

ISSN 0239-6114

SU 1686



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# TEORIA STEROWANIA

Jerzy Baranowski, Krystyna Hałdak  
Adam Korytowski, Wojciech Mirkowski  
Andrzej Tutaj

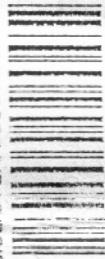
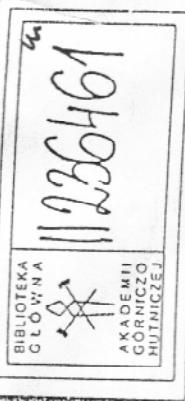
## TEORIA STEROWANIA

MATERIAŁY POMOCNICZE  
DO ĆWICZEŃ LABORATORYJNYCH

Podręcznik  
Wojciecha Mirkowskiego

OGŁOSZENIE O DOSTĘPNOŚCI NIEKONVENCYJNEJ  
Rok 2007

TEORIA STEROWANIA / MATERIAŁY POMOCNICZE DO ĆWICZEŃ LABORATORYJNYCH / Pod red. W. Mirkowskiego / SU 1686



SU 1686 pozytywu wydawnictw dydaktycznych  
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 2007  
ISSN 0239-6114

Kierownik Naukowy Uczelnianych Wydawnictw  
Naukowo-Dydaktycznych AGH Jan Sos

Z-ca Redaktora Naukowego Beata Barzeczeńska-Wojda

Komitet Naukowy UWND AGH:  
Kazimierz Jezierski (przewodniczący),  
Edward Frejtak,  
Tadeusz Sawik,  
Ryszard Überman,  
Adam Paliwoda Wójcik,  
Mariusz Zieliński

Recenzent prof. dr inż. Henryk Górecki

BIBLIOTEKA GŁÓWNA AGH



1000212740



Redakcja: Małgorzata Koch

Projekt okładki, strony tytułowej i redakcja techniczna: Beata Barzeczeńska-Wojda

Skład komputerowy „Artura”, tel. 012 423 10 10

Druk i opawa „Druk”, tel. 012 636 32 40, www. druk.pl

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych AGH

al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków  
tel. 012 617 32 28, tel/fax 012 616 40 38  
e-mail: redakcja@wydawnictwaugh.pl  
www.WydawnictwaAGH.pl

## Spis treści

Przedmowa .....	7
1. Portrety fizowe systemów liniowych .....	9
1.1. Podstawowe pojęcia .....	9
1.2. Portrety fizowe .....	10
1.3. Typowe portrety fizowe .....	13
1.4. Przebieg ćwiczenia .....	13
1.5. Opracowanie wyników .....	13
1.6. Literatura .....	13
2. Czystodliwościowe kryteria stabilności .....	19
2.1. Podstawowe pojęcia .....	19
2.2. Twierdzenie Michajłowa .....	20
2.3. Kryterium Nyquista .....	22
2.4. Systemy z opóźnieniem .....	27
2.5. Przebieg ćwiczenia .....	28
2.6. Literatura .....	29
3. Pierwsza metoda Lapunowa .....	30
3.1. Podstawowe pojęcia .....	31
3.2. Stabilność w sensie Lapunowa .....	33
3.3. Liniowe przybliżenie systemu nieliniowego w zerowym punkcie równowagi .....	34
3.4. Pierwsza metoda Lapunowa .....	36
3.5. Przebieg ćwiczenia .....	36
3.6. Przygotowanie do zajęć .....	38
3.7. Przykłady obliczeniowe .....	38
3.8. Literatura .....	43
4. Druga metoda Lapunowa i twierdzenie LaSalle'a .....	44
4.1. Podstawowe pojęcia .....	44
4.2. Twierdzenie Lapunowa .....	46

4.3. Zasada LaSalle'a .....	48	10. Observatory asymptotyczne .....	141
4.4. Przebieg ćwiczenia .....	55	10.1. Obserwator Luenbergera pełnego rzędu .....	141
4.5. Zadania do rozwiązania .....	56	10.1.1. Przebieg ćwiczenia .....	144
4.6. Przykład obliczeniowy .....	57	10.2. Redukowany obserwator Luenbergera .....	144
4.7. Literatura .....	62	10.2.1. Przebieg ćwiczenia .....	147
5. Kryterium kola i twierdzenie Popova .....	63	10.3. Obserwator Luenbergera dla systemu nieliniowego .....	147
5.1. Kryterium kola .....	63	10.3.1. Przebieg ćwiczenia .....	150
5.2. Twierdzenie Popova .....	69	10.4. Literatura .....	150
5.3. Wykorzystanie MATLAB-u .....	76	11. Kompensoator dynamiczny .....	151
5.4. Przebieg ćwiczenia .....	77	11.1. Kompensoator dynamiczny oparty .....	151
5.5. Przykład obliczeniowy .....	78	na zlinearyzowanym modelu obiektu .....	151
5.6. Literatura .....	79	11.2. Regulator opymalny w problemie liniowo-kwadratowym .....	153
6. Optymalizacja parametryczna .....	80	2. nieskończonym horyzontem .....	155
6.1. Podstawowe pojęcia .....	80	11.3. Przykłady .....	155
6.2. Analityczne rozwiązywanie zadania opymalizacji parametrycznej .....	91	11.4. Literatura .....	162
6.3. Numeryczne rozwiązywanie zadania opymalizacji parametrycznej .....	96	12. Filtar Kalmana-Bucy .....	163
6.4. Przebieg ćwiczenia .....	99	12.1. Model systemu .....	163
6.5. Przykłady obliczeniowe .....	100	12.2. Poświetlenie zadania .....	164
6.6. Literatura .....	107	12.3. Filt Kalmana-Bucy .....	164
7. Systemy dyskretnie .....	108	12.4. Przykłady .....	166
7.1. Sterowanie komputerowe .....	108	12.5. Literatura .....	167
7.2. Dobór okresu próbkowania .....	110	13. Stabilizacja systemów dyskretnych .....	168
7.3. Schematy różnicowe .....	112	13.1. Stabilność w systemach dyskretnych .....	169
7.4. Dodatkowe uwagi na temat dynamiki systemów dyskretnych .....	114	13.2. Regulator dead-beat .....	170
7.5. Zadania do rozwiązania .....	120	13.3. Obserwator Luenbergera dla systemu dyskretnego .....	173
7.6. Literatura .....	121	13.4. Dyskretny problem liniowo-kwadratowy .....	174
8. Układy liniowe z regulatorami przekąnikowymi .....	122	13.5. Dyskretnie dynamiczne sprzężenie zwrotne .....	175
8.1. Wstęp .....	122	13.6. Zadania do rozwiązania .....	177
8.2. Typy przekaźników i konstrukcja portretu lązowego .....	123	13.7. Literatura .....	177
8.3. Reżim ślizgowy .....	126	14. Systemy o „dziwnej” dynamicie .....	178
8.4. Dynamika reżimu ślizgowego .....	128	14.1. Układy o dynamiczce chaotycznej .....	178
8.5. Cykle graniczny .....	130	14.2. System Lorenza .....	179
8.6. Przebieg ćwiczenia i opracowanie wyników .....	135	14.3. Obwód elektryczny Chua .....	181
8.7. Literatura .....	135	14.4. Odzworowanie logistyczne .....	183
9. Zbiory stanów osiągalnych .....	136	14.5. Zadania do rozwiązania .....	185
9.1. Zbiory stanów osiągalnych w systemie liniowym drugiego rzędu .....	136	14.6. Literatura .....	185
9.2. Zbiory osiągalności w systemie nieliniowym drugiego rzędu .....	138	Skorowidz .....	186
9.3. Literatura .....	140		

## Przedmowa

Skrypt jest przeznaczony głównie dla studentów trzeciego i czwartego roku kierunku automatyka i robotyka, który jest prowadzony na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH.

Skrypt zawiera wybrane zagadnienia z teorii sterowania i stanowi materiał pomocniczy do ćwiczeń laboratoryjnych. Teoria sterowania jest obecnie bardzo rozległą dziedziną, wiedzą w dyscyplinie automatyka i robotyka, uprawianą nie tylko w naukach technicznych, i ma duże znaczenie dla praktyki. Metody teorii sterowania wykorzystuje się w bardzo wielu dziedzinach nauk stosowanych.

Burzliwy rozwój technik komputerowych i elektroniki wymusił wyodrębnienie z obszaru teorii sterowania nowych przedmiotów nauczania, takich jak sterowanie w czasie rzeczywistym, sterowanie komputerowe, modelowanie systemów dynamicznych, wyspecjalizowane metody numeryczne itp. Wykład z teorii sterowania jest również poprzedzony wykładem z podstaw automatyki, a jego naturalną kontynuacją są zajęcia z metod optymalizacji i sterowania opymalnego. Każdy z wymienionych przedmiotów zawiera w sobie odpowiednie zajęcia rachunkowe, laboratoryjne lub projektowe. Z tego powodu zaproponowano jedynie 14 ćwiczeń z następujących zagadnień: portrety fazowe systemów liniowych, częstotliwościowe kryteria stabilności, piernsza metoda Lapunowa, druga metoda Lapunowa i twierdzenie LaSalle'a, kryterium koła i twierdzenie Popova, opymalizacja parametryczna, systemy dyskretnie, układy liniowe z regulatorami przekształkowymi, zbioru stanów osiągalnych, obserwatory asymptotyczne, kompensator dynamiczny, filtr Kalmana-Bucy, stabilizacja systemów dyskretnych, systemy o „dziwnej” dynamicie. Przedstawiona problematyka nie wyczerpuje wszystkich zagadnień teorii sterowania, ale daje podstawy do projektowania układów regulacji. Realizacja niektórych tematów wymaga kilku spotkań. Ostatni temat, dotyczący „dziwnej dynamiki”, ma zwrócić uwagę Czytelnika na fakt, że mala nieliniowa perturbacja układu liniowego tworzy nowy układ nieliniowy o dynamicie niespotykanej w układzie liniowym (bez malej perturbacji).

Czytelnikowi proponuję się następująca „filozofia” projektowania układów sterowania automatycznego. Najpierw należy rozpoznać podstawowe własności dynamiczne układu, by wytłumaczyć własności do poprawy. Poprawę własności proponuje się wzywać poprzez odpowiednie sprzeżenia zwrotne. Sprzężenia zwrotne zaleca się

projektować dla układu po liniaryzacji i następnie weryfikować na modelu nielinijnym rozwijać przed liniaryzacją (na następnie na obiekcie rzeczywistym), badając odpowiednie obszary przy ciągania asymptotycznego (zakres poprawności działania regulatora).

Wykłady z teorii sterowania prowadzą od roku 1974 na różnych kierunkach studiów. Mimożeń wiec okazje, by obserwować ważenie uwarunkowania rozwoju teorii i technologii. Maszyny i urządzenia analogowe, powszechnie używane do ćwiczeń w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku, zostały wyparte przez komputery. Technologia cyfrowa ostatecznie zupełnie zupełnie nowe możliwości obliczeniowe, analityczne, komputerowe i implementacyjne. Wystarczy wspomnieć, że komputery umożliwiają prowadzenie skomplikowanych eksperymentów symulacyjnych, a także pełną rolę regulatorów w układach sterowania w czasie rzeczywistym. Jest rzeczą naturalną, że znajduje to odbiecie w teorii sterowania, która wciąż się rozwija, tworząc narzędzia uwzględniające specyfikę cyfrowej reprezentacji informacji.

Na zakończenie składamy serdeczne podziękowania Recenzentowi, Panu Profesorowi Henrykowi Góreckiemu za cenne uwagi, które pozwoliły udoskonalić ostateczną wersję skrypu.

Dziękujemy również Redakcji Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych AGH, w szczególności Panu Redaktorowi Janowi Sasowi, Panu Redaktor Beatice Barszczewskiej-Wojciej i Panu Małgorzacie Koch, za życzliwą współpracę podczas procesu wydawniczego skrypu. Dziękujemy za staranne wykonanie skłodu komputerowego.

Dziękujemy także Dziekanowi Wydziału EAlE AGH Prof. Tomaszowi Szmitowemu za dotację, która umożliwiła wydanie skrypu.

Wojciech Mirkowski

Kraków, 20.07.2006

## 1. Portrety fazowe systemów liniowych

Celem ćwiczenia jest analiza własności dynamicznych liniowego układu autonomicznego drugiego rzędu. Dla systemu takiego, poza obserwacją przebiegów czasowych, istnieje możliwość badania własności dynamicznych na płaszczyźnie fazowej, a w szczególności – badana wpływem współczynników wielomianu charakterystycznego na postać obserwowanych trajektorii pozwalających zaklasyfikować modele.

Użykiwanie na płaszczyźnie fazowej trajektorii pozwala ją zaklasyfikować modelowane układy do jednej z trzech grup układów:

- 1) niesalubnych,
- 2) stabilnych,
- 3) asymptotycznie stabilnych.

1.1. Podstawowe pojęcia  
Rozważony zostanie liniowy układ autonomiczny opisany równaniem różniczkowym stanu

$$x(t) = Ax(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0, \quad A - macierz rzeczywista n \times n. \quad (1.1)$$

Zakładamy  $n = 2$ , czyli system jest drugiego rzędu. Własności dynamiczne układu (1.1) (a więc także stabilność) zależą od rozkładu wartości własnych macierzy A. Jak wiadomo, system liniowy o nieosobliwej macierzy stanu ma jeden punkt równowagi w zerze. Badanie stabilności systemu (1.1) rozpoczynamy od określenia pierwiastków wielomianu charakterystycznego macierzy A, czyli widma macierzy A:

$$\lambda(A) = \{\lambda \in \mathbb{Z} : \det(\lambda I - A) = 0\}, \quad \text{gdzie } Z \text{ oznacza przestrzeń liczb zespolonych.}$$

Można sformułować następujące warunki asymptotycznej stabilności i stabilności układu opisanego równością (1.1):

- Układ (1.1) jest asymptotycznie stabilny  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ .
- Układ (1.1) jest stabilny  $\Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$  oraz klatki Jordana macierzy J odpowiadające wartościom własnym macierzy A położonym na osi urojonej mają wymiar

$1 \times 1$ . Innymi słowy, wartości własne o częściach rzeczywistych równych zeru są związane z liniowymi dzielnikami elementarnymi; inaczej – są pojedynczymi zerami wielomianu minimalnego: jeszcze inaczej – z każdą wartością własną  $\lambda$  o krotności  $m$  i taką, że  $\operatorname{Re}\lambda = 0$ , jest związków  $m$  liniowo niezależnych wektorów własnych.

Rozwiązań równania stanu (1.1) ma postać

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Macierz fundamentalna  $e^{At}$  dla ustalonego  $t \in R$  można przedstawić w postaci

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}. \quad (1.2)$$

$J = P^{-1} A P$  jest we wzorze (1.2) kanoniczną postacią Jordana macierzy  $A$ , a  $P$  jest macierzą, której kolumnami są odpowiednio zestawione wektory własne lub główne macierzy  $A$ . Znając  $J$ , łatwo można podać wzór analityczny na macierz  $e^{At}$ , a w konsekwencji z równości (1.2) obliczyć  $e^{At}$ .

## 1.2. Portrety fazowe

Niech w równaniu (1.1)  $t \in [0, \infty) = T$ . Wykres rozwiązań  $x$  (trajektoria) równania (1.1) jest krzywą w przestrzeni  $R^n \times T$ . Rzut trajektorii  $x$  na przestrzeń stanu  $R^n$  stanowi trajektorię fazową rozważanego układu.

Dla układów drugiego rzędu przestrzeń stanu jest płaszczyzną i w tym wypadku interpretacja graficzna trajektorii fazowej jest szczególnie łatwa. Przestępem stanu nazwy się czasem przestążeniem fazowym, gdy zmienne stanu równania różniczkowego rzędu  $n$  powiązane są zależnościami  $\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$ , czyli macierz stanu  $A$  jest macierzą Frobeniusa. Stąd wywodzi się nazwa portretu fazowe, kiedy określamy rodzinę trajektorii fazowych rozpoczętych się z różnych warunków początkowych.

### Przykład 1.1

Załóżmy, że macierz  $A$  jest w postaci kanonicznej Jordana i ma wartości własne  $\lambda_1 = -1$  i  $\lambda_2 = -4$ . Równanie układu (1.1) ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

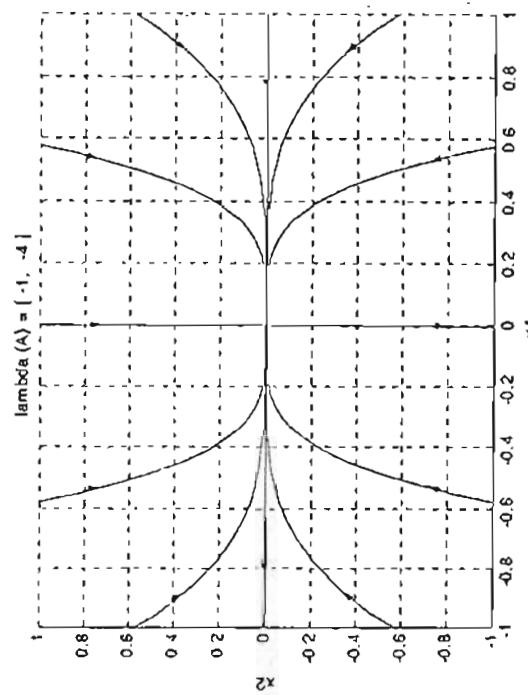
Po wyrugowaniu czasu i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy równanie

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{4x_2}.$$

Całkujemy obustronne \(\int\_{x\_{10}}^{x\_1} \frac{dx\_1}{x\_1} = \int\_{x\_{20}}^{x\_2} \frac{dx\_2}{4x\_2}\) i w wyniku otrzymujemy równanie rodzinny swobodnych trajektorii fazowych systemu na płaszczyźnie stanu w postaci

$$x_2 = x_1^4 \frac{x_{20}}{x_{10}}.$$

Rodzina tych trajektorii fazowych (czyli portret fazowy) jest przedstawiona na rysunku 1.1. Dodatkowo strzałkami oznaczono kierunek poruszania się punktu  $(x_1(t), x_2(t))$  z upływem czasu  $t$ .



Rys. 1.1. Węzeł asymptotycznie stabilny dla macierzy  $A$  w postaci kanonicznej Jordana

Ten typ portretu fazowego nosi nazwę węzła. Używa się również określenia: punkt równowagi typu węzła. Występuje w przypadku dwóch rzeczywistych wartości własnych jednego znaku. W naszym przypadku węzeł jest asymptotycznie stabilny, ponieważ obie wartości własne są ujemne, co powoduje, że trajektorie systemu zmierzają do zerowego punktu równowagi. Jak wiadomo, system liniowy o nieosobliwej macierzy stanu ma jedyne punkty równowagi w zerze. Gdyby wartości własne były dodat-

nie, otrzymaliśmy węzeł niestabilny. „Ośie” węzła są wyznaczone przez kierunki wektorów własnych, które w przypadku macierzy Jordana pokrywają się z osiami  $x_1$  i  $x_2$ .

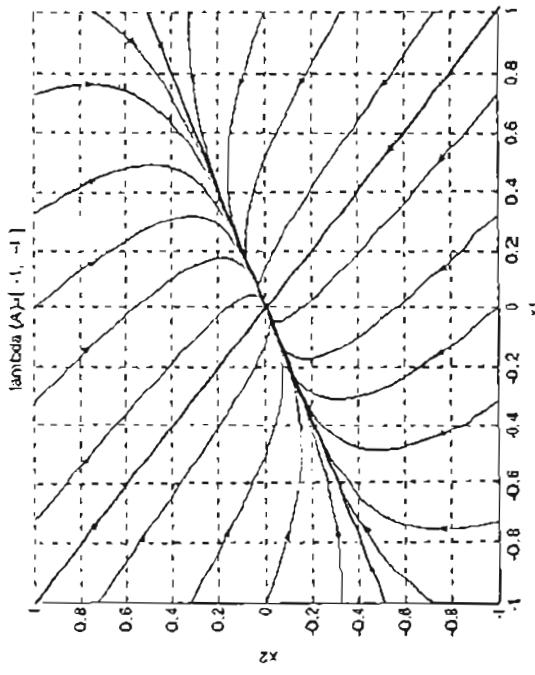
Rozważmy teraz przypadek, gdy macierz  $A$  ma wartości własne  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$  (jak wżej), ale nie jest w postaci kanonicznej Jordana

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Macierz ta można sprowadzić do postaci kanonicznej poprzez przekształcenie przez podobieństwo  $J = P^{-1}AP$ , gdzie macierz przekształcenia  $P = [w_1 \ w_2]$  składa się z wektorów własnych macierzy  $A$ . Przypomnijmy, że wektor własny  $w_i \neq 0$  związany z liczbą wartościową własną spełnia zależność  $(\lambda_i - A)w_i = 0$ . Rozwiązujeć ten układ równań, otrzymamy na przykład:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trajektorie fazowe przedstawione są na rysunku 1.2. Zauważmy, że w porównaniu z rysunkiem 1.1, trajektorie fazowe są obrócone i przeskalowane. „Osie” węzła są jak poprzednio, półproste o kierunkach wektorów własnych macierzy  $A$  oznaczone na rysunku linią pogrubioną. Oczywiście w tym przypadku, ponieważ macierz  $A$  nie jest w postaci kanonicznej Jordana, wektory te nie pokrywają się z osiami współrzędnych.



Rys. 1.2. Wzór asymptotycznego stabilnego dla macierzy  $A$ , który nie jest w postaci kanonicznej

Zauważmy, że trajektorie fazowe, które startują z punktów leżących na prostych o kierunkach wektorów własnych i przechodzące przez zero, są zawarte w tych prostych. Przypomnijmy, że każda taka prosta jest podprzeszternią niezmiennej względem macierzy  $A$ .

Analizowany portret fazowy został narysowany w MATLAB-ic za pomocą poniższego ciągu instrukcji:

```

A=[ -2 2; 1 -3]; T=6;
[w J]=eig(A);
figure; hold on; grid on;
a=0:(pi/10):(2*pi); x1=[cos(a); sin(a)];
x2=x1 ./ {max(abs(x1));max(abs(x1))}, M=size(x2,2);
for l=1:N
    x0=x2(:,l);
    gause=sim('MojModel',T);
    plot(x(:,1),x(:,2),'k-');
    plot([0,w(1,1)], [0,w(2,1)], 'k-');
    plot([0,w(1,2)], [0,w(2,2)], 'k-');
    title(['lambda(A)=',num2str(J(1,1)),',',...
        'num2str(J(2,2)),', '']);
    xlabel('x1'); ylabel('x2');
end

```

Nazwa 'MojModel' występująca w instrukcji sim jest nazwą, pod jaką został zapisany model simulinkowy systemu.

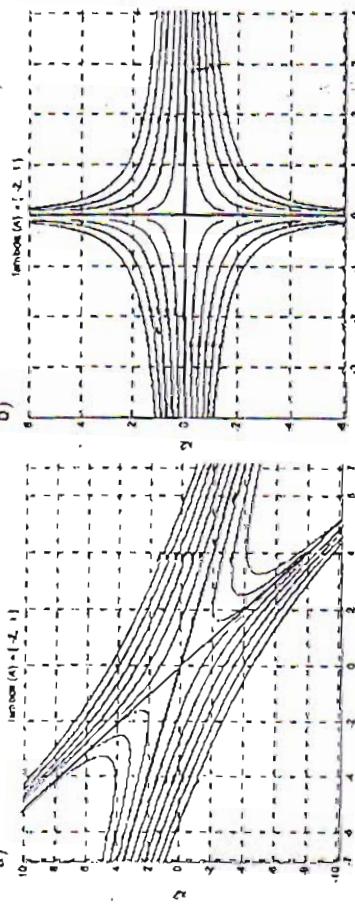
### 1.3. Typowe portrety fazowe

Dla rzeczywistego układu drugiego rzędu można wyrobić dziesięć różnych przypadków rozkładu wartości własnych macierzy  $A$ . W tabeli 1.1 zestawiono te przypadki wraz z odpowiadającymi im nazwami portrów fazowych.

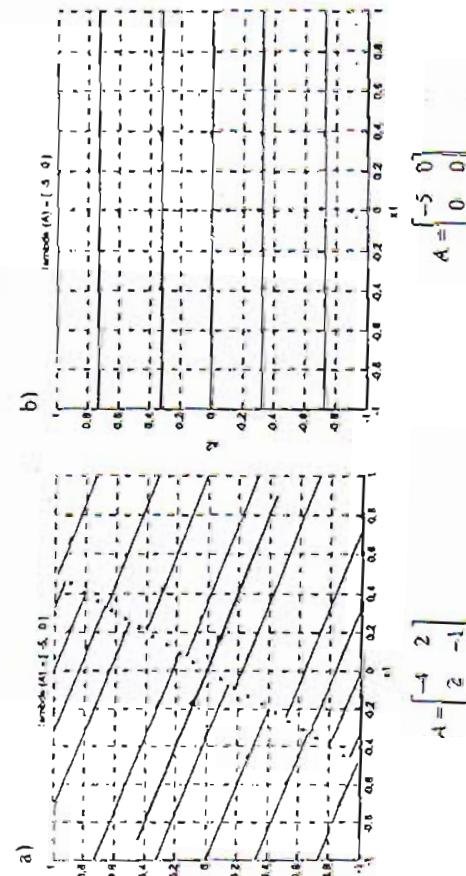
Przedstawiony w poprzednim podrozdziale tryb postępowania może być z powodzeniem zastosowany do analizy dowolnego portetu fazowego układu drugiego rzędu.

Tabela 1.1

Wartości własne	Typ punktu
1) dwie wartości własne rzeczywiste różne, ale jednakożnego znaku (obie ujemne lub obie dodatnie)	węzeł (asymptotycznie stabilny lub niestabilny)
2) dwie wartości własne rzeczywiste przeciwnych znaków (jedna dodatnia, druga ujemna)	siodło
3) dwie wartości własne niespolone sprzężone o niezerowych częściach rzeczywistych	ognisko (asymptotycznie stabilne lub niestabilne)
4) dwie wartości własne urojone sprzężone	środek
5) dwie wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i tylko jeden wektor własny liniowo niezależny	węzeł zdegenerowany
6) dwie wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i związane z nimi dwa wektory własne liniowo niezależne	gwiazda
7) dwie wartości własne rzeczywiste, jednak równe (rzeczywiste, jednak równa zero)	-
8) dwie wartości własne zerowe, jeden liniowo niezależny wektor własny	-
9) $\det(A) = 0$	-
	Dwie wartości własne rzeczywiste różne



Rys. 1.1. Dwie wartości własne rzeczywiste różne, ale jednakożnego znaku (obie ujemne lub obie dodatnie):  
 a) trajektorie dla macierzy  $A = [-1 -2; 0 1]$ ; b) trajektorie dla macierzy  $A = [2 2; -3 2]$ .



Rys. 1.2. Dwie wartości własne rzeczywiste przeciwnych znaków:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ , macierz  $A$  w postaci kanonicznej (a); postać macierzy  $A$  dowolna (b).

Dwie wartości własne rzeczywiste różne, ale jednakożnego znaku (obie ujemne lub obie dodatnie):  
 a) trajektorie dla macierzy  $A = [1 2; 0 1]$ ; b) trajektorie dla macierzy  $A = [-2 0; 0 1]$ .

Tabela 1.2

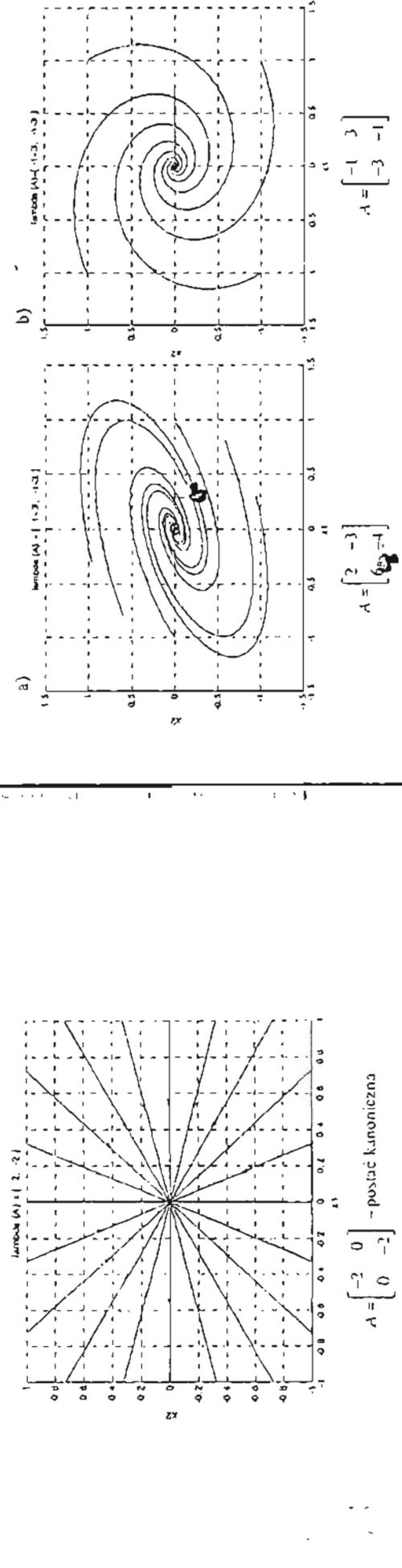
Wartości własne	Typ punktu
1) dwie wartości własne rzeczywiste różne, ale jednakożnego znaku (obie ujemne lub obie dodatnie)	węzeł (asymptotycznie stabilny lub niestabilny)
2) dwie wartości własne rzeczywiste przeciwnych znaków (jedna dodatnia, druga ujemna)	siodło
3) dwie wartości własne niespolone sprzężone o niezerowych częściach rzeczywistych	ognisko (asymptotycznie stabilne lub niestabilne)
4) dwie wartości własne urojone sprzężone	środek
5) dwie wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i tylko jeden wektor własny liniowo niezależny	węzeł zdegenerowany
6) dwie wartości własne rzeczywiste równe, niezerowe i związane z nimi dwa wektory własne liniowo niezależne	gwiazda
7) dwie wartości własne rzeczywiste, jednak równe (rzeczywiste, jednak równa zero)	-
8) dwie wartości własne zerowe, jeden liniowo niezależny wektor własny	-
9) $\det(A) = 0$	-
	Dwie wartości własne rzeczywiste różne

Analizowany uprzednio (zob. rys. 1.1 i 1.2 – wartości własne rzeczywiste, różne o tych samych znakach) węzeł należy również zaliczyć do tej grupy portretów. Kolejne przedstawione są na rysunkach 1.3 i 1.4. Przedstawiony na rysunku 1.3 portret, zwany siodłem, dotyczy przypadku, gdy macierz stanu  $A$  ma wartości własne rzeczywiste, niezerowe o różnych znakach. W tabeli 1.1 jest to przypadek 2. Początek układu jest w tym przypadku niestabilnym punktem równowagi.  
 Interesujący jest przypadek, kiedy jedna z wartości własne jest równa零. Zwróćmy uwagę, że macierz  $A$  systemu (1.1) jest wówczas osobliwa i system ma nieskończono wiele punktów równowagi. Portret fazowy jest pokazany na rysunku 1.4. Trajektorie na płaszczyźnie stanu  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ . Zbiory punktów równowagi na rysunkach 1.4a i b stanowią proste oznaczone kropkami. Jeżeli obie wartości własne są równe zero, to każdy punkt płaszczyzny jest punktem równowagi; i zarazem trajektorią fazową układu.

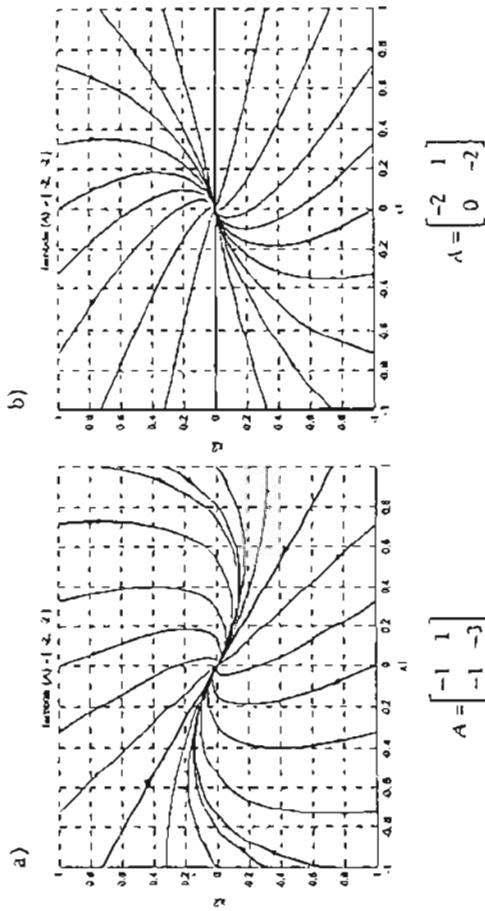
stanu  $A$ ) jest diagonalna. Portret fazyowy dla takiej macierzy jest przedstawiony na rysunku 1.5. W przeciwnym wypadku macierz Jordana ma postać kratki jordanowskiej z jedynką nad przekątną (zob. np. rys. 1.6b). W tabeli 1.1 przypadek ten jest oznaczony numerem 5 (Takahashi 1976, s. 99).

Wartości własne zespolone (para zespolona sprzężona)

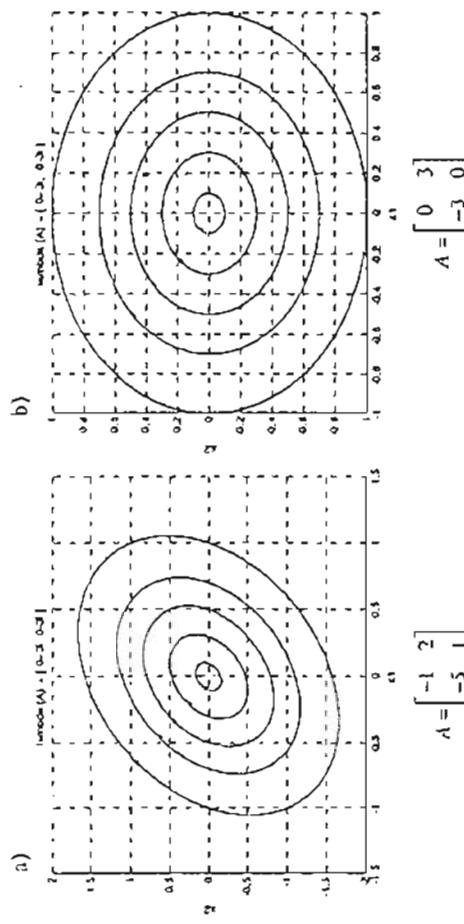
Portret fazyowy układu oscylacyjnego liniowego przedstawiony na rysunku 1.7 nazywany ogniskiem. Natomiast portret fazyowy układu nietlumionego przedstawiony na rysunku 1.8 nosi nazwę środka.



Rys. 1.5. Gwiazda stabilna  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ . Dwa wektory własne linowo niezależne



Rys. 1.6. Węzeł stabilny. Jeden wektor własny i jeden główny.  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ . Postać macierzy  $A$  dowolna (a); macierz  $A$  w postaci kanonicznej (b)



Rys. 1.7. Ognisko stabilne. Wartości własne zespolone o ujemnej części rzeczywistej  $\lambda_1 = -1 + 3j, \lambda_2 = -1 - 3j$ . Postać macierzy  $A$  dowolna (a); macierz  $A$  w postaci kanonicznej (b)



#### 1.4. Przebieg ćwiczenia

Przed przystąpieniem do ćwiczenia, należy przygotować dziewięć macierzy, które wyczerpują wszystkie przypadki rozkładu wartości własnych przedstawione w tabeli 1.1.

Należy skonstruować w Simulinku model, wykorzystując blok State-Space. Model ten pozwoli śledzić odpowiedzi systemu dynamicznego drugiego rzędu (zob. (1.1)) przy  $n = 2$ .

Narysowanie portretu na płaszczyźnie fazowej wymaga symulacji dla różnych warunków początkowych. Najwygodniej jest napisać skrypt (*m-file*), w którym symulacja przedstawionego modelu będzie wielokrotnie wywoływana w pętli dla kolejnych warunków początkowych.

Całą procedurę należy powtórzyć dla wszystkich przygotowanych macierzy A oraz dla kanonicznych postaci tych macierzy. Zestawienie należy uzupełnić portretami nieschylonymi. Przy symulacji komputerowej w Simulinku zaobszczewać sposób poruszania się punktu  $x(t)$  po trajektoriach fiklowych w zależności od części rzeczywistych i urojonych wartości własnych.

#### 1.5. Opracowanie wyników

Dla każdego przypadku należy wyliczyć wektory własne (główne) i zamieścić je na otrzymanych portretach. Na rysunkach należy zaznaczyć zbiory punktów równoważgi oraz jednowymiarowe (rzeczywiste) podprzestrzenie niezmiennicze.

#### 1.6. Literatura

- Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorią sterowania*. Wydawnictwa AGH, skrypt nr 1453, Kraków (również wersja internetowa z roku 2004).  
Miltkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.  
Miltkowski W. (2004): *Teoria sterowania. Notatki w internecie*. Wykonali studenci: E. Czajczyk, Ł. Chornikowski, T. Kania. <http://www.moodle.oen.agh.edu.pl/mod/resource/view.php?inpopup=true&id=83>.  
Takahashi Y., Rabins M., Auslander D. (1976): *Sterowanie i systemy dynamiczne*. WNT, Warszawa.

## 2. Częstotliwościowe kryteria stabilności

Tematem ćwiczenia jest analiza stabilności systemów liniowych stacjonarnych za pomocą metod częstotliwościowych. Kryterium Nicholsa pozwala określić, czy pierwiastki wielomianu leżą w lewej półpłaszczyźnie. Z kolei twierdzenie Nyquista, które w prostych przypadkach da się wyprawdzić z twierdzenia Michajłowa, daje możliwość badania stabilności układu zamkniętego na podstawie cech transmisji widmowej układu otwartego. Ćwiczenie to ma również pokazać, jak można zastosować kryterium Nyquista do układów z opóźnieniem.

#### 2.1. Podstawowe pojęcia

Rozważmy wielomian stopnia  $n$

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad a_n > 0, \quad a_i \in R.$$

Wielomian stopnia  $n$  ma zawsze  $n$  pierwiastków liczących wraz z krotnościami. Zakładamy, że wielomian ten nie ma pierwiastków na osi urojonej, czyli  $M(j\omega) \neq 0$  dla  $\forall \omega \in R$ . Podstawiając  $s = j\omega$ ,  $j^2 = -1$ , otrzymujemy

$$M(j\omega) = a_n (j\omega - s_1)(j\omega - s_2)\dots(j\omega - s_n),$$

gdzie  $s_1, \dots, s_2, s_n$  są pierwiastkami wielomianu  $M(s)$ . Dalej mamy

$$M(j\omega) = |M(j\omega)|e^{i\varphi},$$

gdzie  $|M(j\omega)| = a_n |(j\omega - s_1)| |(j\omega - s_2)| \dots |(j\omega - s_n)|$ ,

oraz  $\varphi = \arg M(j\omega) = \arg(j\omega - s_1) + \arg(j\omega - s_2) + \dots + \arg(j\omega - s_n)$ .

Zauważmy, że na płaszczyźnie Gaussa czynnik  $j\omega - s_i$  może być przedstawiony jako różnica dwóch wektorów  $j\omega$  i  $s_i$ , co obrazuje rysunek 2.1.

Zwróćmy uwagę, że pulsacja (częstotliwość)  $\omega$  zmienia się od 0 do  $\infty$  i stąd zmiana argumentu o  $n\pi/2$ .

Warunek (2.1) wygodnie jest sprawdzać graficznie. Można zauważyć, że warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy zero części rzeczywistej i urojonej  $M(j\omega)$ , czyli wielomianów  $f_1(\omega) = \operatorname{Re} M(j\omega)$  i  $f_2(\omega) = \operatorname{Im} M(j\omega)$ , leżą na przemian (Mirkowski 1996, s. 77).

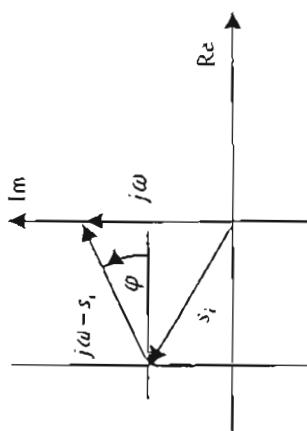
Wykres  $M(j\omega)$  na płaszczyźnie zespolonej nazywany jest krzywą lub hodogramem Michajłowa. Dowód twierdzenia Michajłowa można znaleźć w wielu pracach (np. Turowicz 1967, s. 68).

### Przykład 2.1 (Mirkowski 1996, s. 77)

Załóżmy, że

$$M(s) = s^5 + s^4 + 20s^3 + 10s^2 + 6s + 9.$$

Przedstawiony na rysunku pierwiastek  $s_i$  leży w lewej półpłaszczyźnie. Przy zmianie pulsacji (częstotliwości)  $\omega$  od  $-\infty$  do  $\infty$  wektor  $j(\omega - s_i)$  zmienia swój argument  $\varphi$  (w sposób ciągły) o  $\pi$  (od  $-\frac{1}{2}\pi$  do  $+\frac{1}{2}\pi$ ). Jeżeli  $s_i$  leży w prawej półpłaszczyźnie, to przyrostu argumentu wyrażenia  $j(\omega - s_i)$  jest równy  $-\pi$ . Wynika stąd następujące twierdzenie (zob. np. Mirkowski 1991, s. 62; Mirkowski 1996, s. 76).



Rys. 2.1. Czynnik  $j(\omega - s_i)$  na płaszczyźnie (zespolonej) Gaussa

Przedstawiony na rysunku pierwiastek  $s_i$  leży w lewej półpłaszczyźnie. Przy zmianie pulsacji (częstotliwości)  $\omega$  od  $-\infty$  do  $\infty$  wektor  $j(\omega - s_i)$  zmienia swój argument  $\varphi$  (w sposób ciągły) o  $\pi$  (od  $-\frac{1}{2}\pi$  do  $+\frac{1}{2}\pi$ ). Jeżeli  $s_i$  leży w prawej półpłaszczyźnie, to przyrostu argumentu wyrażenia  $j(\omega - s_i)$  jest równy  $-\pi$ . Wynika stąd następujące twierdzenie (zob. np. Mirkowski 1991, s. 62; Mirkowski 1996, s. 76).

## 2.2. Twierdzenie Michajłowa

$$\Delta \arg M(j\omega) = (\ell - \rho)\pi, \quad \ell + \rho = n,$$

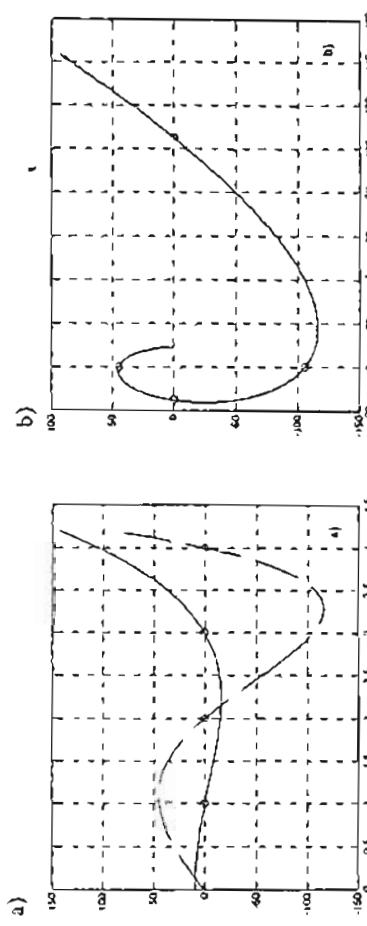
gdzie  $\ell$  jest liczbą pierwiastków (liczonych wraz z krotnościami) wielomianu  $M(s)$  o częstotliwości mniejszych od zera, a  $\rho$  jest liczbą pierwiastków (liczonych wraz z krotnościami) wielomianu  $M(s)$  o częstotliwości rzeczywistych większych od zera.

Dla wielomianu asymptotycznie stabilnego wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej. Z twierdzenia Michajłowa wynika, że dla  $n$  pierwiastków w lewej półpłaszczyźnie sumaryczna zmiana argumentu  $\varphi$  przy zmianie pulsacji (częstotliwości)  $\omega$  od  $-\infty$  do  $\infty$  jest równa  $n\pi$ . W zastosowaniach, przy interpretacji parametru  $\omega$  jako odpowiedniej częstotliwości sygnału, przyjmuje się zmianę  $\omega$  od 0 do  $\infty$ .

