Przetwarzanie Sygnałów Cyfrowych

Materiały do ćwiczeń

M. Jabłoński

19 listopada 2019

KAiR, Akademia Górniczo-Hutnicza

Próbkowanie sygnałów ciągłych

Pierwszym etapem zamiany sygnału ciągłego $x(t)$ na cyfrowy $x_p(t_n)$ jest próbkowanie sygnału. W praktyce sprowadza się ono najczęściej do zamiany sygnału ciągłego (t.j. określonego w każdej chwili czasowej $t \in \mathbb{R}$) do ciągu próbek określonego w ściśle określonych chwilach czasowych $t_n = nT_p$, gdzie $n \in \mathbb{C}$ a T_p stanowi okres próbkowania który jest odwrotnością częstotliwości próbkowania $T_p = \frac{1}{f_p}$. Proces próbkowania (w idealnym przypadku) (1) można zamodelować jako złożenie sygnału ciągłego $x(t)$ z funkcją grzebieniową $\delta_T(t)$ (2) utworzoną z powielonej delty Diraca.

$$x_p(t) = x(t)\delta_T(t) \tag{1}$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_p). \tag{2}$$

Aby przeprowadzić częstotliwościową analizę sygnału spróbkowanego $x_p(t)$ za pomocą całkowego przekształcenia Fouriera można rozwinąć funkcję grzebieniową $\delta_T(t)$ w szereg Fouriera X_n (3) a następnie podstawić do wzoru na transformatę Fouriera.

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \tag{3}$$

Ze względu na właściwości dystrybucji $\delta(t)$ granice całkowania: $\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}$ można zamienić na $0^-, 0^+$. W ten sposób uzyskujemy $X_n = \frac{1}{T}$ dla każdego $n \in \mathbb{C}$. W efekcie, funkcję grzebieniową możemy przedstawić w postaci (4), zaś przebieg spróbkowanego sygnału może być przedstawiony jako (5), gdzie $\omega_0 = 2\pi f_p$.

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \tag{4}$$

$$x_p(t) = x(t)\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jn\omega_0 t} \tag{5}$$

Podstawiając wyrażenie końcowe (5) do wzoru na transformatę Fouriera uzyskujemy wyrażenie (6), które na podstawie twierdzenia o przesunięciu widma w dziedzinie pulsacji można zapisać jako (7).

$$X_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x(t)e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-j\omega t}dt \tag{6}$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\omega_0 n) \tag{7}$$

Ciągłe widmo (7) sygnału $x_p(t)$ spróbkowanego funkcją grzebieniową ma zatem charakter periodyczny ze względu cykliczne przesunięcie $(-j\omega_0 n)$ i jest symetryczne względem pulsacji $\omega = 0$. Na wykresie (po prawej i lewej stronie wykresu) pojawi się widmo oryginalne $X(j\omega)$ oraz nieskończona liczba kopii przesuniętych w dziedzinie pulsacji o $\omega_0 n$, gdzie $n \rightarrow^{+}_{-} \infty$. Kopie widma mają ten sam kształ, dlatego określane są jako **aliasy**.

Transformata Fourieria sygnału okresowego

Uwaga: Transformatę Fourieria w sensie granicznym (dystrybucyjnym) można wyznaczyć również dla sygnału okresowego innego niż funkcja grzebieniowa $\delta_T(t)$, czy funkcje trygonometryczne $sin(\omega_0 t)$ oraz $cos(\omega_0 t)$. Widmo $X(j\omega)$ sygnału okresowego obliczane jest jako transformata Fourieria splotu widma funkcji okresowej w czasie trwania jednego okresu $\tilde{x}(t)$ z funkcją grzebieniową o tym samym okresie T_0: $\tilde{x}(t) * \delta_{T_0}(t)$. Sygnał $\tilde{x}(t)$ w przedziale $t \in \left(\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ przyjmuje wartości sygnału $x(t)$. W czasie $t = \frac{T}{2}$ przyjmie wartość $x\left(\frac{T}{2}\right)$ zaś w pozostałych chwilach czasowych wartośc 0. Ostatecznie, transformatę funkcji okresowej możemy zapisać w postaci (8), gdzie X_n stanowią współczynniki zespolonego szeregu Fourieria.

