Przetwarzanie Sygnałów Cyfrowych

Materiały do ćwiczeń

M. Jabłoński

19 listopada 2019

KAiR, Akademia Górniczo-Hutnicza

Dyskretna transformacja Fouriera

Częstotliwościowa analiza sygnałów ciągłych i cyfrowych (w szczególności dyskretnych) może być realizowana w sposób ciągły ale również cyfrowo z zastosowaniem komputerowych technik obliczeniowych. W zależności od tego jaka jest dziedzina reprezentacji sygnału mamy do czynienia z różnymi wariantami transformacji. W przypadku sygnałów całkowicie cyfrowych mamy do czynienia z dyskretną transformacją Fouriera (**DFT**) która może być realizowana za pomocą układyów cyfrowych i obliczeń numerycznych realizowanych przez programy komputerowe.

Tabela 1: Częstotliwościwa reprezentacja i analiza sygnałów

	pulsacja ω **ciągła**	pulsacja ω **dyskretna**
czas t **ciągły**	CTFT	szeregi Fouriera*
czas t **dyskretny**	DTFT	**DFT**

gdzie:
t – dziedzina (np. czas, odległość, ...),
ω – pulsacja (częstość kątowa),
CTFT – Continous Time Fourier Transform
(*pl.* transformacja Fouriera z czasem ciągłym, ciągła transformacja Fouriera),
DTFT – Discrete Time Fourier Transform
(*pl.* transformacja Fouriera z czasem dyskretnym)
DFT – Discrete Fourier Transform
(*pl.* dyskretna transformacja Fourieria),
* dotyczy sygnałów okresowych.

Transformacja **DFT** jest obecnie najczęściej stosowana w analizie i przetwarzaniu sygnałów. Formalnie, we wszystkich przypadkach, możliwa jest analiza sygnałów o nieskończonym czasie trwania które spełniają warunki wystraczające istnienia transformaty. W praktyce jednak, stosuje się analizę skończonych cyfrowych sygnałów które opcjonalnie mogą być poddane operacji okienkowania. Ze względu na dużą złożoność obliczeniową dyskretnej transformacji Fouriera DFT, powszechnie wykorzystuje się szybką implementację transformacji Fouriera FFT (ang. Fast Fourier Transform). Algorytm FFT charakteryzuje się krótkim czasem obliczeń, jednak wymaga aby liczba próbek sygnału była potęgą dwójki. Wówczas możliwe jest wielokrotne wykorzystanie pośrednich wyników obliczeń.

Sygnał dyskretny $x(n)$ możemy przedstawić jako złożenie (1) sygnału ciągłego $x(t)$ (okresowego lub nieokresowego) z funkcją grzebieniową $\delta_T(t)$ w dziedzinie czasu. Odpowiada to procesowi próbkowania (dyskretyzacji w czasie). Widmo takiego sygnału $X_p(j\omega)$, na podstawie twierdzenia o transformacie iloczynu, stanowi splot (2) widma sygnału ciągłego $X(j\omega)$ oraz widma funkcji grzebieniowej które również jest funkcją grzebieniową $\mathcal{F}\{\delta_{T_p}(t)\} = \frac{1}{2\pi}\delta_{\Omega_p}(\omega)$. $\Omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$ stanowi pulsację próbkującej funkcji grzebieniowej a $f_p = \frac{1}{T_p}$ stanowi częstotliwość próbkowania. Po uproszczeniu uzyskujemy okresowe widmo (3) spróbkowanego sygnału ciągłego, przy czym próbkowany sygnał ciągły nie musi być okresowy.

$$x_\delta(t) = x(n) = x(t)\delta_{T_p}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_p) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_P)\delta(t-nT_p) \quad (1)$$

$$X_p(j\omega) = \mathcal{F}\left\{x(n)\right\} = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \delta_{\Omega_p}(\omega) \quad (2)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_p}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(j(\omega-k\Omega_p)\right) = f_p\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(j(\omega-k\Omega_p)\right) \quad (3)$$

Ponieważ widmo $X_p(j\omega)$ sygnału jest okresowe, wartości kolejnych próbek w dziedzinie czasu $x(n)$ można wyznaczyć jako współczynniki szeregu Fouriera (4). Jeśli spełnione jest twierdzenie o próbkowaniu (nie dochodzi do nakładania się aliasów) można to równanie uogólnić do odwrotnej ciągłej (5) transformaty Fouriera znając wcześniej ostateczną postać wyrażenia (3). Zakładamy tutaj, że wszystkie aliasy zostały skutecznie usunięte za pomocą idealnego filtra dolnoprzepustowego, pozostawiając podstawowy człon widma dla $k = 0$.