Móżemy teraz sformułować twierdzenie będące kryterium asymptotycznej stabilności układu  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  z macierzą  $A$  o wymiarze  $n \times n$ . Niech  $M(s) = \det(sI - A)$ .

### Kryterium Michajłowa (asymptotycznej stabilności)

$$\Delta \arg M(j\omega) = n\pi \Leftrightarrow \operatorname{Re}s < 0 \quad \text{dla każdego } s, \text{ takiego że } M(s) = 0. \quad (2.1)$$

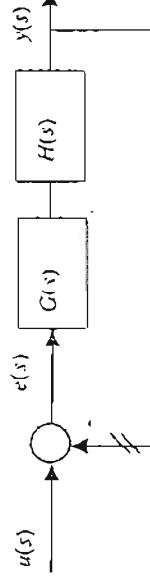


Rys. 2.2. Wielomiany  $f_1(\omega)$  i  $f_2(\omega)$  (a), Krzywa Michajłowa (b)

### 2.3. Kryterium Nyquista

Kryterium to pozwala określić stabilność układu zamkniętego na podstawie badania transmitancji widmowej układu otwartego. Rozważać będziemy system sterowalny i obserwowlany (wtedy przy obliczaniu transmitancji nie występują „skrócenia”), o jednym wejściu i jednym wyjściu. W literaturze układ o jednym wejściu i jednym wyjściu nazywany jest układem SISO (Single Input-Single Output).

Rysunek 2.3 przedstawia zamknięty układ regulacji z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.



Rys. 2.3. Układ regulacji

Przerywamy pętlę sprzężenia zwartego (w miejscu oznaczonym na rys. 2.3 dwoma ukośnymi kreskami) i obliczamy transmitancję układu otwartego

$$G_0(s) = H(s)G(s) = \frac{L_0(s)}{M_0(s)}. \quad (2.2)$$

Natomiast transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + \frac{L_0(s)}{M_0(s)}} = \frac{G_0(s)}{\frac{M_0(s) + L_0(s)}{M_0(s)}} = \frac{G_0(s)}{M_0(s) + L_0(s)}.$$

Stąd otrzymujemy mianownik transmitancji układu zamkniętego, który decyduje o właściwościach dynamicznych układu (mniejszy innymi o asymptotycznej stabilności), w postaci

$$M_z(s) = M_0(s) + L_0(s).$$

Wielomian  $M_z(s)$  jest wielomianem charakterystycznym (odpowiedniej macierzy stanu) układu zamkniętego przy założeniu sterowalności i obserwowlności. W układach realizowalnych liczyczne stopnie wielomianu  $L_0(s)$  jest mniejszy od stopnia wielomianu  $M_0(s)$ . Z tego wniosek, że wielomiany  $M_z(s)$  i  $M_0(s)$  są tego samego stopnia (założmy, że stopnia  $n$ ). Z równości (2.2) mamy

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{M_0(s) + L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{M_z(s)}{M_0(s)}.$$

Uwzględniając przytoczone powyżej rozważania, możemy napisać

$$\begin{aligned} \Delta \arg(1 + G_0(j\omega)) &= \Delta \arg\left(\frac{M_z(j\omega)}{M_0(j\omega)}\right) = \\ &= \Delta \arg M_z(j\omega) - \Delta \arg M_0(j\omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Przypomnijmy, że celem naszych rozważań jest określenie warunku asymptotycznej stabilności układu zamkniętego. Na podstawie twierdzenia Michajłowa ma zachodzić

$$\Delta \arg M_z(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (2.4)$$

Dalej założmy, że układ otwarty opisany transmitancją  $G_0(s) = L_0(s)/M_0(s)$  może być niesabilny (wielomian  $M_0(s)$  ma  $m$  pierwiastków, licząc łącznie z krotnościami, o częściach rzeczywistych dodatnich) oraz nie ma pierwiastków na osi urojonej.  $G_0(j\omega)$  jest charakterystyką amplitudowo-fazową układu otwartego. Wykres  $G_0(j\omega)$  dla  $-\infty \leq \omega \leq \infty$  nosi nazwę wykresu (lub plotu) Nyquista. Wykorzystując równość (2.3) oraz twierdzenie i kryterium Michajłowa, możemy sformułować następujące twierdzenie Nyquista.

Twierdzenie Nyquista

Układ zamknięty pokazany na rysunku 2.3 i spełniający założenia:

- układ jest sterowany i obserwowany oraz wszystkie sygnały są skalane;
- układ otwarty jest opisany transmitancią  $G_0(s) = L_0(s)/M_0(s)$ , przy czym stopień  $L_0(s)$  jest mniejszy od stopnia  $M_0(s)$ , który jest równy  $n$ ;
- $M_0(s)$  nie ma zcr na osi urojonej;
- wielomian  $M_0(s)$  posiada  $m$  pierwiastków (licząc łącznie z krotnościami) o częściach rzeczywistych dodatnich;

jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

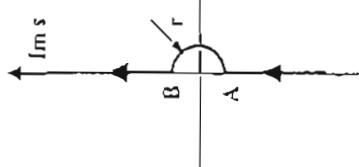
$$\Delta \arg(1 + G_0(j\omega)) = m\pi, \quad (2.5)$$

lub równoważnie, przy uwzględnieniu, że krzywa  $G_0(j\omega)$  jest symetryczna względem osi rzeczywistej

$$\Delta \arg(1 + G_0(j\omega)) = 2m\pi. \quad (2.5a)$$

Podsumowując dotyczące rozważania, należy zauważyć, że charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego  $G_0(j\omega)$  jest odwzorowaniem osi liczb urojonych płaszczyzny zmiennej zespolonej s poprzez funkcję  $G_0(s)$ .

Sprawdzenie warunku (2.5) lub (2.5a) komplikuje się, gdy wielomian  $M_0(s)$  ma zero w położku układu (ogólnej, na osi urojonej). W tym przypadku charakterystyka  $G_0(j\omega)$  (przykładowa), przedstawiona na rysunku 2.4, ma punkt nieciągłości dla  $\omega = 0$ : moduł  $G_0(j\omega)$  zmierza do nieskończoności, a faza zmienia się skokowo o  $\pi$ . Dla nasważane jest, jak wygląda domknięcie wykresu, gdy s zmiera do zera. Nie musimy znać dokładnie przebiegu tego domknięcia. Wystarczy, że znajdziemy punkt przecięcia osi rzeczywistej przez charakterystykę, a dokładniej – wystarczy informacja, czy wykres przecina osi rzeczywistą na prawo, czy leż na lewo od zera.



Rys. 2.4. Wykres Nyquista

Posuwając się po osi urojonej na płaszczyźnie s (patrz rys. 2.5), obejdźmy zero po półokręgu o promieniu  $r$  (dla ustalenia uwagi po prawej stronie). Na tym półokręgu zmiana zespolona s jest reprezentowana we współrzędnych biegunoowych

$$s = re^{i\varphi}, \quad \text{gdzie} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

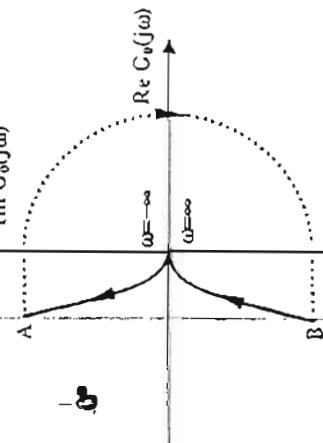
Gdy  $\varphi$  zmienia się od  $-\pi/2$  (w punkcie A) do  $\pi/2$  (w punkcie B), to  $G_0(s)$  zmienia się od  $\pi/2$  do  $-\pi/2$ . Gdy promień półokręgu zmierza do zera,  $r \rightarrow 0$ , to  $G_0(s) \rightarrow \frac{1}{re^{i\varphi}} = \infty \times \operatorname{sgn}(-\varphi)$ , co oznacza, że domknięcie wykresu Nyquista, zaznaczone na rysunku 2.4 linią przerywaną, przecina os rzeczywistą w nieskończoności po dodanej stronie.

**Przykład 2.1** (dla  $m = 0$ )

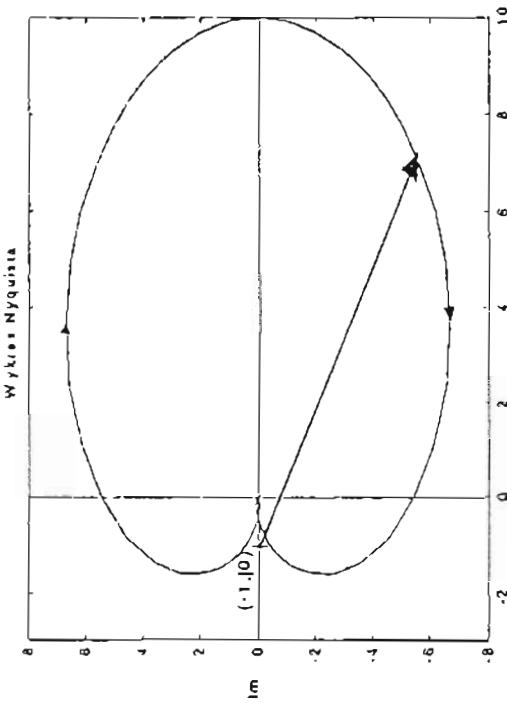
Dość proszę o interpretację geometryczną warunku (2.5a) w przypadku  $m = 0$ . Zauważmy, że rozważamy układ z rysunku 2.3 o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(10s^2 + 2s + 0,1)}$$

oraz  $H(s) = 1$ , czyli  $G_0(s) = G(s)$ . W tym przypadku pierwiastki wielomianika transmitancji  $G_0(s)$  układu drążącego:  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = s = -0,1$  są wszyskie rzeczywiste i ujemne, więc układ otwarty jest asymptotycznie stabilny. Zmianę fazy wyrażenia  $(1+G_0(j\omega))$  możemy zaobserwować po wykresieniu charakterystyki widmowej  $G(j\omega)$  na płaszczyźnie zespolonej (rys. 2.6). Zwróciły uwagę, że charakterystyka narysowana jest dla zmiennej  $\omega$  z przedziału  $-\infty$  do  $+\infty$  i jest w tym przypadku krywą zamkniętą. Taki wykres nosi nazwę wykresu bieżącego pionu Nyquista. Linia przerywana odwzorowuje ujemne częstotliwości. Wektor  $(1+G_0(j\omega))$  zaczepiony jest w punkcie  $(-1, j0)$ . Przy zmianie pulsacji  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ , gdy koniec tego wektora ślizga się po charakterystyce od punktu  $(0, j0)$  do punktu  $(10, j0)$  i dalej do punktu  $(0, j0)$ , zmiana argumentu  $(1+G_0(j\omega))$  jest równa zeru. A więc na mocy warunku (2.5a) układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny.



Rys. 2.5. Kontur na płaszczyźnie s



Rys. 2.6. Wykres Nyquista

W tym przypadku twierdzenie Nyquista można sformułować następująco:  
Jeżeli układ otwarty  $G_0(s)$  jest asymptotycznie stabilny ( $m = 0$ ), to układ zamknięty  $G_0(s)$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres  $G_0(j\omega)$  nie obejmuje punktu  $(-1, j0)$  przy zmianie częstotliwości  $\omega$  od  $-\infty$  do  $+\infty$ .

**Przykład 2.2**

Rozważmy układ z rysunku 2.3, przy czym

$$G_0(s) = \frac{k}{s+1}.$$

Chcemy badać stabilność układu zamkniętego, gdy współczynnik wzmacnienia  $k$  zmienia się od  $-\infty$  do  $\infty$ . Łatwo można zauważyć, że warunek (2.5a) dla  $m = 0$

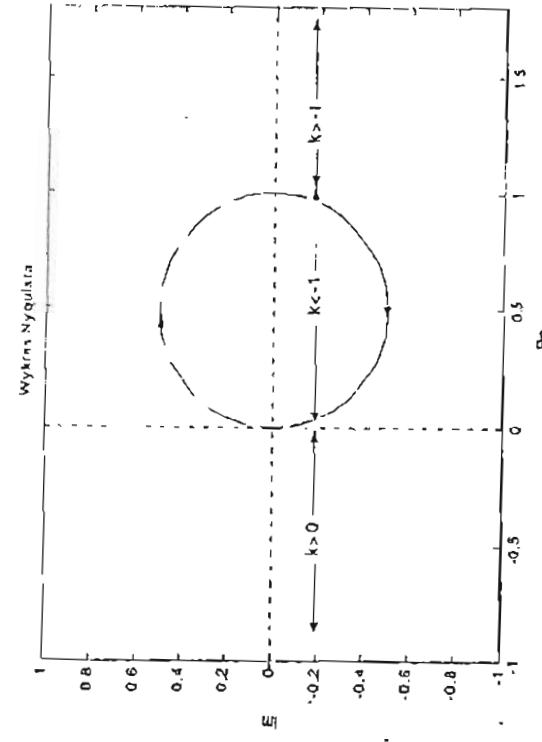
$$\Delta \arg(1 + G_0(j\omega)) = 0$$

jest równoważny warunkowi

$$\Delta \arg \left( \frac{1}{k} + \frac{G_0(j\omega)}{k} \right) = 0.$$

Oznacza to, że możemy narysować wykres Nyquista dla  $G_0(s) = \frac{1}{s+1}$ , korzystając ze sformułowania twierdzenia dla  $m = 0$ , badać, czy wykres obejmuje punkt  $(-\frac{1}{k}, j0)$ . Zauważmy, że gdy  $k$  zmienia się od  $-\infty$  do  $0$ , to rozważany punkt przesuwa się po osi rzeczywistej od  $0$  do  $\infty$ , a przy zmianie  $k$  od  $0$  do  $\infty$ , punkt  $(-\frac{1}{k}, j0)$  przesuwa się od  $-\infty$  do  $0$ .

Układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny dla  $-1 < k$ . Natomiast dla  $k < -1$  system jest niestabilny (rys. 2.7).



Rys. 2.7. Wykres Nyquista i przesuwający się punkt  $(-\frac{1}{k}, j0)$

Uwagi:

- W przypadku zmiany częstotliwości  $\omega < \omega < +\infty$  wykres Nyquista  $G_0(j\omega)$  jest krzywą zamkniętą i wtedy nie ma żadnych wątpliwości, co oznacza obejmowanie punktu  $(-1, j0)$ .

- Dla układów o wielu wejściach i wielu wyjściach MIMO (Multi Input-Multi Output) dla sformułowania twierdzenia Nyquista można wykorzystać zasadę agumentu Cauchego.

## 2.4. Systemy z opóźnieniem

Można udowodnić, że twierdzenie Nyquista stosuje się do układów z opóźnieniem, gdy transmitancja otwartej pętli ma postać  $G_0(s) = G(s)e^{-\tau s}$ , gdzie  $\tau > 0$  i  $G(s)$  jest asymptotycznie stabilna. Czynnik eksponentjalny  $e^{-\tau s}$  wprowadza obroty wykresu  $G(j\omega)$  dla każdego  $\omega$  o kąt  $\omega \tau$  w kierunku zgodnym z ruchem wskaźówek zegara. Amplituda funkcji  $G(j\omega)$  nie zmienia się pod wpływem czasu opóźnienia, ponieważ amplituda  $e^{-\tau s}$  jest jednostkowa dla wszystkich częstotliwości.

Wielkość układów sterowania jest typu pierwszego lub wyższych i ampliudu funkcji  $G_0(j\omega)$  zazwyczaj zmiera do zera, gdy  $\omega$  zmiera do nieskończoności. Wiele wykresów Nyquista transmitancji opisanej powyższym równaniem zmierza spiraliście w kierunku początku układu współrzędnych, zgodnie z ruchem wskaźówek zegara, dla wartości  $\omega$  zmierzających do nieskończoności. Powoduje to, że wykres przecina osie rzeczywistą i urojoną nieskończonie wiele razy. Posługując się kryterium Nyquista, należy zbadać, czy pierwsze przecięcie wykresu z osią rzeczywistą leży na prawo od punktu  $(-1, j0)$ , co jest równoważne nieobejmowaniu tego punktu przez wykres Nyquista.

### Przykład 2.3

Rozważmy układ z rysunku 2.3 z pętlą otwartą o transmitancji

$$G_0(s) = \frac{k}{s+1} e^{-s}, \quad \tau = 1.$$

Chcemy znaleźć wartości współczynnika wzmacnienia  $k$ , dla których zamknięty układ będzie asymptotycznie stabilny. Transmitancja widmowa ma postać

$$G_0(j\omega) = \frac{ke^{-j\omega}}{j\omega + 1} = \frac{k}{1 + \omega^2} ((\cos \omega - \omega \sin \omega) - j(\sin \omega + \omega \cos \omega)). \quad (2.6)$$

Szukamy pierwszego przecięcia powyższej transmitancji z osią rzeczywistą. W tym punkcie część urojona  $\text{Im}G_0(j\omega)$  jest równa zeru, czyli  $\sin \omega + \omega \cos \omega = 0$ , co zachodzi dla  $j\omega = -\omega$ .

Rozwiążymy to równanie dla najmniejszej wartości  $\omega$  i otrzymujemy

$$\omega = 2,0288.$$

Po podstawieniu tej wartości do wyrażenia na część rzeczywistą z równości (2.6) otrzymujemy  $\operatorname{Re}G_0(j\omega) = -0,4421k$ .

Na mocy twierdzenia Nyquista układ zamknięty będzie asymptotycznie stabilny, jeżeli  $\operatorname{Re}G_0(j\omega) = -0,4421k > -1$ , co prowadzi do warunku stabilności asymptotycznej układu zamkniętego w postaci

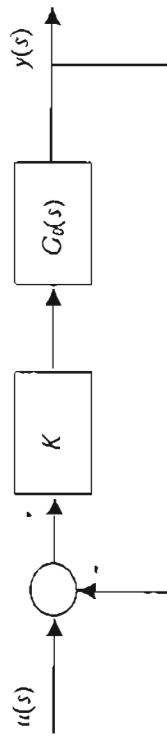
$$k < 2,2619.$$

Porównajmy ten przykład z poprzednim, w którym był rozważany system bez opóźnienia. Należy zbadać wpływ  $\tau > 0$  na własności układu zamkniętego.

## 2.5. Przebieg ćwiczenia

### Zadanie 2.1

Rozważamy układ zamknięty z regulatorem proporcjonalnym przedstawiony na rysunku 2.8, gdzie  $G_0(s) = \frac{s+1}{0,01s^4 + 0,5s^3 + 3s^2 - 10s + 10}$ .



Rys. 2.8. Zamknięty układ regulacji

Sosując kryterium Nyquista, należy określić krytyczne wartości współczynnika wzmacnienia  $K$  definiujące przedział stabiłości dla układu zamkniętego. Następnie należy narysować charakterystykę Bodego i zinterpretować otrzymane wyniki.

### Zadanie 2.2

Dany jest układ otwarty pierwszego rzędu z opóźnieniem  $\tau = 0,5$ ,

$$G_0(s) = \frac{4e^{-0.5s}}{s+1}.$$

Należy zbadać stabilność układu zamkniętego za pomocą kryterium Nyquista.

## 2.6. Literatura

- Grabowski P. (1996): Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania Skrypt AGH nr 1453, Kraków (również wersja internetowa): [http://www.ia.agh.edu.pl/~prab/grabowski\\_files/newedition1453/nowySkrypt.xml](http://www.ia.agh.edu.pl/~prab/grabowski_files/newedition1453/nowySkrypt.xml)
- Mitkowski W. (1991): Stabilizacja systemów dynamicznych. WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1996): Stabilizacja systemów dynamicznych. Wydawnictwa AGH, Kraków.

Turowicz A. (1967): Geometria zer wielomianów. PWN, Warszawa.

- linearyzacja równania nieliniowego w otoczeniu punktu równowagi,
- badanie stabilności punktu równowagi przy użyciu pierwnej metody Lapunowa,
- określenie przewidywanego charakteru trajektorii fazowych układu nieliniowego na podstawie znajomości trajektorii jego liniowego przybliżenia.

### 3. Pierwsza metoda Lapunowa

#### 3.1. Podstawowe pojęcia

Rozważamy stacjonarny, skończony wymiarowy, nieliniowy system dynamiczny, opisany równaniem różniczkowym

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $f(x) = [f_1(x) \dots f_n(x)]^T$  jest wektorową funkcją wektorowego argumentu  $x(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$

$$f : R^n \rightarrow R^n.$$

Inaczej mówiąc,  $f$  jest wektorem  $n$  funkcji o wartościach skalarnych, z których każda jest funkcją  $n$  zmiennych

$$f_k : R^n \rightarrow R, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zmienna  $x(t)$  nazywamy stanem w chwili  $t$  systemu dynamicznego opisanego równaniem (3.1). Przyjmuje ona wartości z przestrzeni stanu, która tutaj stanowi zbiór  $R^n$ . Zmienne  $t$  w praktycznych zastosowaniach jest interpretowana najczęściej jako czas. Wartość  $x(0)$  nazywamy warunkiem początkowym lub stanem początkowym. Zakładamy, że dla każdego  $x(0)$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie określone dla  $t \geq 0$ , spełniające równanie (3.1). Równanie (3.1) nosi nazwę równania stanu systemu dynamicznego.

#### Trajektorie stanu, trajektorie fazowe stanu

Dla ustalonego warunku początkowego  $x(0)$ , rozwiązaniem równania (3.1) jest funkcja  $x$ , opisująca przebieg stanu w czasie  $t \geq 0$ .

Załóżmy, że dla pewnego  $x(0)$  funkcja  $x$ , przyjmująca wartości w  $R^n$ , jest określona na

$$x : t \mapsto x(t).$$

Dalej omówione zostaną następujące zagadnienia:

- trajektorie stanu i trajektorie fazowe stanu systemu dynamicznego,
- stabilność trajektorii stanu systemu dynamicznego w sensie Lapunowa,
- punkty równowagi systemu dynamicznego,

Trajektorią stanu  $x$  (wykresem funkcji  $x$ ) na odcinku  $[t_1, t_2]$  nazywamy podzbiór iloczynu kartezyjskiego  $R^n \times [0, \infty)$ , określony w następujący sposób:

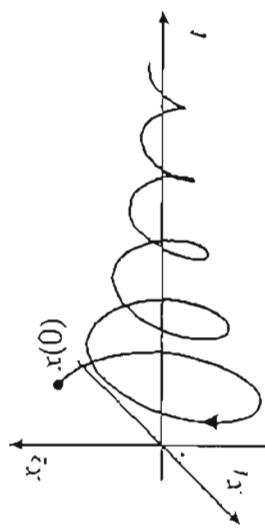
$$\{(x(t), t) \in R^n \times [0, \infty) : t \in [t_1, t_2]\}.$$

Różnym warunkom początkowym  $x(0)$  odpowiadają różne trajektorie stanu.  
Trajektorią fazową stanu na odcinku  $[t_1, t_2]$  nazywamy podzbiór przestrzeni stanu  $R^n$ , określony w następujący sposób:

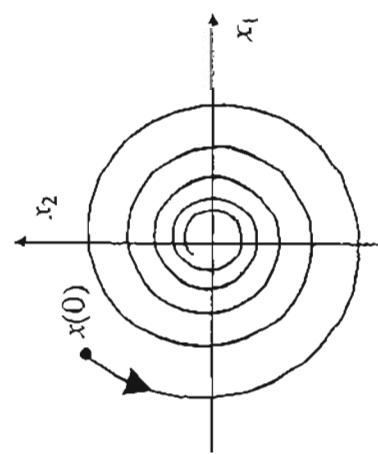
$$\{x(t) \in R^n : t \in [t_1, t_2]\}.$$

Trajektorię fazową stanu nazywamy będącym w skrócie trajektorią fazową. Trajektoria fazowa jest rzutem trajektorii stanu na przestrzeń stanu  $R^n$ .

Na rysunku 3.1 przedstawiono przykładową trajektorię stanu systemu drugiego rzędu, startującą z punktu  $x(0)$ . Odpowiadającą jej trajektoria fazowa pokazana jest na rysunku 3.2.



Rys. 3.1. Trajektoria stanu



Rys. 3.2. Trajektoria fazowa stanu

Zbiór trajektorii fazowych, startujących z wybranych punktów  $x(0)$ , tworzy tak zwane portrety fazowe. Dodatkowo strzałkami oznacza się kierunek poruszania się punktu  $x(t)$  wraz ze wzrostem czasu.

### 3.2. Stabilność w sensie Lapunowa

Niech funkcja  $\tilde{x} : [0, \infty) \rightarrow R^n$  będzie szczególnym rozwiązaniem równania (3.1). Niech ponadto istnieje otoczenie trajektorii  $\tilde{x}$ , w którym istnieją rozwiązania równania (3.1) określone dla  $t \geq 0$ . Rozwiążanie  $\tilde{x}$  nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  i dla każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$  taka, że każda trajektoria stanu  $x$ , spełniająca warunek  $\|x(t_0) - \tilde{x}(t_0)\| < \delta$ , jest określona na  $[t_0, \infty)$  oraz  $\|x(t) - \tilde{x}(t)\| < \epsilon$  w przedziale  $[t_0, \infty)$  (patrz, np. Miltowski 1991, s. 30; Miltowski 1996, s. 82), przy czym  $\|\cdot\|$  jest normą w przestrzeni  $R^n$ .

Stała  $\delta$  jest zależna od  $t_0$  i  $\epsilon$ . Jeżeli  $\delta > 0$  można dobrze niezależnie od  $t_0$ , to  $\tilde{x}$  jest jednostajnie stabilne. Stabilność jednostajna ma znaczenie dla układów niestacjonarnych  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ . W przypadku systemu stacjonarnego (3.1) można przyjmować  $t_0 = 0$ .

Układ dynamiczny nazywamy stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie rozwiązania równania stanu (3.1) układu są stabilne.

#### Punkty równowagi

Punktem równowagi  $x^* \in R^n$  systemu (3.1) nazywamy każde rozwiązanie równania

$$f(x^*) = 0. \quad (3.2)$$

Z (3.2) wynika, że żadna w czasie funkcja  $x(t) = x^*$  jest rozwiązaniem równania (3.1).

Trajektoria fazowa tego rozwiązania jest punktem  $x^* \in R^n$ . W zależności od postaci funkcji  $f$ , system może mieć skończoną lub nieskończoną (przeliczalną lub nie) liczbę punktów równowagi, lub nie posiadać ich wcale. Każdemu punktowi równowagi odpowiada stałe w czasie rozwiązanie. W praktycznych zastosowaniach bada się głównie stabilność tych właśnie stałych w czasie rozwiązania. Zamiast używać sformułowania stabilności rozwiązania stałych, nówmy zazwyczaj o stabilności punktów równowagi.

Na wstępie podrozdziału podano definicję stabilności rozwiązania  $\tilde{x}$  równania (3.1) w sensie Lapunowa. Badanie stabilności rozwiązania  $\tilde{x}$  równania (3.1) jest równoważne badaniu stabilności zerowego rozwiązania pewnego innego równania różniczkowego. Zatem bez straty ogólności (zob. np. Miltowski 1991, s. 31) wówczas (3.1) możemy zakładać, że  $f(0) = 0$ , co oznacza, że zero jest punktem równowagi systemu (3.1).

Zerowy punkt równowagi  $x^* = 0$  systemu (3.1)  $z f(0) = 0$  jest stabilny w sensie Lapunowa, jeśli odpowiadająca mu trajektoria  $\tilde{x}(t) \equiv 0$  jest stabilna w sensie Lapunowa.

Zerowy punkt równowagi  $x^* = 0$  (zerowe rozwiązanie  $\dot{x} = 0$ ) systemu (3.1)  $z f(0) = 0$  jest asymptotycznie stabilny w sensie Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązanie  $\tilde{x}(t) \equiv 0$  równania (3.1)  $z f(0) = 0$  jest stabilne w sensie Lapunowa oraz dla każdego  $t_0 \in [0, \infty)$  istnieje liczba rzeczywista  $\Delta > 0$  taka, że jeśli  $\|x(t_0)\| \leq \Delta$ , to  $\|x(t)\| \rightarrow 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ , przy czym  $x$  jest rozwiązaniem równania (3.1)  $z f(0) = 0$ .

Stabilność asymptotyczna punktu równowagi  $x^*$  oznacza, że wszystkie trajektorie startujące z pewnego otoczenia  $x^*$  zbiegają z czasem asymptotycznie do punktu równowagi.

#### Obszar przyciągania

Niech  $x^* = 0$  będzie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi systemu (3.1)  $z f(0) = 0$ . Obszarem przyciągania lub atrakcji punktu  $x^* = 0$  nazywamy zbiór wszystkich punktów  $x_0$  należących do przestrzeni  $R^n$  takich, że trajektorie  $x(t; x_0)$  startujące z tych punktów ( $x(t_0; x_0) = x_0$ ) zmierają do  $x^* = 0$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Wprowadzamy oznaczenie

$$D_{t_0} = \{x_0 \in R^n : x(t; x_0) \rightarrow x^*\}_{t \rightarrow \infty}.$$

Jeśli dla wszystkich  $t_0$  obszar przyciągania punktu równowagi  $x^*$  systemu (3.1) jest równy całej przestrzeni stanu ( $D_{t_0} = R^n \quad \forall t_0 \in [0, \infty)$ ), to taki punkt nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym.

### 3.3. Liniowe przybliżenie systemu nieliniowego w zerowym punkcie równowagi

Załóżmy, że w pewnym otoczeniu punktu równowagi  $x^* = 0$  funkcję  $f: R^n \rightarrow R^n$  można przedstawić w postaci

$$f(x) = Ax + r(x),$$

gdzie  $A$  jest macierzą rzeczywistą o wymiarze  $n \times n$ , a dla funkcji  $r$  zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0. \quad (3.3)$$

Jeśli w równaniu (3.1)  $z f(0) = 0$  zastąpić  $f(x)$  przez wyrażenie  $Ax(t)$ , to otrzymuje się tak zwane liniowe przybliżenie nieliniowego równania (3.1), obowiązujące w pewnym otoczeniu punktu równowagi  $x^* = 0$ , o postaci

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (3.4)$$

Przybliżenie liniowe (3.4) nieliniowego systemu (3.1)  $z f(0) = 0$  w punkcie równowagi  $x^* = 0$  istnieje wówczas, gdy istnieje pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x^* = 0$ , czyli gdy funkcja  $f$  jest w tym punkcie różniczkowalna.

#### Metoda wyznaczania macierzy $A$

Jeśli w pewnym otoczeniu punktu  $x^*$  istnieją pochodne cząstkowe funkcji  $f_1, f_2, \dots, f_n$  względem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  i są one w tym punkcie ciągłe, wówczas pochodna funkcji  $f$  w punkcie  $x^*$  jest równa macierzy Jacobiego funkcji  $f$  w punkcie  $x^*$  (np. Żakowski i Kołodziej 1992, s. 40)

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*}. \quad (3.5)$$

Często stosuje się zapis uproszczony

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*}.$$

Symbol  $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$  oznacza macierz Jacobiego dla wektorowej funkcji  $f$  i wektorowego argumentu  $x$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Jeżeli system ma więcej niż jeden punkt równowagi, dla każdego z nich można wyznaczyć przybliżenie liniowe. Przybliżenia liniowe w różnych punkach równowagi są na ogół różne. Pochodne funkcji  $f$  w każdym z nich w ogólności mają różne wartości.

Jest oczywiste, że przez zmianę układu współrzędnych (przesunięcie) można początek układu współrzędnych umieszczać w kolejnych punktach równowagi, sprawdzając odpowiedni problem do badania zerowego punktu równowagi.

#### Teoria Hartmana–Grobmana

Niech  $A$  będzie macierzą określona równością (3.5) dla  $x^* = 0$ . Założmy, macierz  $A$  nie ma wartości własnych o zerowych częściach rzeczywistych, czyli  $\det(j\omega I - A) \neq 0$ ,  $\forall \omega \in R$ . Wówczas charakter trajektorii fazowych systemu nieliniowego (3.1)  $z/J(0) = 0$  w otoczeniu zerowego punktu równowagi jest podobny do charakteru trajektorii fazowych przybliżenia liniowego (3.4). Podobieństwo, o którym mowa, ma charakter lokalny. W miarę oddalania się od punktu równowagi należy oczekiwac coraz większych różnic między zachowaniem się systemu nieliniowego i jego liniowego przybliżenia. Ścisłe sformułowanie opisanego podobieństwa poriretów lazowych stanowi twierdzenie Hartmana–Grobmana (np. Grabowski 1996, s. 30).

#### 3.4. Pierwsza metoda Lapunowa

Lapunow udowodnił następujące twierdzenie (patrz np. Miłkowski 1991, s. 34), które stanowi podstawę pierwszej metody Lapunowa budania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych, i jest również konsekwencją późniejszego twierdzenia Hartmana–Grobmana:

- Jeżeli części rzeczywiste wszystkich wartości własnejs macierzy stanu  $A$  liniowego  $x^* = 0$  są ujemne, to punkt równowagi  $x^*$  nieliniowego systemu (3.1) jest asymptycznie stabilny.
- Jeżeli któraś z wartości własnejs macierzy  $A$  ma część rzeczywistą dodatnią, to punkt równowagi  $x^* = 0$  systemu nieliniowego (3.1)  $z/J(0) = 0$  jest niestabilny.

Jeżeli co najmniej jedna z wartości własnejs macierzy  $A$  ma zerową część rzeczywistą, a wszyskie pozostałe – ujemne, to nie można wnioskować o stabilności układu nieliniowego w otoczeniu badanego punktu.

#### 3.5. Przebieg ćwiczenia

Należy zamodelować w MATLAB-ie i Simulinku systemy dynamiczne opisane równościami (3.7), (3.8) i (3.9). Następnie wykresić rodzinę trajektorii fazowych badanych systemów, wykonując szereg symulacji dla różnych warunków początkowych. Znaleźć punkty równowagi, zbadać ich stabilność i określić doświadczenie obserwacji przy ciąganiu wokół tych z punktów równowagi, które są asymptotycznie stabilne. Po-

szukać trajektorii ścierniacych, ograniczających obszar przyciagania. Następnie wyznaczyć liniowe przybliżenia rozwijanych systemów nieliniowych. Porównać rodzinę trajektorii systemów nieliniowych i ich liniowych przybliżeń w otoczeniu punktów równowagi.

#### System 3.1

Układ mechaniczny składający się z masy  $1$  „anieliniowej” sprzężony z iluminiem proporcjonalnym do prędkości ruchu, opisany jest następującym równaniem różniczkowym:

$$\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) + d\dot{y}^3(t) = 0 \quad (3.7)$$

$b, c > 0, |c| < |d|$ .

Współrzędna  $y$  oznacza odchylenie drgającej masy od położenia równowagi trwałej. Współczynnik  $b$  charakteryzuje tarcie występujące w układzie, zaś współczynnik  $c$  i  $d$  opisują własności sprzężony o nieliniowej charakterystyce. Gdy  $d < 0$ , mówimy o sprzężeniu „miękkiej”, dla  $d > 0$  – o sprzężeniu „twardej”. Przed przystąpieniem do badania należy system dany skalabym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (3.7) opisać za pomocą równania stanu, to znaczy zastąpić układem równan różniczkowych pierwszego rzędu. Można przyjąć tak zwane naturalne zmienne stanu, w tym przypadku są nimi: położenie  $x_1(t) = y(t)$  oraz prędkość  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ .

#### System 3.2

Równanie ruchu wahadła ilumionego ma postać

$$\ddot{y}(t) + \frac{g}{l} \sin y(t) + \frac{c}{lm} \dot{y}(t) = 0 \quad (3.8)$$

gdzie  $g$  jest współczynnikiem przyspieszenia ziemskiego,  $m$  i  $l$  to odpowiednio masa i długość wahadła, zaś  $c$  jest współczynnikiem ilumienia. Zmienna  $y$  oznacza kąt odchylenia wahadła z położenia równowagi trwałej (pozycja pionowo w dół). Przed przystąpieniem do badania stabilności należy opisać system (3.8) równaniami stanu.

#### System 3.3

Układ równań Van der Pola ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - x_1^3(t) - ax_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Badania podanego systemu należy przeprowadzić dla  $a = 1$  lub innej wartości, podanej przez prowadzącego ćwiczenia.

### 3.6. Przygotowanie do zajęć

- Dla każdego z systemów (3.7), (3.8) i (3.9) należy analitycznie:
- określić punkty równowagi;
  - wyznaczyć macierze Jacobianowe;
  - określić wartości własne macierzy Jacobianowych; jakiego typu portretów fazowych można się spodziewać w systemach nieliniowych w otoczeniu punktów równowagi?

### 3.7. Przykłady obliczeniowe

#### Przykład 3.1

W pewnych sytuacjach pierwsza metoda Lapunowa nie daje odpowiedzi na pytanie o stabilność punktu równowagi nienielinowego systemu dynamicznego (3.1) z  $f(0) = 0$ , mimo istnienia liniowego przybliżenia (3.4). Jest tak wtedy, gdy wszystkie wartości własne macierzy A przybliżenia liniowego mają zerowe części rzeczywiste lub też gdy część spośród nich ma zerowe, a wszystkie pozostałe – ujemne części rzeczywiste. Przykład taki pokazuje poniższy przykład, w którym porównano skuteczność pierwszej i drugiej metody Lapunowa. Rozważamy następujący system dynamiczny

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = -x_1^3(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = -x_1^3(t) - x_2^3(t).\end{aligned}\quad (3.10)$$

$x^* = [0 \ 0]^T$  jest punktem równowagi systemu (3.10), gdyż spełnia równanie (3.2). Asymptotyczna stabilność tego punktu można wykazać za pomocą drugiej metody Lapunowa, która jest tematem jednego z dalszych ćwiczeń (zobacz np. Mirkowski 1991, s. 33). Wzajemna funkcjonal Lapunowa postaci

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2. \quad (3.11)$$

Wyznaczmy jego pochodną na trajektoriach systemu (3.10)

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2),$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = x_1^3 \cdot (-x_1^3 + x_2) + x_2 \cdot (-x_1^3 - x_2^3).$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^6 - x_2^3.$$

W zbiorze  $R^2 \setminus \{0\}$  funkcjonał (3.11) przyjmuje wartości dodatnie, zaś jego pochodna (3.12) – ujemne

$$\forall_{\substack{\mathbf{x} \in R^2 \\ \mathbf{x} \neq 0}} V(x_1, x_2) > 0, \quad (3.13)$$

$$\forall_{\substack{\mathbf{x} \in R^2 \\ \mathbf{x} \neq 0}} \dot{V}(x_1, x_2) < 0. \quad (3.14)$$

Dodatkowo zachodzi

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = +\infty. \quad (3.15)$$

Ze wzorów (3.13), (3.14) oraz (3.15), na mocy drugiego twierdzenia Lapunowa, wynika globalna asymptotyczna stabilność zerowego punktu równowagi systemu (3.10).

Macierz Jacobiego dla systemu (3.10) dana jest wzorem (3.16). Jej wartość w zerowym punkcie równowagi  $[0 \ 0]^T$ , będącą macierzą stanu A liniowego przybliżenia (3.4), podaje wzór (3.17):

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3x_1^2 & 1 \\ -3x_1^2 & -3x_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

$$A = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Macierz A ma postać kanoniczną Jordana. Ma ona podwójną, zerową wartość własną, odpowiadającą nienieliniowemu dzielnikowi elementarnemu. Tak więc, na mocy teorii stabilności systemów liniowych (np. Mirkowski 1991, s. 59), liniowe przybliżenie jest niestabilne.

Mimo niestabilności przybliżenia liniowego, zerowy punkt równowagi systemu (3.10) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

#### Przykład 3.2

Badamy stabilność systemu dynamicznego

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)) = x_1(t)x_2(t) - x_1^2(t), \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2(t)x_2(t) - x_2^2(t).$$

Rozpoczynamy od wyznaczenia jego punktów równowagi, rozwiązuając układ równań

$$x_1(x_2 - \lambda_1) = 0,$$

$$x_2(\lambda_1^2 - x_2) = 0.$$

Ma on dwa rozwiązania

$$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Obliczymy macierz Jacobiego (3.6) dla systemu (3.18)

$$\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} = x_2 - 2x_1, \quad \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} = x_1, \quad \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} = 2x_1x_2, \quad \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} = x_1^2 - 2x_2.$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 & x_1 \\ 2x_1x_2 & x_1^2 - 2x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x)]^T, \quad x = [x_1 \quad x_2]^T.$$

Wyznaczamy wartości macierzy jacobianowej w punktach równowagi systemu

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Pierwsza z macierzy ma postać diagonalną. Podwójna zerowa wartość własna można odczytać z przekątnej głównej. W tym przypadku pierwsza metoda Lapunowa nie rozstrzyga kwestii stabilności. Wartości własne drugiej macierzy można obliczyć jako pierwiastki wielomianu charakterystycznego

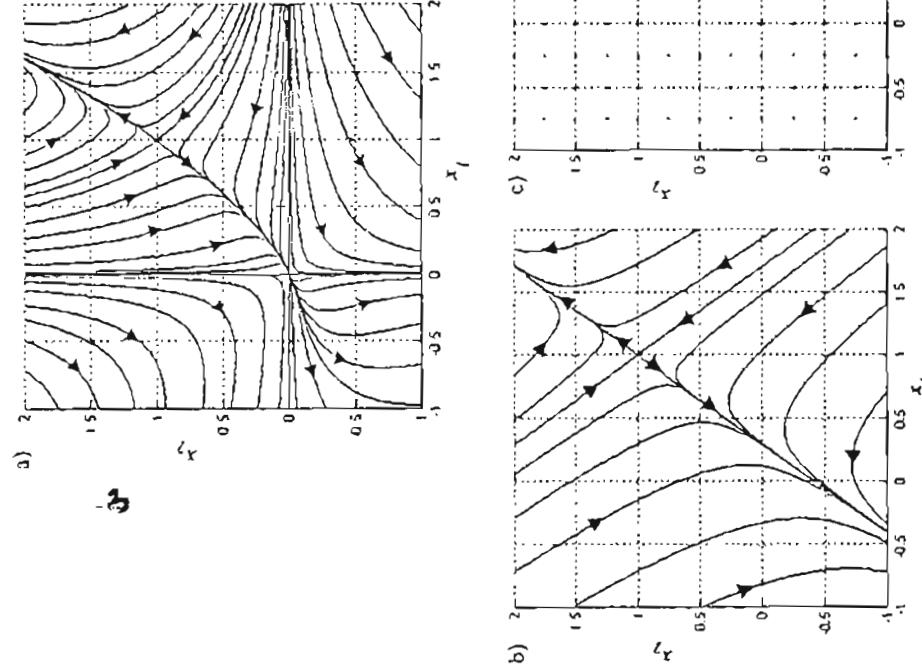
$$\mu(s) = \det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ -2 & s+1 \end{vmatrix} = (s+1)(s+1) - (-1) \cdot (-2) = (s+1)^2 - 2,$$

$$\mu(s) = s^2 + 2s - 1.$$

Są one następujące:

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2},$$

$$\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$



Rys. 3.3. Portrety fazowe systemu nieliniowego i jego liniowych przybliżeń:  
a) system nieliniowy; b) system zlinearyzowany w punkcie  $[1 \ 1]^T$ ;  
c) system zlinearyzowany w punkcie  $[0 \ 0]^T$

Rzeczywista wartość własna  $\lambda_2$  jest dodatnia. Na mocy twierdzenia Łapunowa, punkt  $[1 \ 1]^T$  jest niesabilnym punktem równowagi nieliniowego systemu (3.18). Na rysunku 3.3 zamieszczono portret fazowy systemu nieliniowego (3.18) oraz portret fazowy jego przybliżeń liniowych (3.4), z macierząmi (3.20), w punktach równowagi (3.19). W otoczeniu punktu równowagi  $[1 \ 1]^T$  portret fazowy systemów nieliniowego i zlinearyzowanego wykazują podobne właściwości charakteru (portret typu siodła). W otoczeniu punktu  $(0 \ 0)^T$ , gdzie macierz jacobianowa ma zerowe wartości własne, portret fazowy są zupełnie różne.

### Przykład 3.3

Zbadaj stabilność punktu równowagi systemu nelinowego

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = -2x_1(t) + 2x_2^2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = 1 - x_2^3(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Skorzystaj z pierwszej metody Lapunowa. Porównaj portrety fazowe systemów: nelinowego i jego liniowego przybliżenia, wyznaczonego w punkcie równowagi. System (3.21) posiada jeden punkt równowagi

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = 1, \quad (3.22)$$

który można wyznaczyć, rozwiązuje układ równań

$$-2x_1 + 2x_2^2 = 0,$$

$$1 - x_2^3 = 0.$$

Wyznaczmy wartość macierzy Jacobiego dla funkcji  $f$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=x^*} = \begin{bmatrix} -2 & 4x_2^2 \\ 0 & -3x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

gdzie:

$$x = [x_1 \quad x_2]^\top, \quad f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x)]^\top.$$

Wartość macierzy jacobianowej (3.23) w punkcie równowagi (3.22) wynosi

$$A = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x^*} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

A jest macierzą trójkątną, więc jej wartości własne można odczytać wprost z przekatnej. Są one następujące:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Ponieważ wszystkie wartości własne leżą w lewej, otwartej półpłaszczyźnie zespolonej, punkt (3.22) jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi systemu (3.21).

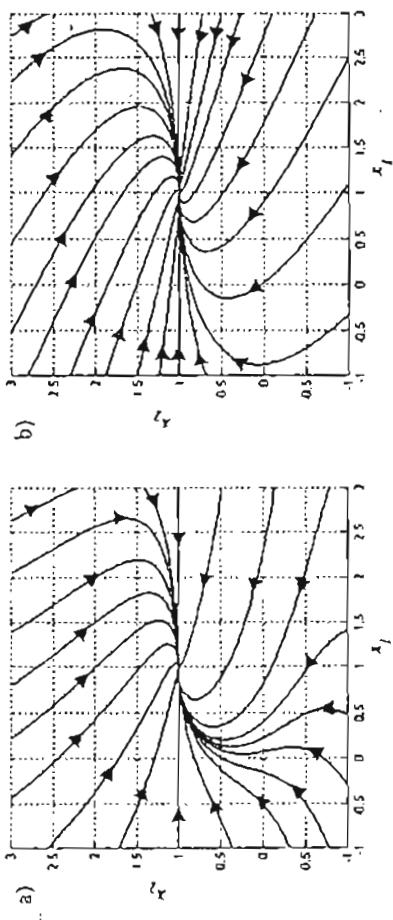
Przybliżenie liniowe systemu nelinowego (3.21) w punkcie równowagi (3.22) ma postać

$$\xi_1(t) = A\xi(t),$$

gdzie

$$\xi(t) = x(t) - x^*.$$

Żadna z wartości własnych macierzy  $A$  nie leży na osi ukośnej. Wynika stąd podobieństwo charakteru trajektorii fazowych stanu systemu nelinowego i jego liniowego przybliżenia, w pewnym otoczeniu punktu równowagi (portret typu węzła stabilny) (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Portrety fazowe systemu nelinowego i jego liniowego przybliżenia:  
a) system nelinowy; b) liniowe przybliżenie w punkcie  $(1, 1)^\top$ .

### 3.8. Literatura

Mitkowski W. (1991): Stabilizacja systemów dynamicznych. WNT, Warszawa.

Mitkowski W. (1996): Stabilizacja systemów dynamicznych. AGH, Kraków.

Grabowski P. (1996): Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania. AGH, Kraków.  
Żakowski W., Kolođziej W. (1992): Matematyka, cz. II. Podręczniki Akademickie. Elektrotechnika. Informatyka. Telekomunikacja. WNT, Warszawa.

Sformułowanie zapowiedzianych we wstępie twierdzeń poprzedzone zostanie przyjęciem kilku ogólnych w poprzednim rozdziale pojęć oraz wprowadzeniem nowych. W rozdziale pod tytułem *Pierwsza metoda Lapunowa* podano następujące definicje dotyczące układu (4.1).

## 4. Druga metoda Lapunowa i twierdzenie LaSalle'a

- trajektorii stanu i trajektorii lażowej stanu,
- punktu równowagi,
- stabilności szeregowego rozwiązania równania (4.1) w sensie Lapunowa,
- stabilności systemu nieliniowego (4.1),
- stabilności punktu równowagi (rozwiązań stałego),
- asymptotycznej stabilności punktu równowagi,
- obszaru przyciągania (atrakcji) asymptotycznie stabilnego punktu równowagi,
- globalnej asymptotycznej stabilności punktu równowagi.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z wybranymi metodami badania stabilności nielinowych systemów dynamicznych. W rozdziale omówione są dwa twierdzenia, które można do tego celu wykorzystać:

- 1) twierdzenie Lapunowa (np. Mirkowski 1991, s. 33; Mirkowski 1996, s. 84),
- 2) twierdzenie LaSalle'a (np. Mirkowski 1991, s. 117; Mirkowski 1996, s. 87)

Tematem poprzedniego ćwiczenia była pierwsza metoda Lapunowa (metoda liniaryzacji), wykorzystywana do badania stabilności punktów równowagi nielinowych systemów dynamicznych na podstawie ich liniowego przybliżenia. Metoda liniaryzacji jest prosta w użyciu, ale ma ograniczony zakres stosowności, gdyż:

- nie można z niej skorzystać, gdy system nieliniowy nie poddaje się liniaryzacji,
- nie określa obszaru przyciągania asymptotycznie stabilnego punktu równowagi,
- nie jest w stanie wykazać przypadku *stabilności asymptotycznej*,
- nie daje odpowiedzi w sytuacji, gdy wśród wartości własnych macierzy stanu systemu liniaryzowanego jest przynajmniej jedna o zerowej części rzeczywistej (istnieją wartości własne  $\lambda_k$  takie, że  $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ ), a pozostałe mają ujemne części rzeczywiste.

Ciąg pierwsza metoda Lapunowa nie pozwala zbadać stabilności punktu równowagi, w wielu przypadkach pomocna może się okazać druga metoda Lapunowa. Z kolei twierdzenie LaSalle'a umożliwia wyznaczenie pewnego przybliżenia obszaru przyciągania asymptotycznie stabilnego punktu równowagi.

### 4.1. Podstawowe pojęcia

Rozważany jest nieliniowy, stacjonarny, skończony wymiarowy system dynamiczny z czasem ciągłym z zerowym punktem równowagi, opisany równaniem stanu

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0, \quad x(t) \in R^n, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Znajomość wymienionych pojęć jest niezbędna do lektury dalszej części rozdziału.

#### Kilka pojęć geometrycznych (topologicznych)

$$\text{Niech } x \in R^n \text{ oraz niech } \|x\|_A = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad \text{Zbiór}$$

$$K(a, r) = \{x \in R^n : \|x - a\| < r\}$$

nazywamy kulą o środku w  $a$  i o promieniu  $r > 0$ .

Zbiór zawarty w jakiejś kuli nazywamy zbiorem ograniczonym.

Otoczeniem punktu  $a \in R^n$  nazywamy każdą kulę  $K(a, r)$ .

Zbiór nazywamy otwartym, gdy każdy jego punkt posiada otoczenie zawarte w tym zbiорze.

Zbiór  $\Omega \subset R^n$  nazywamy obszarem, gdy każdy jego punkt należy do  $\Omega$  wraz z pewnym otoczeniem oraz każde dwa punkty należące do  $\Omega$  można połączyć linią zawierającą się całkowicie w  $\Omega$ .

Punkti  $a$  nazywamy punktem skupienia zbioru  $D$ , gdy do każdego otoczenia punktu  $a$  należą punkty zbioru  $D$  różny od  $a$ .  
Zbiór wszystkich punktów skupienia obszaru do niego należących nazywamy brzegiem obszaru.

Zbiór  $D$  nazywamy zbiorem domkniętym, gdy wszystkie jego punkty skupienia należą do  $D$ .  
Zbiór w  $R^n$  domknięty i ograniczony nazywamy zbiorem zwartym.

Brzegiem zbioru  $\Omega \subset R^n$  nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych. Punkt  $\omega \in R^n$  jest punktem brzegowym zbioru  $\Omega$ , jeśli w każdym otoczeniu punktu  $\omega$  znajduje się przynajmniej jeden punkt należący do zbioru  $\Omega$  i przynajmniej jeden punkt spoza tego zbioru (np. Źakowski i Koldziej 1992, s. 12).

### Funkcional Lapunowa

Funkcja  $V: R^n \rightarrow R$  (ogólniej wystarczy  $V: R^r \supseteq \Omega \rightarrow R$ , gdzie  $\Omega$  jest pewnym otoczeniem zera) jest funkcjonałem Lapunowa systemu (4.1), jeżeli:

- $V(x)$  jest ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi względem  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  w pewnym otoczeniu zerowego punktu równowagi systemu;
- $V(0) = 0$  oraz  $V'(x) > 0$  w pewnym otoczeniu  $\Omega_1$  zera, z wyłączeniem zera;
- $\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$  w pewnym otoczeniu  $\Omega_2$  zera.

Ostatni warunek oznacza, że pochodna funkcjonalu  $V$  względem czasu  $t$ , wyznaczona na trajektoriach systemu (4.1), jest niedodatnia w pewnym otoczeniu zera. Na podstawie twierdzenia o rożniczkowaniu funkcji złożonej wielu zmiennych mamy

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left|_{x=x(t)} \right. \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left|_{x=x(t)} \right. f(x(t)).$$

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_k} f_k(x).$$

gdzie

$$f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_n(x)]^\top, \quad x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^\top.$$

### 4.2. Twierdzenie Lapunowa

- 1) Jeśli w pewnym otoczeniu zerowego punktu równowagi systemu (4.1) istnieje funkcjonal Lapunowa  $V(x)$ , to punkt równowagi jest stabilny ( $V'(x) > 0$  i  $V(x) \leq 0$ ).
- 2) Jeśli w pewnym otoczeniu zera istnieje funkcjonal Lapunowa  $V(x)$  i zachodzi tam nierówność silna  $\dot{V}(x) < 0$  dla  $x \neq 0$ , to zerowy punkt równowagi układu (4.1) jest asymptotycznie stabilny ( $V'(x) > 0$  i  $\dot{V}(x) < 0$ ).
- 3) Jeśli istnieje funkcjonal Lapunowa  $V(x)$  o własnościach z punktu 2) zachodzących w całej przestrzeni  $R^n$  ( $V(x) > 0$  i  $V(x) < 0$  dla wszystkich  $x \in R^n \setminus \{0\}$ ) i dodatkowo  $V(x) \rightarrow \infty$  gdy  $\|x\| \rightarrow \infty$ , to zerowy punkt równowagi systemu (4.1) jest globalnie asymptotycznie stabilny.

Twierdzenie Lapunowa formuluje tylko warunki wystarczające odpowiedniego rodzaju stabilności. Z niepowodzenia poszukiwań funkcjonalu Lapunowa nie wynika, że zeroowe rozwiązanie jest niestabilne. W tym miejscu warto wspomnieć, że istnieją twierdzenia o niestabilności. Na przykład jeżeli dla układu (4.1) znajdziemy funkcjonal taki, że  $V(x) > 0$  i równocześnie  $V'(x) > 0$ , to zeroowe rozwiązanie równania (4.1) jest niesztabilne.

Twierdzenie Lapunowa nie podaje, jak określić obszar przyciągania asymptotycznego zerowego punktu równowagi. Pewna informacja o zbiorze przyciągania asymptotycznego jest zawarta w twierdzeniu LaSalle'a.

#### Przykładowe funkcjonalny Lapunowa

W literaturze można znaleźć różne propozycje doboru funkcjonalów Lapunowa dla określonych klas systemów dynamicznych. Najpopularniejszy jest tak zwany funkcjonal „energetyczny” w postaci

$$V(x) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2 = \frac{1}{2} x^\top x,$$

gdzie  $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^\top$ .

W przypadku systemu dynamicznego opisanego równościami (4.2), przy spełnieniu pewnych dodatkowych założeń, można stosować funkcjonal postaci (4.3) (LaSalle i LeScheret 1996, s. 65; zobacz np. Milkowski 1991, s. 119; Milkowski 1996, s. 88).

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - h(x_1(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = -g(x_1(t)),$$

$$(4.2) \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

Pochodna funkcjonalu (4.3) na trajektoriach systemu (4.2) wyraża się wzorem

$$\dot{V}(x(t)) = -g(x_1(t)) \cdot h(x_1(t)).$$

Kolejna funkcja  $V$  typowana na funkcjonal Lapunowa dla systemu (4.1), zaproponowana przez A. Krasowskiego, dana jest wzorem (4.4) (Kaczorek 1977, s. 330). Może ona posłużyć do badania stabilności zerowego punktu równowagi systemu (4.1), jeżeli dla wszystkich  $x$  z pewnego otoczenia zera i  $x \neq 0$  składowe funkcji  $f(x)$  nie zerują się jednocześnie.

$$V(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} f^\top(x) P f(x). \quad (4.4)$$

gdzie  $P$  jest rzeczywista, symetryczna, dodatnio określona macierz kwadratową o wymiarze  $n \times n$ .

Rozważmy równanie (względem  $D$ ) Lapunowa o następującej postaci:

$$A^T D + D A = -C, \quad C = C^T > 0.$$

Istnieje symetryczna, dodatnio określona macierz  $D$ , będąca rozwiązaniem równania Lapunowa wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ . Funkcja  $V(x) = x^T D x$  z (q) macierzą  $D$  jest funkcjonałem Lapunowa (asymptycznie stabilnego) układu liniowego  $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ . Jeżeli układ  $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$  jest liniowym przybliżeniem systemu nietinioowego (4.1). i  $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ , to  $V(x) = x^T D x$  jest również funkcjonałem Lapunowa systemu (4.1).

### 4.3. Zasada LaSalle'a

Rozważmy następujący system dynamiczny:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0, \quad f: R^n \rightarrow R^n, \quad f \in C(R^n). \quad (4.5)$$

Niech  $x = x(t, t_0, x_0)$  oznacza rozwiązanie równania (4.5) jednoznacznie określone dla  $-\infty < t < +\infty$ . Jednoznaczność rozwiązania oznacza, że przez punki  $(t_0, x_0) \in R^{n+1}$  przechodzi dokładnie jedna krzywa  $x$ , spełniająca równanie (4.5).

Zbiór invariantny (niezmienniczy)

Zbiór  $M \subset R^n$  jest zbiorem invariantnym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x_0 \in M$  również  $x(t, t_0, x_0) \in M$  dla wszystkich  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Innymi słowy, jeśli punkt  $(t_0, x_0) \in M$ , gdzie  $x_0 \in M$ , należy do pewnej trajektorii stanu systemu (4.5), to również wszystkie pozostałe punkty  $x(t, t_0, x_0)$  odpowiadającej trajektorii fazowej należą do  $M$  – zarówno dla wszystkich czasów  $t$  późniejszych od  $t_0$ , jak i wcześniejszych. Cała trajektoria fazowa zawiera się w  $M$ .

Zauważmy, że początek układu współrzędnych w  $R^n$  (czyli  $0 \in R^n$ ) jest zbiorem invariantnym układu (4.5). Podobne, jeżeli trajektoria fazowa układu (4.5) stanowi krzywą zamkniętą w  $R^n$ , to jest zbiotem invariantnym.

Obszar w  $R^n$

Zbiór  $\Omega \subset R^n$  jest obszarem, gdy spełnione są dwa warunki:

- 1)  $\forall x \in \Omega, \exists r > 0$  takie, że kula  $K(x, r) \subset \Omega$ ;
- 2)  $\forall x_1 \in \Omega, \forall x_2 \in \Omega$  istnieje kuk łączący punkty  $x_1$  i  $x_2$  zawarty w całości w  $\Omega$ .

Poniżej podane zostaną dwie wersje twierdzenia LaSalle'a. Pierwsza z nich jest wersją uproszczoną druga – pełną (LaSalle i Leischerz 1966, s. 64, Demidowicz 1972, s. 374). Zakres zastosowań pierwszej z nich jest bardziej ograniczony w stosunku do drugiej, która jest ogólniejsza. Mimo to umieszczeno tutaj również wersję uproszczoną ponieważ jej sformułowanie jest czytelniejsze i łatwiejsze do przyswojenia, a jej znajomość utatrnia zrozumienie wersji pełnej. Obie wersje twierdzenia odnoszą się do systemu dynamicznego (4.5).

Wersja uproszczona

Załóżmy,żc.  
•  $V: R^n \rightarrow R$  jest funkcjonałem mającym ciągłe pochodne cząstkowe w  $R^n$ ,  $V \in C^1(R^n)$ ;

•  $Z_t$  jest zbiorem tych wszystkich  $x \in R^n$ , dla których  $V(x) < t$ , przy czym  $t$  jest pewnym dodatnim parametrem (porównaj z definicją zbioru poziomnicowego).

$$Z_t = \{x \in R^n : V(x) < t\},$$

• zbiór  $Z_t$  jest obszarem ograniczonym i zawiera punkt  $0 \in R^n$ ;  
• dla wszystkich punktów  $r \in Z_t$ , z wyłączeniem  $r = 0$ , zachodzą dwie podane poniżej nierówności silne:  

$$V(x) > 0$$

oraz

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \dot{V}(x) < 0.$$

Wówczas każda trajektoria fazowa systemu (4.5) mającego punkt równowagi w zerze, stariująca z dowolnego punktu należącego do  $Z_t$ , dąży do zerowego punktu równowagi, gdy  $t \rightarrow \infty$ . Początek układu w sposób szczególny jest asymptotycznie stabilnym punktem równowagi.

Podane twierdzenie pozwala nie tylko wykazać asymptyczną stabilność zerowego punktu równowagi (podobnie jak twierdzenie Laponowa), ale także umożliwia wyznaczenie estymaty (oceny, oszacowania) obszaru przycięgania  $D$  tego punktu. Zbiór  $Z_t$  jest podzbiorem faktycznego obszaru przycięgania zera  $D$  ( $Z_t \subseteq D$ ). Zazwyczaj jest to podzbiór właściwy ( $Z_t$  jest „mniejszy” od  $D$ ).

Jedno z założen podanego twierdzenia wymaga, by w zbiorze  $Z_t \setminus \{0\}$  pochodna funkcjonalu  $V$  na trajektoriach systemu (4.5) była silnie ujemna. Jeśli założenie to nie jest spełnione, lecz zamiast niego prawdziwy jest warunek z nierównością słabą, można stosować podane dalej twierdzenie LaSalle'a w pełnej wersji (patrz np. Miltowski 1991, s. 117).

Wersja pełna (LaSalle i Lefschetz 1966, s. 64; Demidowicz 1972, s. 374)

Załóżmy, że:

- $\nu: R^n \rightarrow R$  jest funkcjonalnym mającym ciągłe pochodne cząstkowe w  $R^n$ ,

$$V \in C^1(R^n);$$

- $Z_l$  jest zbiorem tych wszystkich  $x \in R^n$ , dla których  $V(x) < l$ , przy czym  $l$  jest pewnym dodatnim parametrem,

$$Z_l = \{x \in R^n : V(x) < l\};$$

- zbiór  $Z_l$  jest obszarem ograniczonym i zawiera punkt  $0 \in R^n$ ,

- spełnione są następujące nierówności (pierwsza z nich jest silna, druga – słaba)

$$\forall_{\substack{x \in Z_l \\ x \neq 0}} V(x) > 0 \quad (4.6)$$

oraz

$$\forall_{\substack{x \in Z_l \\ x \neq 0}} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \dot{V}(x) \leq 0; \quad (4.7)$$

- $E$  jest zbiorem tych wszystkich  $x$  należących do  $Z_l$ , dla których pochodna funkcjonału  $V(x)$  na trajektoriach systemu (4.5) zeruje się:

$$E = \{x \in Z_l : \dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = 0\};$$

- $M$  jest niepustym i maksymalnym zbiorem invariantnym zawartym w  $E$

$$M \subset E.$$

Wówczas każde rozwiążanie równania (4.5), startujące z dowolnego punktu należącego do  $Z_l$ , dąży do  $M$  przy  $t \rightarrow \infty$ .

Uwaga 4.1

Jeżeli warunek (4.7) zastąpimy nierównością

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in Z_l \quad i \quad x \neq 0,$$

to  $M = \{0\}$ . Wtedy każde rozwiążanie równania (4.5), startujące z obszaru  $Z_l$ , dąży do początku układu współrzędnych w  $R^n$  przy  $t \rightarrow \infty$ . Przypadek ten stanowi treść podanej nieco wcześniej uproszczonej wersji twierdzenia. Zbiór  $Z_l$  stanowi wówczas estymatę obszaru przyciągania zerowego punktu równowagi. Często rzeczywistego zbiuru przyciągania jest większy (w sensie inkluzji zbiorów) od zbiuru  $Z_l$ .

Uwaga 4.2 (LaSalle i Lefschetz 1996, s. 73)

Jeżeli warunek (4.6) zastąpimy nierównością:

$$V(x) > 0, \quad x \neq 0, \quad x \in R^n$$

oraz warunek (4.7) rozszerzymy następująco:

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \neq 0, \quad x \in R^n$$

i jeśli ponadto  $V(x) \rightarrow \infty$  przy  $\|x\| \rightarrow \infty$ , to  $0 \in R^n$  jest globalnie asymptotycznie stabilnym punktem równowagi (rozważanie  $x \equiv 0$  jest globalnie asymptotycznie stabilne).

W pełnej wersji twierdzenia LaSalle'a, obok zbiuru  $Z_l$  pojawiają się dwa dodatkowe zbiory:  $E$  i  $M$ . Relacje między nimi zostaną wyjaśnione w zamieszczonym nieco dalej komentarzu oraz w przykładzie obliczeniowym na koniec rozdziału.

Wielkość przybliżonego obszaru przyciągania

Twierdzenie LaSalle'a pozwala, w niektórych przypadkach, wyznaczyć estymatę (pewnie przybliżenie) obszaru przyciągania asymptotycznie stabilnego punktu równowagi. Estymata ta jest zazwyczaj mniejsza od faktycznego obszaru przyciągania (stąd jego podzbior właściwy). O wielkości i kształcie estymaty obszaru przyciągania decyduje zarówno postać użytego funkcjonalu, jak również wartość parametru  $l$ , występującego w twierdzeniu. Zazwyczaj zwiększenie wartości  $l$  powoduje powiększenie zbiuru  $Z_l$  i tym samym zwiększenie estymaty obszaru przyciągania. Z drugiej strony, jeśli wartość  $l$  zwiększy się nadmiernie, natrzeszony zostanie jeden z warunków twierdzenia, mówiący o niedodatności pochodnej funkcjonalu na trajektoriach systemu. Dobierając parametr  $l$ , należy nadać mu największą wartość, przy której spełnione są jeszcze założenia twierdzenia.

Zbiory występujące w twierdzeniu LaSalle'a

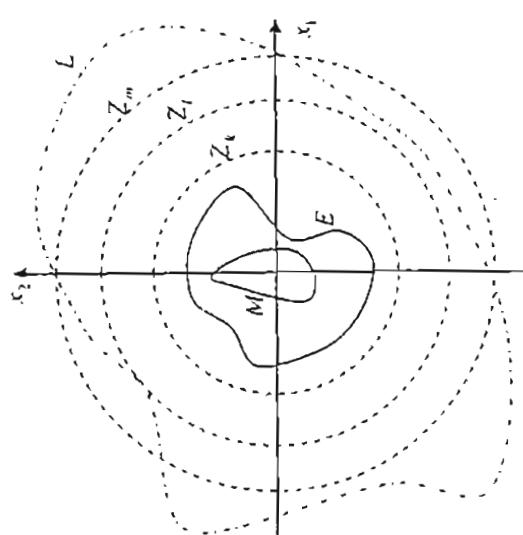
W twierdzeniu LaSalle'a zdefiniowane zbiory  $Z_l$ ,  $E$ ,  $M$  oraz podano ich własności i relacje, jakie między nimi zachodzą. Schematyczny przykład tych zbiorów dla systemu drugiego rzędu przedstawiono na rysunku 4.1.

nie zawierały się w  $L$  i wobec tego nie byłoby spełnione jedno z założzeń twierdzenia LaSalle'a, a mianowicie.

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = V'(x) \leq 0 \quad \forall x \in Z_m.$$

Gdyby zamiast  $l$  przyjąć mniejszą od niego wartość,  $k < l$ , zbiór  $Z_k$  spełniałby w prawie założenia twierdzenia, lecz byłby mniejszy od  $Z_l$ , a zazwyczaj poszukujemy największego zbioru  $Z_l$ , jakim możemy uzyskać za pomocą danej funkcjonatu. Dla tego parametru  $l$  najlepiej jest dobrą tak, by brzeg zbioru  $Z_l$ , „doknał” brzegu zbioru  $L$ .

Na rysunku 4.2 przedstawiono rodzinę trajektorii lazarowych pewnego przykładowego systemu dynamicznego i zaznaczono dwa zbiory  $M$  i  $N$ , będące kola. Zbiór  $M$  jest zbiorem invariantnym dla tego systemu (niestały cykl graniczny). Zbiór  $\{0\}$  jest również zbiorem invariantnym. Natomiast okrąg  $N$  wraz ze swoim wnętrzem stanowi pewną estymatę zbioru przyciągania asymptotycznego zerowego punktu równowagi.



Rys. 4.1. Ilustracja do twierdzenia LaSalle'a

Zbiór  $Z_l$  jest określony przez warunek:  $V(x) < l$  (porównaj z definicją zbioru poziomcowego). Kształt  $Z_l$  zależy więc od przyjętego funkcjonatu  $V(x)$ , nie zależy natomiast od pozycji badanego systemu dynamicznego, opisanego równaniem stanu (4.1). Ponieważ nierówność  $V(x) < l$  jest silna, zbiór  $Z_l$  jest otwarty. Przedstawiony na rysunku 4.1 przykładowy zbiór  $Z_l$  odpowiada następującemu funkcjonalowi:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

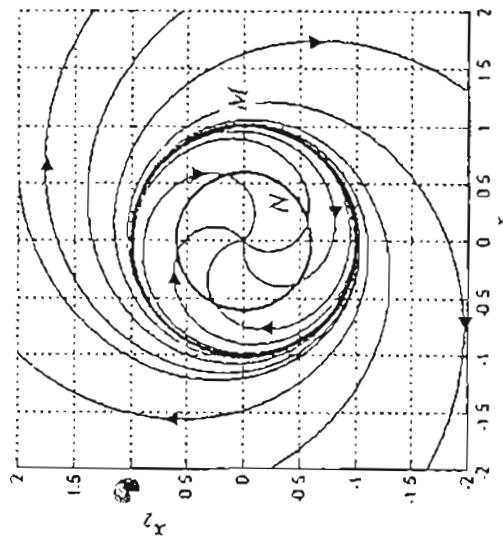
Poznajmice tego funkcjonalu są okręgiami. Zbiór  $E$  jest podzbiorem zbioru  $Z_l$ . Można go wyznaczyć, rozwiązyując równanie

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = 0 \quad \text{dla } x \in Z_l.$$

Zbiór  $L$  umieszczony na rysunku 4.1 to przykładowy zbiór, w którym pochodna po czasie funkcjonalu  $V(x)$ , wyznaczana na trajektoriach systemu, jest niedodatnia

$$L = \{x \in R^2 : \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \dot{V}(x) \leq 0\}.$$

Zbiór  $L$  zaznaczono pomocniczo, by wyjaśnić sposób doboru wartości parametru  $l$ . Gdyby zamiast  $l$  przyjąć większą od niego wartość  $m > l$ , odpowiadający jej zbiór  $Z_m$



Rys. 4.2. Zbiory invariantne  $M$  i  $\{0\}$ .  $N$  nie jest zbiorem invariantnym

#### Komentarze

O stabilności punktu równowagi  $x^*$  decyduje zachowanie się systemu w jego bezpośrednim otoczeniu, a nie w samym tym punkcie. W punkcie równowagi – zgodnie z jego definicją – pochodne zmiennych stanu zerują się. System pozostaje w tym punkcie dowolnie długo.

Należy pamiętać o istotnej różnicy pomiędzy zagadnieniem stabilności systemów liniowych i nieliniowych. W przypadku systemów liniowych stabilność, nie-stabilność lub asymptotyczna stabilność mają charakter globalny, to znaczy wszystkie trajektorie systemu (w tym trajektorie stałe) posiadają taką samą własność stabilności. System asymptotycznie stabilny jest zarazem systemem globalnie asymptotycznie stabilnym. W przypadku systemów nieliniowych poszczególne punkty równowagi mogą posiadać odmienne własności stabilności. Na przykład w układzie nieliniowym mogą istnieć obok siebie punkty równowagi stabilne i niestabilne. Dla asymptotycznie stabilnych punktów równowagi interesującym zagadnieniem jest określenie obszarów przyciągania. Jeśli system ma więcej niż jeden punkt równowagi, to żaden z nich nie może być globalnie asymptotycznie stabilny. Wynika to z prostego faktu, że dany punkt nie może należeć do obszaru przyciągania pierwszego, bo jest rozwiązaniem stałym.

Ciekawymi trajektoriami fazowymi, które mogą występuwać w systemach nieliniowych, są cykle graniczne, które mogą być (asymptotycznie) stabilne lub niestabilne. Cykl jest izolowana, zamknięta trajektoria w przestrzeni fazowej, stanów. Cykl, do którego zdążają asymptotycznie trajektorie startujące z punktów pewnego otoczenia cyklu, jest cyklem stabilnym. Jeżeli przy wzroście czasu trajektorie oddalażą się od cyklu, to cykl jest niesabilny. Istnienie cyklu granicznego w układach nieliniowych rzędu drugiego w przestrzeni  $R^2$  można wykazać, stosując kryterium Poincarégo-Bendixsona (np. Milkowski 2000, s. 70).

#### Niezerowe punkty równowagi

W twierdzeniach Lapunowa i LaSalle'a mowa jest o zerowym punkcie równowagi. Niech  $f(x^*) = 0$ . By za pomocą tych twierdzeń badać stabilność niezerowego punktu równowagi  $x^*$  systemu (4.1), konieczne jest zastosowanie transformacji zmiennych stanu

$$(4.8) \quad x(t) = \xi(t) + x^*.$$

Po wstawieniu wyrażenia (4.8) do (4.1) otrzymuje się

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\xi(t) + x^*) &= f(x^* + \xi(t)) = g(\xi(t)), \\ \dot{\xi}(t) &= g(\xi(t)). \end{aligned}$$

Przekształcając wzór, skorzystano z faktu zerowania się pochodnej ze stałej wartości  $x^*$ . Badanie stabilności zerowego punktu równowagi  $\dot{\xi}^* = 0$  systemu (4.9) jest równoważne badaniu stabilności niezerowego punktu równowagi  $x^* \neq 0$  systemu (4.1).

## 4.4. Przebieg ćwiczenia

W trakcie zajęć należy zbadać dwa podane niżej nieliniowe systemy dynamiczne.

### Zadanie 4.1

Wyznaczyć punkt równowagi systemu

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2x_1^2(t)x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t).$$

Za pomocą poznanych twierdzeń zbadać stabilność punktu równowagi, stosując kolejno dwa różne funkcjonalny:

$$V_1(x) = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2 \quad i \quad V_2(x) = \frac{x_1^2}{1-x_2} + x_2^2.$$

Dla każdego z nich należy:

- znaleźć analitycznie estymatę obszaru atrakcji asymptotycznie stabilnego punktu równowagi;
- wyznaczyć symulacyjnie rodzinę trajektorii badanego systemu; na tej podstawie oszacować rzeczywisty kształt obszaru przyciągania; na otrzymanym portrecie fazowym nanieść brzegi dwóch uzyskanych estymat obszaru przyciągania.

Funkcjal  $V_2$  nie spełnia założenia twierdzenia LaSalle'a, ponieważ nie jest określony na całej przestrzeni  $R^2$ . Twierdzenie w podanym wcześniejszym brzmieniu nie ma więc zastosowania do tego przypadku. Można tu natomiast skorzystać ze zmodyfikowanej wersji twierdzenia, w której twierdza, by funkcjonal  $V$  był określony w pewnym niepustym otoczeniu zera  $\Omega$ , a niekoniecznie w całej przestrzeni  $R^n$

$$(4.8) \quad V : \Omega \rightarrow R.$$

Zbiór  $Z_l$  określa się wówczas następująco:

$$Z_l = \{x \in \Omega : V(x) < l\}.$$

Dodatkowe założenie, niewystępujące w poprzedniej wersji, wymaga rozłączności brzegów zbioru  $Z_l$  i otoczenia  $\Omega$  (brzegi zbiorów  $Z_l$  i  $\Omega$  nie mogą mieć punktów wspólnych)

$$\partial Z_l \cap \partial \Omega = \emptyset.$$

By skorzystać ze zmienionej wersji twierdzenia, należy pomocniczo określić naturalną dziedzinę funkcjononatu  $V_2$ , by na tej podstawie móc wyznaczyć otoczenie  $\Omega$ .

#### Zadanie 4.2

Wyznaczyć punkt równowagi systemu

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1 + x_1^3,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1.$$

Zbadać jego stabilność za pomocą drugiej metody Lapunowa. Wyznaczyć estymator obszaru przyciągania na dwa sposoby:

- 1) z twierdzenia LaSalle'a,
- 2) na podstawie eksperymentów numerycznych.

Do badania stabilności wykorzystać funkcjonal o następującej postaci:

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

W twierdzeniu LaSalle'a należy przyjąć  $\ell = 1/2$ . Przeprowadzić symulację systemu dla różnych warunków początkowych. Można do tego celu wykorzystać model zbudowany w Simulinku. Wykreśleć uzyskaną rodzinę trajektorii. Na portret fazowy nanieść brzeg zbioru  $Z_\ell$  otrzymanego na podstawie twierdzenia LaSalle'a. Jedna z trajektorii systemu jest zamkniętą krzywą, która zarazem stanowi brzeg obszaru atrakcji punktu równowagi. Spróbować numerycznie uzyskać trajektorię. Zaznaczyć ją na portrecie fazowym. Dla porównania zbadać rodzaj stabilności zerowego punktu równowagi metodą liniaryzacji.

#### 4.5. Zadania do rozwiązań

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy zbadać stabilność dwóch następujących nieliniowych systemów dynamicznych:

$$\dot{x}(t) = -x + x^3,$$

$$\dot{x}(t) = -x + x^3.$$

oraz

Pierwszy z systemów ma tylko zerowy punkt równowagi. Do zbudania jego stabilności należy zastosować kolejno pierwszą i drugą metodę Lapunowa z prostym funkcjonałem postaci

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

W tym przypadku metoda liniaryzacji nie daje odpowiedzi na pytanie o stabilność, natomiast metoda funkcjonalna – owszem. Czy zerowy punkt równowagi jest globalnie asymptotycznie stabilny?

Drugi system ma trzy punkty równowagi. Należy zbadać stabilność ich wszystkich, a następnie za pomocą twierdzenia LaSalle'a określić estymatę obszaru przyciągania zerowego punktu równowagi. Można wykorzystać funkcjonal  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  oraz przyjąć  $\ell = 1/2$ . Czy jest uzasadnione przyjęcie  $\ell > 1/2$ ? Jak zmieni się estymata obszaru przyciągania, jeśli wziąć mniejszą wartość  $\ell$ ?

#### 4.6. Przykład obliczeniowy

Do badania stabilności wykorzystać funkcjonal o następującej postaci:  
Za pomocą drugiej metody Lapunowa zbadamy stabilność punktów równowagi podanego niżej systemu dynamicznego

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) = x_2(t) - \sin x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) = -x_1^3(t).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Rozpoczynany od poszukiwania punktów równowagi systemu, przyrównując do zera prawe strony równości (4.10)

$$\begin{aligned}x_2 - \sin x_1 &= 0, \\ -x_1^3 &= 0.\end{aligned}$$

Z drugiego równania wynika, że  $x_1 = 0$ . Następnie z pierwszego równania otrzymuje się  $x_2 = 0$ . System (4.10) ma dokładnie jeden, zerowy punkt równowagi  $x_T^* = [0 \ 0]^T$ .

Spróbujmy zbadać stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10), korzystając z „energetycznego” kandydata na funkcjonal Lapunowa

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \quad (4.11)$$

Pochodna funkcji (4.11) na trajektoriach systemu (4.10)

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1(x)}{\partial x} f(x) &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} x_2 - \sin x_1 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} = x_1(x_2 - \sin x_1) + x_2(-x_1^3) = \\ &= x_1 x_2 - x_1 \sin x_1 - x_1^3 x_2.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Można wykazać, że nie istnieje otoczenie zera, w którym wyrażenie (4.12) byłoby wszędzie niedodatnie.

Dla  $x_1 \in (0, \sqrt{2/3})$  zachodzi nierówność:

$$\sin x_1 < x_1.$$
(4.13)

$$2 - 3x_1^2 > 0.$$
(4.14)

Dla  $x_2 = 3x_1$  prawa strona równości (4.12) przyjmuje postać

$$3x_1^2 - x_1 \sin x_1 - 3x_1^4.$$
(4.15)

Korzystając z (4.13) i (4.14), można oszacować z dołu wartość (4.15)

$$3x_1^2 - x_1 \sin x_1 - 3x_1^4 > 3x_1^2 - x_1^2 - 3x_1^4 = x_1^2 (2 - 3x_1^2) > 0.$$

W dowolnym otoczeniu zera znajdzie się przynajmniej jeden punkt, dla którego  $x_1 \in (0, \sqrt{2/3})$  i  $x_2 = 3x_1$ . W punkcie tym wyrażenie (4.12) przyjmie wartość dodatnią, nie będąc więc spełnione założenia twierdzenia. Tak więc (4.11) nie jest funkcjonalem Lapunowa dla systemu (4.10).

Sprobujmy ponownie zbadać stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10), wykorzystując inną kandydatkę na funkcjonal Lapunowa. System (4.10) jest postaci (4.2)

$$\dot{x}_1 = x_2 - h(x_1),$$

$$\dot{x}_2 = -g(x_1),$$

z następującymi funkcjami  $h$  i  $g$ :

$$h(x_1) = \sin x_1,$$

$$g(x_1) = x_1^3.$$
(4.20)

Dla systemów dynamicznych o takiej strukturze zaleca się użycie następującego „kandydata” na funkcjonal Lapunowa:

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(\xi) d\xi, \quad x = [x_1 \ x_2]^T.$$
(4.16)

Uzyskana wówczas pochodna funkcjonalu, wyznaczona wzduż trajektorii systemu

$$\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) = -g(x_1) \cdot h(x_1)$$
(4.17)

Stosując wzór (4.16) dla systemu (4.10), otrzymujemy funkcjonal

$$V_2(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \xi^3 d\xi = \frac{1}{2}x_2^2 + \left[ \frac{1}{4}\xi^4 \right]_0^{x_1},$$
(4.18)

Jego pochodna, wyznaczona wzduż trajektorii systemu (4.10), wynosi

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) &= [x_1^3 \quad x_2] \begin{bmatrix} x_2 - \sin x_1 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} = \\ &= x_1^3 x_2 - x_1^3 \sin x_1 - x_1^3 x_2 = -x_1^3 \sin x_1. \end{aligned}$$
(4.19)

Wynik ten zgadza się ze wzorem (4.17).

Wartość funkcjonalu (4.18) w dowolnie dużym otoczeniu zera (z wyłączeniem 0) jest dodatnia

$$\forall_{\substack{x \in \Omega \\ x \neq 0}} V_2(x) > 0.$$

Ponadto istnieje otoczenie  $\Omega$  zera, w którym wartość pochodnej (4.19) funkcjonalu jest niedodatnia

$$\forall_{\substack{x \in \Omega \\ x \neq 0}} \frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) \leq 0.$$
(4.20)

Otoczeniem takim może być choćby wnętrze koła o średnicy 0 i promieniu mniejszym od  $\pi$  (patrz wzór (4.19)). Stąd, na mocy drugiej metody Lapunowa, stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10).

Za pomocą funkcjonalu (4.18) i twierdzenia Lapunowa nie można wykazać asymptotycznej stabilności zerowego punktu równowagi, ponieważ w dowolnie małym otoczeniu zera istnieją takie różne od zera punkty, dla których wyrażenie (4.19) zeruje

się (wszystkie punkty postaci  $[0 \ x_2]^T$ ,  $x_2 \in R$ ). Wobec tego jest spełniona jedynie nierówność silna (4.20), nie jest natomiast spełniona nierówność silna

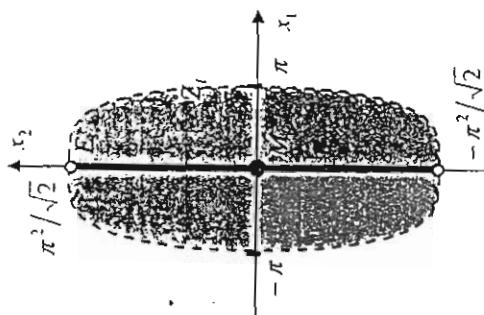
$$\forall_{\substack{x \in \Omega \\ x \neq 0}} \frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) < 0.$$

Spróbujmy wykorzystać funkcjonal (4.18) i twierdzenie LaSalle'a. Przyjmijmy  $l = \pi^4/4$ . Wówczas opisany w twierdzeniu zbiór  $Z_l$  ma postać ograniczonego obszaru

$$Z_l = \{[x_1 \ x_2]^T \in R^2 : x_1^4/4 + x_2^2/2 < \pi^4/4\}. \quad (4.21)$$

Oś symetrii zbioru  $Z_l$  pokrywają się z osiami układu współrzędnych  $0 \ x_1 \ x_2$  (rys. 4.3).

Zbiór  $Z_l$  nie zawiera swojego przegubu ze względu na nietowność silną w (4.21). Brzeg zbioru  $Z_l$  przecina os  $0x_1$  w punktach  $-\pi$  i  $\pi$ , natomiast os  $0x_2$  – w punktach  $-\pi^2/\sqrt{2}$  i  $\pi^2/\sqrt{2}$ .



Rys. 4.3. Ilustracja do przykładu obliczeniowego

Łatwo sprawdzić, że dla wszystkich  $x \in Z_l$  spełniona jest nierówność  $\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$ . Gdybyśmy przyjęli większą wartość  $l$ , wówczas do zbioru  $Z_l$  należałby przynajmniej jeden punkt, dla którego  $\pi < x_1 < 2\pi$ . Nierówność  $\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) \leq 0$  nie byłaby w tym punkcie spełniona. Maksymalna wartość  $l$ , którą można przyjąć, nie naruszaając założenia twierdzenia, wynosi  $\pi^4/4$ .

Następnie poszukujemy zbioru  $E$ , zdefiniowanego w twierdzeniu LaSalle'a, rozwiązując równanie:

$$\frac{\partial V_2(x)}{\partial x} f(x) = 0, \quad x \in Z_l,$$

$$-x_1^3 \sin x_1 = 0, \quad x \in Z_l.$$

Otrzymamy zbiór  $E$  jest odcinkiem leżącym na osi  $0x_2$ , rozciągającym się między punktami  $[0 \ -\pi^2/\sqrt{2}]^T$  i  $[0 \ \pi^2/\sqrt{2}]^T$ , lecz niezawierającym tych punktów (gdzie brzeg zbioru  $Z_l$  nie należy do  $Z_l$ ).

$$\begin{aligned} E &= \{[x_1 \ x_2]^T \in R^2 : x_1 = 0, x_2 \in (-\pi^2/\sqrt{2}, \pi^2/\sqrt{2})\} = \\ &= \{0\} \times (-\pi^2/\sqrt{2}, \pi^2/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Z kolei szukamy największego zbioru invariacyjnego  $M$ , zawartego w  $E$ . Zbiór ten będzie zawierał tylko element zerowy

$$M = \{0\}.$$

Żaden punkt odcinka  $E$  (poza zerem) nie należy do zbioru invariacyjnego  $M$ . By uzasadnić to stwierdzenie, założmy chwilowo, że do zbioru  $M$  należy pewien niezerowy punkt  $z \in E$ . Na podstawie równania (4.10) wyznaczmy dla niego wartość pochodnej  $\dot{x}_1(t)$ . Jest ona niezerowa. Skoro  $\dot{x}_1(t) \neq 0$ , to  $x_1(t)$  zmienia się w miarę upływu czasu, nie może zatem pozostać równe 0, a punkt o niezerowej pierwszej współrzędnej nie należy do zbioru  $E$ . Oznacza to, że trajektoria startująca z niezerowego punktu należącego do  $E$  opuści zbiór  $E$ . Wobec inkluzji  $M \subset E$  oznacza to również, że trajektoria ta nie może pozostać w  $M$ . W związku z tym  $M$  może zawierać wyłącznie punki  $[0 \ 0]^T$ .

Na mocy twierdzenia LaSalle'a zeroowy punkt równowagi systemu (4.10) jest asymptotycznie stabilny.

Funkcjonal (4.18) użyty w twierdzeniu Lapunowa pozwolił wykazać jedynie stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10). Za pomocą tego samego funkcjonalu i twierdzenia LaSalle'a pokazaliśmy własność silniejszą – asymptotyczną stabilność.

Na zakończenie zbadajmy stabilność zerowego punktu równowagi systemu (4.10), wykorzystując pierwszą metodę Lapunowa. Liniowe przybliżenie neliniiowego systemu (4.10) w zerze ma postać:

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Macierz  $A$  jest wartością macierzy Jacobiego funkcji  $f$  w punkcie równowagi  $x = 0$

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} -\cos x_1 & 1 \\ -3x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$f(x) = [f_1(x) \quad f_2(x)]^T, \quad x = [x_1 \quad x_2]^T.$$

Ponieważ  $A$  jest macierzą trójkątną górną, jej wartości własne można odczytać wprost z przekątnej głównej

$$\lambda(A) = \{0, -1\}.$$

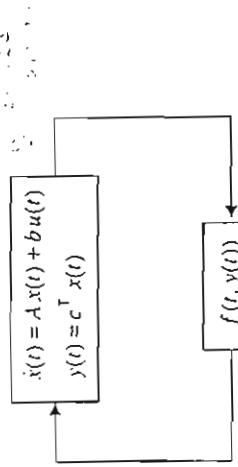
Jedna z wartości własnych macierzy  $A$  jest równa零. Wobec tego pierwsza metoda Lapunowa nie rozstrzyga kwestii stabilności.

#### 4.7. Literatura

- Demidowicz B.P. (1977): *Matematyczna teoria stabilności*. WNT, Warszawa.  
 Guckenheimer J., Holmes P. (1993): *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, New York.  
 Kaczorek T. (1977): *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT, Warszawa.  
 LaSalle J., Lefschetz S. (1966): *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*. PWN, Warszawa.  
 Leja F. (1956): *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*. PWN, Warszawa.  
 Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków.  
 Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.  
 Mitkowski W. (2000): *Systemy dynamiczne. Materiały uzupełniające do wykładow*. Wydawnictwa Wydziału EALiE AGH, Kraków.  
 Ombach J. (1999): *Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple*. Wydawnictwo UJ, Kraków.  
 Żakowski W., Kołodziej W. (1992): *Matematyka, cz. II. Podręczniki akademickie*. WNT, Warszawa.

## 5. Kryterium koła i twierdzenie Popova

Celem ćwiczenia jest zaznajomienie się z dwoma twierdzeniami. Pierwsze z nich znane jest pod nazwą „kryterium koła”, zaś drugie to twierdzenie Popova (porównaj np. Mitkowski 1991, s. 104 i 112). Oba służą do badania stabilności nieliniowych systemów dynamicznych, których struktura może zostać przedstawiona jak na rysunku 5.1. W skład pokazanego tu układu wchodzą wchodzi stacjonarny, liniowy system dynamiczny o jednym wejściu i jednym wyjściu (nazywamy skrótnie S[SO]), objęty sprzężeniem zwrotnym  $u(t) = f(t, y(t))$ .



Rys. 5.1. Układ regulacji

### 5.1. Kryterium koła

Dany jest liniowy, stacjonarny, skończony wymiarowy system dynamiczny (5.1) o jednym wejściu i jednym wyjściu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= c^T x(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

$t \geq 0$ ,

$$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R, \quad y(t) \in R, \quad b \in R^n, \quad c \in R^m, \quad A \in R^{n \times n}.$$

### Systemowiitemuodpowiadajątransmitancja

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b$$

Załóżmy, że macierz stanu A systemu nie posiada wartości własnych na osi urojonej

$$\forall \omega \in K \quad \det(j\omega I - A) \neq 0.$$

System (5.1) objęty jest nielinijkowym, stacjarnym, niesakadowanym sprzeżeniem zwrotnym

$$u(t) = f(t, y(t)), \quad f: [0, \infty) \times R \rightarrow R$$

System zamknięty (porównaj z rys. 5.1) opisany jest równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b f(t, c^T x(t)).$$

Zauważamy taka postać funkcji  $f$ , że istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (5.4) dla każdego  $t \geq 0$  i dla każdego warunku poczatkowego. Niech funkcja  $f$  spełnia następujące warunki:

$$\forall_{t \geq 0} \forall_{y \in R} \quad m_1 y^2 \leq y f(t, y) \leq m_2 y^2,$$

$$\forall_{t \geq 0} \quad f(t, 0) = 0,$$

gdzie  $m_1$  i  $m_2$  są ustalonymi liczbami rzeczywistymi ( $m_1 \leq m_2$ ). Niech ponadto istnieje  $m_0 \in [m_1, m_2]$ , takie że  $d + bm_0 c^T$  jest macierzą wykładniczo stabilną, czyli  $\Re(\lambda(d + bm_0 c^T)) < 0$ . Niech dla każdego  $\omega \in R$  zachodzi nierowność

$$\Re((1 - m_1 G(j\omega))(1 - m_2 G(j\omega))^*) > 0. \quad (5.6)$$

Gwiazdka występująca we wzorze (5.6) oznacza operację sprzężenia zespolonego. Dla przypadku gdy  $m_1$  i  $m_2$  są niezerowe i jednakowego znaku, wymaga się dedykowej charakterystyki amplitudowo-fazowej, odpowiadającej transmitem (5.2), nie obejmującej okregu przedstawionego w tablicy 5.1 w komórce 3D lub 4D.

Jesli spełnione są wszystkie podane wyżej założenia, to zerowe rozwiązanie układu zamkniętego (5.4) jest globalnie jednostajnie wykładniczo stabilne, czyli istnieją dodatnie stałe  $C$  i  $\alpha$ , takie że dowolne rozwiązanie równania (5.4) spełnia nierówność

$$\forall_{t \geq t_0} \quad \|x(t)\| \leq C e^{-(1-\delta)\alpha} \|x(t_0)\|.$$

Tablica 5.1

Geometriczneinterpretacje nierówności (5.5) i (5.6)

A	B	C	D
$m_1 < 0$	$m_2 = 0$		
$m_1 = 0$	$m_2 > 0$		
$m_1 > 0$	$m_2 = 0$		
$m_1 > 0$	$m_2 > 0$		
$m_1 > m_2 > 0$			
$m_1 > m_2 > 0$			
$m_1 < m_2 > 0$			
$m_1 < 0$	$m_2 > 0$		

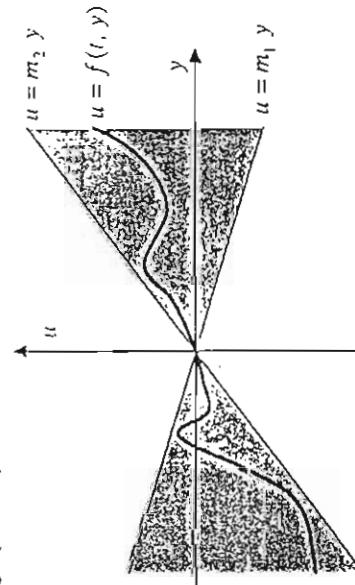
Komentarze:  
Założenia twierdzenia wymagają, by istniał regulator proporcjonalny o wzmacnieniu  $m_0 \in [m_1, m_2]$ , dla którego system zamknięty

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot m_0 \cdot c^T \cdot x(t)$$

jest wykładniczo stabilny. W przypadku liniowego, stacjonarnego i skończenia wymiarowego systemu dynamicznego, wykładnicza stabilność jest równoważna asymptotycznej stabilności ( $\operatorname{Re}(\lambda(A + b m_0 c)) < 0$ ). W twierdzeniu nie stawia się natomiast warunków co do stabilności macierzy  $A$ . W szczególności system otwarty (5.1) może być niestabilny.

#### Graficzna interpretacja nierówności (5.5a)

Funkcja  $f(t, \cdot)$  spełnia nierówność (5.5a) i równość (5.5b), jeśli jej wykres zawiera się w sektorze zaznaczonym na rysunku 5.2 kolorem szarym. W dalszej części rozdziału sektor ten będziemy nazywać sektorem dopuszczalnym dla nieliniowości  $f$  w kryterium kola lub krótko sektorem dopuszczalnym, jeśli spełnione będą wszystkie założenia zacytowanego powyżej twierdzenia.



Rys. 5.2. Sektor dopuszczalny dla nieliniowości  $f$  w kryterium kola

Warunek zawierania się wykresu funkcji  $f$  w sektorze dla  $y > 0$  można zapisać następująco:

$$\forall_{t \geq 0} \quad m_1 y \leq f(t, y) \leq m_2 y,$$

natomiast dla  $y < 0$

$$\forall_{t \geq 0} \quad m_1 y \geq f(t, y) \geq m_2 y.$$

Mnożąc te dwie nierówności podwójne przez  $y$  (należy pamiętać o zmianie znaku drugiej nierówności ze względu na mnożenie przez liczbę ujemną), otrzymujemy warunek (5.5a). Ponieważ (5.5a) jest nierównością słabą, otrzymany sektor jest zbiorem domkniętym, to znaczy zawiera swój brzeg, który w tym przypadku stanowią proste o równaniach  $u = m_1 y$  i  $u = m_2 y$ . Wykres funkcji  $f$  spełniającej warunki (5.5a) i (5.5b) może leżeć zarówno we wnętrzu sektora, jak i na ograniczających go prostych. Funkcja  $f$  (5.3) jest niestacjonarna (zależy w sposób jawny od czasu, jednym z jej argumentów jest wprost czas). Oznacza to, że położenie jej wykresu na płaszczyźnie w szarym sektorze może ulegać zmianie w czasie. Aby nierówność (5.5a) była spełniona, w każdej chwili  $t \geq 0$  wykres funkcji  $f$  musi w całości leżeć w sektorze dopuszczalnym. Oczywiście kryterium kola może być użyte również do badania przypadku ze stacjonarną funkcją  $f$ .

#### Graficzna interpretacja nierówności częstotliwościowej (5.6)

Jesieli oznaczyć część rzeczywistą transmitancji widmowej  $G(j\omega)$  przez  $P$ , zaś część urojoną przez  $Q$  (ponajczęściej dla wygody zapisu argument  $\omega$ ), to nierówność częstotliwościowa przybiera postać

$$\operatorname{Re}((1 - m_1 P - j m_1 Q)(1 - m_2 P - j m_2 Q)^*) > 0.$$

W wyniku kolejnych przekształceń otrzymujemy

$$(1 - m_1 P)(1 - m_2 P) + m_1 m_2 Q^2 > 0,$$

$$1 - (m_1 + m_2)P + m_1 m_2 (P^2 + Q^2) > 0.$$

Jesieli w ostatniej nierówności zastąpić znak większości znakiem równości, otrzymuje się równanie okręgu (dla  $m_1 m_2 \neq 0$ ) lub prostej pionowej (w układzie współrzędnych  $PQ$ ), w zależności od wartości parametrów  $m_1$  i  $m_2$ . Możliwe przypadki zebrane są w tablicy 5.1.

Nierówność częstotliwościowa (5.6) jest spełniona wówczas, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa odpowiadająca transmitancji (5.2) w całości leży w „szarym obszarze” na rysunkach z kolumny D tablicy 5.1. Dla przypadków wymienionych w wierszu 1. i 2., charakterystyka musi leżeć w całości odpowiednio na prawo lub na lewo od prostej  $\operatorname{Re}G(j\omega) = m_1^{-1}$  lub  $\operatorname{Re}G(j\omega) = m_2^{-1}$ . W przypadkach wymienionych w wierszach 3. i 4. charakterystyka musi leżeć na zewnątrz okręgu. W przypadku wymienionym w wierszu 5. charakterystyka powinna znajdować się w całości we wnętrzu okręgu. Zadania kryterium kola wymagają dodatkowo, by charakterystyka amplitudowo-fazowa nie obejmowała okręgów z wierszy 3. i 4.

Ponieważ (5.6) jest nierównością silną, obszary z kolumny D w tabeli są zbiorami otwartymi – nie zawierają swoich brzegów. Żaden punkt charakterystyki amplitudowo-fazowej  $G(j\omega)$  nie może leżeć na narysowanej linią przetwarzaną prostej (wiersze 1, i 2, tab. 5.1) bądź okręgu (wiersze 3., 4. i 5.).

#### Warunki dostateczne

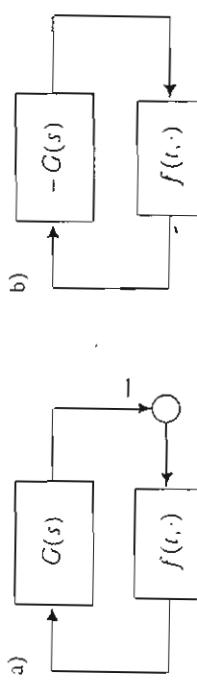
Twierdzenie formułuje warunki dostateczne, ale nie konieczne. Jeśli założenia twierdzenia są spełnione, zachodzi podana w lezie własność wykładniczej stabilności. Jeśli natomiast założenia spełnione nie są, żadnych wniosków co do stabilności wyciągać nie można.

Typowy sposób korzystania z twierdzenia pozwala znaleźć sektor dopuszczalny, gdy znany jest system dynamiczny (5.1). Kolejność czynności jest następująca:

1. Znajdź transmitancję linowej części układu.
  2. Narysuj charakterystykę amplitudowo-fazową systemu (5.1).
  3. Wystarczy wykreślić część charakterystyki dla  $\omega \geq 0$ , gdyż część dla  $\omega \leq 0$  jest jej symetrycznym odbiciem względem osi  $OP$ . W związku z tym obie części charakterystyki jednocześnie spełniają nierówność (5.6) lub jednocześnie jej nie spełniają.
  3. Znajdź parametry  $m_1$  lub  $m_2$ , które spełniają nierówność częstotliwościową (5.6).
  - Skorzystaj przy tym z interpretacji geometrycznej.
  4. Sprawdź, czy istnieje  $m_0 \in [m_1, m_2]$  gwarantujące asymptotyczną stabilność macierzy  $A + bm_0 C$ .
  5. Znalezione parametry wyznaczają sektor dopuszczalny w kryterium koła.
- Naturalne jest dążenie do osiągnięcia jak największego sektora. Najbardziej pożądany jest więc przypadek z 5. wiersza tablicy 5.1. Zachodzi on tylko wówczas, gdy całą charakterystykę częstotliwościową da się zamknąć wewnątrz odpowiedniego okręgu. Należy wybierać okrąg jak najmniejszy, wówczas wartości bezwzględne  $m_1$  i  $m_2$  są duże, a sektor dopuszczalny – wielki.

#### Dodatnie sprzężenie zwrotne

Wzór (5.3) występujący w kryterium koła opisuje dodatnie sprzężenie zwrotne. Natomiast w praktycznych zastosowaniach spójka się częściej układy z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rys. 5.3a). By móc w takich przypadkach stosować kryterium koła, należy wlaściwy znak „minus”, odpowiadający ujemnemu sprzężeniu zwrotnemu, do transmitancji (rys. 5.3b). Układ po transformacji złożony jest z nowej transmitancji  $-G(s)$  i niezmienionej funkcji  $f$ . Ponieważ występuje w nim dodatnie sprzężenie zwrotne, więc można stosować do niego kryterium koła, pamiętając o zamianie  $G(s)$  na  $-G(s)$ .



Rys. 5.3. Schematy blokowe układów regulacji z ujemnym (a) i dodatnim (b) sprzężeniem zwrotnym

## 5.2. Twierdzenie Popova

Dany jest liniowy, stacjonarny, skończony wymiarowy system dynamiczny (5.7) o jednym wejściu i jednym wyjściu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + b \cdot u(t), \\ y(t) &= c^T \cdot x(t), \\ x(t) &\in R^n, \quad u(t) \in R, \quad y(t) \in R. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Systemowi temu odpowiada transmitancja

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b.$$

Niech macierz  $A$  systemu będzie wykładniczo (asymptotycznie) stabilna. System (5.7) objęty jest nieliniowym, statycznym, stacjonarnym sprzężeniem zwrotnym

$$u(t) = f(y(t))$$

ze skalarną funkcją  $f$  klasy  $C^1$  spełniającą następujący warunek:

$$\forall_{y \in R} \quad 0 \leq y f(y) \leq m y^2, \quad (5.8a)$$

gdzie  $m$  jest pewną liczbą rzeczywistą nieujemną. Jeżeli istnieje liczba  $q \in R$ , taka że dla każdego  $\omega \in R$  zachodzi nierówność

$$\operatorname{Re} G(j\omega) - q \omega \operatorname{Im} G(j\omega) < \frac{1}{m}, \quad (5.9a)$$

to zamknięty układ regulacji opisany równością

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b f(c^T x(t))$$

jest globalnie asymptotycznie stabilny (np. Mitkowski 1996, s. 181).

Jeśli w powyższym twierdzeniu założyć dodatkowo, że  $q \geq 0$ , to nierówności (5.8a) i (5.9a) można zastąpić odpowiednio przez:

$$\begin{aligned} \forall_{y \in R} \quad 0 &\leq y f(y), \\ (5.8b) \end{aligned}$$

$$\text{Re } G(j\omega) - q \omega \text{Im } G(j\omega) < 0. \quad (5.9b)$$

Odpowiada to przypadkowi, gdy dopuszczaemy  $m = \infty$ .

Uogólniona postać twierdzenia Popova, uwzględniającą funkcję  $f$  lokalnie spełniającą założenia twierdzenia oraz umożliwiającą wyznaczanie estymat obszaru przy ciągania, można znaleźć w pracy (Grabowski 1996, s. 85).

#### Komentarz

Założenia twierdzenia wymagają, by system (5.7) (bez sprzężenia zwrotnego) był wykładniczo stabilny, co dla systemu liniowego, stacjonarnego i skończonego wymiarowego jest równoważne wymaganemu asymptotycznemu stabilności. Wprowadzenie odpowiedniego sprzężenia zwrotnego może polepszyć współczynnik tłumienia układu otwartego.

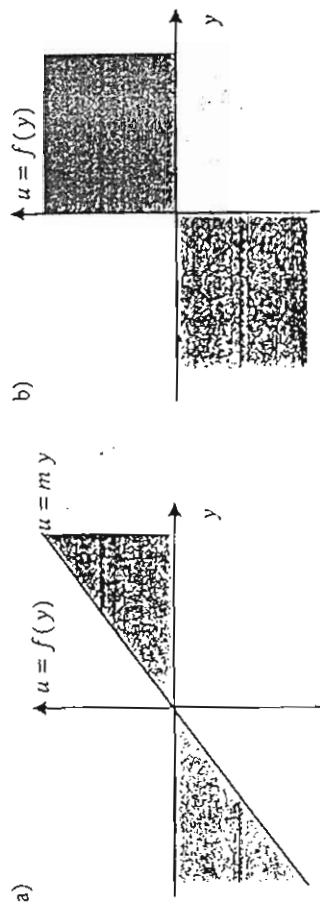
#### Graficzna interpretacja nierówności (5.8)

Funkcja  $f: R \rightarrow R$  klasy  $C^1$  spełnia nierówność (5.8a), jeśli jej wykres zawiera się w sektorze pokazanym na rysunku 5.4a. Nierówności (5.8b) odpowiadają zaś sektorowi wyżoiniony na rysunku 5.4b.

Sektor wyżoiniony na rysunku 5.4a ograniczony jest dwiema prostymi: osią Oy oraz prostą o równaniu  $u = my$ . Obie proste należą do sektora, gdyż nierówność (5.8a) jest słaba. Sektor jest zatem zbiorem domkniętym. Każda funkcja klasy  $C^1$ , której wykres zawiera się w tym sektorze, spełnia założenia twierdzenia. Założenie o klasie  $C^1$  i ograniczonej pochodnej funkcji  $f$  gwarantuje istnienie jednoznacznego rozwiązania równania systemu zamkniętego.

Część sektora, która mieści się w pierwszej ćwarcie układu współrzędnych, może być opisana następującą nierównością podwójną:

$$0 \leq f(y) \leq m y.$$



Rys. 5.4. Sektor Popova: a)  $m < \infty$ ; b)  $m = \infty$

Część w trzeciej ćwarcie opisuje podobna nierówność, ale z odwróconymi znakami „mniejszy bądź równy”

$$0 \geq f(y) \geq m y.$$

Mnożąc powyższe nierówności stronami przez  $y$ , otrzymujemy nierówność (5.8a), występującą w sformułowaniu twierdzenia.  
Sektor wyżoiniony na rysunku 5.4b stanowią I i III ćwarcie układu współrzędnych.

#### Sektor Popova

Sektor, na który składają się obszary wyżoinione na rysunku 5.4 szarym kolorem, wraz z ograniczającymi je prostymi, nosi nazwę sektora Popova, jeśli spełnione są założenia twierdzenia Popova.

#### Graficzna interpretacja nierówności częstotliwościowej (5.9)

W nierównościach (5.9a) i (5.9b) występują części: rzeczywista i urojona transmitancji widmowej. Oznaczmy je odpowiednio przez  $P(\omega)$  oraz przez  $Q(\omega)$ .

Wykres przedstawiający wzajemną zależność  $P$  i  $Q$  na płaszczyźnie zespolonej (w układzie współrzędnych  $P(Q)$ ) to znana charakterystyka amplitudowo-fazowa (wykres Nyquista). Jej przykład przedstawiono linią przerwaną na rysunku 5.5.

W nierównościach częstotliwościowych (5.9a) i (5.9b) częściami urojona transmitancji  $Q(\omega)$  jest pomnożona przez pulsację  $\omega$ . Wprowadzamy w związku z tym tak zwaną transmitancję zmodyfikowaną

$$\tilde{G}(j\omega) = P(\omega) + j \cdot Q(\omega), \quad \tilde{P}(\omega) = P(\omega), \quad \tilde{Q}(\omega) = \omega \cdot Q(\omega).$$

Naturalnym celem jest znalezienie jak najszerzego sektora Popova. Sektor jest tym większy, im większa jest liczba  $m$ . Ponieważ punkt przecięcia osi  $P$  przez prostą ma współrzędną  $1/m$ , więc poszukiwać należy prostej przecinającej osi jak najbliższej punktu  $[0 \ 0]^\top$ , po jej dodatniej stronie. W praktyce prostą „przesuwa” się jak najbardziej w lewo, „obracając” ją zarazem tak, by zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa leżała w całości na lewo od niej. Prostaanoż również przechodzić przez początek układu współrzędnych, co odpowiada przypadkowi  $m = \infty$ , ale wówczas musi być spełniony warunek  $q \geq 0$ .

(Smieje pewne podobieństwo pomiędzy prostą Popova a prostą o równaniu  $\operatorname{Re} G(j\omega) = 1/m_2$ , występującą w kryterium koła (przypadek z drugiego wiersza tab. 5.1). Różnica polega między innymi na możliwości „pochylenia” prostej Popova, co pozwala w pewnych wypadkach na przesunięcie punktu jej przecięcia z osią  $0P$  w kierunku zera. W efekcie wartość  $m$  może być większa od  $m_2$ , a tym samym uzyskany sektor Popova – „szerszy” od sektora dopuszczalnego w kryterium koła. W przypadku pokazanym na rysunku 5.5 w kryterium koła charakterystyka  $G(j\omega)$ , a zatem i  $\tilde{G}(j\omega)$ , musi leżeć na lewo od prostej pionowej (prostopadłej do osi  $0P$ ).

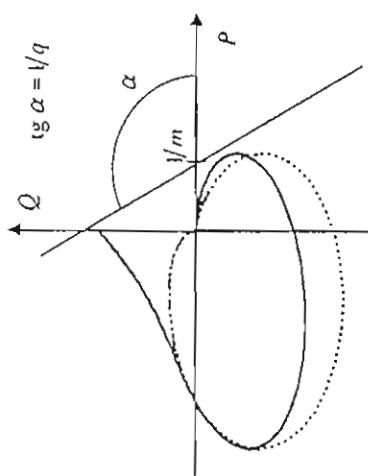
#### Warunki dostateczne

Twierdzenie formułuje warunki dostateczne, ale nie konieczne. Jeśli założenia twierdzenia są spełnione, układ zamknięty jest globalnie asymptotycznie stabilny. Jeśli natomiast założenia nie są spełnione, nie można wyciągać żadnych wniosków co do stabilności.

#### Sektor Hurwitza

System (5.1) lub (5.7) można objąć sprzeżeniem zwrotnym realizowanym przez regulator proporcjonalny o wzmacnienniu  $k$ . Otrzymuje się wówczas system zamknięty, opisany równaniem

$$u(t) = k y(t), \quad k \in R,$$



Rys. 5.5. Pierwsza (linia przerywana) i zmodyfikowana (linia ciągła) charakterystyka amplitudowo-fazowa zmodyfikowana (linia ciągła na rys. 5.5). Jest on dogodny dla graficznego zbadania, czy zachodzi nierówność częstotliwościowa (5.9a). Nierówność ta przyjmuje w nowych oznaczeniach postać

$$\hat{P}(\omega) - q \hat{Q}(\omega) < \frac{1}{m}.$$

Po zamianie znaku nierówności na znak równości, dostaje się równanie linii prostej, przecinającej osi  $\hat{P}$  w punkcie  $1/m$  i nachylonej do niej pod kątem, którego tangens jest równy  $1/q$  (tak zwana prosta Popova). Nierówność częstotliwościowa jest spełniona, gdy zmodyfikowana charakterystyka częstotliwościowa leży w całości na lewo od tej prostej. Pokazano to na rysunku 5.5. Charakterystyka zmodyfikowana i prosta nie mogą mieć punktów wspólnych, ponieważ (5.9a) jest nierównością silną.

Interpretacja graficzna nierówności (5.9a) jest podobna, ale wówczas odpowiednia prosta musi przechodzić przez początek układu współrzędnych  $0PQ$ , a współczynnik  $q$  nie może być ujemny.

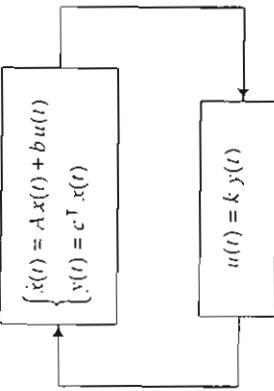
Typowy sposób korzystania z twierdzenia Popova jest następujący:

1. Znajdź transmitancję liniowej części układu, sprawdzawszy uprzednio założenie o wykładniczej stabilności macierzy  $A$ .
2. Wyznacz transmitancję zmodyfikowaną i narysuj jej wykres dla  $\omega \in R$ . Ponieważ  $\hat{G}(j\omega) = \tilde{G}(-j\omega)$ , wystarczy wykreślić zmodyfikowaną charakterystykę tylko dla nieujemnych wartości pulsacji  $\omega$ .
3. Znajdź prostą Popova przecinającą dodatnią półosię  $0P$  jak najbliżej punktu  $0$  i taką, by zmodyfikowana charakterystyka amplitudowo-fazowa leżała w całości na lewo od niej. Współczenna punktu przecięcia prostej Popova z półosią  $0P$  jest równa  $1/m$ .
4. Otrzymana wartość parametru  $m$  określa sektor Popova.

$K = \{k \in R : \operatorname{Re} \lambda_k (A + b k c^\top) < 0, \quad k = 1, \dots, n\}$

Przypadek ten pokazano na rysunku 5.6.

Oznaczmy przez  $K \subset R$  zbiór tych wszystkich współczynników wzmacnienia  $k$ , dla których system zamknięty jest asymptotycznie stabilny (wszystkie wartości własne macierzy  $A + b k c^\top$  leżą w lewej, otwartej półpłaszczyźnie zespolonej  $C^-$ )



Rys. 5.6. Zamknięty układ regulacji z regulatorem proporcjonalnym

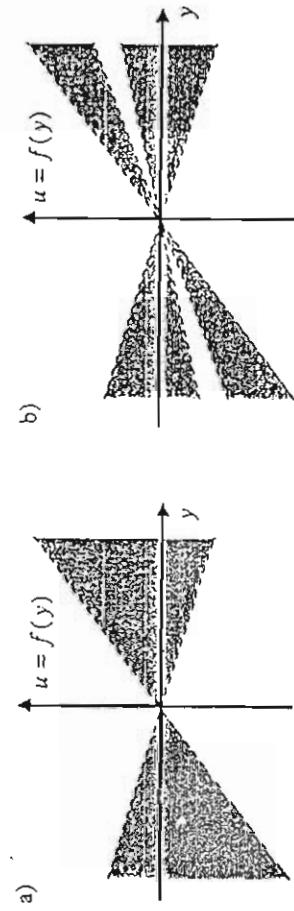
Sektorom Hurwitza nazywamy sektor oznaczony przez charakterystyki tych wszystkich regulatorów proporcjonalnych, które zapewniają asymptotyczną stabilność układu zamkniętego (5.10)

$$H = \{(y, k_y) \in R^2 : y \in R, k \in K\}.$$

Przykład sektora Hurwitza przedstawiono na rysunku 5.7a. Zbiór  $K$  wzmacnien regulatorów proporcjonalnych, stabilizujących system (5.1) lub (5.7), nie musi być jednospójny. Rysunek 5.7b pokazuje przykład sektora Hurwitza uzyskanego dla przypadku, gdy  $K$  jest sumą dwóch rozłącznych przedziałów otwartych

$$K = (a_1, a_2) \cup (a_3, a_4), \quad a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Na rysunku 5.7 proste ograniczające sektor Hurwitza (pole szare) zaznaczono linią przerwawaną, ponieważ nie znajdują się one w tym sektorze (z wyjątkiem punktu  $[0 \ 0]^T$ ). Natomiast proste ograniczające sektor dopuszczalny w kryterium koła (rys. 5.2) znajdują się w nim, dlatego zaznaczono je linią ciągłą. Podobnie proste ograniczające sektor Popova dla przypadku  $m < \infty$  (rys. 5.4a) znajdują się w tym sektorze.



Rys. 5.7. Przykładowe sektory Hurwitza: a) dla  $K$  jednospojnego;  
b) dla  $K$  niejednospojnego

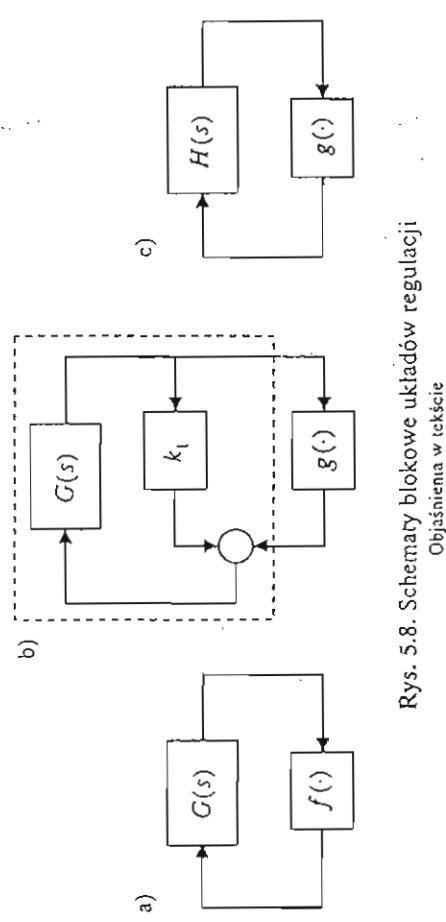
### Uwaga

Fakt zauważania się wykresu nieliniowej funkcji  $f$  w sektorze Hurwitza nie gwarantuje stabilności zamkniętego układu regulacji dla nieliniowego sprzężenia zwrotnego  $u(t) = f(y(t))$  lub  $u(t) = f(t, y(t))$ . Sektor Hurwitz jest zawsze nadzbiorem w stosunku do sektora Popova i sektora dopuszczalnego w kryterium koła. O równości sektora Hurwitza i np. sektora dopuszczalnego nie może być mowy, ponieważ proste ograniczające sektor Hurwitza nie znajdują się w nim (z wyjątkiem punktu  $[0 \ 0]^T$ ), zaś proste ograniczające sektor dopuszczalny znajdują się w nim. Istnieją jednak przypadki (zresztą dość liczne), gdy dowolnie duży sektor, zawierający się w sektorze Hurwitza, spełnia założenia któregoś z dwóch podanych twierdzeń.

Pewnym utrudnieniem w zastosowaniach twierdzenia Popova jest to, że jedną z ograniczających sektor Popova prostych jest zawsze oś  $Oy$ , co zawiera klasę regulatorów opisanych funkcją  $f$ . Jeśli chce się badać sektor zawarty między prostymi  $u = k_1 y$  oraz  $u = k_2 y$ , gdzie  $k_2 > k_1$  i  $k_1, k_2 \neq 0$ , należy skorzystać z następującego podstawienia:

$$f(y) = k_1 y + g(y). \quad (5.11)$$

Wzorowi (5.11) odpowiada rysunek 5.8b.



Rys. 5.8. Schematy blokowe układów regulacji  
Objaśnienia w tekście

Ponieważ pierwszy składnik sumy po prawej stronie (5.11) jest liniowy, to można go wyłączyć do transmitancji. W ten sposób otrzymuje się nowy układ, pokazany na rysunku 5.8c, gdzie

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 - k_1 G(s)}.$$

Z równości (5.11) wynika, że jeśli funkcja  $g$  należy do sektora ograniczonego prostym:

$$u = 0,$$

$$u = (k_2 - k_1)y = m y,$$

to funkcja  $f$  należy do sektora ograniczonego przez prostą:

$$G(s) = \frac{4(1-5s)}{(1+3s)(1+2s)}. \quad (5.12)$$

**Zadanie 5.1**  
Wyznacź jak największy sektor dopuszczalny w kryterium koła, a następnie sektor Popova dla systemu dynamicznego (5.12) i ujemnego sprzężenia zwrotnego (rys. 5.9) to spełnione są wszystkie założenia użytych twierdzeń.

Przynależność wykresu funkcji  $g$  do sektora opisanego parametrami  $(0, m)$  można wykazać, używając twierdzenia Popova – a stąd wynika przynależność funkcji  $f$  do sektora opisanego parametrami  $(k_1, k_2)$ . Przekształcenie określone wzorem (5.11) niejako „obraca” sektor tak, by jedna z ograniczających go prostych pokryła się z osią  $Oy$  układu współrzędnych. Jednocześnie zmiana ulega liniorazowa część dynamiczna systemu.

Podeborne jak kryterium koła, również twierdzenie Popova sformułowane jest dla dodatniego sprzężenia zwrotnego. Jeśli w badanym układzie występuje ujemne sprzężenie zwrotne, można postąpić w sposób analogiczny do opisanego w przypadku kryterium koła (patrz rys. 5.3 i odnoszący się do niego fragment objaśnienia).

### 5.3. Wykorzystanie MATLAB-a

Do wykreszenia charakterystyki amplitudowo-fazowej stęży w MATLAB-ie funkcja `nyquist`, dostępna w przyborniku *Control Toolbox*. Wywołana z lewostronnymi argumentami

$$[P, Q, w] = \text{nyquist}(L, M)$$

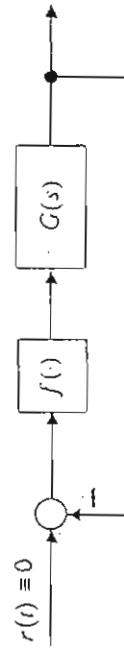
zwraca wartości  $P$ ,  $Q$  oraz  $\omega$  dla kolejnych punktów wykresu. Mnożąc przez siebie zwrócone wartości  $Q$  i  $\omega$ , otrzymuje się częstotliwość zmodyfikowanej transmitancji. Do wykresienia zmodyfikowanej charakterystyki amplitudowo-fazowej można użyć polecenia `plot`. W twierdzeniu Popova i kryterium koła wymaga się spełnienia nierówności częstotliwościowych dla  $\omega \in R$ . W praktyce jednak wystarczy badać tylko przypadki dla  $\omega \geq 0$  (uzasadniając podano przy omawianiu twierdzeń).

Za pomocą MATLAB-a niemożliwe sprawdzić asymptotyczną stabilność macierzy  $A$ , badając jej wartości własne polecam *eg*. W przypadku gdy dana jest transmitancja, badać należy pierwiastki równania charakterystycznego polecam *roots*.

## 5.4. Przebieg ćwiczenia

### Zadanie 5.1

Wyznacź jak największy sektor dopuszczalny w kryterium koła, a następnie sektor Popova dla systemu dynamicznego (5.12) i ujemnego sprzężenia zwrotnego (rys. 5.9)



Rys. 5.9. Układ regulacji z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

**Zadanie 5.2** (Kudrewicz 1970, s. 177)  
Dany jest system dynamiczny

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$

$$y(t) = c^T x(t),$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 0 \quad 0].$$

System ten objęto dodatnim sprzężeniem zwrotnym za pomocą nietniowego, statycznego, stacjonarnego elementu o charakterystyce

$$u(t) = M \arct g y(t), \quad M > 0.$$

Określi możliwie największą wartość parametru  $M$ , przy której charakterystyka elementu nietniowego mieści się jeszcze w sektorze Popova (sektorze dopuszczalnym w kryterium koła). Sprawdź spełnienie wszystkich założień stosowanych twierdzeń. Działanie układu regulacji przetestuj symulacyjnie w Simulinku.

## 5.5. Przykład obliczeniowy

Dany jest człon inertyczny pierwszego rzędu o transmitancji

$$G(s) = \frac{K}{1+sT}, \quad K, T > 0.$$

Jest on asymptotycznie stabilny. Człon ten objęto ujemnym sprzężeniem zwrotnym, realizowanym przez nieliniowy, stacjonarny element statyczny o charakterystyce opisanej funkcją  $f$  klasy  $C^1$  (rys. 5.9). Należy wyznaczyć jak największy sektor Popova.

Zgodnie z rysunkiem 5.3 i uwagami do niego się odnoszącymi, w dalszym ciągu badany będzie system o transmitancji  $-G(s)$ , objęty dodatnim sprzężeniem zwrotnym, opisanym funkcją  $u = f(y)$ .

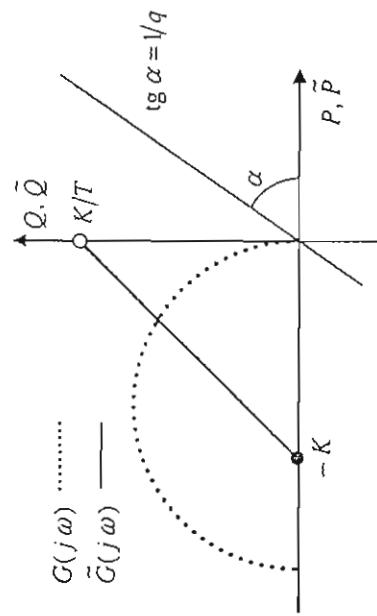
Część rzeczywista i urojona transmitancji widmowej  $-G(j\omega)$  wyrażają się wzorami:

$$P(\omega) = \frac{-K}{1 + \omega^2 T^2}, \quad Q(\omega) = \frac{\omega K T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Na ich podstawie można wyznaczyć zmodyfikowaną transmitancję widmową

$$\tilde{P}(\omega) = P(\omega) = \frac{-K}{1 + \omega^2 T^2}, \quad \tilde{Q}(\omega) = \omega Q(\omega) = \frac{\omega^2 K T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Pierwotną i zmodyfikowaną charakterystykę amplitudowo-fazową pokazano na rysunku 5.10.



Rys. 5.10. Charakterystyki częstotliwościowe: pierwotna (linia przerywana) i zmodyfikowana (linia ciągła) oraz przykładowa prosta Popova

Prosta Popova może przeходить przez punkt  $[0 \ 0]^T$ . Wynika stąd, że  $m$  może równe się nieskończoności. Ćwiartki I i III układu współrzędnych stanowią wobec tego sektor Popova. Porównać z sektorem Hurwicza.

## 5.6. Literatura

- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwa AGH, Kraków.
- Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. AGH, Kraków (również wersja internetowa z roku 2004): [http://www.ia.agh.edu.pl/~pgrab/grabowski\\_files/newedition1453/nouwyskipt.xml](http://www.ia.agh.edu.pl/~pgrab/grabowski_files/newedition1453/nouwyskipt.xml).
- Kudrewicz J. (1970): *Częstotliwościowe metody w teorii nielinowych układów dynamicznych*. WNT, Warszawa.

Formułując zadanie optymalizacji parametrycznej dla układu z rysunku 6.1, należy podać:

- postać wskaźnika jakości  $J$ ,
- przebieg w czasie wartości zadanej  $r$ ,
- warunki początkowe dla regulatora i obiektu,
- charakter zakłóceń  $z$ .

Zazwyczaj zakłada się brak zakłóceń  $z(t)$ , zerowe warunki początkowe dla obiektu i regulatora, zaś w roli sygnału wartości zadanej wykorzystuje się skok jednostkowy  $r(t) = 1(t)$  (lub inny typowy sygnał testowy). Można również przyjąć brak zakłóceń, wartość zadana tożsamociwą równej zeru  $r(t) \equiv 0$ , a optymalizacji poddać odpowiedź układu na niezerowe warunki początkowe. Inne podejście polega na przyjęciu  $r(t) \equiv 0$ , zerowych warunków początkowych dla obiektu i regulatora i optymalizowaniu zachowania układu regulacji w obecności zakłóceń  $z(t)$ . Nie podaje się przy tym zazwyczaj przebiegu czasowego zakłócenia, lecz jedynie określa się w pewien sposób jego charakter (na przykład podając wartość normy w przestrzeni  $L^2$  lub pewne własności probabilistyczne). Przyjęte założenia powinny być bliskie realnej sytuacji, występującej w rzeczywistym układzie regulacji.

Na schemacie z rysunku 6.1 zakłócenie  $z(t)$  dodane jest do sygnału  $u(t)$  na drodze między regulatorem a obiektem regulacji. Niekiedy zakłada się inną miejscę wprowadzenia zakłócenia, dodaje się je do sygnału wyjściowego  $y(t)$  pomiędzy obiektem a wężem sumacyjnym wyznaczającym uchybę regulacji  $e(t)$ .

Podczas optymalizacji nastaw regulatora dobiera się ze zbioru nastaw dopuszczalnych, jest to zazwyczaj zbiór tych wszystkich nastaw, dla których układ regulacji (układ zamknięty) zachowuje asymptotyczną stabilność, będącą warunkiem koniecznym jego poprawnej pracy, a jednocześnie wartość wskaźnika jakości jest określona (istnieje). W praktycznych zastosowaniach zbiór nastaw dopuszczalnych może być dość skąko ograniczony przez warunki techniczne użytego regulatora (zakres nastaw możliwych do ustawienia). Wzmocnienie regulatora ogranicza się też często po to, by nie dopuścić do przekroowania urządzenia urządzenia wykonawczego (do wykroczenia wartości sygnału wyjściowego regulatora poza dopuszczalny zakres).

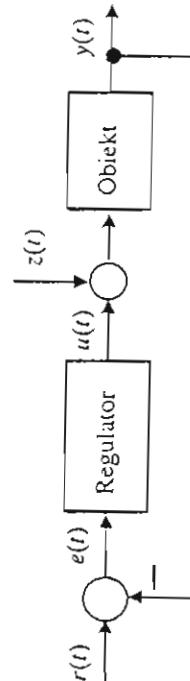
W przypadku optymalizacji parametrycznej, struktura regulatora jest z góry zalone (narzucona), zaś strojeniu podlegają jedynie nastawy regulatora, czyli parametry równan opisujących regulator. Wskaźnik jakości regulacji jest funkcją nastaw regulatora. Przykładowo, jeśli w układzie wykorzystywany jest regulator PI, to wskaźnik jakości jest funkcją nastaw  $K_p$  i  $T_i$ , czyli

$$J = J(K_p, T_i).$$

Zadaniem optymalizacji parametrycznej jest wówczas znalezienie optymalnych nastaw  $K_p^*$  i  $T_i^*$ , należących do zbioru dopuszczalnych nastaw  $\Omega$ , które minimalizują wskaźnik jakości.

$$J(K_p^*, T_i^*) \leq J(K_p, T_i), \quad (K_p, T_i) \in \Omega$$

## 6. Optymalizacja parametryczna



Rys. 6.1. Układ regulacji automatycznej

### 6.1. Podstawowe pojęcia

Optymalizacja parametryczna polega na doborze takich nastaw regulatora (ze zbioru dopuszczalnych nastaw  $\Omega$ ), które minimalizują wybrany wskaźnik jakości regulacji  $J$ . Zbiór  $\Omega$  definiuje się zazwyczaj jako zbiór tych wszystkich nastaw, które gwarantują asymptotyczną stabilność zamkniętego układu regulacji i dla których wartość wskaźnika jakości  $J$  jest określona (istnieje).

Zadanie optymalizacji parametrycznej nie zawsze ma rozwiązań. Rozwiązań – jeśli istnieje – może być jednoznaczne (jedynie) lub niejednoznaczne.

Narzucona z góry struktura regulatora, zbiór  $\Omega$ , rodzi sygnał wartości zadanej, dynamika obiektu oraz charakter zakresów określają zbiór  $U$  możliwych do osiągnięcia sterowan  $u$ . Sterowanie optymalne, wybrane z tego zbioru, może być gorsze niż sterowanie optymalne uzyskane dla regulatora o innej strukturze. Dlatego niekiedy można uzyskać lepszą wartość wskaźnika jakości, podając doborowi nie tylko nastawy, ale także strukturę regulatora. Nie jest to już jednak optymalizacja parametryczna w klasycznym sensie.

### Wskaźnik jakości

Wskaźnik jakości, zwany również funkcją celu lub funkcją kosztu, przyporządkowany nastawom regulatora liczbę rzeczywistą, będącą oceną jakości regulacji dla tych nastaw. Innymi słowy, w języku matematyki wskaźnik jakości jest funkcją celu. Wskaźniki jakości mogą być wyliczane na podstawie przebiegu jednego lub kilku kolejnych w układzie regulacji sygnałów:  $u(t)$ ,  $y(t)$ ,  $e(t)$  lub ich pochodnych względem czasu, a niekiedy także na podstawie przebiegu stanu  $x(t)$  obiektu (jeśli obiekt jest opisany w przestrzeni stanu). Bardzo często, dla układów z obiektem o jednym wyjściu  $y(t) \in R$ , jako wskaźnik jakości stosowana jest całka z kwadratu uchybu regulacji:

$$(6.1) \quad J = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt > 0, \quad e(t) \in R.$$

Jest to całkowy, kwadratowy wskaźnik jakości z nieskończonym horyzontem czasowym. W tym przypadku funkcja kosztów chwilowych (funkcja podcałkowa) jest kwadrat uchybu regulacji. Kwadratowa funkcja strat chwilowych karze bardziej za duże odchyłki, mniej za małe. Wielkość kary nie zależy od znaku, a jedynie od wartości bezwzględnej uchybu oraz od czasu jego utrzymywania się. Jest oczywiste, że lepiej jest, gdy wartość wskaźnika (6.1) przyjmuje mniejsze wartości. Dla  $e(t) \equiv 0$  mamy  $J = 0$ . Stosuje się również inne całkowe wskaźniki jakości, na przykład

$$J = \int_0^{\infty} |e(t)|^p dt$$

$$(6.2) \quad J = \int_0^{\infty} |e(t)|^p t^q dt$$

gdzie  $p$  i  $q$  to niezerowe liczby naturalne.

Od rodzaju przyjętego wskaźnika jakości zależy optymalne nastawy, a co za tym idzie – również charakter przebiegów przejściowych w układzie regulacji. Na przykład ostatni wskaźnik jakości karze bardziej za tę samą wartość uchybu po dłuższym czasie. Tym samym faworyzuje takie przebiegi uchybu, które początkowo nawet znacznie mogą odbiegać od zera, ale stosunkowo szybko do zera się zbliżają. Sposób oceny pracy układu regulacji (przyjęcie odpowiedniego wskaźnika jakości) jest centralnym problemem w automatyczce. Tu onwiera się pole do działania dla inżyniera, jego pomyślności opartej o intuicję z obserwacji obiektów rzeczywistych.

Horyzont czasowy (czyli góra granica całkowania) może przyjmować wartości skończone:

$$J = \int_0^T e(t)^2 dt, \quad T > 0.$$

Postać ze skończonym horyzontem może być uzasadniona praktycznie i równocześnie jest dogodna do optymalizacji numerycznej. We wskaźniku jakości może występować nie tylko uchyb regulacji, ale też na przykład jego pochodna

$$J = \int_0^{\infty} (e(t)^2 + \dot{e}(t)^2) dt.$$

Jeśli rozpatruje się model obiektu w przestrzeni stanu, często wskaźnik ma postać całki z formy kwadratowej

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^T H x(t) dt, \quad x(t) \in R^n, \quad H \in R^{n \times n}, \quad H = H^T > 0.$$

Powyższy wzór można rozbudować, dodając pod znakiem całki składnik uwzględniający koszt sterowania

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T H x(t) + u(t)^T F u(t)) dt, \quad u(t) \in R^m, \quad F = F^T > 0.$$

Efektem minimalizacji powyższego wskaźnika jakości jest sprowadzenie stanu systemu  $x(t)$  do zera przy nie za dużym koszcie sterowania  $u$  i jest przykładem optymalizacji dwukryterialnej (dwa przeciwstawne kryteria), rozwiązywanej metodą funkcji kary. Trajektoria  $x$  szybciej schodzi do zera, gdy sterowanie  $u$  przyjmuje większe wartości. Minimalizacja powyższego wskaźnika jakości  $J$  prowadzi do pewnego kompromisu ustalonego poprzez dobór macierzyńskich współczynników wagowych  $H$  i  $F$ .

Oprócz całkowych, istnieją także inne wskaźniki jakości, których wartość wyznacza się na podstawie przebiegu czasowych sygnałów w asymptotycznie stabilnym układzie regulacji.

Poniżej podano przykłady wskaźników jakości, których można użyć, gdy wartość zadana  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego, nie występują zakłócenia, a warunki pozałatwowe dla obiektu i regulatora są zerowe:

- Czas regulacji  $\tau_1$ . Jest to najmniejszy czas, począwszy od której wartości ustalonej  $y_\infty$  nie bardziej niż o 5% (lub o inną przyjętą wartość) obiektu różni się od wartości wyjściowej  $y(t)$ .

$$\tau_1 = \sup \{ t \in [0, \infty) : |y(t) - y_\infty| > 0.05 |y_\infty| \},$$

$$\text{gdzie } y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

- Czas narastania  $\tau_2$ .

Jest to czas, w którym sygnał wyjściowy  $y(t)$  narasta od 10% do 90% wartości ustalonej  $y_\infty$

$$\tau_2 = \min \{ t \in [0, \infty) : y(t) = 0.9 y_\infty \} - \min \{ t \in [0, \infty) : y(t) = 0.1 y_\infty \}.$$

- Wartość przeregulowania  $\kappa$ .

Odniesiona do  $y_\infty$  maksymalna wartość dodatniej odchyłki sygnału  $y(t)$  od  $y_\infty$

$$\kappa = \frac{y_m - y_\infty}{y_\infty},$$

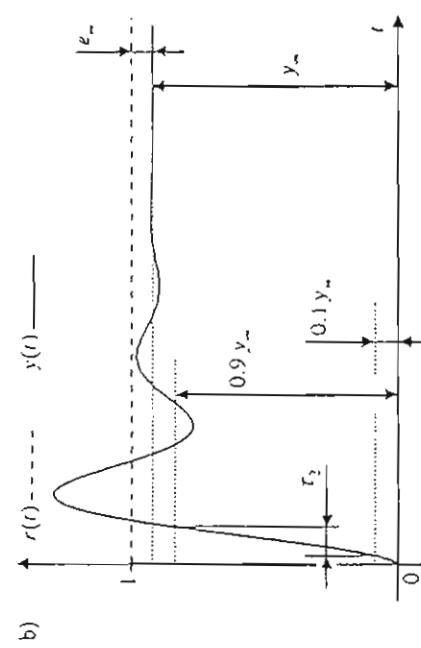
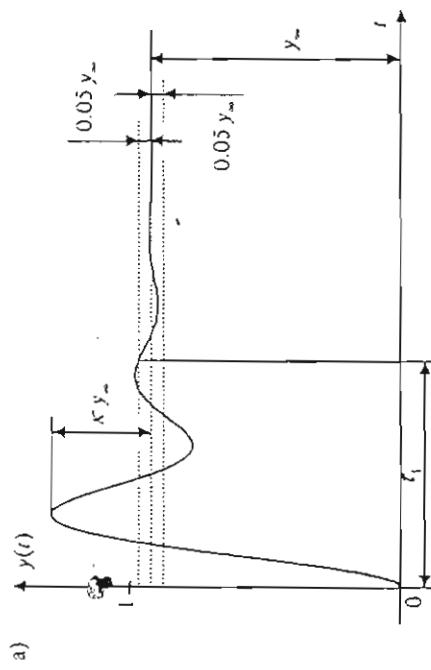
$$\text{gdzie } y_m = \max_{t \in [0, \infty)} y(t).$$

- Wielkość uchybu ustalonego  $e_\infty$

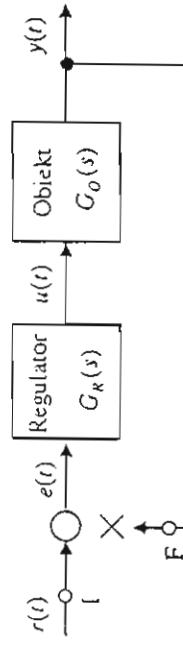
$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)|.$$

Rysunki 6.2a i b przedstawiają przykładowy przebieg sygnału wyjściowego  $y(t)$  układu regulacji z rysunku 6.1, będącego odpowiedzią na skok jednostkowy wartości zadanej  $r(t) = 1(t)$ . Zaznaczono na nich wartości  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\kappa$  i  $e_\infty$ .

Jakość regulacji w systemach liniowych określa się nie tylko na podstawie przebiegów czasowych sygnałów, ale też na podstawie charakterystyk częstotliwościowych otwartego układu regulacji. Transmitancja  $G_F(s)$  otwartego układu regulacji, przedstawionej na rysunku 6.3, wyraża się wzorem  $G_O(s)G_R(s)$ . Wyznacza się ją od punktu I do punktu F, przy przerwanej pętli sprzężenia zwrotnego (co zaznaczono na rysunku krzyżykiem).



Rys. 6.2. Wskaźniki jakości: a)  $\tau_1$ ,  $\kappa$ ; b)  $\tau_2$ , i  $e_\infty$



Rys. 6.3. Otwarty układ regulacji

Przykładami wskaźników wyznaczanych za pomocą transmitancji otwartego układu regulacji są zapas modułu i zapas fazy. Można je wygodnie odczytać z logarytmicznych charakterystyk: amplitudowej i fazowej, zwanych inaczej charakterystykami Bodego.

Poziomem modulu transmitancji widmowej  $G_F(j\omega)$ , wyrażonym w decybelach [dB], nazywamy wielkość

$$L(\omega) = 20 \log_{10} |G_F(j\omega)|.$$

Zdefiniujmy pomocniczo wielkość  $\varphi(\omega)$ , równą argumentowi transmitancji widmowej  $G_F(j\omega)$

$$\varphi(\omega) = \arg G_F(j\omega).$$

Zapasem modulu nazywamy różnicę między poziomem modulu równego jeden (0 dB), a poziomem modulu  $L(\omega_1)$  transmitancji widmowej wyznaczony dla pulsacji  $\omega_1 \in [0, \infty]$ , dla której argument  $\varphi(\omega_1)$  transmitancji  $G_F(j\omega)$  przyjmuje wartość  $-\pi$

$$\Delta_L = -L(\omega_1).$$

$$\varphi(j\omega_1) = -\pi.$$

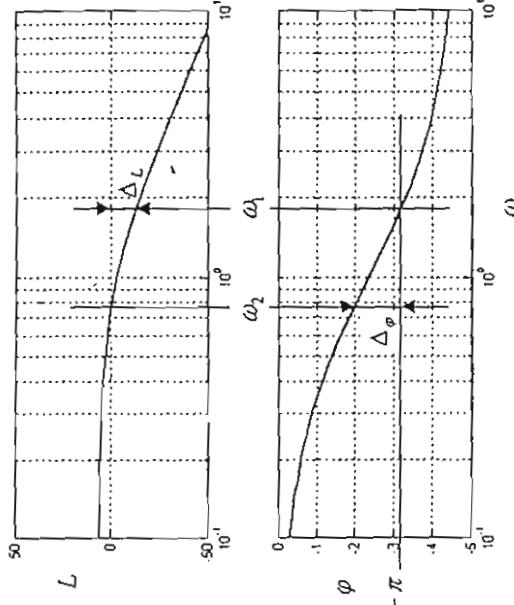
Zapasem fazy nazywamy różnicę między argumentem  $\varphi(\omega_2)$  transmitancji widmowej, wyznaczonym dla pulsacji  $\omega_2 \in [0, \infty]$ , dla której moduł  $|G_F(j\omega_2)|$  przyjmuje wartość 1, a wartością  $-\pi$

$$\Delta_\varphi = \varphi(\omega_2) + \pi,$$

$$|G_F(j\omega_2)| = 1.$$

Pulsacja  $\omega_1$ , dla której  $\arg G_F(j\omega_1) = -\pi$ , nosi nazwę granicznej pulsacji fazy (Kaczorek 1977, s. 122). Pulsacja  $\omega_2$ , dla której  $|G_F(j\omega_2)| = 1$ , nosi nazwę granicznej pulsacji modulu. Zapasy fazy i amplitudy dla przykładowego układu regulacji przedstawiono na rysunku 6.4.

Zapasy modulu i fazy decydują o zapasie stabilności. Zostanie to wyjaśnione na przykładzie z rysunku 6.4. Gdyby krzywa amplitudowej charakterystki częstotliwościowej  $L(\omega)$  podnieść o wartość równą zapasowi modulu, wówczas układ zamknięty o transmitancji  $\frac{G_F(s)}{1 + G_F(s)}$  znalazłyby się na granicy stabilności (porównaj z kryterium Nyquista). Gdyby krzywą te podnieść bardziej, układ stałby się niestabilny. Podobnie, przesunięcie krzywej na charakterystycze fazowej  $\varphi(\omega)$  o wartość równą zapasowi fazy doprowadza układ zamknięty na granicę stabilności, a przesunięcie o większą wartość daje układ niestabilny.



Rys. 6.4. Charakterystiki Bodego z zaznaczonymi zapasami fazy i amplitudy

Innym miernikiem jakości regulacji w układzie zamkniętym, który jako całość opisany jest skalarną transmitancją  $G_{YR}(s)$ , jest część rzeczywista dominującego bieguna (lub dominujączych biegunów). Jeśli transmitancja  $G_{YR}(s)$  ma postać ilorazu dwóch wielomianów wzajemnie pierwszych, to jej biegunami są pierwiastki (miejscza zerowe) wielomianu stanowiącego mianownik. W asymptotycznie stabilnym układzie regulacji wszystkie bieguni położone są w lewej otwartej półpłaszczyźnie zespolonej. Dominującym biegunem nazywamy ten, który ma największą część rzeczywistą. Uktad może mieć jeden lub kilka dominujących biegunów (jesli ich części rzeczywiste są równe). Części rzeczywiste biegunów decydują o szybkości zanikania stanów przejęciowych. Im część rzeczywista mniejsza (biegun dalej od osi urojonej) w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej), tym szybkość zaniku przebiegów przejęciowych wieksza. O wypadkowej szybkości zanikania przebiegów przejęciowych w układzie decyduje głównie biegum dominujący, który jest „najwolniejszy”. Na rysunku 6.5 przedstawiono położenie biegunów przykładowego układu regulacji, opisanego transmitancją piętnego rzędu. Wśród biegunów zaznaczono dominujący.

Często głównym celem stawianym przy projektowaniu układu regulacji jest zapewnienie odporności na zakłócenia  $z(t)$  (zob. rys. 6.1). Można wówczas wykorzystać następujący wskaźnik jakości (przy czym dla uproszczenia zakładamy, że  $e(t) \in R$  i  $z(t) \in R$ ):

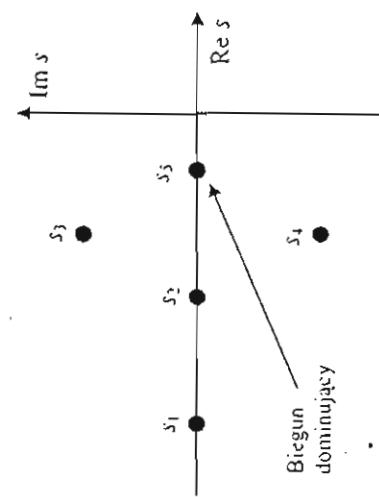
$$J = \sup_{\omega \in R} |G_{EZ}(j\omega)|, \quad (6.3)$$

gdzie asymptotycznie stabilna transmitancja  $G_{EZ}(s)$  wyraża zależność między sygnałem zakłócającym  $z$  a uchodem regulacji  $e$

$$E(s) = G_{EZ}(s) Z(s),$$

a  $E(s)$  i  $Z(s)$  oznaczają odpowiednio transformaty Laplace'a sygnałów  $e(t)$  i  $z(t)$ . Wyrażenie (6.3) jest formalnie wartością normy funkcji  $G_{EZ}$  w przestrzeni Hardy'ego  $H^{\infty}$

$$\|G_{EZ}\|_{H^{\infty}} = \sup_{\omega \in R} |G_{EZ}(j\omega)|. \quad (6.4)$$



Rys. 6.1. Biegumy transmitancji systemu zamkniętego

Załóżmy, że w układzie z rysunku 6.1 mamy zerowe warunki początkowe dla obiektu i regulatora oraz wartość zadawaną  $r(t)$  identycznie równą zero. Założymy dalej, że zakłócenie  $z$  jest funkcją należącą do przestrzeni  $L^2(0, \infty, R)$ . Kwadrat normy funkcji  $z$  w tej przestrzeni dany jest wzorem

$$\|z\|_{L^2(0, \infty; R)}^2 = \int_0^{\infty} z(t)^2 dt. \quad (6.5)$$

Przy spełnieniu pewnych dodatkowych założeń (patrz Grabowski 1996, s. 44), funkcja  $e$  opisująca uchód regulacji, będący odpowiedzią układu opisanego transmitancją  $G_{EZ}(s)$  na zakłócenie  $z$ , również należy do przestrzeni  $L^2(0, \infty, R)$ , a kwadrat jej normy dany jest wzorem

$$\|e\|_{L^2(0, \infty; R)}^2 = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt.$$

Prawa strona tej równości jest identyczna z prawą stroną wzoru (6.1). Prawdziwa jest nierówność

$$\|e\|_{L^2} \leq \|G_{EZ}\|_{H^{\infty}} \cdot \|z\|_{L^2}. \quad (6.6)$$

przy czym istnieje taka funkcja  $z$ , dla której nierówność (6.6) przechodzi w równość. Wyrażenie  $\|e\|_{L^2}^2$  jest równe całce z kwadratu uchodu  $e(t)$  w przedziale  $[0, \infty)$ . Tak więc iloraz normy  $G_{EZ}$  w przestrzeni  $H^{\infty}$  i normy  $z$  w przestrzeni  $L^2$  stanowi górną ograniczenie normy  $e$  w przestrzeni  $L^2$ . Inaczej mówiąc,  $\sup_{\omega \in K} |G_{EZ}(j\omega)|$  decyduje o odporności wyjścia  $e$  układu na zakłócenia  $z$ . Wielkość określona wzorem (6.3) może być zatem użyta w roli wskaźnika jakości.

Postać wybranego wskaźnika jakości powinna odpowiadać wymaganiom, jakie stawiane są układowi regulacji. W przypadku układu pozycjonującego głowicę magnetyczną w dysku twardym komputera, odpowiednim wskaźnikiem jakości jest czas regulacji. Decyduje on o czasie dostępu – jednym z podstawowych parametrów dysków twardych. Z drugiej strony, istotny jest też uchód ustalony – jego nadmierna wartość może doprowadzić do błędów odczytu lub zapisu, gdyż głowica nie zostanie ustabiliona nad odpowiednią ścieżką. Nie ma natomiast istotnego znaczenia przereglowanie, gdyż strefa, w której porusza się głowica, jest dość szerska. Z inną sytuacją mamy do czynienia w przypadku układu pozycjonowania głowicy szlifierskiej, który dosuwa tacę szlifierską do powierzchni obrabianego materiału. Tu wymagana jest zeroowa wartość przereglowania, gdyż w przeciwnym razie dojdzie do uszkodzenia materiału obrabianego, aby móc także i narzędzia.

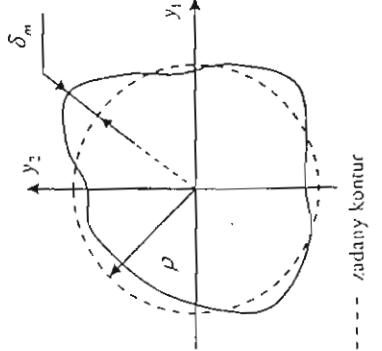
Nadmiernie przereglowanie jest także niebezpieczne w przypadku pieca służącego do odpuszczania zahartowanych przedmiotów. Zbytnie przegrzanie może bowiem doprowadzić do odhartowania wasdu. Dla dwuwymiarowej frezarki współrzędnościami, której zadaniem jest wykrojenie krążka z blachy, wskaźnikiem jakości może być na przykład maksymalna odchyłka promienia krążka od wartości zadanej (zob. rys. 6.6). Jeśli brzeg obrzymanego wykroju da się opisać parametrycznie za pomocą funkcji  $y_1 = y_1(t)$  i  $y_2 = y_2(t)$  dla  $t \in [0, T]$ , to wskaźnik jakości można wyrazić następującym wzorcem:

$$\delta_m = \sup_{t \in [0, T]} \sqrt{y_1(t)^2 + y_2(t)^2 - p},$$

gdzie  $p$  jest zadanym promieniem krążka.

Wskaźnik jakości charakteryzuje jakość regulacji za pomocą jednej tylko liczby. Częstość jest to niewystarczające do opisania wszystkich wymagań stawianych układowi regulacji.

oraz przebieg typu „rampa” (rys. 6.9)



Rys. 6.6. Wskaznik jakości  $\delta_m$  dla frezarki współrzędnościowej

Można wówczas zdefiniować kilka wskazników, z których każdy odpowiada jednemu spośród kilku wymagań, stawianych projektowanemu układowi regulacji. Ocena jakości regulacji jest wówczas nie pojedynczą liczbą, ale kilkulelementowym wektorem. Optymalne nastawy odpowiadające każdemu z utworzonych w ten sposób wskazników jakości są razwyciążaj różne. Dlatego dobór ostatecznych nastaw odbywa się na zasadzie kompromisu pomiędzy poszczególnymi wymaganiami, reprezentowanymi przez odpowiednie wskazniki jakości. Przydane tu mogą być metody stosowane w optymalizacji wielokryterialnej.

#### Typowe sygnały testowe

Typowym sygnałem testowym  $r(t)$ , wykorzystywany często przy optymalizacji parametrycznej, jest skok jednostkowy (rys. 6.7)

$$r(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Rys. 6.7. Skok jednostkowy

Inne popularne sygnały to impuls Diraca (dystrybucja delta rys. 6.8)

$$\begin{aligned} r(t) &= \delta(t), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= 1, \\ \delta(t) &= \frac{d1(t)}{dt}, \end{aligned}$$

Rys. 6.8. Impuls Diraca



Rys. 6.9. Przebieg sygnału typu „rampa”

Jeszcze innym sygnałem testowym jest funkcja okresowa  $\sin \omega t$ , która wykorzystuje się przy eksperymentalnym wyznaczaniu charakterystyki częstotliwościowej  $G(j\omega)$ . Funkcje  $\sin \omega t$  otrzymuje się z odpowiedniego generatora o zmiennej częstotliwości  $\omega$ .

#### 6.2. Analityczne rozwiązywanie zadania optymalizacji parametrycznej

Poniżej przedstawiono kroki, które należy wykonać, by analitycznie znaleźć optymalne nastawy regulatora w układzie liniowym, w przypadku wskaźników jakości typu (6.1):

1. Zapisać model matematyczny całego, zamkniętego systemu regulacji. Może on być dany w postaci równan stanu lub transmitemacji. W modelu tym parametrami są nastawy regulatora.
2. Określić zbiór  $\Omega$  dopuszczalnych nastaw regulatora, w którym układ regulacji jest asymptotycznie stabilny, a wartość wskaźnika jakości jest określona. Można się w tym celu posługiwać kryteriami stabilności (na przykład twierdzeniem Hurwitsa).
3. Na podstawie modelu wyliczyć wskaźnik jakości jako funkcję nastaw regulatora. Można to zrobić na dwa sposoby.

Pierwszy z nich składa się z dwóch etapów:

- a) wyliczenie przebiegów czasowych sygnałów w układzie regulacji na podstawie jego modelu matematycznego; interesujące są przed wszystkim te przebiegi, które występują we wzorze opisującym wskaźnik jakości;
- b) wyliczenie wskaźnika jakości na podstawie otrzymanych przebiegów czasowych.

Drugi sposób polega na wyznaczeniu wskaźnika jakości na podstawie transformat Laplace'a sygnałów, bez konieczności obliczania ich przebiegów czasowych. Spółten zostanie przedstawiony nieco dalej.

4. Znaleźć nastawę w zbiorze dopuszczalnych nastaw  $\Omega$ , przy których jest osiągane minimum wskaźnika jakości. Niekiemy można to osiągnąć przyrównując do zera gradien (wektor pierwszych pochodnych częstotliwości) znalezionego w postaci jawnej wskaźnika jakości, oraz sprawdzając dodatnią określoność hesjanu (macierzy drugich pochodnych częstotliwości).

Nizej opisano sposób wyliczenia wskaźnika jakości bez konieczności wyznaczania przebiegów czasowych sygnałów w układzie.

#### Wykorzystanie twierdzenia Parsevala

Jeśli istnieje skończona wartość kwadratowego, całkowego wskaźnika jakości z nieskończonym horyzontem czasowym (6.1), to można ją wyrazić następującym wzorem, wynikającym z twierdzenia Parsevala

$$(6.7) \quad J = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) \cdot E(-j\omega) d\omega,$$

gdzie  $E$  jest transformata Laplace'a funkcji  $e$ . Wzór (6.7) można inaczej zapisać jako

$$(6.8) \quad J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s) \cdot E(-s) ds,$$

przy czym całkowanie odbywa się po osi urojonej.

Jeśli dysponuje się transmitancyjnym modelem układu regulacji, to wyznaczenie transformaty błędu przy wymuszeniu skokowym jest stosunkowo łatwe. Twierdzenie Parsevala umożliwia wyliczenie wartości wskaźnika jakości bez konieczności uzyskania czasowej postaci  $e(t)$  (Górecki, 2006). Istnienie tego twierdzenia jest jedną z przykaz popularności całkowego, kwadratowego wskaźnika jakości.

Jeśli całka (6.8) ma skończoną wartość, a transformata uchybu  $E(s)$  wyraża się stosunkiem dwóch wzajemnie pierwszych wielomianów

$$(6.9) \quad E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m < n, \quad a_n \neq 0,$$

to do wyznaczenia wartości wskaźnika jakości (6.8) można skorzystać z opisanej niżej procedury (np. Grabowski 1996, s. 59). Dla transformaty  $E(s)$ , danej wzorem (6.9), istnieje jednoznacznie określony wielomian stopnia  $n-1$

$$C(s) = c_{n-1} s^{n-1} + c_{n-2} s^{n-2} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0,$$

spełniający tożsamość

$$(6.10) \quad \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} = \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{C(-s)}{A(-s)}.$$

Jego znajomość umożliwia stosunkowo łatwe obliczenie wartości wskaźnika jakości, o czym za chwilę. By znaleźć wielomian  $C(s)$ , sprawdzamy sumę po prawej stronie równości (6.10) do wspólnego mianownika, a następnie porównujemy liczniki prawej i lewej strony, otrzymując tak zwane równanie diofantyczne:

$$\begin{aligned} \frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)} &= \frac{A(-s)C(s) + A(s)C(-s)}{A(s)A(-s)}, \\ B(s)B(-s) &= A(-s)C(s) + A(s)C(-s) = \\ &= (b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0)(b_m (-s)^m + \dots + b_2 s^2 - b_1 s + b_0) = \\ &= (a_n (-s)^n + \dots a_2 s^2 - a_1 s + a_0)(c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_2 s^2 + c_1 s + c_0) + \\ &\quad + (a_n s^n + \dots a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(c_{n-1} (-s)^{n-1} + \dots + c_2 s^2 - c_1 s + c_0). \end{aligned}$$

Dwa wielomiany są równe dla każdego  $s$  wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadnie współczynniki wielomianów są równe. Na podstawie powyższego równania wielomianowego można napisać  $2n$  równań algebraicznych, wiązących ze sobą współczynniki wielomianów  $A(s)$ ,  $B(s)$  i  $C(s)$ . Część spośród tych równań jest spełniona tożsamościowo. W wyniku rozwiązywania układu powstało z pozostałych  $n$  równań otrzymuje się wartości współczynników wielomianu  $C(s)$ . Jak pokażemy poniżej, do dalszych obliczeń potrzebna jest jedynie wartość współczynnika o najwyższym indeksie  $c_{n-1}$ .

Lewa strona równości (6.10) jest równa funkcji podziałkowej we wzorze (6.8). Wobec tego wskaźnik jakości  $J$  może być przedstawiony następująco:

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left( \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{C(-s)}{A(-s)} \right) ds.$$

Jeśli całka niewłaściwa w powyższym wzorze istnieje (a założono, że tak jest), to można ją przedstawić jako granicę pewnej całki właściwej. W ten sposób dostajemy

$$J = \frac{1}{2\pi j} \lim_{P \rightarrow \infty} \int_{-jP}^{jP} \left( \frac{C(s)}{A(s)} + \frac{C(-s)}{A(-s)} \right) ds.$$

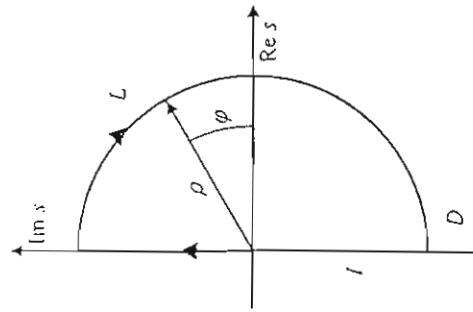
Calkę właściwą z powyższego wzoru można rozbić na sumę dwóch całek, otrzymując

$$J = \frac{1}{2\pi j} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \frac{C(s)}{A(s)} ds + \frac{1}{2\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \frac{C(-s)}{A(-s)} ds.$$

Obie całki po prawej stronie znaku równej są równe (można to pokazać, stosując do drugiej z nich twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie i przyjmując nową zmienioną całkowania  $\zeta = -s$ ). Wobec tego

$$(6.11) \quad J = \frac{1}{\pi j} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-j\rho}^{j\rho} \frac{C(s)}{A(s)} ds.$$

By obliczyć wartość całki w powyższym wzorze, wykorzystamy twierdzenie Cauchy'ego (patrz Brzonszta i Siciemendjew 1995, s. 640). Mówiąc ono, że jeśli funkcja  $f: C \rightarrow \mathbb{C}$  jest analityczna w obszarze jednospójnym, którego brzegiem jest kontur  $D$ , to całka funkcji  $f$  po konturze  $D$  jest równa zeru. Zastosujmy to twierdzenie dla funkcji podcałkowej ze wzoru (6.11) i konturu  $D$  przedstawionego na rysunku 6.10. Kontur ten jest sumą luku  $L$  o promieniu  $\rho$  i odcinka  $I$ , leżącego na osi urojonej.



Rys. 6.10. Krzywa, po której całkujemy  
Całka z funkcji  $f$  po konturze  $D$  może być przedstawiona w postaci sumy całek

$$\int_D f(s) ds = \int_I f(s) ds + \int_L f(s) ds.$$

Stąd i z twierdzenia Cauchy'ego wynika równość

$$(6.12) \quad \int_I f(s) ds = - \int_L f(s) ds.$$

Jeśli w miejsce funkcji podcałkowej  $f(s)$  wstawić  $\frac{C(s)}{A(s)}$ , otrzymuje się

$$\int_L \frac{C(s)}{A(s)} ds = - \int_L \frac{C(s)}{A(s)} ds.$$

Funkcja wymienna  $\frac{C(s)}{A(s)}$  jest analityczna w obszarze ograniczonym konturem  $D$ , ponieważ wszystkie jej biegły (miejscza zero we mianowniku) leżą na lewo od osi urojonej (wynika to z założenia o istnieniu równości (6.8)). Lewa strona równości (6.12) jest równa całce występującej we wzorze (6.11), którym wyróżnia się wskaźnik jakości. W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$J = - \frac{1}{\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_L \frac{C(s)}{A(s)} ds.$$

Na luku  $L$  zmiennej  $s$  można wyrazić następująco:

$$s = \rho e^{j\varphi}, \quad \varphi \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi].$$

Calkując przez podstawienie, dostajemy

$$J = - \frac{1}{\pi j} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\rho e^{j\varphi})}{A(\rho e^{j\varphi})} j \rho e^{j\varphi} d\varphi.$$

Zamieniając kolejność granic, skracając  $j$  oraz włączając czynnik zza kreski utartkowanej do licznika, otrzymujemy

$$J = \frac{1}{\pi} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C(\rho e^{j\varphi}) \rho e^{j\varphi}}{A(\rho e^{j\varphi})} d\varphi.$$

Jesli istnieją granice całki i funkcji podcałkowej i są skończone, to można wprowadzić znak granicy pod znak całki

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{C(\rho e^{i\varphi}) \rho e^{i\varphi}}{A(\rho e^{i\varphi})} d\varphi.$$

Mnożąc wielomian  $C(\rho e^{i\varphi})$  przez czynnik równy jego argumentowi  $\rho e^{i\varphi}$ , podnosząc stopień wielomianu o jeden. Granicę pod znakiem całki obliczamy następująco:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{c_{n-1}(\rho e^{i\varphi})^n + c_{n-2}(\rho e^{i\varphi})^{n-1} + \dots + c_1(\rho e^{i\varphi})^2 + c_0 \rho e^{i\varphi}}{a_n (\rho e^{i\varphi})^n + a_{n-1}(\rho e^{i\varphi})^{n-1} + \dots + a_1 \rho e^{i\varphi} + a_0} = \frac{c_{n-1}}{a_n}$$

Stąd:

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{c_{n-1}}{a_n} d\varphi = \frac{1}{\pi} \frac{c_{n-1}}{a_n} \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ostatecznie wartość wskaźnika jakości wyraża się wzorem

$$J = \frac{c_{n-1}}{a_n}. \quad (6.13)$$

By ją obliczyć, należy wyznaczyć współczynnik  $c_{n-1}$  wielomianu  $C(s)$ .

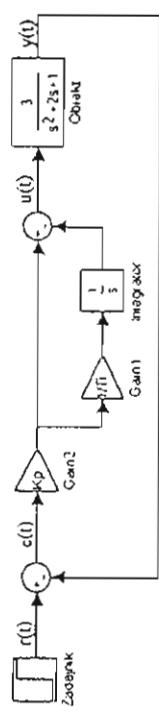
### 6.3. Numeryczne rozwiązywanie zadania optymalizacji parametrycznej

Znalezienie analitycznej postaci wskaźnika jakości bywa trudne. W takich przypadkach można wykorzystać numeryczne metody minimalizacji.

- Na podejście numeryczne składają się następujące trzy elementy:
  - 1) Symulacje w celu uzyskania przebiegów czasowych sygnałów w układzie regulacji.
  - 2) Numeryczne wyliczanie, na podstawie uzyskanych wyników, wartości wskaźnika jakości.
  - 3) Numeryczna minimalizacja wskaźnika jakości.

## Symulacja

Wskaźnik jakości (typu (6.1)) można wyliczyć, zauważając przebieg sygnału  $e(t)$  występującego w układzie regulacji. Przebieg ten wyznacza się na drodze numerycznej symulacji. Można ją przeprowadzić, wykorzystując model zestawiony w Simulinku. Rysunek 6.11 przedstawia przykładowy model dla obiektu inercyjnego drugiego rzędu i regulatora PI.

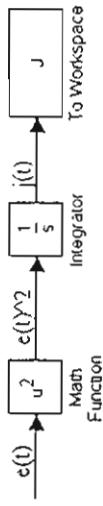


Rys. 6.11. Symulacyjny model układu regulacji

W trakcie optrymalizacji konieczne jest przeprowadzenie wielu symulacji, dla różnych wartości nastaw (w przykładzie na rysunku:  $K_p$  i  $T_I$ ). Dlatego wygodnie jest wpisać w ich miejsce w blokach Simulinku nie konkretne wartości, ale symbole zmiennych. Umożliwia to szybką zmianę parametrów przez przedefiniowanie wartości odpowiednich zmiennych w przestrzeni roboczej MATLAB-a. Można to zrobić bądź też, nie, bież z kodu zawartego w M-pliku skryptowym.

## Wyliczenie wskaźnika jakości

Na podstawie wyników symulacji wylicza się wartość wskaźnika jakości. Można to zrobić w Simulinku, dodając do modelu z rysunku 6.11 fragment realizujący potrzebne obliczenia. Dla całkowego, kwantowanego wskaźnika jakości użyteczny jest schemat z rysunku 6.12.



Rys. 6.12. Fragment modelu obliczający wartość wskaźnika jakości

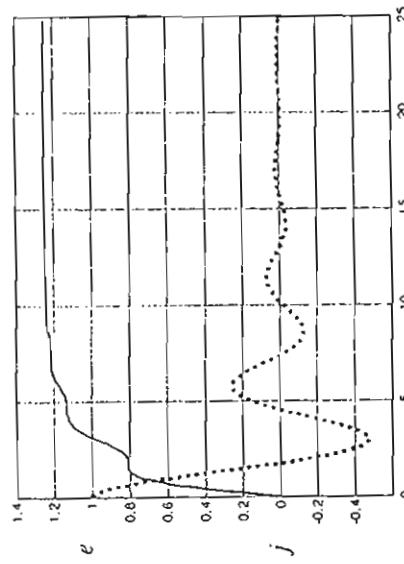
Zadaniem układu z rysunku 6.12 jest podniesienie do kwadratu wartości błędów i scalkowanie jej względem czasu. Szukana wartość wskaźnika jakości jest ostatnim elementem wektora  $J$  z bloku  $To Workspace$ .

Numeryczna minimalizacja wskaźnika jakości

Wskaźnik jakości jest funkcją  $m$  zmiennych (nastaw regulatora), określona na zbiorze dopuszczalnych nastaw  $\Omega \subseteq R^m$ , która przyjmuje wartości w zbiorze liczb rzeczywistych  $R$ . Tak więc zadanie szukania opymalnych nastaw polega na numerycznej minimalizacji z ograniczeniami funkcji jednej (dla  $m = 1$ ) lub wielu (dla  $m > 1$ ) zmiennych.

#### Dobór horyzontu optymalizacji

W opisany wyżej sposób można wyznaczać wartości całkowych wskaźników jakości wyłącznie ze skończonym horyzontem czasowym, gdyż prowadzenie symulacji na nieskończonym przedziale czasowym jest niemożliwe. Sposób doboru skończonego horyzontu czasowego optymalizacji, który da wyniki bliższe do przypadku z nieskończonym horyzontem, przedstawiony zostanie na przykładzie z rysunku 6.13.



Rys. 6.13. Przebieg uchybu regulacji (linia przerywana)  
i wskaźnika jakości (linia ciągła)

Linią przerywaną zaznaczono na nim przebieg uchybu w pewnym układzie regulacji, natomiast ciągłą – odpowiadający mu przebieg kwadratowego wskaźnika jakości w funkcji horyzontu optymalizacji

$$J(T) = \int_0^T e(t)^2 dt, \quad J = \lim_{t \rightarrow \infty} J(t).$$

Po około 20 sekundach wartość wskaźnika jakości prawie się nie zmienia, bo w znacznym stopniu wygasł przebieg przejściowy błędu. Jest to więc dostateczny horyzont czasowy, który można przyjąć do dalszych obliczeń. Gdyby jednak przyjąć horyzont równy dwóm sekundom, wynik mógłby być niepoprawny.

#### 6.4. Przebieg ćwiczenia

##### Zadanie 6.1

W układzie z rysunku 6.1 wartość zadana  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego. Transmisancja obiektu wynosi

$$G_C(s) = \frac{2s+3}{s^3 + 2s^2 + s}$$

a regulatora proporcjonalnego

$$G_P(s) = K_p.$$

Warunki poczatkowe dla obiektu są zerowe. Wykres w jednym układzie współrzędnych zależności między współczynnikiem wzmacnienia  $K_p$  regulatora a następującymi wskaźnikami jakości:

- kwadratowym, całkowym wskaźnik jakości podobnym do (6.1), ale ze skończonym horyzontem czasowym  $T = 25$ ;
- wskaźnik jakości z czasem (podobnym do (6.2)) dla  $p = 2, q = 1$ , również ze skończonym horyzontem czasowym  $T = 25$ ;
- przeregulowaniem;
- czasem regulacji.

Dane do wykresów wyznacz na drodze wielokrotnych symulacji w MATLAB-ie lub Simulinku. Zastosuj skalę logarytmiczną dla osi odciętych na wykresie, a wszystkie wskaźniki jakości znormalizuj przed narysowaniem (wszystkie wyznaczone wartości danego wskaźnika podziel przez największą z nich). Spróbuj wskazać optymalne nastawy dla każdego ze wskaźników. Czy dla każdego z nich są one takie same? Spróbuj znaleźć kompromisowe nastawy dla przeręglowania i czasu regulacji.

##### Zadanie 6.2

Rozważany układ regulacji przedstawiony na rysunku 6.1, gdzie obiekt opisany jest transmitancją

$$G_P(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}$$

Przymajemy, że regulator jest typu PI o transmitancji  $G_C = K_P + \frac{K_I}{s}$ . Jako sygnał referencyjny stosujemy skok jednostkowy  $r(t) = 1(t)$ . Zakhadamy zerowe warunki początkowe dla obiektu i regulatora oraz brak zakłóceń ( $z(t) \equiv 0$ ).

Przed wykonaniem ćwiczenia należy wyliczyć analitycznie opymalne jąkości  $K_p^*$  i  $K_I^*$  minimalizujące wskaźnik jakości (6.1).

W czasie zajęć należy wyznaczyć numeryczne opymalne wartości współczynników wskaźnika jakości (6.1) ze skończonym czasem regulacji, podanego przez prowadzącego innego wskaźnika jakości.

Do znalezienia opymalnych rozwiązań wykorzystać numeryczną metodę poszukiwania minimum funkcji wielu zmiennych (w MATLAB-ie zadanie to realizuje funkcja *fminsearch*, *fmincon*). Porównać nastawę opymalną i odpowiadającą im przebiegi przejściowe uzyskane dla różnych wskaźników jakości. Wykresić wykresy poziomico-wskaźników jakości (skorzystać z funkcji *contour* oraz *meshgrid* MATLAB-a).

## 6.5. Przykłady obliczeniowe

Poniżej zamieszczono proste przykłady, pokazujące sposób analitycznego poszukiwania opymalnych nastaw regulatora.

### Przykład 6.1

Rozważamy układ regulacji o strukturze przedstawionej na rysunku 6.1. W roli sygnału wartości zadanej  $r(t)$  wykorzystano skok jednostkowy  $1(t)$ , zaś do oceny nastaw służy całkowy, kwadratowy wskaźnik jakości z nieskończonym horyzontem czasowym (6.1). Nie występują zakłócenia. Należy wyznaczyć opymalną nastawę  $\rho$  regulatora całkującego o transmitancji  $C(s) = \frac{\rho}{s+3}$ , współpracującego z obiektem o transmitancji  $P(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s^3+3s^2+2s}$ .

Transmitancja uchybową zamkniętego układu regulacji

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{1+C(s)P(s)} = \frac{1}{1+\frac{s+3}{(s+2)(s+1)}\frac{\rho}{s}} = \frac{s^3+3s^2+2s}{s^3+3s^2+(2+\rho)s+3\rho}. \quad (6.14)$$

Transformata  $E(s)$  uchybu  $e(t)$  wyznaczamy następująco:

$$E(s) = \frac{1}{s} G_{ER}(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^3+3s^2+(2+\rho)s+3\rho}. \quad (6.15)$$

Określony zbiór nastaw, dla których transmitancja  $G_{ER}(s)$  jest asymptotycznie stabilna. Wykorzystany kryterium stabilności Hurwita. Wielomian charakterystyczny transmitancji  $G_{ER}(s)$  jest następujący:

$$w(s) = s^3 + 3s^2 + (2+\rho)s + 3\rho = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0,$$

gdzie

$$a_3 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_1 = 2 + \rho, \quad a_0 = 3\rho.$$

Macierz Hurwitza

$$H = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Minory główne macierzy  $H$

$$\Delta_1 = a_2 = 3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3(2 + \rho) - 3\rho = 6,$$

$$\Delta_3 = |H| = a_0 \Delta_2 = 18\rho.$$

Warunkiem asymptotycznej stabilności wielomianu charakterystycznego  $w(s)$  jest, by współczynnik  $a_3$  wielomianu oraz wszystkie minory wiodące macierzy Hurwita były dodatnie. Takie jest wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho > 0$ .  
By wskaźnik jakości (6.1) był określony (by całka miała skończoną wartość), nie wystarczy asymptotyczna stabilność transmitancji  $G_{ER}(s)$ . Potrzeba nadto, by uchybę regulacji  $e(t)$  zmierzała do zera, gdy czas  $t \rightarrow \infty$ . Skorzystajmy z twierdzenia granicznego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{s^3 + 3s^2 + (2 + \rho)s + 3\rho}.$$

Dla  $\rho$  spełniającego otrzymany wcześniej warunek ( $\rho > 0$ ) powyższa granica jest równa零. Zbiór dopuszczalnych nastaw jest więc przedziałem  $(0, \infty)$ .

Do wyznaczenia wskaźnika jakości wykorzystamy procedurę opisaną przy okazji omawiania zastosowania twierdzenia Parsevala.

Rozpoczynamy od wyznaczenia współczynników wielomianu  $C(s)$  stopnia drugiego, który spełnia tożsamość (6.10).  $A(s)$  i  $B(s)$  to odpowiednio mianownik i licznik transformacji  $E(s)$

$$\begin{aligned} & \frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p} \cdot \frac{s^2 - 3s + 2}{-s^3 + 3s^2 - (2+p)s + 3p} = \\ & = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p} + \frac{c_2 s^2 - c_1 s + c_0}{-s^3 + 3s^2 - (2+p)s + 3p} \end{aligned}$$

Sprawadzamy prawą stronę równania do wspólnego mianownika i porównujemy liczki obu stron, otrzymując równanie diofantyczne

$$\begin{aligned} (s^2 + 3s + 2)(s^2 - 3s + 2) &= \\ &= (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)(-s^3 + 3s^2 - (2+p)s + 3p) + \\ &+ (c_2 s^2 - c_1 s + c_0)(s^3 + 3s^2 + (2+p)s + 3p). \end{aligned}$$

Mnożymy wyrażenia w nawiasach, a następnie porównujemy współczynniki prawej i lewej strony przy odpowiadających potęgach zmiennej  $s$ , otrzymując układ równań

$$\begin{aligned} 1 &= 6c_2 - 2c_1, \\ -5 &= 6pc_2 - 2(2+p)c_1 + 6c_0, \\ 4 &= 6pc_0. \end{aligned}$$

Jego rozwiązanie jest następujące:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{12} \left( 7 + p + \frac{4}{p} \right), \\ c_1 &= \frac{1}{4} \left( 5 + p + \frac{4}{p} \right), \\ c_0 &= \frac{2}{3p}. \end{aligned}$$

Wskaznika jakości jest dany wzorem (6.13)

$$J = \frac{c_{n-1}}{a_n} = \frac{c_2}{a_3} = \frac{1}{12} \left( 7 + p + \frac{4}{p} \right). \quad (6.16)$$

Wyznaczamy pochodną wskaźnika jakości względem nastawy  $p$  i przyrównujemy ją do zera

$$\frac{dJ}{dp} = \frac{1}{12} \left( 1 - \frac{4}{p^2} \right).$$

Otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$p = 2 \quad \text{i} \quad p = -2.$$

By upewnić się, że otrzymany punkt to minimum lokalne, wyznaczamy drugą pochodną wskaźnika jakości  $J$  względem nastawy  $p$  regulatora

$$\frac{d^2 J}{dp^2} = \frac{d}{dp} \left( \frac{dJ}{dp} \right) = \frac{2}{3p^3}.$$

Dla  $p = 2$ , które należy do zbioru dopuszczalnych rozwiązań, druga pochodna wskaźnika jakości ma wartość dodatnią, co w połączeniu z zerowaniem się pierwszej pochodnej wskazuje na minimum lokalne funkcji  $J$ . Wartość  $p = -2$  nie należy do zbioru dopuszczalnych rozwiązań. Ostatecznicznie  $p^* = 2$  jest poszukiwanym rozwiązaniem optymalnym.

### Przykład 6.2

Rozważany jest obiekt całkujący, sterowany przez regulator proporcjonalny P (rys. 6.1). Do oceny nastaw wykorzystano typowy kwadratowy, całkowy wskaźnik jakości (6.1) z nieskończonym horyzontem czasowym, zbudowany w oparciu o uchybę regulacji  $e(t)$ . Sygnał testowy wartości zadanej  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego  $1(t)$ . Transmitemce obiektu  $G_P(s)$  i regulatora  $G_C(s)$  są następujące:

$$G_P(s) = \frac{1}{sT_i}, \quad T_i > 0,$$

$$G_C(s) = K_p, \quad K_p \in R.$$

Wyznaczamy transmitancję uchybową układu regulacji,

$$G_{ER}(s) = \frac{1}{1 + G_P(s)G_C(s)} = \frac{1}{1 + K_p \frac{1}{sT_i}} = \frac{sT_i}{K_p + sT_i}.$$

Powyższy wzór jest podobny do wzoru na transmitancję zamkniętego układu regulacji. Różnica tkwi jedynie w liczniku i wyniku stąd, że interesującym nas sygnałem jest nie  $y(t)$ , ale  $e(t)$ .

Z definicji transmitancji wynika wzór na transformataę błędów  $E(s)$

$$E(s) = G_{ER}(s)R(s).$$

Wartość zadana  $r(t)$  ma postać skoku jednostkowego, a jej transformata jest następującą:

$$R(s) = \frac{1}{s}.$$

Stąd transformata błędu

$$E(s) = \frac{sT_i}{sK_p + s^2T_i} = \frac{T_i}{K_p + sT_i}.$$

Odpowiadający jej przebieg czasowy jest następujący:

$$e(t) = \exp\left(-\frac{K_p}{T_i}t\right).$$

Wartość wskaźnika jakości oblicza się poprzez całkowanie

$$J(K_p) = \int_0^\infty e^2(t)dt = -\frac{T_i}{2K_p} e^{-2\frac{K_p}{T_i}t} \Big|_0^\infty,$$

$$J(K_p) = \frac{T_i}{2K_p}.$$

Bardzo ważnym etapem obliczeń, którego nie należy pomijać, jest określenie zbioru dopuszczalnych nastaw. Jest to zbiór tych wszystkich nastaw, dla których układ jest

asymptotycznie stabilny, a wartość wskaźnika jakości jest określona. Wyznaczamy go, badając uzyskaną wyżej transmitancję. Równanie charakterystyczne (mianownik transmitancji) systemu ma następującą postać:

$$\mu(s) = K_p + sT_i.$$

Jest to wielomian stopnia pierwszego, którego jedyny pierwiastek dany jest wzorem

$$\varsigma_1 = -\frac{K_p}{T_i}.$$

Z warunku asymptotycznej stabilności  $\text{Res}_1 < 0$  oraz założenia  $T_i > 0$  wynika, że

$$K_p \in (0, \infty).$$

Do istnienia skończonej wartości całki (6.1) nie wystarczy asymptotyczna stabilność transmitancji  $G_{ER}(s)$ . Wymagane jest ponadto, by uchyb regulacji  $e(t)$  zmierzał do zera, gdy  $t \rightarrow \infty$ . Skorzystamy z twierdzenia granicznego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sT_i}{K_p + sT_i}.$$

Dla  $K_p \in (0, \infty)$  i  $T_i > 0$  powyższa granica jest równa zera. Zbiór nastaw dopuszczalnych jest więc przedziałem  $(0, \infty)$ .

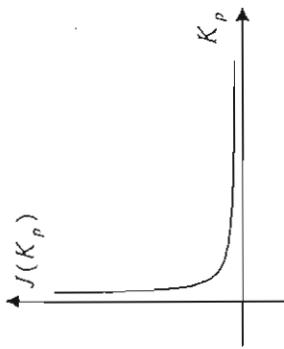
By znaleźć ekstremum wskaźnika jakości, wyznaczmy jego pochodną

$$\nabla_{K_p} J(K_p) = \frac{dJ(K_p)}{dK_p} = -\frac{1}{2} \frac{T_i}{K_p^2},$$

a następnie przyrównujemy ją do zera

$$-\frac{1}{2} \frac{T_i}{K_p^2} = 0.$$

Jak widać, pochodna nie zeruje się w zbiorze dopuszczalnych nastaw, natomiast jest w nim ujemna. Wynika stąd, że wskaźnik jakości jest malejący. Nie osiąga on nigdzie minimum – zadanie nie posiada więc rozwiązania. Im współczynnik wzmacnienia jest większy, tym mniejsza jest wartość wskaźnika jakości. Widac to dobrze z wykresu wskaźnika na rysunku 6.14.



Rys. 6.14. Wykres wskaźnika jakości

Wniosek jest następujący – im większe wzmacnienie regulatora, tym lepsza (w sensie przyjętego wskaźnika jakości) jakość regulacji. W rzeczywistym układzie regulacji wpływ nie uwzględnionych tu czynników spowodowałaby konieczność ograniczenia wartości wzmacnienia.

#### Przykład 6.3

W poprzednim przykładzie wartość wskaźnika jakości wyliczono na podstawie znajomości jawnnej postaci przebiegu czasowego uchybu regulacji  $e(t)$ . Obecnie obliczenia przeprowadzone będą z wykorzystaniem twierdzenia Parsevala. Transformata uchybu regulacji wyraża się wzorem

$$E(s) = \frac{s T_i}{s K_p + s^2 T_i} = \frac{T_i}{K_p + s T_i}$$

Wstawiając ją do wzoru z twierdzenia Parsevala, otrzymuje się

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{T_i}{K_p + j\omega T_i} \cdot \frac{T_i}{K_p - j\omega T_i} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{T_i^2}{K_p^2 + \omega^2 T_i^2} d\omega \end{aligned}$$

Obliczając wartość całki, korzystamy z metody całkowania przez podstawienie oraz następującego wzoru:  $\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2}$ .

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{T_i^2}{K_p^2}}{1 + \omega^2 \frac{T_i^2}{K_p^2}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\left(\frac{T_i}{K_p}\right)^2}{1 + (\omega \frac{T_i}{K_p})^2} d\omega = \\ &= \frac{T_i}{2\pi K_p} \arctg \left( \frac{T_i}{K_p} \omega \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{T_i}{2\pi K_p} \left( \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{T_i}{2 K_p} \end{aligned}$$

Otrzymano ten sam wynik, co w poprzednim przykładzie.

## 6.6. Literatura

- Broniszewi I. N., Siemiedziałejew K. A. (1995): *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. PWN, Warszawa.
- Górecki H. (2006): *Optymalizacja i sterowanie systemów dynamicznych*. UWND AGH, Kraków.
- Grabowski P. (1996): *Ćwiczenia komputerowe z teorii sterowania*. Skrypt uczelniowy nr 1453, Wydawnictwa AGH, Kraków (również wersja internetowa z roku 2004).
- Kaczorek T. (1977): *Teoria układów regulacji automatycznej. T. II. WNT*, Warszawa.
- Nowacki P., Szklarski L., Górecki H. (1962): *Podstawy teorii układów regulacji automatycznej*. PWN, Warszawa.

Rozważamy przypadek szczególny, a mianowicie liniowy dynamiczny układ stacjonarny z czasem ciągłym

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (7.1)$$

gdzie:  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^m$ ,  $u(t) \in R^r$ ,  $t \geq 0$ , a  $A$ ,  $B$  i  $C$  są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

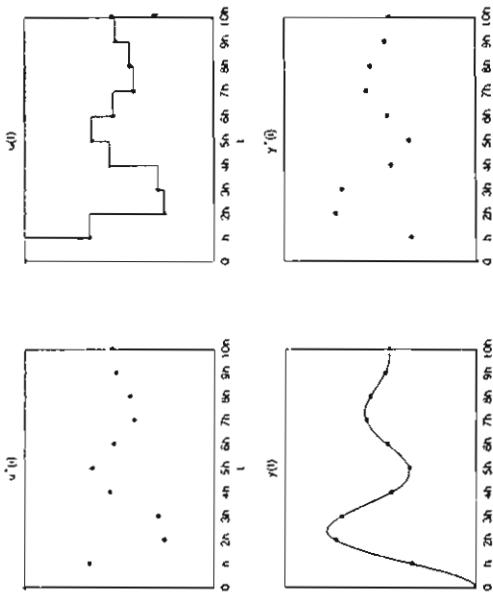
W tym przypadku zależność sygnału  $y^*(t)$  od  $u^*(t)$  (zob. rys. 7.1) można opisać następującym równaniem rekurencyjnym

$$\begin{aligned} x^*(i+1) &= A^*x^*(i) + B^*u^*(i), \\ y^*(i) &= C^*x^*(i), \end{aligned} \quad (7.2)$$

gdzie:  $x^*(ih) = x(ih)$ ,  $u^*(i) = u(ih)$ ,  $y^*(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  przy czym  $h > 0$  oznacza okres próbkowania, zaś  $A^*$ ,  $B^*$  i  $C^*$  są macierzami rzeczywistymi określonymi następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} A^* &= e^{hA}, \\ B^* &= \int_0^h e^{tA} B dt, \\ C^* &= C. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Na rysunku 7.2 pokazano przykładowe przebiegi sygnałów w układzie dyskretnym ciągłym.



Rys. 7.2. Sygnały w układzie dyskretno-ciągłym

## 7. Systemy dyskretnie

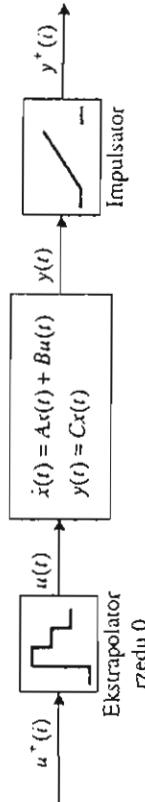
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi własnościowościami systemów dynamicznych dyskretnych w czasie. System dyskretny w czasie zwykle opisuje się modelem matematycznym w postaci odpowiednich równań rekurencyjnych. Z modelami w postaci równań rekurencyjnych sporykamy się najczęściej w dwóch przypadkach:  
1) przy opisie komputerowych układów sterowania,  
2) przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych.

Istnieją również inne przypadki, w których opis za pomocą równań rekurencyjnych wynika z natury rozważanych systemów.

### 7.1. Sterowanie komputerowe

Przetwornik cyfrowo-analogowy (ekstrapolator rzędu zerowego) działa w następujący sposób: na wejściu przetwornika podawany jest ciąg elementów  $u^*(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , a na wyjściu otrzymujemy funkcję  $u(t) = u^*(i)$  dla  $t \in [ih, (i+1)h]$ , ogólnie  $h > 0$  jest okresem pracy przetwornika (okresem próbkowania). Na wyjściu z przetwornika analogowo-ciągowe (impulsatora), mamy ciąg elementów  $y^*(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $h > 0$  (okres pracy impulsatora).

Połączenie szeregowego ekstrapolatora, systemu ciągłego w czasie i impulsatora pokazane na rysunku 7.1 stanowi układ dyskretno-ciągły (przy pracy synchronicznej ekstrapolatora i impulsatora z okresem  $h > 0$ ).



Rys. 7.1. Układ dyskretno-ciągły

#### Uwaga

Ekstrapolator rzędu zerowego w MATLABie występuje jako *zero-order hold*. W literaturze można również spotkać skrót od angielskiej nazwy, tj. *zoh*.

### Wprowadzenie zależności (7.3)

Macierze  $A^+$  i  $B^+$  otrzymujemy z rozwiązywania równania różniczkowego (7.1) o postaci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau.$$

Po podstawieniu  $t = (i+1)h$  i  $t_0 = ih$  oraz  $u(t) = u^+(t)$  na odcinkach  $t \in [ih, (i+1)h]$ , mamy

$$\begin{aligned} x^+(i+1) &= x((i+1)h) = \exp(((i+1)h - ih)A) x(ih) + \\ &+ \int_{ih}^{(i+1)h} \exp(((i+1)h - \tau)A) B d\tau u(ih) = \\ &= e^{ihA} x^+(i) + \int_0^h e^{iA} B d\tau u^+(\tau) = A^+ x^+(i) + B^+ u^+(i). \end{aligned}$$

Zauważmy, że liniowy układ dyskretny (7.2) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy  $A^+$  leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze (czyli  $|\lambda(A^+)| < 1$ ).

### 7.2. Dobór okresu próbkowania

W praktyce istotny jest dobór okresu próbkowania  $h$ . Poniżej przedstawione jest jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących analizy sygnałów przydatnych do oszacowania maksymalnej dopuszczalnej wartości  $h$ .

#### Twierdzenie o próbkowaniu

Sygnal ciągły może być ponownie odtworzony, w sposób jednoznaczny, z sygnału dyskretnego, jeśli był on próbkowany z częstotliwością co najmniej dwa razy większą od granicznej częstotliwości swego widma. Innymi słowy, jeżeli widmo sygnału jest ograniczone do  $[-f_g, f_g]$ , to częstotliwość próbkowania  $f_p = \frac{1}{h}$  musi spełniać zależność

$$f_p > 2f_g. \quad (7.4)$$

Istotą tego twierdzenia jest to, że składowe sygnału o częstotliwościach wyższych niż połowa częstotliwości próbkowania zostają zmieszane w procesie dyskretyzacji, zarówno w dziedzinie częstotliwościowej jak i czasowej, co doprowadza do zatknięcia całego sygnału.

Twierdzenie to w literaturze znaleźć można pod wieloma nazwami. Związanego jest to z tym, że zagadnienie badane było przez wielu uczonych. W kontekście telekomunikacji rozpatrywanie było ono przez Nyquista w 1928 r. i Gabora w 1946 r., którzy sformułowali hipotezę o treści zbliżonej do twierdzenia, bazując na analizie szeregow Fouriera. Z punktu widzenia matematyki, a dokładniej interpolacji funkcji, zajmował się nim Whittaker w 1935 r. Twierdzenie o próbkowaniu zostało opublikowane i udowodnione niezależnie przez Shannon (Shannon 1949) i Kotelnikowa (Kotelnikow 1933). Częstotliwość  $f_p$ , spełniająca nierówność (7.4), w literaturze często nosi nazwę częstotliwości Nyquista (taką właśnie nazwę wprowadził Shannon).

Rozważmy sygnał ciągły  $s(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz sygnał dyskretny  $s^+(i) = s(ih)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Jeżeli okres próbkowania  $h$  spełnia twierdzenie o próbkozaniu, to oryginalny sygnał ciągły  $s(t)$  można uzyskać za dyskretnego  $s^+(i)$  na drodze następującej operacji

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^+(n) \text{Sa}\left(\frac{t}{h} - n\right), \quad (7.5)$$

gdzie

$$\text{Sa}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

Zwróciśmy uwagę, że równość (7.5) umożliwia odtworzenie sygnału jedynie przy postiadaniu próbek od  $-\infty$  do  $\infty$ , i zatem nie nadaje się do praktycznych zastosowań. Twierdzenie jednak ma bardzo istotne znaczenie ze względu na tak zwane zjawisko aliasingu, które zilustrujemy poniższym przykładem.

#### Przykład – Aliasing

Rozważmy dwie sinusoidy, jedną o częstotliwości 1 Hz i drugą o częstotliwości 5 Hz. Przeprowadźmy próbkowanie obydwojemu sinusoidowi z częstotliwością 4 Hz (częstotliwość ta spełnia warunek (7.4) dla pierwszej sinusoidy, ale dla drugiej już nie). Oba rzutujemy na rysunek 7.3.

Jak można zauważyć, sinusoidy te w chwilach próbkowania przyjmują takie same wartości, czyli na podstawie znajomości sygnału próbkowanego nie można ich odróżnić od siebie. Co więcej, każda sinusoida o częstotliwości

$$\omega_n = 2\pi \frac{n \pm 0,25}{h},$$

gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, również będzie nieróżnialna na podstawie wartości w chwilach próbkowania. Tę nieróżnialność nazwiliśmy aliasingu. Zjawisko to może wystąpić, gdy w sygnale, który zamierzamy próbkować, występują zakłócenia wysokich częstotliwości. Rozwiązaniem występującego problemu może być

Rozważamy przypadek szczególny, a mianowicie liniowy dynamiczny układ stacjonarny z czasem ciągły

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\quad (7.1)$$

gdzie:  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^m$ ,  $u(t) \in R^r$ ,  $t \geq 0$ , a  $A$ ,  $B$  i  $C$  są macierzami rzeczywistymi o odpowiednich wymiarach.

W tym przypadku zależność sygnału  $y^*(t)$  od  $u^*(t)$  (zob.rys. 7.1) można opisać następującym równaniem rekurencyjnym

$$\begin{aligned}x^*(i+1) &= A^*x^*(i) + B^*u^*(i), \\ y^*(i) &= C^*x^*(i),\end{aligned}\quad (7.2)$$

gdzie:  $x^*(i) = x(ih)$ ,  $u^*(i) = u(ih)$ ,  $y^*(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  przy czym  $h > 0$  oznacza okres próbkowania, zaś  $A^*$ ,  $B^*$  i  $C^*$  są macierzami rzeczywistymi określonymi następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}A^* &= e^{hA}, \\ B^* &= \int_0^h e^{ht} B dt, \\ C^* &= C.\end{aligned}\quad (7.3)$$

Na rysunku 7.2 pokazano przykładowe przebiegi sygnałów w układzie dyskretnociągim.

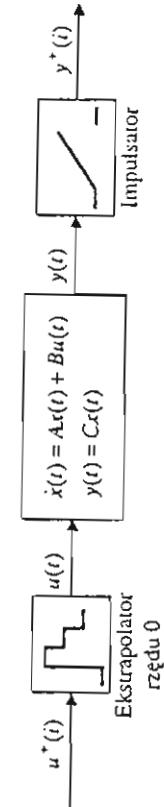
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi właściwościami systemów dynamicznych dyskretnych w czasie. System dyskretny w czasie zwykłe opisuje się modelem matematycznym w postaci odpowiednich równań rekurencyjnych. Z modelami w postaci równań rekurencyjnych sporykamy się najczęściej w dwóch przypadkach:  
1) przy opisie komputerowych układów sterowania,  
2) przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych.

Istnieją również inne przypadki, w których opis za pomocą równań rekurencyjnych wynika z natury rozważanych systemów.

## 7.1. Sterowanie komputerowe

Przetwornik cyfrowo-analogowy (ekstrapolator rzędu zerowego) działa w następujący sposób: na wejście przetwornika podawany jest ciąg elementów  $u^*(i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , a na wyjściu otrzymujemy funkcję  $u(t) = u^*(i)$  dla  $t \in [ih, (i+1)h]$ , ogólnie  $h > 0$  jest okresem pracy przetwornika (okresem próbkowania). Na wyjściu z przetwornika analogowo-cyfrowego (impulsatora) mamy ciąg elementów  $y^*(i) = y(ih)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ,  $h > 0$  (okres pracy impulsatora).

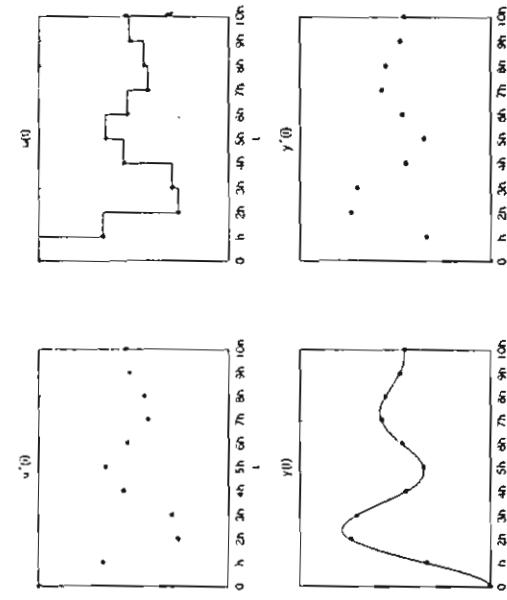
Połączenie szeregowego ekstrapolatora, systemu ciąglego w czasie i impulsatora pokazane na rysunku 7.1 stanowi układ dyskretno-ciągły (przy pracy synchronicznej ekstrapolatora i impulsatora z okresem  $h > 0$ ).



Rys. 7.1. Układ dyskretno-ciągły

Uwaga

Ekstrapolator rzędu zerowego w MATLABie występuje jako *zero-order hold*. W literaturze można również spotkać skrót od angielskiej nazwy, tj. *zoh*.



Rys. 7.2. Sygnały w układzie dyskretno-ciągły

## 7. Systemy dyskretny

### Wyprowadzenie zależności (7.3)

Macierze  $A^+$  i  $B^+$  otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego (7.1) o postaci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau.$$

Po podstawieniu  $t = (i+1)h$  i  $t_0 = ih$  oraz  $u(i) = u^+(i)$  na odcinkach  $t \in [ih, (i+1)h]$ , mamy

$$\begin{aligned} x^+(i+1) &= x((i+1)h) = \exp(((i+1)h - ih)A) x(ih) + \\ &+ \int_{ih}^{(i+1)h} \exp(((i+1)h - \tau)A) B d\tau u(ih) = \\ &= e^{ihA} x^+(i) + \int_0^h e^{\tau A} B d\tau u^+(i) = A^+ x^+(i) + B^+ u^+(i). \end{aligned}$$

Zauważmy, że liniowy układ dyskretny (7.2) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy  $A^+$  leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej o środku w zerze (czyli  $|\lambda(A^+)| < 1$ ).

### 7.2. Dóbór okresu próbkiowania

W praktyce istotny jest dobór okresu próbkiowania  $h$ . Poniżej przedstawione jest jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących analizy sygnałów przydatnych do oszacowania maksymalnej dopuszczałej wartości  $h$ .

#### Twierdzenie o próbkiowaniu

Sygnal ciągły może być ponownie odtworzony, w sposób jednoznaczny, z sygnału dyskretnego, jeśli był on próbkiowany z częstotliwością co najmniej dwa razy większą od granicznej częstotliwości swego widma. Innymi słowy, jeśli widmo sygnału jest ograniczone do  $[-f_g, f_g]$ , to częstotliwość próbkiowania  $f_p = \frac{1}{h}$  musi spełniać zależność

$$(7.4) \quad f_p > 2f_g.$$

Istota tego twierdzenia jest to, że składowe sygnału o częstotliwościach wyższych niż połowa częstotliwości próbkiowania zostają zniesztalcone w procesie dyskretyzacji, zarówno w dziedzinie częstotliwościowej jak i czasowej, co doprowadza do zniszczenia całego sygnału.

Twierdzenie to w literaturze znaleźć można pod wieloma nazwami. Związanego jest to z tym, że zagadnienie badane było przez Nyquista w 1928 r. i Gabora w 1946 r., który sformułował hipotezę o treści zbliżonej do twierdzenia, bazując na analizie szeregow Fouriera. Z punktu widzenia matematyki, a dokładniej interpolacji funkcji, zajmował się nim Whittaker w 1935 r. Twierdzenie o próbkiowaniu zostało opublikowane i udowodnione niezależnie przez Shannon (Shannon 1949) i Kotielnikowa (Kotielnikow 1933). Częstotliwość  $f_p$ , spełniająca nierówność (7.4), w literaturze często nosi nazwę częstotliwości Nyquista (taką właśnie nazwę wprowadził Shannon).

Rozważmy sygnał ciągły  $s(t)$ ,  $t \geq 0$  oraz sygnał dyskretny  $s^*(i) = s(ih)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  Jeżeli okres próbkiowania  $h$  spełnia twierdzenie o próbkiowaniu, to oryginalny sygnał ciągły  $s(i)$  można uzyskać z dyskretnego  $s^*(i)$  na drodze następującej operacji

$$s(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^*(n) \text{Sa}\left(\frac{i}{h} - n\right), \quad (7.5)$$

gdzie

$$\text{Sa}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & : x \neq 0, \\ 1 & : x = 0. \end{cases}$$

Zwrócmy uwagę, że równość (7.5) umożliwia odtworzenie sygnału jedynie przy posiadaniu próbek od  $-\infty$  do  $\infty$ , i zatem nie nadaje się do praktycznych zastosowań. Twierdzenie jednak ma bardzo istotne znaczenie ze względu na tak zwane zjawisko aliasingu, które zilustrujemy poniższym przykładem.

#### Przykład – Aliasing

Rozważmy dwie sinusoidy, jedną o częstotliwości 1 Hz i drugą o częstotliwości 5 Hz. Przeprowadźmy próbkiowanie obydwoju sinusoid z częstotliwością 4 Hz (częstotliwość ta spełnia warunek (7.4) dla pierwszej sinusoidy, ale dla drugiej już nie). Obrázje to rysunek 7.3.

Jak można zauważyć, sinusoidy te w chwilach próbkiowania przyjmują takie same wartości, czyli na podstawie znajomości sygnału próbkiowanego nie można ich odróżnić od siebie. Co więcej, każda sinusoida o częstotliwości

$$\omega_n = 2\pi \frac{n \pm 0,25}{h},$$

gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, również będzie nieróżnialna na podstawie wartości w chwilach próbkiowania. Tę nieróżnialność nazwimy zjawiskiem aliasingu. Zjawisko to może wystąpić, gdy w sygnale, który zamierzamy próbkować, występują zakłócenia wysokich częstotliwości. Rozwiążaniem występującego problemu może być

Filtr antialiasingowy. Filtr taki, zastosowany przed właściwym próbkowaniem, usuwa z sygnału częstotliwości większe niż 0,5 częstotliwości próbkowania – jest to filtracja dolnoprzepustowa.

Z równania (7.1) dla  $t = ih$ :  $\dot{x}^*(i) = Ax^*(i) + Bu^*(i)$ , i dalej następujące równania różnicowe:

- dla metody Eulera z krokiem w przód

$$\dot{x}^*(i+1) = (I + hA)x^*(i) + hBu^*(i), \quad (7.6)$$

- dla metody Eulera z krokiem w tył

$$\dot{x}^*(i+1) = (I - hA)^{-1}x^*(i) + (I - hA)^{-1}hBu^*(i+1), \quad (7.7)$$

- dla wzoru Newtona-Cotesa

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(i+1) &= (I - 0,5hA)^{-1}(I + 0,5hA)x^*(i) + \\ &+ 0,5h(I - 0,5hA)^{-1}B(u^*(i+1) + u^*(i)). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Równania różnicowe (7.6), (7.7) i (7.8) są nazywane schematami różnicowymi równania (7.1).

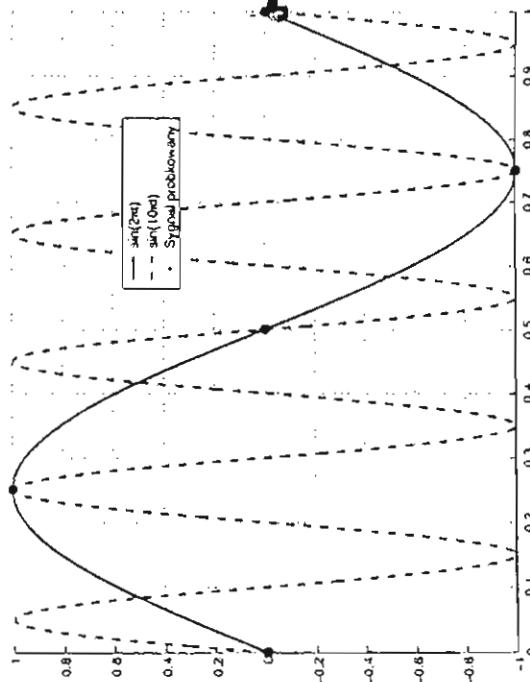
Warunkiem koniecznym, aby rozwiązywanie numeryczne dobrze aproksymowało rozwiązanie równania różniczkowego, jest asymptotyczna stabilność odpowiedniego schematu różnicowego.

Warunki asymptotycznej stabilności powyższych schematów podano poniżej:

- Schemat (7.6) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\lambda(I+hA)| < 1$ , co jest równoważne temu, by wszyskie wartości własne macierzy  $hA$  leżały wewnątrz koła o promieniu jeden i środku w punkcie  $(-1, j0)$ .
- Schemat (7.7) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy  $hA$  leżą na zewnątrz koła o promieniu 1 i środku w  $(1, j0)$  na płaszczyźnie zespolonej. W szczególności, jeżeli  $\operatorname{Re}\lambda(A) < 0$ , to schemat jest asymptotycznie stabilny  $\forall h > 0$ .
- Schemat (7.8) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\operatorname{Re}\lambda(A) < 0$ .

#### Uwagi na temat schematów różnicowych

Schemat (7.6) jest asymptotycznie stabilny jedynie dla małych kroków  $h$  i w przeciwieństwie do pozostałych schematów różnicowych nie wymaga „kosztownego” numerycznego odwracania macierzy. Zmniejszanie kroku  $h$  zwiększa dokładność obliczeń przy równoczesnym wzroście czasu obliczeń. Stosując schemat (7.8) i dowolnie zwiększając  $h$ , można skracić czas obliczeń, ale dodatkowy czas jest potrzebny na odwrócenie macierzy. W schemacie (7.6) zbyt duży krok  $h$  prowadzi do utraty stabilności obliczeń i w konsekwencji do błędego rozwiązywania numerycznego. Zatem widać, że można poszukiwać takiego kroku  $h > 0$ , przy którym otrzymujemy rozwiązanie przybliżone w minimalnym czasie przy równoczesnej, zadanej z góry dokładności obliczeń.



Rys. 7.3. Aliasing

- Może to być realizowane na dwa sposoby:
- 1) filtrem antialiasingowym może być analogowy filtr dolnoprzepustowy, wiążę się to jednak ze wszystkimi niedogodnościami związanymi z filtracją analogową;
  - 2) innym sposobem jest wstępne spróbkowanie sygnału z częstotliwością kilkukrotnie większą od docelowej, przeprowadzenie cyfrowej filtracji dolnoprzepustowej, a następnie ponowne próbkowanie sygnału tym razem z częstotliwością docelową.

### 7.3. Schematy różnicowe

Innym przypadkiem, w którym mamy do czynienia z układem dyskretnym, jest całkowanie numeryczne równań różniczkowych. Idea polega na aproksymowaniu pochodnej odpowiednim ilorazem różnicowym.

Rozważmy następujące, najprostsze aproksymacje (np. Mirkowski 1991, s. 142, 144), zakładając, że  $x^*(i) = x(ih)$  oraz  $\dot{x}^*(i) = \dot{x}(ih)$ :

- Eulera z krokiem w przód:  $x^*(i+1) = x^*(i) + h\dot{x}^*(i)$ ,
- Eulera z krokiem w tył:  $x^*(i+1) = x^*(i) + h\dot{x}^*(i+1)$ ,
- wzór Newtona-Cotesa:  $x^*(i+1) = x^*(i) + 0,5h \left( \dot{x}^*(i) + \dot{x}^*(i+1) \right)$ .

#### 7.4. Dodatkowe uwagi na temat dynamiki systemów dyskretnych

Równania różnicowe wykorzystywane są jako modele do opisu zjawisk w biologii, ekonomii, socjologii i wielu innych dziedzinach wiedzy. Przedstawimy poniżej kilka przykładów takich systemów.

Ciąg Fibonacciego

Rozważmy ciąg Fibonacciego

$$F = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Elementy tego ciągu są wyznaczane w sposób następujący:

$$x_{i+2} = x_{i+1} + x_i, \quad \text{gdzie } i = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1. \quad (7.9)$$

Równanie rekurencyjne (drugiego rzędu) o postaci (7.9) ma następujący wielomian charakterystyczny

$$W(z) = z^2 - z - 1,$$

którego pierwiastkami są

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zatem rozwiązywanie równania (7.9) dla przyjętych warunków początkowych ma postać

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^i - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^i \right]. \quad (7.10)$$

Warto zwrócić uwagę, że chociaż we wzorze (7.10) występują liczby niewymiernne, to uzyskane za jego pomocą wartości kolejnych wyrazów ciągu są odpowiednimi liczbami naturalnymi.

Można założyć, że stosunek dwóch sąsiednich wyrazów ciągu Fibonacciego, określony równością

$$y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

spełnia równanie

$$y_{i+1} = F(y_i),$$

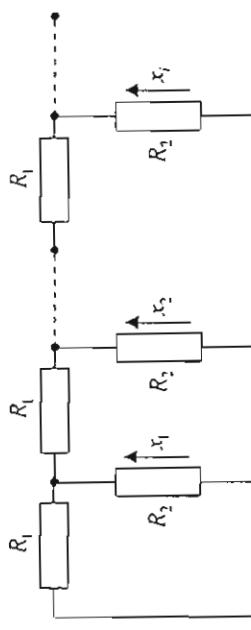
gdzie

$$F(y_i) = 1 + \frac{1}{y_i}. \quad (7.11)$$

Odwzorowanie (7.11)  $F: (0, \infty) \rightarrow R$  generuje układ dynamiczny i ma dokładnie jeden punkt stary  $y^* = F(y^*)$  oraz  $y_i \rightarrow (1 + \sqrt{5})/2$  gdy  $i \rightarrow \infty$ , dla dowolnego  $y_0 \in (0, \infty)$ . Punkt  $y^*$  jest atraktorem ze zbioru przyciągania  $(0, \infty)$ .

Układ łańcuchowy typu  $R$

Rozważmy elektryczny układ łańcuchowy pokazany na rysunku 7.4. Oporności  $R_1$  i  $R_2$  są dane.



Rys. 7.4. Układ łańcuchowy

Interesować nas będą wartości napięć  $x_i$  na opornościach  $R_1$ ,  $R_2$ . Z praw Kirchhoffa możemy uzyskać równanie różnicowe

$$x_{i+1} - 2 \left( 1 + \frac{R_1}{2R_2} \right) x_i + x_{i-1} = 0, \quad (7.12)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, u_0 = 0, x_1 = u$ ,  $u$  jest dane. Równanie charakterystyczne powyższego równania rekurencyjnego drugiego rzędu ma postać

$$z^2 - 2 \left( 1 + \frac{R_1}{2R_2} \right) z + 1 = 0. \quad (7.13)$$

Równanie (7.13) ma następujące pierwiastki:

$$z_{1,2} = 1 + \frac{R_1}{2R_2} \pm \sqrt{\frac{R_1}{R_2} \left( 1 + \frac{R_1}{4R_2} \right)}.$$

Ogólne rozwiązywanie równania (7.12) ma postać

$$x_i = C_1 z_1^i + C_2 z_2^i.$$

Stale  $C_1$  i  $C_2$  można wyznaczyć z warunków początkowych równania (7.12), czyli  $x_0 = 0, x_1 = u$ .

### Odwzorowanie logistyczne

Dynamika układów dyskretnych (jednowymiarowych) może być skomplikowana. Przykładem może być odwzorowanie logistyczne (np. Kudrewicz 1993, s. 65) generujące układ dyskretny

$$\begin{aligned} x(i+1) &= F(x(i), \mu), \\ F(x(i), \mu) &= \mu x(i)(1 - x(i)), \end{aligned} \quad (7.14)$$

gdzie  $\mu \in [0, 4]$ ,  $x \in [0, 1]$ . Jest to dyskretne równanie nieliniowe pierwszego rzędu. Funkcja  $F$  określona równością (7.14) przy dowolnym  $\mu \in [0, 4]$  odwzorowuje odcinek  $[0, 1]$  w siebie. Rodzina funkcji  $F$  (dla różnych  $\mu$ ) stanowi tak zwaną rodzinę odwzorowań logistycznych.

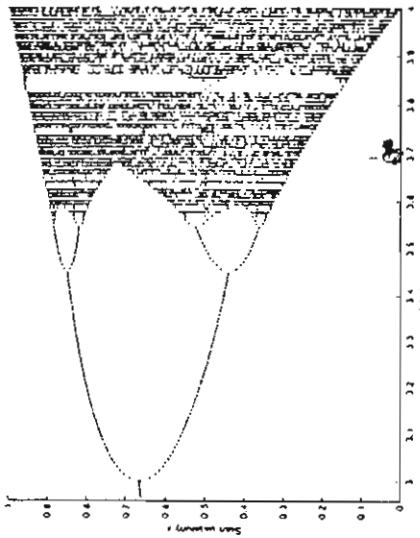
Interesującą jest zachowanie ciągu  $x(i)$ , opisanego równaniem rekurencyjnym (7.14), gdy  $i \rightarrow \infty$  (stany ustalone) w zależności od parametru  $\mu$ . Na rysunkach 7.5 i 7.6 przedstawiono wyniki eksperymentu numerycznego przeprowadzonego w następujący sposób: ustalamy parametr  $\mu$  i wybieramy  $x(0) \in (0, 1)$ ; następnie wykonujemy np. 1000 iteracji (by uzyskać stan ustalony) i pomijamy 750 pierwszych wyrazów ciągu  $x(i)$ , na rysunku zaś zaznaczamy tylko 250 ostatnich iteracji  $x(i)$ .

Na rysunku 7.7 przedstawiono wykres równania (7.14) dla  $\mu = 3,5$  i  $x(0) = 0,384$  pokazano na rysunku 7.7.

Algorytm postępowania jest następujący:

1. Narysować wykres prawej strony równości (7.14) (będzie to wykres paraboli) dla wartości  $x \in [0, 1]$  i wybranego parametru  $\mu$  oraz prostą o równaniu  $y = x$ .
2. Wybrać punkt początkowy na osi poziomej.
3. Połączyć punkt pionową linią z wykresem paraboli.
4. Połączyć punkt przecięcia pionowej linii z parabolą z prostą  $y = x$  za pomocą linii poziomej.
5. Wybrać punkt przecięcia linii poziomej z prostą  $y = x$  i powrócić do punktu 3.

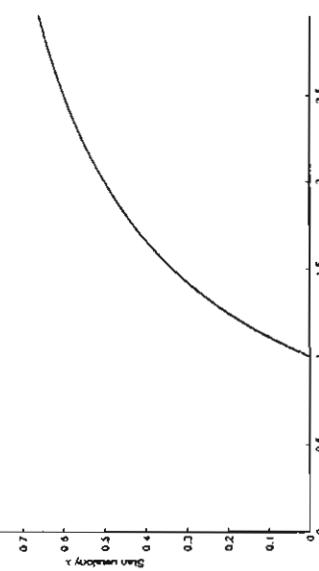
Rys. 7.5. Stany ustalone odwzorowania logistycznego dla  $\mu \in [0, 3]$



Rys. 7.6. Stany ustalone odwzorowania logistycznego dla  $\mu \in [3, 4]$

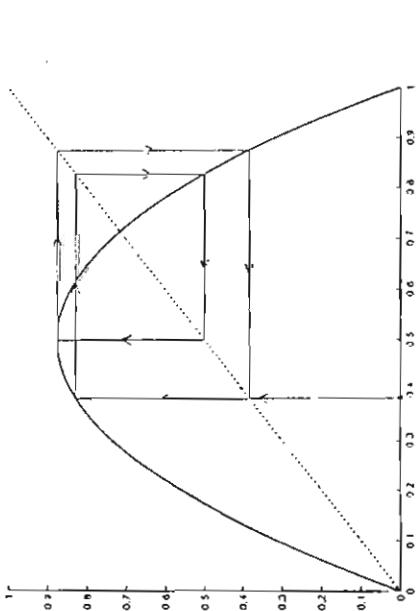
Naprawdę ciekawe zjawisko występuje jednak przy wartościach  $\mu \in [3, 4]$ . Jak można zauważyć na rysunku 7.6, zamiast jednego punktu ustalonego pojawiają się trójkatne okresowe, na początku o okresie 2 (pomiędzy dwoma punktami), 4 itd., następujące okresowe, na kolejnych etapach o okresie 3 (pomiędzy trzema punktami), 5 itd., ... Wartości  $\mu$  dla których pojawią się takie okresowe trajektorie, to tzw. punkty ukladu Feigenbauma. Co ciekawe, dla wartości około  $\mu = 3,8$  można zauważać, że odwzorowanie ma okres równy 3 (odwzorowanie od pewnej iteracji przyjmuje tylko trzy wartości). Jest to o tyle interesujące, że trajektorie o okresie równym 3, ma również nieskończonie wiele trajektorii określonych o wszyskich okresach naturalnych (co jest konsekwencją twierdzenia Szarkowskiego, np. Kudrewicz 1993, s. 72; Mitkowski 2000, s. 67). Dla  $\mu = 4$  odwzorowanie (7.14) generuje dynamicę „chaotyczną”. Tu warto wspomnieć, że w układach ciągłych takie zjawisko jak „chaos” występuje dopiero poczęwszy od trzeciego rzędu.

Rozwiążanie równania różnicowego (7.14) można również uzyskać w sposób geometryczny. Przykład takiej konstrukcji (dla  $\mu = 3,5$  i  $x(0) = 0,384$ ) pokazano na rysunku 7.7.



Na rysunku 7.7 strzałki na liniach ilustrują kolejność postępowania, punkt początkowy oznaczony jest kropką.

ny pod nazwą trójkąta Sierpińskiego. Ilustrują to rysunki 7.8 i 7.9. Zwłaszcza zbliżenie na rysunku 7.9 jest ciekawe, ponieważ widać na nim, typową dla fraktali, własność samopodobieństwa.



Rys. 7.7. Konstrukcyjne wyznaczanie rozwiązań równania (7.14)

Odwzorowania iterowane (np. Kudrewicz 1993, s. 37)

Odwzorowania iterowane (inaczej IFS – *Iterated Function Systems*) można wykorzystać do zapamiętywania obrazów geometrycznych. Dla przykładu rozważmy odwzorowanie afiniiczne  $y = Ax + b$  ( $R^2 \rightarrow R^2$ ), które generuje układ rekurencyjny (równanie różnicowe)

$$x(i+1) = Ax(i) + b. \quad (7.15)$$

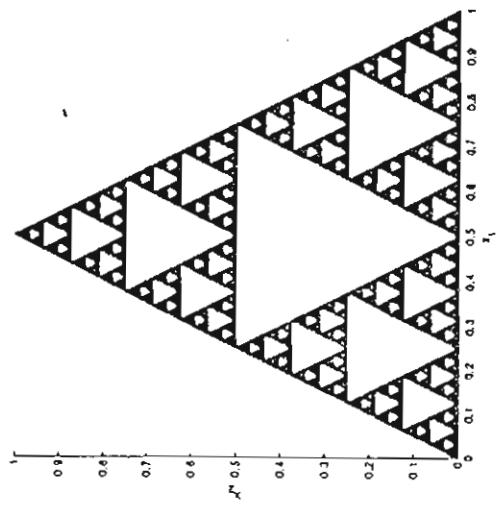
przy czym w każdej iteracji macierz  $\hat{A}$  i wektor  $b$  wybierane są losowo z pewnego przygotowanego wcześniej zestawu macierzy  $\hat{A}^u$  i  $b^u$ ,  $u = 1, 2, 3$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

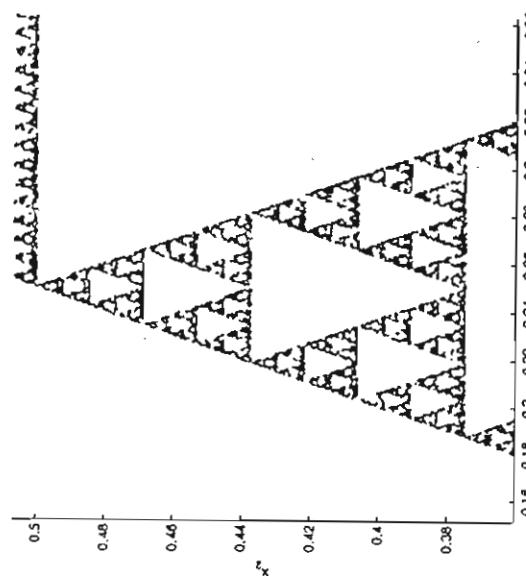
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Punkty w kolejnych iteracjach będącymi rysować na płaszczyźnie  $x_1 \times x_2$ . Wynik takiego postępowania będzie fraktal (a dokładniej atraktor  $\tilde{x}^{(l)} \rightarrow \tilde{x}^{(l)} \in R^2$ ) zna-



Rys. 7.8. Trójkąt Sierpińskiego (wykonano 10 000 iteracji)



Rys. 7.9. Trójkąt Siemjinskiego (zblżenie)

Odwzorowania iterowane można również uzyskiwać za pomocą metod deterministycznych (bez losowania). Są to jednak metody mało wydajne numerycznie ze względu na konieczność wykonania większej liczby iteracji. Ideę takiego deterministycznego algorytmu można znać w pozycjach (Kudrewicz 1993, s. 21; Młtkowski 2000, s. 65). Szerokie ujęcie tematu odwzorowań iterowanych i fraktali przytacza również pozyja (Scheinerman 2000, s. 189).

Interesujący jest problem poszukiwania odwzorowania iterowanego w taki sposób, by uzyskać z góry zadany obraz geometryczny. W ten sposób możliwe byłoby przekazywanie skomplikowanych obrazów za pomocą przesłania stosunkowo małej liczby parametrów (macierzy odwzorowania iterowanego).

## 7.5. Zadania do rozwiązania

### Zadanie 7.1

Zamodelować w Simulinku system (7.1) z macierzami  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , podanymi przez prowadzącego. Na wejście systemu podłączyć ekstrapolator rzędu zerowego. Obliczyć macierze  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$  odpowiadającego mu systemu (7.2) przy podanym  $h$ . Przeanalizować zachowanie układu dyskretno-ciągłego w zależności od  $h$ .

### Zadanie 7.2

Przeanalizować zachowanie się schematów różnicowych dla macierzy systemu ciągłego

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

w zależności od wielkości  $h$  i porównać rozwiązanie numeryczne z rozwiązaniem analitycznym układu ciągłego w czasie.

### Zadanie 7.3

Przeanalizować zachowanie się następującego systemu dyskretnego

$$x(k+1) = \lambda x(k) \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

w zależności od wartości parametru  $\lambda$

$$\lambda < -1, \lambda = -1, \lambda \in (-1, 0), \lambda = 0, \lambda \in (0, 1), \lambda = 1, \lambda > 1.$$

### Zadanie 7.4

Napisać dwa programy w MATLAB-ie, obliczające wartość tego wyrazu ciągu Fibonacciego (gdzie  $i$  jest dowolną liczbą naturalną większą od 2). Jeden stosujący sposób rekurencyjny opisany przez (7.9), drugi zaś korzystający ze wzoru (7.10). Porównać szybkość działania obydwiu programów (za pomocą funkcji tic i toc) dla różnych wartości  $i$ . Sprawdzić numerycznie punkt stał odwzorowania (7.11).

### Zadanie 7.5

Napisać program „rysujący” obraz (fraktor) wybranego odwzorowania iterowanego (zob. np. Kudrewicz 1993, s. 21; Scheinerman 2000, s. 189).

### Zadanie 7.6

Dokonać analizy równania (7.14) interpretowanego jako układ liniowy z nietypowym sprzężeniem zwrotnym

$$x(i+1) = \mu x(i) + \mu u(i), \quad u(i) = -x(i)^2 \quad (7.16)$$

Przeprowadzić analizę dla  $u \in [0, 3]$ , badając rodzaj stabilności punktów równowagi układu zamkniętego (7.16).

## 7.6. Literatura

- Kotelnikow V.A. (1933): *On the transmission capacity of the 'ether' and of cables in electrical communications*. (C.C. Bissell i V.A. Kotelnikow, tłum. ang.) <http://ict.open.ac.uk/classics/l.pdf>.
- Kudrewicz J. (1993): *Fracjale i chaos*. WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.
- Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Wydawnictwo AGH, Kraków.

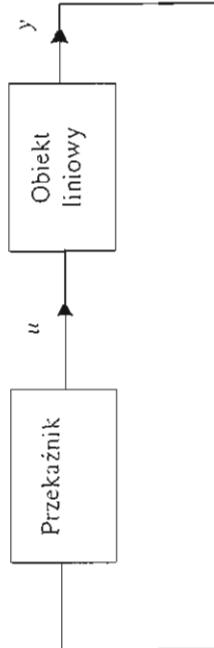
- Mitkowski W. (2000): *Systemy dynamiczne – Materiały uzupełniające do wykładow. Wydawnictwa Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków.*
- Scheinerman E.R. (2000): *Invitation to Dynamic Systems*. <http://www.math.jhu.edu/~ers/invite.html>
- Shannon C.E. (1949): *Communication in the Presence of Noise*. (przedruk w Proceedings of the IEEE, vol. 86, no. 2, February 1998), dostępny w internecie <http://www.stanford.edu/class/e104/shannonpaper.pdf>.

maga pewnego rozszerzenia definicji rozwiązań równania różniczkowego. Cykle graniczne sporykane są w różnych systemach nieliniowych, a stabilny cykl graniczny jest typowym ustalonym reżimem pracy przekaznikowych układów regulacji automatycznej. Dla zobrazowania i analizy wymienionych zjawisk posłużymy się portretami fazowymi. Przypomnijmy, że konstrukcję portretu fazowego układu jednorodnego  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  poznaliśmy w rozdziale 1.

## 8. Układy liniowe z regulatorami przekaźnikowymi

### 8.1. Wstęp

Rozważamy zamknięty układ regulacji, składający się z liniowego obiektu sterowania i regulatora przekaźnikowego (rys. 8.1).



Rys. 8.1. Zamknięty układ regulacji z przekaźnikiem

Obiekt jest drugiego rzędu, stacjonarny i jednowymiarowy. Opisany jest za pomocą równania stanu i równania wyjścia

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (8.1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} x(t) &\in \mathbb{R}^2 - wektor stanu, \\ u(t) &\in \mathbb{R} - wartość sterowania, \\ y(t) &\in \mathbb{R} - wartość wyjścia obiektu. \end{aligned}$$

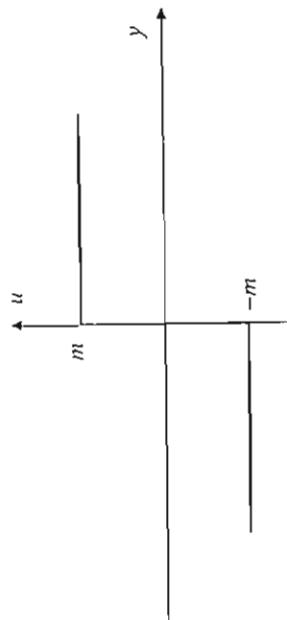
Zakładamy, że macierz  $C$  jest niezerowa.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z dwoma zjawiskami występującymi w układach nieliniowych: reżimem ślijgowym i cyklem granicznym. Reżimy ślijgowe są charakterystyczne dla układów przelaczanych i o zmiennej strukturze. Ich analiza wy-

### 8.2. Typy przekaźników i konstrukcja portretu fazowego

Rozpatrujemy przekaźniki symetryczne trzech typów:

- 1) przekaźnik dwustanowy,
- 2) przekaźnik dwustanowy z histerezą,
- 3) przekaźnik trójstanowy ze strefą martwą.



Rys. 8.2. Charakterystyka przekaźnika dwustanowego bez histerezy

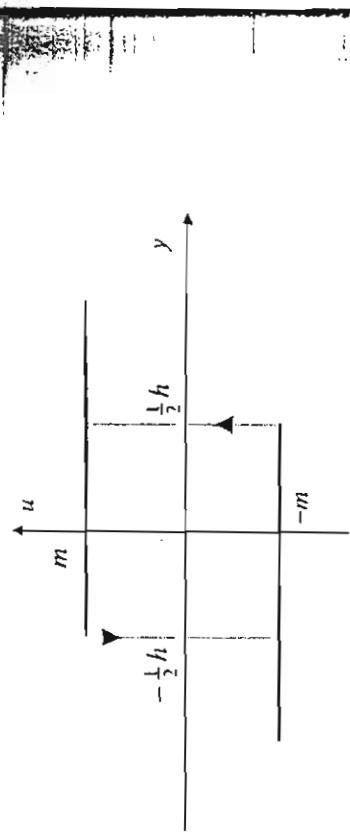
Symetryczny przekaźnik dwustanowy opisany jest za pomocą charakterystyki statycznej  $u(t) = m \operatorname{sgn} y(t) \text{ dla } m > 0$  (rys. 8.2). Symetryczny przekaźnik dwustanowy z histerezą ma charakterystykę przedstawioną na rysunku 8.3. Parametr  $h > 0$  jest szerokością pętli histerezy. Aby opisać działanie przekaźnika, założymy, że jego wejściem jest funkcja ciągła  $y : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Odpowiednie wyjście przekaźnika  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia równość  $|u(t)| = m$  dla każdego  $t$ . Ponadto dla każdego  $t$  zachodzą relacje:  $u(t) = m$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$u(t_0) = m \text{ i } y(\theta) > -\frac{1}{2}h \quad \forall \theta \leq t$$

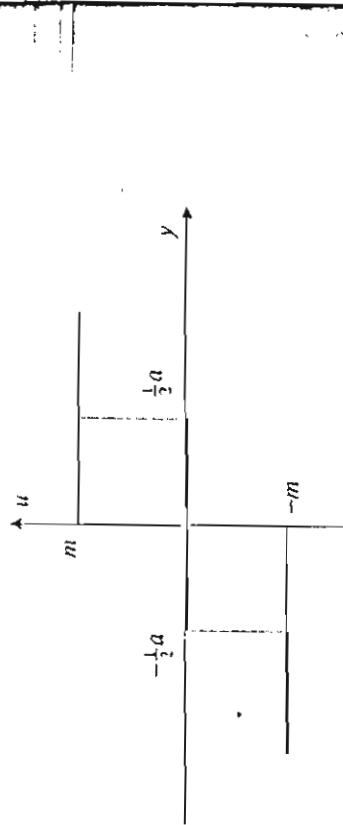
lub

$$\exists \tau \leq t \quad \forall \theta \in [\tau, t], \quad y(\tau) \geq \frac{1}{2}h, \quad y(\theta) > -\frac{1}{2}h.$$

W każdym innym przypadku  $u(t) = -m$ .



Rys. 8.3. Charakterystyka przekaźnika dwustanowego z histeresą



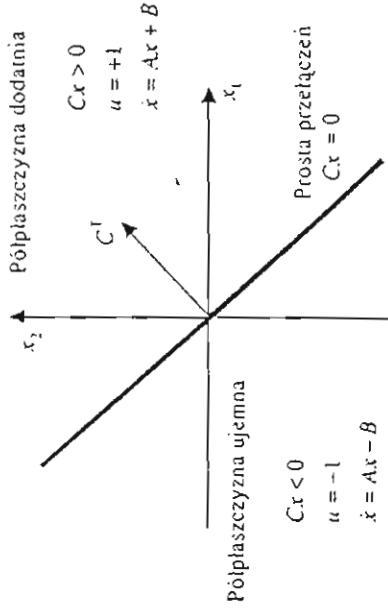
Rysunek 8.4. Charakterystyka przekaźnika trójstanowego bez histeres – wego ze strefą martwą o szerokości  $a > 0$

Rysunek 8.4 pokazuje charakterystykę symetryczną przekaźnika trójstanowego ze strefą martwą o szerokości  $a > 0$

$$u(t) = \begin{cases} m \operatorname{sgn} y(t), & |y(t)| > \frac{1}{2}a, \\ 0, & |y(t)| \leq \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Będziemy dalej przyjmować  $m = 1$ .

Rodziny trajektorii fazowych startujących z różnych warunków początkowych tworzą tak zwane portrety fazowe. W przypadku układu drugiego rzędu portrety fazowe leżą na płaszczyźnie fazowej. Aby umożliwić obserwację zachowania trajektorii fazowych, trzeba dobierać warunki początkowe w taki sposób, by trajektorie były rozłączne między sobą. Zbyt gęste usypanie warunków początkowych spowoduje całkowite wypełnienie płaszczyzny fazowej wykresami.



Rys. 8.5. Płaszczyzna stanu dla układu z przekaźnikiem bez histeres

Konstrukcję portretów zaczniemy od przypadku przekaźnika dwustanowego bez histeres (rys. 8.5). Przelaczenie sterowania  $u$  następuje, gdy funkcja  $y$  przechodzi przez zero. Zgodnie z równaniem wyjścia, zachodzi wtedy równość  $Cx = 0$ . Zbiór wszystkich stanów, które spełniają to równanie, jest na płaszczyźnie stanu prostą przechodzącą przez środek układu współrzędnych i prostopadłą do wektora  $C^T \in R^2$ . Prosta ta, zwana prostą przełączenia, dzieli płaszczyznę stanu na dwie półplaszczyzny. W każdym punkcie półplaszczyzny dodatniej, wskazywanie przez wektor  $C^T$ , wyjście obiektu jest dodatnie, a więc odpowiednie sterowanie  $u(t) = +1$ . Po drugiej stronie prostej przełączenia, czyli na półplaszczyźnie ujemnej, wyjście obiektu jest ujemne, zatem  $u(t) = -1$ . Na półplaszczyźnie dodatniej trajektorie systemu spełniają równanie

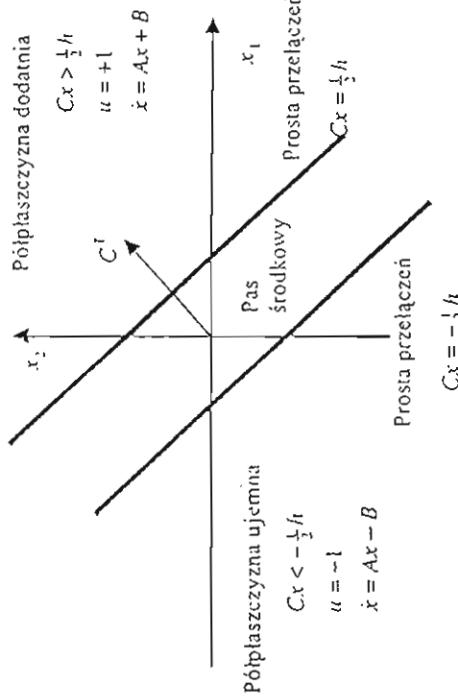
$$\dot{x} = Ax + B, \quad (8.2)$$

a na półplaszczyźnie ujemnej – równanie

$$\dot{x} = Ax - B. \quad (8.3)$$

Przejedźmy teraz do portretu fazowego układu z przekaźnikiem z histeresą (rys. 8.6). Przelaczenia zachodzą na dwóch prostych:  $Cx = \pm \frac{1}{2}h$ . W półplaszczyźnie  $Cx > \frac{1}{2}h$  (dodatniej) portret fazowy składa się z luków rozwiązujących równania (8.2), a w półplaszczyźnie  $Cx < -\frac{1}{2}h$  (ujemnej) – z luków rozwiązujących równania (8.3). W pasie środkowym  $-\frac{1}{2}h \leq Cx \leq +\frac{1}{2}h$  konieczna jest bardziej szczegółowa analiza. Wyjście przekaźnika  $u$  zmienia skokowo wartość w chwili  $t = 1$  na  $+1$ , gdy  $u(-) = -1$ ,  $Cx(1) = \frac{1}{2}h$  oraz  $Cx(1-) = CAx(1) - CB > 0$ . Jeśli przy tym  $Cx(1+) = CAx(1) + CB > 0$ , to trajektoria wchodzi następnie na półplaszczyznę dodatnią, a jeśli  $CAx(1) + CB < 0$  –

zawraca do pasa środkowego. Natomiast  $u$  zmienia skokowo wartość  $z+1$  na  $-1$ , gdy  $u(t-) = +1$ ,  $Cx(t) = -\frac{1}{2}h$  i  $Cx(t-) = CAx(t) + CB < 0$ . Jeśli  $Cx(t+) = CAx(t) - CB < 0$ , to trajektoria wchodzi na półplaszczyznę ujemną, a gdy  $CAx(t) - CB > 0$  – zawsza do pasa środkowego.



Rys. 8.6. Fazowy portret dla układu z przekaźnikiem z histeresą

Na portrecie fazowym układu z przekaźnikiem trójstanowym występują dwie półplaszczyzny:  $Cx = \pm \frac{1}{2}a$ . W półplaszczyźnie  $Cx < -\frac{1}{2}a$  portret fazowy składa się z luków trajektorii równania (8.3), w półplaszczyźnie  $Cx > \frac{1}{2}a$  – z luków trajektorii równania (8.2), a w pasie  $-\frac{1}{2}a < Cx < \frac{1}{2}a$  (czyli tzw. strefie martwej) portret jest złożony z luków rozwiązanych równania stanu ze sterowaniem zerowym,  $\dot{x} = Ax$ .

Konstrukcję mogą ułatwic dwa sposoby rozstrzeżenia. Po pierwsze, portrety fazowe są symetryczne, co wynika z symetrii rozważanych przekaźników. Jeżeli  $x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ , jest lukiem trajektorii stanu układu zamkniętego, to  $-x(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1]$  – też. Po drugie, w przypadku gdy macierz  $A$  jest nieosobliwa, trajektorie układów (8.2) i (8.3) można uzyskać przez równoległe przesunięcie trajektorii swobodnych w taki sposób, aby nowy punkt równowagi znajdował się odpowiednio w punkcie  $\bar{A}^{-1}B$ .

### 8.3. Reżim ślizgowy

Równanie stanu układu zamkniętego z przekaźnikiem dwustanowym bez histeresy ma postać

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B \operatorname{sgn}(Cx(t)). \quad (8.4)$$

zawraca do pasa środkowego. Natomiast  $u$  zmienia skokowo wartość  $z+1$  na  $-1$ , gdy  $u(t-) = +1$ ,  $Cx(t) = -\frac{1}{2}h$  i  $Cx(t-) = CAx(t) + CB < 0$ . Jeśli  $Cx(t+) = CAx(t) - CB < 0$ , to trajektoria wchodzi na półplaszczyznę ujemną, a gdy  $CAx(t) - CB > 0$  – zawsza do pasa środkowego.

Prawa strona tego równania jest nieciągła funkcją stanu  $x(t)$ . Przypomnijmy, że klasyczna teoria równań różniczkowych wymaga przynajmniej ciągłości prawej strony dla zagwarantowania, że rozwiązywanie równania istnieje. W celu udowodnienia większości ważnych własności rozwiązań (jednoznaczność, ciągły i gladka zależność od parametrów, przedłużalność itd.), wymagana jest jeszcze większa regularność prawej strony (np. spełnianie warunku Lipschitza względem zmiennej  $x$ ). Można więc oczekiwac, że w układzie opisanym równaniem (8.4) pojawia się ciekawe osobliwości. Jednym z takich osobliwych zjawisk jest reżim ślizgowy. Aby objaśnić to zjawisko, rozważmy sytuację, w której na pewnym odcinku prostej przełączek zachodzą jednocześnie nierówności:

$$CAx - CB > 0 \quad \text{i} \quad CAx + CB < 0. \quad (8.5)$$

Oznacza to, że zarówno na półplaszczyźnie dodatniej, jak i ujemnej trajektorie stanu w pobliżu prostej przełączek kierują się w jej stronę i „zderzają się” na niej. Łatwo zauważyc, że po dotarciu stanu do prostej przełączek, rozwiązanie równania (8.4) w sensie klasycznym kontynuować się nie da. W takiej sytuacji klasycznie rozumiane równanie różniczkowe nie może służyć jako model układu rzeczywistego z przekaźnikiem. Okazuje się jednak, że wystarczy pewne rozszerzenie definicji rozwiązania, żeby przywrócić równaniu funkcję modelu. Aby do tego rozszerzenia dojść, zastanówmy się najpierw, jak działałyby układ rzeczywisty. Wskutek nieuniknionej bezwładności, rzeczywista „prosta przełączek” wskazuje pewne rozmycie. Przekaźnik zawsze reaguje z pewnym opóźnieniem, a obiekt z kolei z pewnym opóźnieniem „zauważa” zmianę stanu przekaźnika. Z dobrym przybliżeniem można zamodelować te opóźnienia, zastępując idealny przekaźnik dwustanowy przekaźnikiem z histeresą, o malej, ale niezerowej szerokości pętli  $h$ . W symulacjach komputerowych podobne efekty opóźnieniowe są spowodowane niezerową długością kroku dyskretyzacji. Powtarzając podane wypowiedź rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że po wejściu do pasa środkowego trajektoria przybierze postać lamanej, której kolejne wierzchołki leżą na zmianej na prostych  $Cx = \pm \frac{1}{2}h$ , a huk między tymi wierzchołkami są rozwiązaniami równania stanu (8.1) z wartościами sterowania kolejno  $\bar{F}_1$ . Sterowanie będzie zatem funkcją typu bang-bang z dużą częstotliwością przełączek. Kiedy szerokość pętli histereszy zdąże do zera, to częstotliwość przełączek zdąże do nieskończoności, a trajektoria stanu zdaże do pewnej funkcji czasu leżącej na prostej przełączek. Ciąg trajektorii stanu przy  $h \rightarrow 0^+$  ma zatem porządną granicę. Tę granicę nazywamy właśnie reżimem ślizgowym. Odpowiedni ciąg sterowań granicy punktowej nie ma – nie jest zbieżny w prawie żadnej chwili czasu.

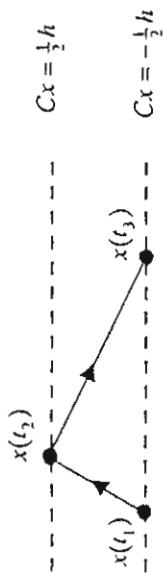
Z nierówności (8.5) wynika od razu prosty warunek konieczny i wystarczający zaistnienia reżimu ślizgowego

$$CB < 0. \quad (8.6)$$

Łarwo jest wyznaczyć odcinek prostej przełączeń, na którym występuje reżim ślimakowy. Każdy punkt na tej prostej można przedstawić w postaci  $x = sy$ , gdzie  $s$  jest parametrem liczbowym, a  $y = \text{col}(C_2, -C_1)$  jest niezerowym wektorem prostopadlym do  $C^T$ . Na mocy (8.5), reżim ślimakowy występuje dla tych  $s$ , które spełniają nierówności  $CB < sC\gamma < -CB$ .

#### 8.4. Dynamika reżimu ślimakowego

Aby wyprowadzić równanie ruchu obowiązujące w reżimie ślimakowym, rozważmy fragment trajektorii układu z niezerową histereszą, który leży w pasie środkowym. Dla małych  $h$  możemy postużyć się przybliżeniem liniowym (rys. 8.7).



Rys. 8.7. Fragment trajektorii w pasie środkowym

Z równości

$$x(t_3) = x(t_2) + \dot{x}(t_2^+) (t_3 - t_2) = x(t_1) + \dot{x}(t_1^+) (t_2 - t_1) + \dot{x}(t_2^+) (t_3 - t_2) \quad (8.7)$$

wynika formula na „średnią prędkość”

$$\frac{x(t_3) - x(t_1)}{t_3 - t_1} = (\dot{x}(t_1^+) - \dot{x}(t_2^+)) \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} + \dot{x}(t_2^+). \quad (8.8)$$

Z równań prostych przełączeń  $Cx(t_1) = Cx(t_3) = -\frac{1}{2}h$ . Po lewostronnym pomnożeniu równości (8.8) przez  $C$  wyliczamy z niej

$$\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = \frac{-C\dot{x}(t_2^+)}{Cx(t_1^+) - C\dot{x}(t_2^+)}.$$

Podstawiamy ten wynik do (8.8)

$$\frac{x(t_3) - x(t_1)}{t_3 - t_1} = \frac{\dot{x}(t_1^+) Cx(t_2^+) - \dot{x}(t_2^+) Cx(t_1^+)}{Cx(t_2^+) - C\dot{x}(t_1^+)}. \quad (8.9)$$

Pochodne prawostronne wynoszą:  $\dot{x}(t_1^+) = Ax(t_1) - B$  i  $\dot{x}(t_2^+) = Ax(t_2) + B$ . Gdy  $h \rightarrow 0$ , to  $x(t_2) - x(t_1) \rightarrow 0$ . Zatem

$$Cx(t_2^+) - C\dot{x}(t_1^+) \rightarrow 2CB,$$

$$\dot{x}(t_1^+) Cx(t_2^+) - \dot{x}(t_2^+) Cx(t_1^+) \rightarrow 2(CB I - BC)Ax(t_1).$$

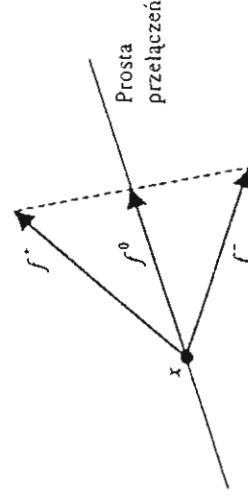
Przechodząc do granicy, z równania (8.9) otrzymujemy równanie ruchu w reżimie ślimakowym

$$\dot{x}(t) = \left( I - \frac{BC}{CB} \right) Ax(t). \quad (8.10)$$

Ponieważ w reżimie ślimakowym trajektoria stanu leży na prostej przełączeń, można ją zapisać parametrycznie w postaci  $x(t) = s(t)\gamma$ , gdzie  $\gamma = \text{col}(C_3, -C_1)$ . Podstawiamy to wyrażenie do równania (8.10) i mnożymy obie strony równania z lewej strony przez  $\gamma^T$ . Stąd ostatecznie

$$\dot{s}(t) = \alpha s(t), \quad \alpha = \frac{1}{\gamma^T \gamma} \left( I - \frac{BC}{CB} \right) A\gamma. \quad (8.11)$$

Ślimakowa trajektoria stanu, leżąca na prostej przełączeń i spełniająca równania (8.10) i (8.11), traktuje się jako ogólnione rozwiązywanie równania (8.4). Nazywa się je najczęściej rozwiązyaniem w sensie Filipowa. Warto zauważyc, że równanie (8.10) ma prostą interpretację geometryczną. Oznaczmy prawą stronę (8.10) przez  $f_0^0 = (I - BC/(CB))Ax$ , a prawe strony równania (8.1) z wartościemi sterowania  $\pm 1$  odpowiednio przez  $f^+$  i  $f^-$ ,  $f^\pm = Ax \pm B$ . Łatwo wykazać, że  $f^0 = \alpha f^+ + (1-\alpha)f^-$ , gdzie  $\alpha \in [0, 1]$  jest dobrane w taki sposób, aby wektor po prawej stronie równości był równoległy do prostej przełączeń (rys. 8.8).



Rys. 8.8. Interpretacja geometryczna równania ruchu w reżimie ślimakowym

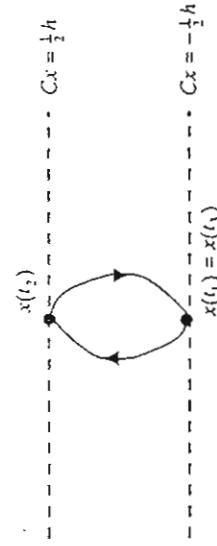
## 8.5. Cykl graniczny

W systemach nielinowych, opisanych autonomicznymi różniczkowymi równaniami stanu, możemy spotkać trajektorie zamknięte nazywane cykłami granicznymi. Cykl graniczny jest to trajektoria okresowa systemu w przestrzeni stanu (różna od stałej), która ma taką własność, że w jej dowolnie małym otoczeniu zaczyna się trajektorie nieokresowe. Przypomnijmy, że cykl graniczny  $\bar{x}$  jest asymptotycznie stabilny (w sensie Lapunowa), jeśli dla każdego  $t_0 \geq 0$  i każdego  $\epsilon > 0$  istnieje  $\delta > 0$ , takie że

$$\|x(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}(t)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{oraz} \quad \|x(t) - \bar{x}(t)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

gdzie  $x$  oznacza dowolne rozwiązywanie rozważanego równania stanu. Asymptotycznie stabilne cykle graniczne są typowym trybem pracy układów regulacji przekaznikowej w warunkach ustalonych.

W rozważanym układzie cykl graniczny można łatwo wygenerować, jeśli przekaznik ma histerezę, macierz  $A$  jest asymptotycznie stabilna i  $CB < 0$ . Cyklem granicznym może być wtedy okresowa trajektoria stanu zawarta w pasie środkowym, która „odbija się” na przemian od prostych przełączzeń  $Cx = \frac{1}{2}h$  i  $Cx = -\frac{1}{2}h$ . Trajektorię taką narysowano na rysunku 8.9. W chwili  $t_1$  stan znajduje się na prostej przełączeni  $Cx = \frac{1}{2}h$ , w chwili  $t_2 > t_1$  osiąga prostą  $Cx = \frac{1}{2}h$ , tam sterowanie zmienia wartość  $-1$  na  $+1$ , trajektoria zwraca i w chwili  $t_3$  dochodzi ponownie do punktu  $x(t_1)$ ; tu sterowanie zmienia wartość na przeciwną i cykl zaczyna się od nowa.



Rys. 8.9. Cykl graniczny

Oznaczając dla uproszczenia zapisu  $y_1 = x(t_1)$ ,  $y_2 = x(t_2)$ ,  $d_1 = t_2 - t_1$ ,  $d_2 = t_3 - t_2$ , mamy

$$\begin{aligned} Cy_1 &= -\frac{1}{2}h, \quad Cy_2 = \frac{1}{2}h, \\ y_2 &= \exp(Ad_1)y_1 - \int_0^{d_1} \exp(At)B dt, \\ y_1 &= \exp(Ad_2)y_2 + \int_0^{d_2} \exp(At)B dt. \end{aligned}$$

Jest to układ sześciu równań skalarnych z sześcioma niewiadomymi. Poszukajmy rozwiązania symetrycznego, spełniającego związki  $d_2 = d_1$  i  $y_2 = -y_1$ . Po tych podstawieniach dostajemy układ trzech równań skalarnych z trzema niewiadomymi

$$\begin{aligned} Cy_1 &= -\frac{1}{2}h, \\ y_1 &= (I + \exp(Ad_1))^{-1} \int_0^{d_1} \exp(At)B dt. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Po wyrugowaniu  $y_1$ , otrzymujemy równanie na niewiadomą  $d_1$

$$C(I + \exp(Ad_1))^{-1} \int_0^{d_1} \exp(At)B dt = -\frac{1}{2}h. \tag{8.13}$$

Rozwiązywanie równania (8.13) trzeba na ogół szukać na drodze numerycznej. Oczywiście interesują nas tylko rozwiązania dodatnie,  $d_1 > 0$ .

Przykład 8.1

Niech

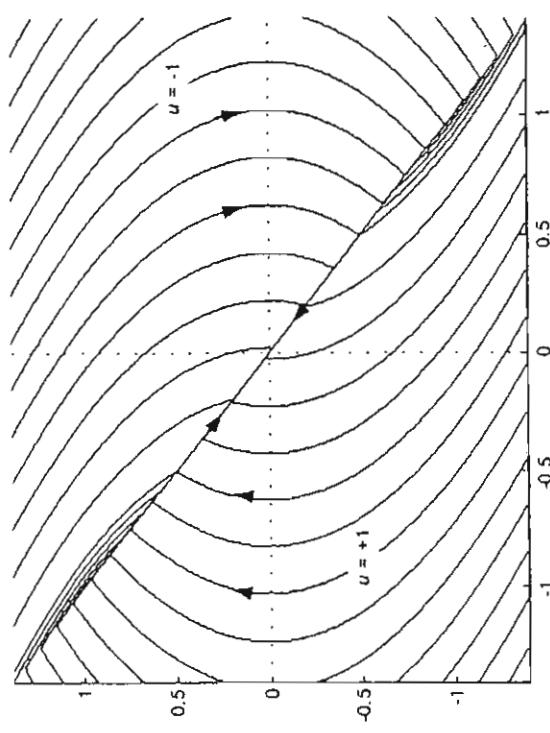
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad -1].$$

Zaczniemy od portretu fazowego układu z przekaźnikiem dwustanowym bez histerezy. Prosta przełączanie ma równanie  $Cx = -x_1 - x_2 = 0$ . Warunki reżimu ślizgowego (8.5)

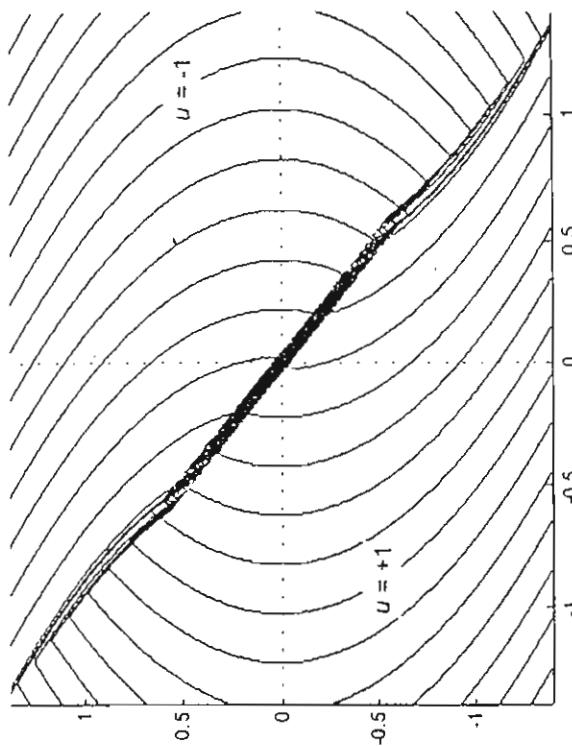
$$CAx - CB = 1 - x_2 > 0, \quad CAx + CB = -1 - x_2 < 0$$

są spełnione na prostej przełączeni dla  $-1 < x_2 < 1$ . Dla stałego sterowania  $u = \pm 1$ , trajektorie stanu spełniają równości  $x_1 = \pm \frac{1}{2}x_2^2 + c$ , gdzie  $c$  jest dowolną stałą. Portret fazowy przedstawiony jest na rysunku 8.10. Rysunek 8.11 pokazuje trajektorię stanu jako funkcję czasu, z zaznaczeniem przełączeni i reżimu ślizgowego. Równanie ruchu ślizgowego (8.11) przyjmuje postać  $\dot{s}(t) = -s(t)$ .

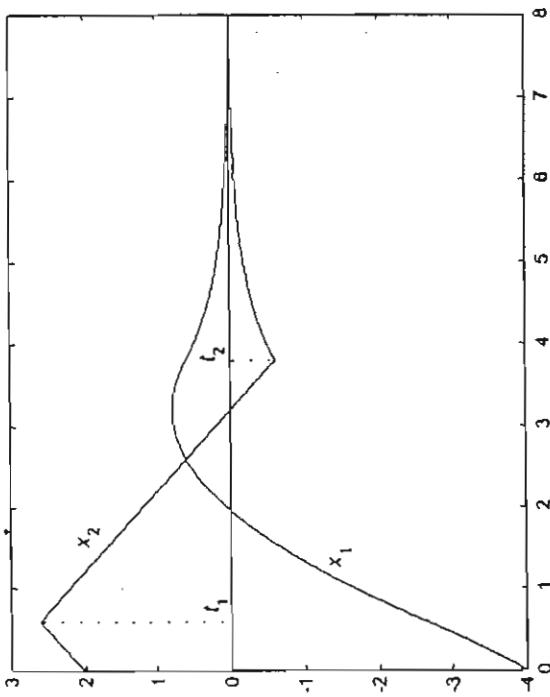
Rozważmy teraz ten sam układ, zakładając jednak, że przekaźnik ma histerezę o szerokości  $h > 0$ . Na rysunku 8.12 widzimy portret fazowy dla malejącej wartości  $h$  ( $h = 0,1$ ), a na rysunku 8.13 – dla dużej,  $h = 1$ . Zwrócić uwagę na stabilny cykl graniczny, który powstaje wokół środka układu współrzędnych. Korzystając z zależności (8.12) i (8.13), wyznaczymy parametry tego cyklu.



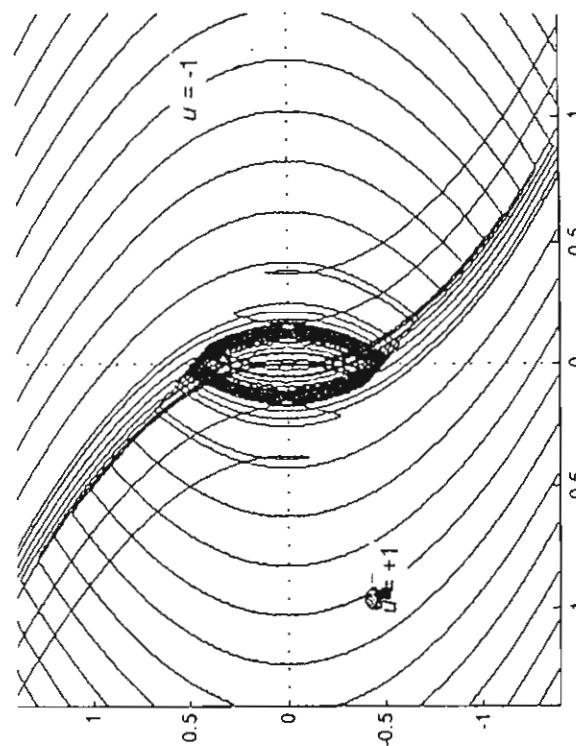
Rys. 8.10. Portret fazowy układu z przekąnką dwustanowym bez histerezy



Rys. 8.12. Portret fazowy z małą histerezą



Rys. 8.11. Wybrana trajektoria stanu;  $t_1$  — czas przełączenia,  
 $t_2$  — początek reżimu ślizgowego



Rys. 8.13. Portret fazowy z dużą histerezą

## 9. Zbiory stanów osiągalnych

Ważnym pytaniem dotyczącym układu sterowania jest, jakie cele można w tym układzie osiągnąć w zadanym czasie. Posługując się opisem w przestrzeni stanu, można je wyrazić jako pytanie o zbiór stanów osiągalnych. Jeśli sformułowanie problemu sterowania jest realistyczne, to zbiór stanów osiągalnych w skończonym czasie jest ograniczony. Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodą wyznaczania takich zbiorów opartą na zasadzie maksimum Pontryagina, jednym z podstawowych twierdzeń opymalizacji dynamicznej, i obserwacji zbiorów osiągalności w układach drugiego rzędu.

### 9.1. Zbiory stanów osiągalnych w systemie liniowym drugiego rzędu

Rozważamy system liniowy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= 0, \\ \dim x(t) &= 2, \quad \dim u(t) = 1, \end{aligned} \tag{9.1}$$

ze sterowaniami ograniczonymi

$$|u(t)| \leq 1. \tag{9.2}$$

Stan  $\xi \in \mathbb{R}^2$  nazywamy osiągalnym w chwili  $T$ , jeśli istnieje sterowanie  $u$ , spełniające (9.2), takie że odpowiednia trajektoria  $x(\cdot; u)$  systemu (9.1) spełnia warunek:  $x(T, u) = \xi$ . Zbiorem osiągalności w chwili  $T$  (oznaczonym  $X(T)$ ) nazywamy zbiór wszystkich stanów osiągalnych w chwili  $T$ . Zbiory  $X(T)$  są wypukłe i zwarte, ponadto

$$X(T_1) \subset X(T_2), \quad \text{jeśli } T_1 \leq T_2. \tag{9.3}$$

Zatem zbiór osiągalności jest jednoznacznie określony przez swój brzeg  $\partial X(T)$ .

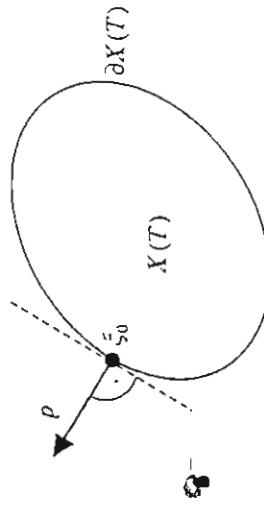
### Wyznaczanie brzegu zbioru osiągalności

Niech  $\rho = [\sin \varphi \cos \varphi]^\top$ . Wektor  $\rho$  (rys. 9.1) podpiera zbiór osiągalności  $X(T)$  w punkcie  $\xi_0 \in \partial X(T)$ , jeśli:

$$\rho^\top \xi_0 = \max\{\rho^\top \xi : \xi \in X(T)\}. \tag{9.4}$$

Zachodzi równość

$$\max\{\rho^\top \xi : \xi \in X(T)\} = \max\{\rho^\top x(T, u) : u \text{ spełnia (9.2)}\}. \tag{9.5}$$



Rys. 9.1. Wektor  $\rho$  podpiera zbiór  $X(T)$  w punkcie  $\xi_0$

Ponieważ

$$\rho^\top x(T, u) = \int_0^T \rho^\top e^{A(T-t)} B u(t) dt, \tag{9.6}$$

lewa strona osiąga maksimum na sterowaniu  $u^*$ , określonym przez

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \psi(t)^\top B \geq 0 \\ -1, & \text{gdy } \psi(t)^\top B < 0, \end{cases} \tag{9.7}$$

gdzie funkcja sprzężona

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp(A^\top(T-t)) \rho \\ \psi(t) &= \exp(A^\top(T-t)) \rho \end{aligned} \tag{9.8}$$

spełnia tzw. równanie sprzężone

$$\psi(t) = -A^\top \Psi(t), \quad \psi(T) = \rho. \tag{9.9}$$

Zmieniając w wektorze  $\rho$  kat  $\varphi$  w granicach  $[0, 2\pi]$ , otrzymujemy w ten sposób wszystkie punkty brzegowe zbioru  $X(T)$ .