$$X(j\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n\delta\left(\omega - n\omega_0\right) \tag{8}$$

Filtr rekonstruujący

Stosując w dziedzinie pulsacji idealny filtr o prostokątnej charakterystyce i częstotliwości granicznej ω_g można wyeliminować z widma $X_p(j\omega)$ wszystkie **aliasy**, pozostawiając jedynie podstawowy element $X(j\omega)$ dla $n = 1$. Wówczas, możliwe jest idelane odtworzenie sygnału ciągłego $x(t)$ z sygnału spróbkowanego $x_p(t)$ a także analiza częstotliwościwa przefiltrowanego sygnału $x_p(t)$ jest równoważna analizie częstotliwościowej sygnału $x(t)$.

Rekonstrukcja nie jest możliwa w następujących sytuacjach:

- widmo sygnału próbkowanego $x(t)$ jest nieskończone $\underset{\omega \to \pm\infty}{X(j\omega)} \neq 0$,
- graniczna pulsacja nie spełnia warunku $2\omega_g < \omega_0$.

W obu przypadkach dochodzi do nakładania się aliasu z pierwotną trnasformatą $X(j\omega)$ oraz wzajemnego nakładania się aliasów. Skutkuje to wystąpieniem artefaktów. W widmie pojawiają się wówczas składowe częstotliwościowe które w rzeczywsitości nie występują w sygnale $x(t)$ a wynik odwrotnej trnasformaty Fouriera odbiega od oryginału.

Filtr antyaliasingowy - Twierdzenie o próbkowaniu

Aby filtr rekonstruujacy mógł spełnić swoją rolę, wystarczy zagwarantować, że charakterystyka widmowa sygnału ciągłego $x(t)$ przed próbkowaniem spełnia warunek $\omega_0 \geq 2\omega_g$. W praktyce się to jednak rzadko zdarza m.in. z powodu występowania szumów i zakłóceń. Dlatego sygnał ciągły $x(t)$ przed próbkowaniem poddaje się dolnoprzepustowej filtracji analogowej (nie cyfrowej) a częstotliwość graniczna filtra powinna spełniać warunek $f_g \leq \frac{f_P}{2}$, gdzie $f_g = \frac{\omega}{2\pi}$ to częstotliwość graniczna filtra a $f_P = \frac{1}{T_P} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ to podstawowa częstotliwość funkcji grzebieniowej $\delta_T(t)$. Taki filtr określa się mianem: **filtr antyaliasingowy**. Jego rolą jest zapobieganie zajawisku aliasingu polegającego na nakładaniu się aliasów.

Innymi słowy: częstotliwość f_p próbkowania sygnału ciągłego musi być przynajmniej dwukrotnie większa od najwyższej częstotliwości f_g obecnej w próbkowanym sygnale ciągłym: $f_p \geq 2f_g$.

Jeśli ten warunek jest spełniony, analizę częstotliwościwą można ograniczyć do zakresu $f \in \left(-\frac{f_p}{2}, \frac{f_p}{2}\right)$ bez ryzyka popełnienia błędów spowodwanych **aliasingiem**. W praktyce, ze względu, na symetrię widma dla sygnałów rzeczywistych, analizę wykonuje się w zakresie częstotliwości $f \in \left(0, \frac{f_p}{2}\right)$.

Uwaga: Twierdzenie o próbkowaniu wiązane jest szeregien osób które zajmowały się transmisją sygnałów w połowie wieku XX: Shannon, Kotelnikow, Somey. Graniczna częstotliwość f_g określana jest również mianem częstotliwości Nyquista.

1 Rekonstrukcja sygnału ciągłego z widma sygnału próbkowanego

W ćwiczeniu zostanie wykonana rekonstrukcja sygnałów ciągłych na podstawie widma sygnałów próbkowanych z częstotliwością $f_p = 200\text{Hz}$. Widmo sygnałów spróbkowanych w dziedzinie pulsacji określane jest na podstawie definicji przedstawionych we wstępie teoretycznym. W kolejnych krokach stosowany jest filtr rekonstrukcyjny w dziedzinie częstotliwości, odwrotna ciągła transformacja Fouriera i wizualizacja sygnału w dziedzinie czasu. W ten sposób można ocenić zgodność oryginalnego sygnału ciągłego z wynikiem jego rekonstrukcji na podstawie spróbkowanej reprezentacji dyskretnej.

W sprawozdaniu umieść uzyskane wyniki, wykresy, istotne fragmenty kodu skryptu oraz odpowiedzi na pytania.

1.1 Ćwiczenie 1

Przeprowadź rekonstrukcję sygnału ciągłego $\sin(\omega_k t)$ próbkowanego z częstotliwością 200Hz - szkic skryptu przedstawiono na rysunku 1.

1.2 Zadanie 2

Oznacz na wykresie czasowym węzły próbkowania wyznaczone przez okres próbkującej funkcji grzebieniowej $\delta_{T_p}(t)$, gdzie $T_p = \frac{1}{f_p}$.

1.3 Zadanie 3

Wykonaj rekonstrukcję sygnału sinusoidalnego o następujących częstotliwościach:

- a) $\frac{1}{5}f_g$, b) $\frac{6}{5}f_g$, c) $\frac{11}{5}f_g$, d) $\frac{16}{5}f_g$,
- e) $\frac{4}{5}f_g$, f) $\frac{9}{5}f_g$, g) $\frac{14}{5}f_g$.

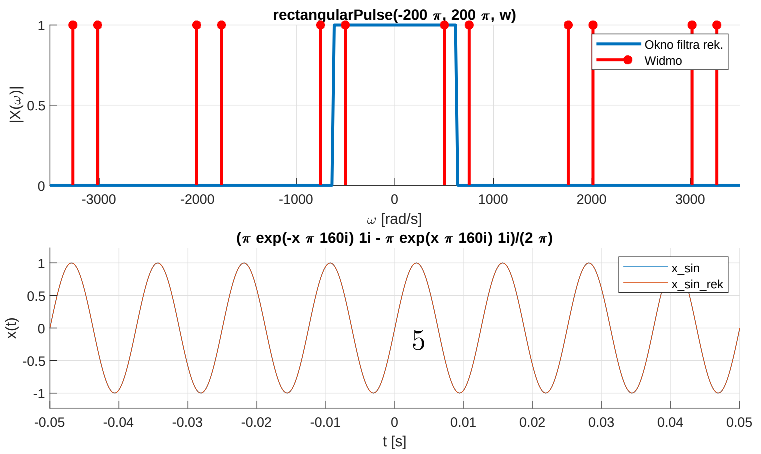
> **Uwaga:** aby ustawić częstotliwość sinusoidy należy zmodyfikować wartość współczynnika `s` który wyznacza pulsację `ws` sygnału `x_sin=sin(ws*t)`.

Zaobserwuj i zanotuj w sprawozdaniu podobieństwa oraz różnice poszczególnych przebiegów czasowych. Wyznacz częstotliwość i fazę sygnału zrekonstruowanego dla każdego przypadku. Wyniki i spostrzeżenia umieść w sprawozdaniu. Zastanów się, czy w wyniku rekonstrukcji można uzyskać funkcję stałą. Jeśli tak, napisz w sprawozdaniu jakie warunki muszą być spełnione i podaj przepis na parametry rekonstrukcji.

1.4 Zadanie 4

Zastąp widmo sygnału sinusiodalnego `X_FT_sin` symetrycznym widmem o kształcie trójkątnym $X_\Lambda(j\omega)$ którego częstotliwość graniczna jest równa f_g, wartość minimalna wynosi 0.0 a maksymlana 1.0. Pomijamy wówczas obliczenia transformaty za pomocą funkcji `fourier()` ale musimy pamiętać o dodaniu aliasów po prawej i lewej stronie. Przeprowadź analizę jak w **Zad. 3** 1.3.

```
clear all; close all;
syms t x w K

fp = 200; fg = fp/2; %Hz
wp = 2*pi*fp; wg = 2*pi*fg;

s = 4/5; ws = s*wg;
x_sin = sin(ws*t);
X_FT_sin_org = fourier(x_sin);

X_FT_sin = X_FT_sin_org + ... % oryginal widma
symsum((subs(X_FT_sin_org, w, w - K*wp ) + ...% 3 aliasy lewe
subs(X_FT_sin_org, w, w + K*wp)), K , 1, 3); % 3 aliasy prawe

FILT_FT = rectangularPulse(-wg,wg,w); % filtr rekonstruujący
x_sin_rek = ifourier(X_FT_sin*FILT_FT); % odwr. tarnsf. Fouriera

BND_t = [-10/fp;10/fp];
%t_SMP = [BND_t(1):1/(10*fp):BND_t(2) ];
BND_w = [-4*wp;4*wp];
w_SMP = [BND_w(1):wp/10:BND_w(2)];

figure; subplot(2,1,1); hold on; grid on;
ezplot(FILT_FT,BND_w); %okno filtru rek.
%ezplot(X_FT_sin,BND_w)
v_num = abs(double(subs(X_FT_sin, w, w_SMP)));
n = find(abs(v_num) == Inf);
stem(w_SMP(n),sign(v_num(n)),'r*', 'LineWidth', 2);
xlabel('\omega [rad/s]'); ylabel('|X(\omega)|')
legend('Okno filtra rek.','Widmo');

subplot(2,1,2); hold on; grid on;
ezplot(x_sin, BND_t);     % syg. próbkowany
ezplot(x_sin_rek, BND_t) % syg. odtworzony
xlabel('t [s]'); ylabel('x(t)')
legend('x\_sin','x\_sin\_rek');
```



Rysunek 1: Rekonstrukcja przebiegu $\sin(\omega_0 t)$ na podstawie sygnału dyskretnego.

1.5 Zadanie 5

Zadanie polega na rekonstrukcji spróbkowanej, nieskończonej symetrycznej fali prostokątnej o częstotliwości $f_s = \frac{4}{5} f_g$, wartości średniej 0.5, amlplitudzie 1.0 i współczynniku wypełnienienia równym 0.5. Ze względu na nieskończoną reprezentację tego sygnału w dziedzinie czasu, najlepiej zdefiniować go jako obraz częstotliwościowy w dziedzinie pulsacji, stosując formułę (8). Współczynniki Xn szeregu Fouriera można wyznaczyć komputerowo jak w ćwiczeniu Lab. *Analiza harmoniczna sygnałów* albo korzystając z tablic. W tym przypadku szereg będzie nieskończony, jednak do symulacji można wykorzystać kilkananaście (kilkadziesiąt) pierwszych wyrazów ciągu, np. $n \in (-20, 20)$. Wykonaj rekonstrukcję sygnału sinusoidalnego o następujących częstotliwościach f_s:

a) $\frac{1}{5} f_g$,

b) $\frac{4}{5} f_g$,

c) f_g,

d) $\frac{6}{5} f_g$.

Napisz w sprawozdaniu, w którym przypadku rekonstrukcja daje najlepsze efekty. Odpowiedź uzasadnij.

Wzór sprawozdania

Lab. ?? Temat ćwiczenia				
Nazwisko, Imię	Data wykonania ćw.	Planowy dzień zajęć	Planowa godz. zajęć	Godz. wyk.*
Nazwisko, Imię	rok. mies. dz.	wtorek, czwartek, piątek	gg:mm	

* tylko w przypadku odrabiania ćwiczeń.

Zad. 1: Pytanie/zagadnienie
Odp.:

Zad. 2: Pytanie/zagadnienie
Odp.:

Zad. . . . : Pytanie/zagadnienie
Odp.:

Ankieta
Odp.:

Zad domowe ZD1. Polecenie/Rozwiązanie
Odp.:

Zad domowe ZD. . . Polecenie/Rozwiązanie
Odp.: