PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA

Proste przekształcenie Fouriera sygnału $x(t)$ definiujemy całką

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \tag{2.1}$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera jest określone całką

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t} dt \tag{2.2}$$

Dla oznaczenia pary transformat Fouriera będziemy w dalszym ciągu stosować notację

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

lub zamiennie

$$X(\omega) = F\{x(t)\}$$
$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\}$$

Przedstawimy obecnie właściwości przekształcenia Fouriera.
Przyjmujemy w dalszym ciągu, że $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ oraz $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$.

1. Liniowość

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \Leftrightarrow \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \tag{2.3}$$

2. Sprzężenie

Dla sygnału $x(t)$ o wartościach zespolonych mamy

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega) \tag{2.4}$$

Transformata Fouriera sygnału rzeczywistego $x(t) = x^*(t)$ spełnia wobec tego związek

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \tag{2.5}$$

3. Symetria sygnału

Transformata Fouriera sygnału hermitowskiego $x^*(-t) = x(t)$ jest rzeczywista

$$X^*(\omega) = X(\omega) \tag{2.6}$$

Szczególnym przypadkiem sygnału hermitowskiego jest rzeczywisty sygnał parzysty $x(-t) = x(t)$.

Transformata Fouriera sygnału antyhermitowskiego $-x^*(-t) = x(t)$ jest urojona

$$-X^*(\omega) = X(\omega) \tag{2.7}$$

Szczególnym przypadkiem sygnału antyhermitowskiego jest rzeczywisty sygnał nieparzysty $-x(-t) = x(t)$.

4. Widmo amplitudowe oraz fazowe sygnału

Transformatę Fouriera jako funkcję zespoloną możemy przedstawić w postaci wykładniczej

$$x(t) \Leftrightarrow X(-\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\varphi(\omega)}$$

Funkcję $|X(\omega)|$ nazywamy widmem amplitudowym sygnału $x(t)$, zaś funkcję $\varphi(\omega)$ widmem fazowym.

Dla sygnałów rzeczywistych widmo amplitudowe jest funkcją parzystą

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

a widmo fazowe funkcją nieparzystą

$$-\varphi(-\omega) = \varphi(\omega)$$

5. Symetria przekształcenia

$$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{2.8}$$

6. Zmiana skali

$$x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} X\left(j\frac{\omega}{\alpha}\right) \tag{2.9}$$

7. Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega)\, e^{-j\omega t_0} \tag{2.10}$$

8. Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$x(t)\, e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \tag{2.11}$$

Korzystając ze wzorów Eulera otrzymujemy przydatne związki

$$\begin{aligned} x(t)\cos\omega_0 t &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)\right] \\ x(t)\sin\omega_0 t &\Leftrightarrow \frac{j}{2}\left[X(\omega+\omega_0) - X(\omega-\omega_0)\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

9. Splot w dziedzinie czasu

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau) \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega) \tag{2.13}$$

10. Splot w dziedzinie częstotliwości

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(\omega - \nu) d\nu \qquad (2.14)$$

11. Transformata części rzeczywistej i urojonej sygnału

$$\mathcal{Re}\left\{x(t)\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega) + X^{*}(-\omega)\right]$$

$$\mathcal{Im}\left\{x(t)\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[X(\omega) - X^{*}(-\omega)\right] \qquad (2.15)$$

12. "Pole" pod wykresem funkcji

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \qquad (2.16)$$

13. Różniczkowanie w dziedzinie czasu

$$\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(\omega) \qquad (2.17)$$

Zakres zastosowań twierdzenia (2.17) jest ograniczony z uwagi na dość silny warunek ograniczający - $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$.

14. Całkowanie w dziedzinie czasu

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega} \qquad (2.18)$$

15. Różniczkowanie w dziedzinie częstotliwości

$$(-jt)^n x(t) \Leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \tag{2.19}$$

16. Twierdzenie Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{2.20}$$

17. Twierdzenie Rayleigha

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega \tag{2.21}$$

18. Twierdzenie o momentach

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) dt$$

$$(-j)^n m_n = \frac{d^n X(0)}{d\omega^n} \tag{2.22}$$

$$n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Przydatnym w teorii i praktyce przekształcenia Fouriera jest impuls Diraca (delta Diraca). Impuls Diraca można określić jako funkcjonał przypisujący danej funkcji $x(z)$ wartość jej próbki $x(0)$

$$\delta:\ x(z) \to x(0)$$

$$\delta\{x(z)\} = x(0)$$

Przyporządkowanie to zapisuje się w postaci całkowej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)x(z)dz = x(0)$$

Właściwości impulsu Diraca wynikają z powyższej definicji całkowej.

Próbkowanie

$$\int_{b}^{a} \delta(z - z_0)\, x(z)dz = \begin{cases} x(z_0), & z_0 \in [a, b] \\ 0, & z_0 \notin [a, b] \end{cases} \qquad (2.23)$$

Właściwość tę nieformalnie możemy zapisać w postaci

$$\delta(z - z_0)\, x(z) = x(z)\, \delta(z - z_0)$$

"Pole" impulsu Diraca:

$$\int_{b}^{a} \delta(z - z_0)dz = \begin{cases} 1, & z_0 \in [a, b] \\ 0, & z_0 \notin [a, b] \end{cases} \qquad (2.2$$

Zmiana skali

$$\delta(\alpha z) = \frac{\delta(z)}{|\alpha|} \qquad (2.2$$

Splot impulsu Diraca z funkcją

$$\delta(z - z_0) * x(z) = x(z - z_0) \qquad (2.2$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

$x(t)$	$X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\mathbb{1}(t)$	$\pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$
$\operatorname{sgn}(t)$	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1
$\delta_T(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \dfrac{1}{T} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_n T} = \omega_0 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$
$e^{\pm jn\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \pm \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\Pi_T(t)$	$T \operatorname{Sa} \dfrac{\omega T}{2}$
$\Lambda_T(t)$	$\dfrac{T}{2} \operatorname{Sa}^2 \dfrac{\omega T}{4}$
$\operatorname{Sa}(Wt)$	$\dfrac{\pi}{W} \Pi_{2W}(\omega)$
$\operatorname{Sa}^2(Wt)$	$\dfrac{\pi}{W} \Lambda_{4W}(\omega)$
$\mathbb{1}(t)\, e^{-\alpha t}, \ \alpha > 0$	$\dfrac{1}{\alpha + j\omega}$
$e^{-\alpha \lvert t \rvert}, \ \alpha > 0$	$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
$\dfrac{1}{t^2 + \alpha^2}$	$\dfrac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha \lvert \omega \rvert}$