$$x(n) = \frac{1}{\Omega_p}\int_{-\frac{\Omega_p}{2}}^{\frac{\Omega_p}{2}} X_p(j\omega)e^{j\omega nT_p}d\omega \quad (4)$$

$$x(n) = \frac{1}{\Omega_p}\int_{-\infty}^{\infty} f_pX(j\omega)e^{j\omega nT_p}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega nT_p}d\omega \quad (5)$$

Zakładając, że próbkowany sygnał $x(t)$ jest skończony i przyczynowy t.j. $x(t) = 0 \iff (t < 0 \vee t > \tau)$, a liczba jego próbek określona jest przez $N = \text{ceil}\left(\frac{\tau}{T_p}\right)$, jego odwrotna transformata Fouriera może być opisana szeregiem (6). Parametr τ można interpretować jako czas akwizycji sygnału lub szerokość okna czasowego nałożonego na pierwotny nieograniczony czasowo sygnał.

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega T_p} \tag{6}$$

Do odwtorzenia wartości próbek sygnału dyskretnego $x(n)$ na podstawie widma $X_p(j\omega)$ i szeregu (6) wystarczy znajomość N próbek dyskretnych widma $X_p(j\omega)$ ulokowanych w przedziale $\omega \in [0, \Omega_p)$. Wygodnie jest przy tym założyć, że próbki widma są równo-odległe i widmo określone jest w następujący sposób $X_p\left(k\frac{\Omega_p}{N}\right) = X_p\left(\frac{k}{N}\frac{2\pi}{T_p}\right)$.

Zbiór dyskretnych próbek sygnału $x(n)$, zbiór wartości transformaty $X_p\left(\frac{k}{N}\frac{2\pi}{T_p}\right)$ oraz wzór (6) formułują układ liniowych równań którego rozwiązaniem jest przepis na widmo dyskretne $X(k)$ (7). Podstawiając W_N jako stały człon wykładniczy $e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N$ otrzymujemy zwięzły wzór na dyskretną transformację Fouriera DFT (8). Analogicznie uzyskuje się przepis na odwrotną dyskretną transformatę Fouriera IDFT (9).

$$X_p\left(\frac{k}{N}\frac{2\pi}{T_p}\right) = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{7}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \tag{8}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \tag{9}$$

Dysktretna transformacja Fouriera przekształca zbiór zespolonych lub rzeczywistych liczb (dyskretnych próbek) $(a_0, a_i, ...a_{N-1})$ w równo-liczny zbiór liczb wynikowych $(A_0, A_i, ...A_{N-1}) \in \mathcal{C}$ należących do zbioru liczb zespolonych, gdzie $a_n = x(n)$ i $A_k = X(k)$ przy założeniu że $0 \leq k \leq (N-1)$.

Oś czasu – oś częstotliwości

Zarówno indeksy n próbek oryginału, jak indeksy k widma są bezwymiarowe. Aby ustalić zwymiarowaną informację o tym, w jakim czasie $t(n)$ została zarejestrowana próbka $x(n)$, należy indeks n przemnożyć przez okres próbkowania $t(n) = nT_p$.

Podobnie w przypadku indeksów charakterystyki widmowej: indeksowi k odpowiada częstotliwość określona przez częstotliwość próbkowania oraz liczbę N próbek sygnału $f(k) = \frac{1}{T_p}\frac{k}{N} = f_p\frac{k}{N}$. Analogicznie można zwymiarować pulsację $\omega(k) = \Omega_p\frac{k}{N} = \frac{2\pi k}{T_p N}$ poszczególnych próbek widma.

Podstawowe własności transformaty DFT

Dyskretna transformacja Fouriera posiada własności ciągłej transformaty Fourier'a. Ze względu na dyskretny charakter sygnału pojawiają się również nowe.

- **Liniowość**:

$$y(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \qquad \Rightarrow \qquad Y(k) = a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k)$$

> **Uwaga:** Jeśli x_1 i x_2 są różnej długości, podczas złożenia liniowego, ciąg należy uzupełnić zerami do dłuższego $N_3 = max(N_1, N_2)$ a wtedy
>
> $$X_1(k) = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N_3}} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1(n) W_{N_3}^{kn}$$
> $$X_2(k) = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N_3}} = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2(n) W_{N_3}^{kn}$$

- **Przesunięcie cykliczne**
  Przesunięcie cykliczne w prawo można zapisać $x(n) = y\,(\mathrm{mod}(n+m, N))$, wówczas:

$$X(k) = W_N^{-mk} Y(k)$$

- **Splot kołowy**

  Odwrotna dyskretna transformata Fouriera iloczynu widm $X_1(k)$ i $X_2(k)$ stanowi splot kołowy sygnałów $x_1(n)$ i $x_2(n)$ o rozmiarze N.

$$y(v) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2(\mathrm{mod}(N + v - n, N))$$

  Inaczej - iloczyn $Y(k) = X_1(k)X_2(k)$ transformat sygnałów $x_1(n)$ i $x_2(n)$ jest transformatą splotu kołowego $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$.

- **Splot liniowy**
  Splot liniowy dla sygnałów dyskretnych definiujemy jako sumę

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

  Na podstawie twierdzenia o splocie liniowym wiadomo że

$$Y(k) = X_1(k) X_2(k) = \sum_{n=0}^{2N-2} y(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{2N-1}} = \sum_{n=0}^{2N-2} y(n) W_{2N-1}^{nk}$$

Uwaga: Wynik splotu liniowego $y(n)$ zawiera $(2N-1)$ próbek. Jeśli obydwa zbiory są ograniczone w czasie, to

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-max(0,n-N+1)}^{min(n,N-1)} x_1(k)x_2(n-k)$$

Oznacza to, że obydwa ciągi wejściowe $x_1(n)$ oraz $x_2(n)$ muszą być uzupełnione zerami do rozmiaru $(2N-1)$ przed wykonaniem operacji splotu liniowego .

- **Symetria**

  Część rzeczywista widma sygnału rzeczywistego jest zawsze parzysta a część urojona jest zawsze nieparzysta.

$$\begin{aligned} X(k) = X^*(\mathrm{mod}(N-k, N)) \\ 0 \geq k \leq N \end{aligned}$$

Inaczej można to zapisać następująco:

$$X\left(\frac{N}{2}+k\right) = X^*\left(\frac{N}{2}-k\right)$$

Uwaga: dyskretne próbki widma, podobnie jak sygnału wejściowego, są indeksowane zwyczajowo od wartości 0 do $N-1$. Środek symetrii widma $X(k)$ sygnału rzeczywistego $x(n)$ wyznacza próbka $n = \frac{N}{2}$ zatem analiza częstotliwościowa rzeczywistego sygnału dyskretnego może być ograniczona do zbioru $\{0, \ldots, \frac{N}{2}-1\}$ w którym jest $\frac{N}{2}$ liczb czysto rzeczywistych i $\frac{N}{2}$ liczb czysto urojonych – łącznie N wartości określających charakterstykę amplitudową i fazową. Częstotliwości (t.j. składowej stałej sygnału) $f = 0.0$Hz odpowiada próbka o indeksie $k = 0$.

Część widma odpowiadająca ujemnym częstotliwościom znajduje się na prawo od próbki $k = \frac{N}{2}$ a odpowiadają im indeksy $\{\frac{N}{2}, \ldots, N-1\}$.

- **Symetria dualna**

$$\begin{aligned} x(n) \equiv X(k) \\ X(\mathrm{mod}(N-k, N)) \equiv Nx(n) \end{aligned}$$

- **Twierdzenie Parsewala**

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

1 Dyskretna transformacja Fouriera - DFT

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z działaniem dyskretnej transformacji Fouriera dla sygnałów cyfrowych spróbkowanych z częstotliwością $f_p = 1000$Hz.

1.1 Ćwiczenie 1

Przeprowadź analizę sygnału $x_1(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ próbkowanego z częstotliwością f_p. Szkic programu znajduje się na rysunku 1. Analizę zacznij od $N = 10$ próbek sygnału wejściowego. Uzupełnij niekompletną implementację transformacji DFT zgodnie ze wzorem (8).

1.2 Zadanie 2

Otrzymany wykres widma nie jest zupełnie poprawny. Uzgodnij skalę częstotliwości (oś x wykresu) aby była oznaczona w jednostkach częstotliwości [Hz]. W sprawozdaniu opisz sposób realizacji.

1.3 Zadanie 3

Usuń z wykresu, tę część widma która odpowiada częstotliwościom ujemnym (por. Podstawowe własności transformaty DFT - Symetria) pozostawiając jedynie użyteczną część. W sprawozdaniu opisz sposób realizacji.

1.4 Zadanie 4

Dodaj do wykresu widmową gęstość ampiltudowy oraz widmową gęstość fazy sygnału.

Uwaga: aby uniknąć wskazań fazy przy bardzo małych wartościach modułu widma możesz się posłużyć poniższym kodem który spowoduje ich wyzerowanie.

```
tol = 10e-5;
Xk( abs(Xk) < tol ) = 0;
```

W sprawozdaniu umieść wykresy.

1.5 Zadanie 5

Wyznacz widmo dla $N = 15$ oraz $N = 20$. Zapoznaj się z widmami a wnioski z obserwacji umieść w sprawozdaniu.

1.6 Zadanie 6

Wyznacz widmo sygnału $x_3(t) = \sin(2\pi f_3 t)$ dla $N = 10$ próbek gdzie $f_3 = 150$[Hz] i zapoznaj się z nim. Spostrzeżenia zapisz w sprawozdaniu. Zjawisko widoczne na wykresach to tzw. **przeciek widma**.

1.7 Zadanie 7

Spróbuj zredukować efekt przecieku stosując do sygnału `xn` (w dziedzinie czasu) 3 różne okna: `triang(N)`, `window(@gausswin,N,2.5)` i jedno inne dowolnie wybrane - zamieść w sprawozdaniu rodzaj wybranego okna oraz wykres. Czy udało się wyeliminować przeciek? Jeśli nie, opisz w sprawozdaniu w jaki inny sposób można to osiągnąć?

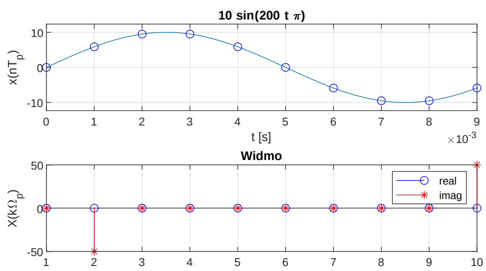
1.8 Zadanie 8

Zdefiniuj sygnał `x = A1*sin(2*pi*f1*t) + A2*sin(2*pi*f2*t);` i sporządź wykresy dla `A2 = 5.0;` oraz `f2 = 200`. Spróbkowany sygnał `xn` przesuń cylicznie w prawo o 2 próbki w prawo, zaobserwuj zmiany w widmie i opisz je w sprawozdaniu.

1.9 Zadanie domowe ZD 1

Zastąp iteracyjną implementajcę dyskretnej transformacji Fourieria macierzową realizacją. Wówczas nie będą potrzbne pętle `for ...end` a wystarczy możenie macierzowe aby uzyskać zespolone dyskretne widmo. Zweryfikuj poprawność działania i zamieść stosowny kod skryptu w sprawozdaniu.

```
clear all; close all
syms t w

N = 10; % liczba próbek
fp = 1000;%Hz
Tp = 1/fp;
A0 = 5;
A1 = 10; f1 = 100; %Hz
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x = x1;

tn = [0:N-1]*Tp; % wsp. czasowe próbek
xn = double(subs(x,t,tn));
Xk = zeros(1,N);
for k = 0:N-1 % impl. wzoru (8)
   for n = 0:N-1
      Xk(k+1) = <uzupelnij>;
   end
end

Xk_fft = fft(xn,N); %funkcja wbudowana
dft_err = sum(abs(Xk_fft-Xk))
disp('DFT error:'); disp(dft_err);

figure;
subplot(2,1,1)
ezplot(x,[tn(1),tn(N)]); hold on; grid on
plot(tn, xn,'ob');
xlabel('t [s]'); ylabel('x(nT_p)');
subplot(2,1,2)

stem(real(Xk),'ob'); grid on, hold on
stem(imag(Xk),'*r');
title('Widmo'),
ylabel('X(k\Omega_p)'); %xlabel('f [Hz]')
legend('real','imag')
```



Rysunek 1: Rekonstrukcja przebiegu $\sin(\omega_0 t)$ na podstawie sygnału dyskretnego.

Wzór sprawozdania

Lab. ?? Temat ćwiczenia				
Nazwisko, Imię	Data wykonania ćw.	Planowy dzień zajęć	Planowa godz. zajęć	Godz. wyk.*
Nazwisko, Imię	rok. mies. dz.	wtorek, czwartek, piątek	gg:mm	

* tylko w przypadku odrabiania ćwiczeń.

Zad. 1: Pytanie/zagadnienie
Odp.:
Zad. 2: Pytanie/zagadnienie
Odp.:
Zad. ...: Pytanie/zagadnienie
Odp.:
Ankieta
Odp.:
Zad domowe ZD1. Polecenie/Rozwiązanie
Odp.:
Zad domowe ZD... Polecenie/Rozwiązanie
Odp.: