, ver las refs. [15] y [16].

Referencias

- [1] C. M. Braams, P. E. Stott, *Nuclear Fusion. Half a Century of Magnetic Confinement Fusion Research*, Institute of Physics Publishing (2002).
- [2] J. Wesson, *The Science of Jet*, EFDA (European Fusion Development Agreement), www.jet.efda.org
- [3] M. S. Weston, *Fusion Plasma Physics*, WILEY-VCH (2005).
- [4] J. P. Friedberg, *Plasma Physics and Fusion Energy*, Cambridge University Press (2007).
- [5] ITER Organization, www.iter.org
- [6] MATLAB, 2007b, The MathWorks, Natick, Massachusetts.
- [7] R. D. Sydora, "Gyrokinetic and Gyrofluid Theory and Simulation of Magnetized Plasmas", *Lect. Notes Phys.* **739**, 191-219 (2008).
- [8] H. J. De Blank, "Guiding Center Motion", Plasma Physics Lecture Notes, National Research School CPS (Centre for Plasma Physics and Radiation Technology), FOM Institute for Plasma Physics Rijnhuizen (2008).
- [9] P. M. Bellan, *Fundation of Plasma Physics*, Cambridge University Press (2006).
- [10] A. Beck, N. Meyer-Vernet, "The trajectory of an electron in a plasma", *Am. J. Phys.* **76** (10), 934-936 (2008).
- [11] D. Erzen, *et al*, "Simulations of single charged particle motion in external magnetic and electric fields", *Eur. Phys. J. D* **54**, 409-415 (2009).

- [12] H. Goldstein, et al, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison Wesley (2001).
- [13] J. R. Reitz, J. R. Milford, R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic Theory*, 4th ed., Addison-Wesley Iberoamericana (1997).
- [14] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley (1999).
- [15] J. D. Faires, R. Burden, *Numerical Methods*, 2nd ed., Brooks/Cole Publishing Company (1998).
- [16] C. H. Edwards, D. E. Penney, *Differential Equations and Boundary Value Problems*, 2nd ed., Prentice Hall (2000).