Uwaga. Wystarczy zmieniać kat w granicach  $[0, \pi]$  (dlaczego?).

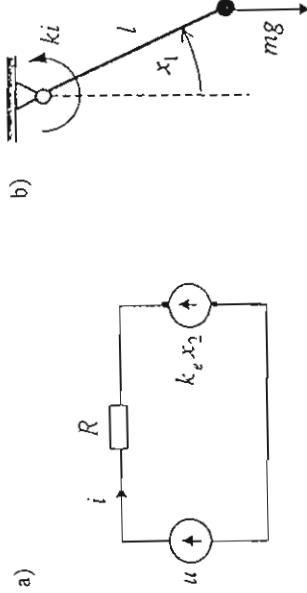
Zauważmy, że rozwiązań równania sprzążonego (9.9) wzajemnie jednoznacznie przyporządkowuje wartości  $\psi(T)$  wartościom  $\psi(0)$ . Wynika to natychmiast ze wzoru (9.8). Wobec tego, aby wyznaczyć brzeg zbioru osiągalności, wystarczy w równaniu (9.9) zmieniać w warunek początkowy według wzoru  $\psi(0) = [\sin\varphi \cos\varphi]^T$ , dla  $\varphi$  w granicach  $[0, 2\pi]$ .

### Zadanie 9.1

Przeprowadzić obserwację zachowania się zbiorów  $X(T)$  przy rosnącym  $T$ , dla różnych macierzy  $A$  i wektorów  $\beta$ .

## 9.2. Zbiory osiągalności w systemie nieliniowym drugiego rzędu

Rozważmy silnik prądu stałego ze stałym strumieniem wzbudzenia, sterowany napięciem twornika  $u$ , spełniającym ograniczenie (9.2). Silnik obraca wahadło matematyczne (punkt materialny o masie  $m$  na nieważkim pręcie o długości  $l$ , w ziemskim polu grawitacyjnym) (rys. 9.2). Oś obrotu jest pozioma, wahadło zamocowane prostopadle do osi. W chwili początkowej wahadło zwisa swobodnie w dół i układ jest w spoczynku. Naszym celem jest badanie zbiorów osiągalności w tym systemie.



Rys. 9.2. Schemat elektryczny silnika (a) i wahadło na osi (b)

Najpierw układamy równania stanu. Równanie elektryczne silnika

$$u(t) = R\dot{i}(t) + k_e x_2(t), \quad (9.10)$$

gdzie  $\dot{i}(t)$  jest natężeniem prądu twornika, a  $x_2(t)$  jest prędkością katową wału. Równanie mechaniczne silnika:

$$J\ddot{x}_2(t) = M_s(t) - M_0(t), \quad (9.11)$$

gdzie  $M_s(t) = k_i(t)$  jest momentem obrotowym silnika, a moment obciążenia wytwarzany przez wahadło wyraża się przez

$$M_0(t) = mg \sin x_1(t), \quad (9.12)$$

$x_1(t)$  jest mierzonym w kierunku dodatnim katem, jaki tworzy wahadło z kierunkiem „pionowo w dół”.

Równania stanu powstają przez wytagowanie  $i(t)$  z równań (9.10)-(9.12). Oznaczając

$$a_1 = -\frac{mgl}{J}, \quad a_2 = -\frac{k k_e}{RJ}, \quad b = \frac{k}{RJ},$$

otrzymujemy równania stanu w postaci

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (9.13)$$

$$\dot{x}_2(t) = a_1 \sin x_1(t) + a_2 x_2(t) + bu(t)$$

Na sterowanie  $u(t)$  nakładamy ograniczenie (9.2). Przyjmujemy warunki początkowe zerowe:  $x_1(0) = x_2(0) = 0$ .

Zbiór osiągalności w chwili  $T$  definiuje się jak w układzie liniowym. Jest on nadal zowany, ale w układzie nieliniowym może nie być wypukły. Jak poprzednio, punkty brzegowe zbioru  $X(T)$  wyznaczamy przez maksymalizację iloczynu  $p^T X(T; u)$  w zbiorze sterowanych dopuszczalnych. Symbol  $p$  oznacza tutaj dowolny niezerowy wektor w  $R^2$ . Dla układu nieliniowego nie możemy się postużyć wzorem analogicznym do (9.6), mniejszej z teorii sterowania optymalnego (zasada maksimum Pontriagina) wynika, że jeżeli sterowanie  $u^*$  maksymalizuje iloczyn  $p^T X(T; u)$ , to spełnia (9.7) z  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  i funkcją sprzężoną  $\Psi = \text{col}(\Psi_1, \Psi_2)$ , będącą rozwiazaniem układu sprzążonego

$$\dot{\Psi}_1(t) = -a_1 \Psi_2(t) \cos x_1(t), \quad (9.14)$$

$$\dot{\Psi}_2(t) = -\Psi_1(t) - a_2 \Psi_2(t),$$

z warunkiem końcowym  $\Psi(T) = p$ .

Przyjmijmy, że zbiór osiągalności  $X(T)$  jest ścisłe wypukły (tak jest dla  $T$ , dla których małych). Przy tym założeniu punkt  $\xi$  leży na brzegu zbioru osiągalności:  $\xi \in \partial X(T)$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego  $\rho \in R^2$  postaci

$$\rho = [\sin \varphi \cos \varphi]^T, \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

zachodzi równość  $\xi = x(T; u)$ , gdzie sterowanie  $u$  spełnia (9.7) z funkcją  $\psi$  będącą rozwiązanem (9.14) z warunkiem końcowym  $\psi(T) = p$ .

Podobnie jak w przypadku liniowym, odwzorowanie zbioru wartości początkowych funkcji sprzążonej w zbiór wartości końcowych jest wzajemnie jednoznaczne. Wynika stąd, że  $\xi \in \partial X(T)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\xi = x(T; u)$  i  $u$  spełnia (9.7) z funkcją  $\psi$  będącą rozwiązaniem równania (9.14) z warunkiem początkowym  $\psi(0) = [\sin \varphi \cos \varphi]^T$ , dla pewnego  $\varphi \in [0, 2\pi[$ .

Aby wyznaczyć cały brzeg zbioru osiągalności, trzeba dla każdego  $\varphi$  z przedziału  $[0, 2\pi[$ :

- wyznaczyć początkową wartość funkcji sprzążonej  $\psi(0) = [\sin \varphi \cos \varphi]^T$ ,
- w przedziale czasu  $[0, T]$  rozwiązać układ równań stanu (9.13) i równań sprzążonych (9.14) z zadanymi warunkami początkowymi, wyliczając jednocześnie sterowanie ze wzoru

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \psi_2(t)b \geq 0, \\ -1, & \text{gdy } \psi_2(t)b < 0. \end{cases}$$

Otrzymany w ten sposób zbiór punktów  $x(T; u)$  jest brzegiem zbioru  $X(T)$ .

#### Zadanie 9.2

Należy przeprowadzić obserwację zbiorów  $X(T)$  przy rosnącym  $T$ , dla różnych wartości parametrów  $a_1, a_2$  i  $b$ .

### 9.3. Literatura

Bohanski W.G. (1971): *Matematyczne metody sterowania opymalnego*. Warszawa, WNT.

dla dowolnych warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ .

Wektor  $w(t)$  jest estymatą stanu  $x(t)$ .

Aby skonstruować obserwator, trzeba określić  $n \times n$ -wymiarową macierz  $F$  i  $n \times m$ -wymiarową macierz  $G$  w taki sposób, żeby spełniony był warunek (10.4). Odejmując stronami (10.1) od (10.3) i korzystając z (10.2), dostajemy

$$\dot{w}(t) - \dot{x}(t) = Fw(t) + Gx(t) - Ax(t), \quad (10.5)$$

## 10. Obserwatory asymptotyczne

### 10.1. Obserwator Luenbergera pełnego rzędu

Rozważamy obserwowlany system liniowy  $n$ -tego rzędu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \quad (10.1)$$

z  $m$ -wymiarowym równaniem wyjścia

$$y(t) = Cx(t). \quad (10.2)$$

Naszym celem jest skonstruowanie systemu, nazywanego obserwatorem pełnego rzędu, który na podstawie znanej trajektorii wyjścia  $y$  i sterowania  $u$  systemu (10.1), (10.2) generuje trajektorię  $w$ , z upływem czasu zmierzającą do nieznanej trajektorii stanu  $x$  systemu (10.1), (10.2). Zajmamy, żeby obserwator działał tak dla każdej trajektorii  $x$ . Poszukiwany obserwator umożliwia więc asymptyczną (przy  $t \rightarrow \infty$ ) rekonstrukcję stanu  $x(t)$ .

Obserwator Luenbergera pełnego rzędu dla systemu (10.1), (10.2) nazywamy system liniowy  $n$ -tego rzędu

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Gy(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (10.3)$$

taki że błąd obserwacji stanu  $e(t) = w(t) - x(t)$  zanika z czasem

$$e(t) = w(t) - x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (10.4)$$

czyli

$$\dot{e}(t) = F\dot{e}(t) + (F - A + GC)e(t).$$

Niech

$$F = A - GC.$$

Z obserwacyjności systemu (10.1), (10.2) wynika, że dla zadanych macierzy  $A$  i  $C$ , przez odpowiedni wybór macierzy  $G$  można otrzymać  $F$  (10.7) o dowolnym, z góry ustalonym widmie (o znaczy dla każdego ciągu  $n$  liczb zespolonych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , które mogą stanowić widmo macierzy rzeczywistej, istnieje macierz rzeczywista  $G$ , o wymiarach  $n \times m$ , taka że macierz  $F$  (10.7) ma wartości własne  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ). Założajemy, że macierz  $F$  była asymptotycznie stabilna. Z (10.6) i (10.7)

$$\dot{e}(t) = f\dot{e}(t). \quad (10.8)$$

Zatem  $e(t) \rightarrow 0$  dla każdego  $e(0)$ , skąd wynika (10.4).

Konstrukcja obserwatora polega więc na dobraniu  $n \times m$ -wymiarowej macierzy  $G$  w taki sposób, żeby wszystkie wartości własne macierzy  $F = A - GC$ , które oznaczamy przez  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , miały części rzeczywiste ujemne. Wybieramy liczby  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , leżące w lewej otwartej półpłaszczyźnie zespolonej i takie, by mogły stanowić widmo macierzy rzeczywistej. Wielomian charakterystyczny macierzy  $F$ , z definicji równy  $\det(\lambda I - F)$ , można oczywiście zapisać takż jako iloczyn  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$ . Porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej  $\lambda$  w tożsamości

$$\det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n), \quad (10.9)$$

dostajemy układ równań, z którego wyznacza się wszystkie elementy macierzy  $G$ .

Warto przypomnieć, że warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia jakiegokolwiek obserwatora Luenbergera pełnego rzędu w systemie (10.1), (10.2) jest wykrywalność tego systemu. Wykrywalność pary macierzy  $(C, A)$  jest bowiem równoważna istnieniu macierzy  $G$  o wymiarach  $n \times m$ , takiej że macierz  $A - GC$  jest asymptotycznie stabilna. Zwróćmy jednak uwagę, że dopiero obserwonalność systemu umożliwia dowolne kształtowanie widma macierzy  $F$ , a więc dynamikami obserwatora.

### Zadanie 10.1

Skonstruować obserwator Luenbergera pełnego rzędu dla systemu

$$\ddot{y}(t) = u(t), \quad t \geq 0.$$

Zapisując równania systemu w postaci (10.1), (10.2)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_2(t) = u(t),$$

$$y(t) = x_1(t).$$

Zatem

$$(10.6) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.12)$$

Macierz  $G$  szukamy w postaci

$$(10.13) \quad G = [G_1 \quad G_2]^T.$$

Zgodnie z (10.7)

$$(10.14) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -G_1 & 1 \\ -G_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczamy wartości własne macierzy  $F$  przez  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Z potocznia wspólników przy tych samych potęgach  $\lambda$  w równości

$$(10.15) \quad \det(\lambda I - F) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

otrzymujemy

$$(10.16) \quad G_1 = -\lambda_1 - \lambda_2, \quad G_2 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Ostatecznie

$$(10.17) \quad F = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10.2  
Skonstruować obserwator Luenbergera pełnego rzędu dla systemu oscylacyjnego postaci (10.1), (10.2), z macierzami

$$(10.18) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stała  $k$  jest dodatnia. Wielkością wyjściową jest prędkość ruchu drgającego. Zakładając macierz  $G$  w postaci (10.13), zgodnie z (10.7) otrzymujemy

$$(10.19) \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 - G_1 \\ -k & -G_2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$(10.20) \quad \det(\lambda I - F) = \lambda^2 + G_2 \lambda + k(1 - G_1),$$

z tożsamości (10.15) dostajemy

$$G_1 = 1 - \frac{1}{k} \lambda_1 \lambda_2, \quad G_2 = -\lambda_1 - \lambda_2.$$

Z (10.18)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k} \lambda_1 \lambda_2 \\ k & \lambda_1 + \lambda_2 \\ -k & \end{bmatrix}$$

### 10.1.1. Przebieg ćwiczenia

W zadaniach 10.1 i 10.2 należy zamodelować system z obserwatorem i zbadać, jak zmienia się działanie obserwatora w zależności od wartości własnych  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . Wprowadź zakłocenia (do systemu z obserwatorem) i zbadać działanie obserwatora w ich obecności. Wyjąć wnoski dotyczące rozsądnego wyboru parametrów obserwatora.

## 10.2. Zredukowany obserwator Luenbergera

Naszym celem jest teraz skonstruowanie obserwatora o rzędzie niższym niż  $n$ , czyli obserwatora zredukowanego. Podobnie jak wyżej, na podstawie znanej trajektorii wyjścia  $y$  i sterowania  $u$  systemu (10.1), (10.2), obserwator ma umożliwić asymptyczną (przy  $t \rightarrow \infty$ ) rekonstrukcję stanu  $x(t)$  dla dowolnych (nieznanych) warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Tym razem jednak wymiar trajektorii obserwatora  $w(t)$  jest mniejszy od wymiaru  $x(t)$ , a więc nie możemy żądać, aby  $w(t)$  było esymata stanu systemu (10.1), (10.2). Stawiamy natomiast wymaganie, żeby esymat stanu  $x(t)$  można było utworzyć z wektorów  $w(t)$  i  $y(t)$ .

Zredukowany obserwator Luenbergera dla systemu (10.1), (10.2) nazywamy system liniowy rzędu  $r$ ,  $r < n$ ,

$$\dot{w}(t) = Fw(t) + Gy(t) + Hu(t), \quad t \geq 0, \quad (10.19)$$

z  $n$ -wymiarowym równaniem wyjścia

$$z(t) = Nz(t) + My(t), \quad (10.20)$$

także błąd obserwacji stanu  $z(t) - x(t)$  zanika z czasem:

$$z(t) - x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (10.21)$$

dla dowolnych warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Esymata stanu jest wyjście obserwatora  $z(t)$ .

Aby skonstruować obserwator zredukowany, przepiszmy relację (10.21) w postaci

$$Nw(t) + Mcx(t) \rightarrow x(t), \quad t \rightarrow \infty. \quad (10.22)$$

Dobierzmy macierz  $P$  o wymiarach  $r \times m$  w taki sposób, żeby

$$MC + NP = I_{n \times n}. \quad (10.23)$$

Niech ponadto

$$e(t) = w(t) - Px(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \quad (10.24)$$

dla dowolnych warunków początkowych  $x(0)$  i  $w(0)$ , i dla dowolnego sterowania  $u$ . Z (10.23) i (10.24) wynika (10.22), a więc i (10.21).

Konstrukcja wymaga więc określenia macierzy  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $M$  i  $N$  w taki sposób, żeby spełnione były warunki (10.23) i (10.24). Po obustronnym zróżniczaniu równości definiacyjnej na  $e$  w (10.24) i podstawieniu odpowiednich wyrażeń z (10.19) i (10.1) za pochodne, korzystając z (10.2) dostajemy

$$\dot{e}(t) = w(t) - Px(t) = Fw(t) + Gcx(t) + Hu(t) - Px(t) - PBu(t). \quad (10.25)$$

Przyjmijmy

$$H = P\beta. \quad (10.26)$$

Rugując  $w(t)$  z prawej strony (10.25) za pomocą (10.24), otrzymujemy

$$\dot{e}(t) = Fe(t) + (FP + GC - PA)x(t). \quad (10.27)$$

Niech

$$FP = PA - GC. \quad (10.28)$$

Z założenia obserwonalności systemu (10.1), (10.2) wynika, że dla zadanych macierzy  $A$  i  $C$ , przez odpowiedni wybór rzędu  $r$  ( $r < n$ ) i macierzy  $P$ ,  $G$ ,  $M$  i  $N$ , można otrzymać obserwator z macierzą  $F$  spełniającą (10.28), o dowolnym, z góry ustalonym widmie. Podobnie jak dla obserwatora pełnego rzędu żądamy, żeby macierz  $F$  była asymptotycznie stabilna. Z (10.27) i (10.28)

$$\dot{e}(t) = Fe(t). \quad (10.29)$$

Zatem  $e(t) \rightarrow 0$  dla każdego  $e(0)$ , skąd wynika (10.21).

Konstrukcja obserwatora zredukowanego o rzędzie  $r$  polega na dobraniu asymptotycznie stabilnej macierzy  $F$  oraz macierzy  $G$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $M$  i  $N$ , spełniających związki

(10.23), (10.26) i (10.28). Jak widzimy, określenie parametrów obserwatora zredukowanego wymaga więcej pracy niż dla obserwatora o pełnym rzędzie. Obniżając rzad obserwatora, można jednak poprawić jego dokładność i właściwości dynamiczne.

### Zadanie 10.3

Skonstruować zredukowany obserwator Luenbergera dla systemu z zadania 10.1.

Przyjmujemy rzad obserwatora  $r = 1$ . Macierz  $P = [P_1 \ P_2]$  ma wymiary  $1 \times 2$ , ...  
 $F - 1 \times 1$ ,  $G - 1 \times 1$ .  $F, P, P_1, G$  spójniąja (10.28):

$$F[P_1 \ P_2] = [F \ P_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - G[1 \ 0],$$

skąd

$$FP_1 = -G, \quad FP_2 = P_1.$$

Macierz  $M$  i  $N$  poszukujemy w postaci

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}.$$

Z (10.23)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}[1 \ 0] + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}[P_1 \ P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli

$$\begin{aligned} N_1 P_2 &= 0, & N_2 P_2 &= 1, \\ M_1 + N_1 P_1 &= 1, & M_2 + N_2 P_1 &= 0. \end{aligned}$$

Stąd

$$N_1 = 0, \quad M_1 = 1.$$

Wielkości  $F$  i  $P$  potraktujemy jako parametry. Zatem

$$\begin{aligned} N_2 &= 1/P_2, & M_2 &= -F, \\ P_1 &= P_2 F, & G &= -P_2 F^2, \\ H &= P_2. \end{aligned}$$

### Zadanie 10.4

Skonstruować zredukowany obserwator Luenbergera ( $r = 1$ ) dla systemu z zadania 10.2.

Przyjmując oznaczenia jak w poprzednim zadaniu, mamy z (10.23) i (10.28)

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}[0 \ 1] + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}[P_1 \ P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F[P_1 \ P_2] = [P_1 \ P_2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} - G[0 \ 1].$$

Przyjmując  $P_2$  i  $F$  za parametry, otrzymujemy

$$N_2 = 0, \quad M_2 = 1,$$

$$N_1 = -\frac{F}{kP_2}, \quad M_1 = \frac{F}{k},$$

$$P_1 = -\frac{kP_2}{F}, \quad G = -\left(F + \frac{k}{F}\right)P_2,$$

$$H = P_2.$$

#### 10.2.1. Przebieg ćwiczenia

W zadaniach 10.3 i 10.4 należy zamodelować system z obserwatorem i zbadać, jak zmienia się działanie obserwatora w zależności od parametrów  $F$  i  $P_2$ . Wprowadziź zakłócenia (do systemu i obserwatora) i zbadac działanie obserwatora w ich obecności. Wyciągnąć wnioski dotyczące rozsądnego wyboru parametrów obserwatora. Przeprowadzić porównanie z obserwatorem pełnego rzędu. Czy przez obniżenie rzędu udało się poprawić dokładność i właściwości dynamiczne?

### 10.3. Obserwator Luenbergera dla systemu nieliniowego

Obserwatory asymptotyczne Luenbergera znajdują również zastosowanie do odzwierciedlania stanu w systemach nieliniowych. Tutaj ograniczymy się do obserwatorów pełnego rzędu. Rozważmy system obserwowlany

$$\dot{x} = Ax + g(x, u), \quad (10.30)$$

$$y = Cx, \quad (10.31)$$

gdzie  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^m$ ,  $u(t) \in R^q$ . Zaktłdamy, że para  $(C, A)$  jest obserwowańa, a funkcja  $g$ , w ogólnym przypadku neliniiowa, spełnia warunek Lipschitza względem pierwego argumentu, z tą samą stałą  $k_0$  dla wszystkich jego wartości

$$\|g(w, u) - g(x, u)\| \leq k_0 \|w - x\|.$$

Obserwator Luenbergera pełnego rzędu ma postać

$$\dot{w} = Fw + Gy + g(w, u) \quad (10.32)$$

Macierz obserwatora  $F = A - GC$  tworzy się według zasad podobnych jak w przypadku liniowym. Przez dobór macierzy  $G$  można dowolnie ukształtować widmo macierzy  $F$ , także tutaj żądamy, aby macierz ta była asymptotycznie stabilna. Na macierz  $G$  trzeba jednak teraz nałożyć dodatkowe warunki, których nie będziemy szczegółowo omawiać: bliską estymacją stanu  $e = w - x$ , który spełnia równanie

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Fe + g(e + x, u) - Ax - g(x, u) = \\ &= Fe + g(e + x, u) - g(x, u), \end{aligned}$$

powinien zmierać do zera przy  $t \rightarrow \infty$ , dla wszystkich trajektorii  $x$ , sterowań  $u$  i warunków początkowych  $e(0)$  z odpowiednich zbiorów. Zwykłe udaje się to osiągnąć przez umieszczenie widma  $F$  w ujemnej półpłaszczyźnie Gaussa dosłownie daleko od osi urojonej.

Macierz  $A$  w równaniu (10.30) można w pewnych wypadkach otrzymać jako pochodząną prawej strony neliniiowego równania stanu, wyliczoną w zerze. Niech ogólny system neliniiowy będzie opisany równaniem stanu  $\dot{x} = f(x, u)$  z funkcją  $f$  klasy  $C^1$  względem obu argumentów. Możemy oczywiście zapisać to równanie w postaci (10.30) z podstawieniem

$$A = \nabla_x f(x, u)|_{x=0, u=0}, \quad g(x, u) = f(x, u) - Ax. \quad (10.33)$$

Aby przeprowadzić liniaryzację systemu w zerze, założmy, że zero jest jego punktem równowagi, to znaczy  $f(0, 0) = 0$ . Wyodrębniamy jawnie wyraz liniowy względem sterowania, pisząc

$$f(x, u) = Ax + Bu + r(x, u),$$

gdzie  $B = \nabla_u f(x, u)|_{x=0, u=0}$ , a  $r$  jest odpowiednią resztą rzędu wyższego niż pierwszy. Jeśli w (10.34) pominiemy resztę  $r$ , to dostaniemy system zlinearyzowany

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx. \quad (10.35)$$

Przy założeniu, że para  $(C, A)$  jest obserwowańa, możemy dla systemu (10.35) utworzyć obserwator Luenbergera opisany w podrozdziale 10.1 (równanie (10.3)). Obserwator ten jednak stosujemy do oryginalnego systemu neliniiowego z równaniem stanu  $\dot{x} = f(x, u)$ . Interesującą jest porównanie działania takiego obserwatora z obserwatorem (10.32), w którym macierz  $A$  i funkcja  $g$  są określone przez (10.33).

### Zadanie 10.5

Niech w systemie (10.30)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ a \sin x_1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

System jest obserwowańy, ponieważ  $x_1(0) = y(0)$ ,  $x_2(0) = \dot{y}(0)$ . Para  $(C, A)$  jest obserwowańa. Należy najpierw zbudować obserwator (10.32) i przeprowadzić obserwację jego działania.

Z kolei skonstruujmy obserwator dla układu zlinearyzowanego. Równania systemu zlinearyzowane w zerze mają postać

$$\dot{x} = A_0 x, \quad y = Cx, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}.$$

Para  $(C, A_0)$  jest obserwowańa. Konstruujemy obserwator (10.3) z podrozdziału 10.1, oznaczając przez  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  wartości własne macierzy  $F_0$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= F_0 w + G_0 y, \\ G_{01} &= -\lambda_1 - \lambda_2, \quad G_{02} = a + \lambda_1 \lambda_2, \\ F_0 &= A_0 - G_0 C = \begin{bmatrix} -G_{01} & 1 \\ a - G_{02} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 1 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zbudujemy jeszcze jeden obserwator postaci (10.32) dla rozważanego układu. Zapiszmy równania systemu następujące

$$\dot{x} = A_0 x + \begin{bmatrix} 0 \\ a(\sin x_1 - x_1) \end{bmatrix}, \quad y = Cx.$$

Równanie obserwatora (10.32)

$$\dot{w} = F_0 w + G_0 y + \begin{bmatrix} 0 \\ a(\sin w_1 - w_1) \end{bmatrix}.$$

### 10.3.1. Przebieg ćwiczenia

Należy przeprowadzić porównanie działania trzech opisanych obserwatorów i wy ciągnąć wnioski. Jak wyjaśnić mała skuteczność obserwatora drugiego? Jak wyjasnić poprawę jego działania ze wzrostem części urojonych wartości własnych macierzy  $F$ ? Jaka jest odporność obserwatora Luenbergera na błędy modelowania nieliniowości? Czy zasady kompromisowego doboru parametrów obserwatora działającego w obecności zakłóceń, które sformułowaliśmy dla zadań liniowych, potwierdzają się w badanym systemie nieliniowym?

### 10.4. Literatura

Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.

## 11. Kompensator dynamiczny

W ćwiczeniu o obserwatorach zapoznaliśmy się z typami obserwatorów i ze sposobami ich konstrukcji. Zadaniem obserwatora było asymptotyczne odwrzanie stanu obiektu  $x(t)$ , czyli generowanie jego estymaty  $\hat{x}(t)$ , takiej że  $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ , gdy  $t \rightarrow \infty$ . W układzie liniowym  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ze statycznym sprzężeniem zwojnym od stanu  $u(t) = Kx(t)$ , dowolny, z góry ustalony wielomian charakterystyczny układu zamkniętego  $\dot{x}(t) = (A + BK)x(t)$  można uzyskać wtedy i tylko wtedy, gdy para  $(A, B)$  jest sterowalna. W przypadku gdy dostępne jest tylko wyjście  $y(t) = Cx(t)$ , proponuje się zastosować regulator statyczny o postaci  $u(t) = K\hat{x}(t)$ , gdzie  $\hat{x}(t)$  jest estymata stanu otrzymywana z obserwatora. Następnie ćwiczenie ma za zadanie pokazać, jak regulator, połączony odpowiednio z reguляorem  $u(t) = K\hat{x}(t)$ , może być wykorzystany do zaprojektowania zamkniętego układu regulacji.

### 11.1. Kompensator dynamiczny oparty na zlinearyzowanym modelu obiektu

Kompensator dynamiczny jest to układ, zawierający czyn dynamiczny służący do odwrzania aktualnego stanu obiektu (czyli obserwator) oraz regulator statyczny – w naszym przypadku regulator proporcjonalny o macierzowym współczynniku wzmacnienia. Celem kompensatora jest generacja sterowania, które w obecności zakłóceń utrzymuje obiekt jak najbliżej zadanego stanu równowagi, a więc kompensator zakońceni i niedokładności modelowania. Schemat ideowy układu sterowania z kompensatorem jest pokazany na rysunku 11.1 ( $u$  – sterowanie,  $y$  – wyjście obiektu,  $\hat{x}$  – estymata stanu obiektu).

Będziemy się zajmować kompensatorami zbudowanymi całkowicie bądź częściowo, przy wykorzystaniu liniowego, przyrostowego modelu obiektu sterowania. Taki przybliżony model tworząc sie, korzystając z podobnych prawych stron równań obiektu, obliczonych w zadanym punkcie równowagi. Przyjmijmy, że obiekt sterowania jest opisany równaniami stanu i wyjścia

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (11.1)$$

$$y(t) = g(x(t)),$$

(11.2)

gdzie stan  $x(t) \in R^n$ , sterowanie  $u(t) \in R^m$ , wyjście  $y(t) \in R^q$ , a funkcje  $f$  i  $g$  są różniczkowalne w sposób ciągły. Oznaczmy zadany stan równowagi przez  $x_0$ , a odpowiednie (stale) wartości sterowania i wyjścia przez  $u_0$ ,  $f(x_0, u_0) = 0$ ,  $y_0 = g(x_0)$ .

Liniowy model przyrostowy ma postać

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u,$$

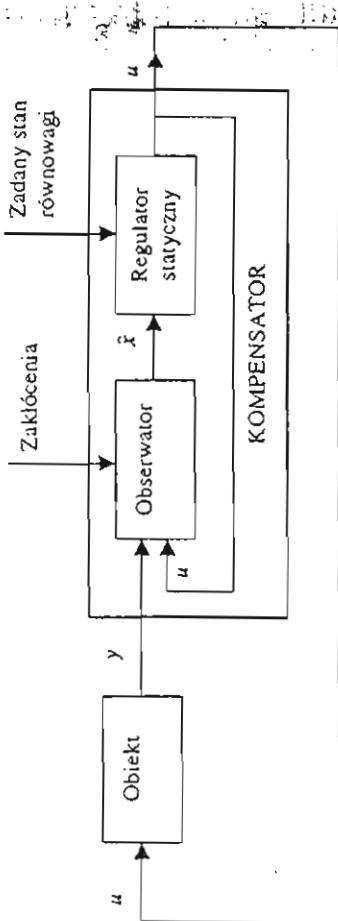
$$\Delta y = C\Delta x,$$

przy czym

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta u = u - u_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad (11.3)$$

$$A = \nabla_x f(x_0, u_0), \quad B = \nabla_u f(x_0, u_0), \quad C = \nabla_y g(x_0). \quad (11.4)$$

Korzystanie z przybliżenia liniowego ma w wielu wypadkach mocne uzasadnienie. Dobrze działający kompensator utrzymuje małe wartości odchyłek (11.5); z drugiej strony, przybliżenie liniowe (11.3), (11.4) jest poprawne, jeśli odchyłki (11.5) są dostatecznie małe. Dlatego dobry kompensator może na ogół pracować na podstawie przybliżenia liniowego. Trzeba przy tym wziąć pod uwagę, że dla układów liniowych teoria sterowania dostarcza metod stabilizacji, które są stosunkowo proste, szybkie obliczeniowo i odporne na niedokładności modelowania obiektu oraz charakteryzacji zakłóceń. Zgodnie z nimi, regulator statyczny z rysunku 11.1 realizuje funkcję afimiczną (jego wyjście jest afimiczną funkcją wejścia), może więc być zastąpiony przez regulator proporcjonalny z odpowiednimi węzłami sumacyjnymi na wyjściu i wejściu. Jednak ż takich metod poznamy niżej.

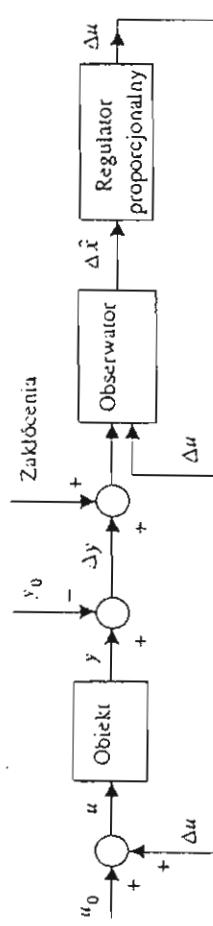


Rys. 11.1. Schemat ideowy kompensatora dynamicznego

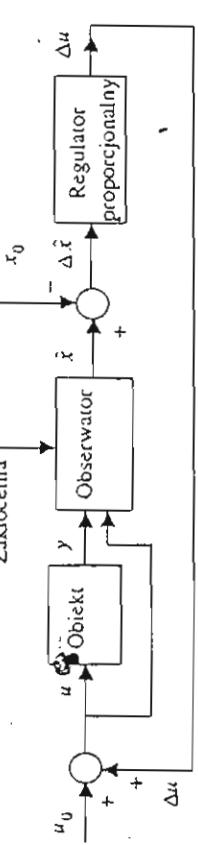
Inaczej rzeczą się ma z układami nieliniowymi: wykorzystanie modelu nieliniowego jest trudniejsze z punktu widzenia teorii i może powodować znaczny i nieprzewidywalny wzrost nakładów obliczeniowych, co jest szczególnie niebezpieczne dla

kompensatora pracującego w czasie rzeczywistym. Przypomnijmy też, że identyfikacja modelu nieliniowego jest z reguły zadaniem znacznie trudniejszym niż identyfikacja modelu liniowego, a jej wynik mniej pewny. Wszystkie te czynniki sprawiają, że konieczne ze stosowania teoretyczne dokładniejszych równań nieliniowych może być w praktyce iluzoryczna.

Na rysunkach 11.2 i 11.3 są pokazane schematy kompensatorów korzystających z modelu przyrostowego. Na rysunku 11.2 zarówno obserwator, jak i regulator statyczny są zbudowane przy wykorzystaniu modeli liniowych. Obserwator odtwarza odchyłkę stanu  $\Delta x$  na podstawie mierzonej odchyłki wyjścia  $\Delta y$  i odchyłki sterowania  $\Delta u$ , a regulator proporcjonalny (statyczny) generuje odchyłkę (poprawkę) sterowania  $\Delta u$  na podstawie estymowanej odchyłki stanu  $\Delta x$ . Na rysunku 11.3 regulator proporcjonalny działa podobnie, natomiast obserwator wykorzystuje dokładny, nieliniowy model obiektu i estymuje pełny stan.



Rys. 11.2. Kompensator oparty w pełni na liniowym modelu przyrostowym



Rys. 11.3. Kompensator oparty częściowo na liniowym modelu przyrostowym  
z nieskończonym horyzontem

## 11.2. Regulator optymalny w problemie liniowo-kwadratowym

Poznaliśmy już zasady konstrukcji obserwatorów wchodzących w skład schematów z rysunków 11.2 i 11.3. Budowę regulatora proporcjonalnego opieramy na rozważaniu tak zwanego problemu liniowo-kwadratowego z nieskończonym horyzontem, znanego z teorii sterowania optymalnego. Zauważmy przede wszystkim, że podstawa-

wym wymaganiem przy projektowaniu kompensatora jest, aby odchyłki stanu  $\Delta x$  i sterowania  $\Delta u$  były jak najmniejsze, a układ zamknięty miał asymptotycznie stabilny punkt równowagi, w którym stanem obiektu jest  $x_0$ , a wejściem obiektu jest  $u_0$ . Wygodniej z matematycznego punktu widzenia mierzą wielkości odchyłek jest całkowy wskaźnik jakości (nazywany kwadratowym) z nieskończonym horyzontem sterowania

$$S(\Delta u) = \int_0^{\infty} \left( \Delta x(t)^T W \Delta x(t) + \Delta u(t)^T R \Delta u(t) \right) dt. \quad (11.7)$$

Na macierze wagowe nakładamy warunki

$$W = W^T \geq 0, \quad R = R^T > 0. \quad (11.8)$$

Przypomnijmy teraz główne twierdzenie teorii problemu liniowo-kwadratowego.

#### Twierdzenie 12.1

Załóżmy, że para macierzy  $(A, B)$  jest stabilizowalna, a para  $(W, A)$  – wykrywalna. Wówczas dla każdego warunku początkowego  $\Delta x(0)$  istnieje dokładnie jedno sterowanie opymalne  $\Delta u^*$ , minimalizujące wskaźnik jakości  $S$  (11.7) na trajektoriach systemu (11.3). Sterowanie  $\Delta u^*$  i wygenerowana przez nie trajektoria opymalna  $\Delta x^*$  spełniają związek

$$\Delta u^*(t) = -R^{-1}B^T K^* \Delta x^*(t), \quad t \geq 0, \quad (11.9)$$

gdzie  $n \times n$ -wymiarowa macierz  $K$  jest jedynym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$KBR^{-1}B^T K - A^T K - KA - W = 0, \quad (11.10)$$

takim że

$$K = K^T \geq 0. \quad (11.11)$$

Przy tym

$$S(\Delta u^*) = \Delta x(0)^T K \Delta x(0), \quad (11.12)$$

a opymalny system zamknięty

$$\Delta x^*(t) = (A - BR^{-1}B^T K)\Delta x^*(t), \quad t \geq 0, \quad (11.13)$$

jest asymptotycznie stabilny.

Regulator proporcjonalny w kompensatorze tworzy się według formuły (11.9), podstawiając za aktualną odchyłkę stanu jej estymata otrzymaną z obserwatora

$$\Delta u = -R^{-1}B^T K \Delta \hat{x}. \quad (11.14)$$

Układ zamknięty przedstawiony na rysunku 11.2 jest w równowadze, jeśli stan obiektu jest równy  $x_0$ , a stan obserwatora jest  $n$ -wymiarowym wektorem zerowym. Ten stan równowagi jest asymptotycznie stabilny, co wynika ze znanego twierdzenia, stanowiącego podstawkę pierwszej metody Lapunowa badania stabilności układów nieliniowych. Analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla układu z rysunku 11.3, z tym, że w tym wypadku stanem obserwatora w punkcie równowagi jest  $x_0$ .

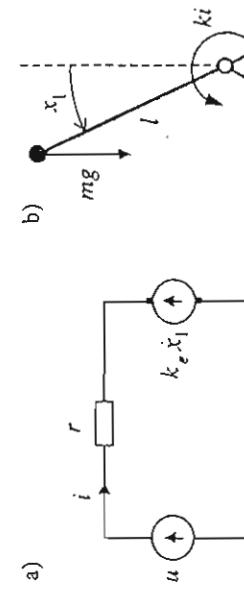
Wybór macierzy  $W$  i  $R$  we wskaźniku jakości (11.7) ma zasadniczy wpływ na działanie kompensatora. Ogólna zasada jest taka, że względnie duże współczynniki wagowe przyporządkowujesz się tym wyrazom, których minimalizacja ma priorytet. Jeżeli wagi sterowania (czyli elementy macierzy  $R$ ) są małe w stosunku do wag trajektorii stanu (czyli elementów macierzy  $W$ ), to regulator proporcjonalny (11.14) ma duże wzmacnienie (generuje silny sygnał) i można się spodziewać dobrej kompensacji odczytek stanu obiektu. Trzeba jednak pamiętać o tym, że nadmierny zwiększenie normy macierzy  $R^{-1}$  prowadzi zwykle do niebezpiecznego zmniejszenia zaspasu stabilności. Oczywiście pomnożenie całego wyrażenia pod całką w (11.7) przez liczbę dodatnią nie zmienia rozwiązania opymalnego.

### 11.3. Przykłady

#### Stabilizacja wahadła za pomocą silnika elektrycznego

Zadanie 11.1

Silnik prądu stałego ze stałym strumieniem wbudzeniem, sterowany napięciem twornika  $u$ , obraca wahadło matematyczne (punkt materialny o masie  $m$  na nieważkim przecie o długości  $l$ ) w ziemskim polu grawitacyjnym. Oś obrót jest pozioma, wahadło zamocowane prostopadłe do osi. Wielkością wyjściową jest kąt  $x_1$  pomiędzy kierunkiem „pionowo do góry” a wahadłem (rys. 11.4).



Rys. 11.4. Schemat elektryczny silnika (a) i wahadło na osi (b)

Należy skonstruować kompensator dynamiczny, działający na podstawie zlinearyzowanego modelu obiektu, złożony z obserwatora Luenbergera i regulatora proporcjonalnego, optymalnego ze względu na odpowiednio sformułowany kwadratowy wskaz-

nik jakości. Wejściem regulatora jest esymata stanu, otrzymana z obserwatora. Kompenator ma stabilizować położenie wahadła w punkcie równowagi  $x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, 2ba^2$ , dając wpływ typu i parametrów obserwatora oraz wag we wskaźniku jakości, służącym do określenia regulatora, na zakres stabilizacji w przestrzeni stanu. Jak zależy od nich szybkość zdążania stanu do położenia równowagi? Jaka jest wrażliwość układu zamkniętego na zakłócenia i niedokładności modelowania? Zbadać wpływ typu i parametrów obserwatora oraz wag we wskaźniku jakości na działanie kompensatora w obecności zakłóceń – zaproponować odpowiedni wskaźnik jakości. Jako wnioski, sformułować zalecenia dotyczące projektowania kompensatora dynamicznego.

#### Rozwiążanie

##### MODEL OBIEKTU

Oznaczając przez  $i$  natężenie prądu twornika, zapisujemy równanie elektryczne i równanie mechaniczne silnika:  $u = ri + k_e \dot{x}_1, J \ddot{x}_1 = ki + mg \sin x_1$ . Stąd równania stanu i wyjścia obiektu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), & y &= Cx, \\ \text{gdzie} \end{aligned} \quad (11.15)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 \sin x_1 + a_2 x_2 + bu \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (11.16)$$

$$a_1 = \frac{mgI}{J} > 0, \quad a_2 = -\frac{k_e}{rJ} < 0, \quad b = \frac{k}{rJ} > 0.$$

Model liniaryzowany w punkcie równowagi  $x_{01} = 0, x_{02} = 0, u_0 = 0$  ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (11.17)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że system (11.17), (11.18) jest niestabilny, sterowalny i obserwowałny.

Rozważmy trzy obserwatory Luenbergera, z których dwa pierwsze będą odnosić się do schematu kompensatora z rysunku 11.2, a trzeci – dla schematu z rysunku 11.3.

**OBSERWATOR LINIOWY PELNEGO RZĘDU**  
Dla zlinearyzowanego modelu obiektu konstrujemy liniowy obserwator Luenbergera pełnego rzędu

$$\dot{w} = Fw + Gy + Bu. \quad (11.19)$$

Zmienna  $w(t)$  jest dwuwymiarową esymatą stanu  $x(t)$ ,  $\dot{w}(t) = w(t)$ . Macierze współczynników spełniają relacje

$$F = A - GC, \quad (11.20)$$

$$G_1 = a_2 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad G_2 = a_1 + a_2 C_1 + \lambda_1 \lambda_2, \quad (11.21)$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $F$ .

#### ZREDUKOWANY OBSERWATOR LINIOWY

Zredukowany liniowy obserwator Luenbergera ma postać

$$\dot{w} = Fw + Gy + Hu, \quad (11.22)$$

$$\dot{x} = Nx + My. \quad (11.23)$$

Zmienna  $w(t)$  ma wymiar jeden,  $\dot{x}(t)$  jest dwuwymiarową esymatą stanu  $x(t)$ . Macierz współczynników spełniają relacje

$$NC + NP = I, \quad FP = PA - GC, \quad H = PB, \quad F < 0. \quad (11.24)$$

Przyjmując

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}, \quad (11.25)$$

otrzymujemy stąd

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 1/P_2, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = a_2 - F, \quad P_1 = (F - a_2)P_2, \quad (11.26)$$

$$G = (a_1 + a_2 F - F^2)P_2, \quad H = bP_2.$$

#### OBSERWATOR NIELINIOWY PELNEGO RZĘDU

Zapiszmy równania wyjściowe systemu nieliniowego w postaci

$$\dot{x} = Ax + h(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.27)$$

gdzie

$$h(x, u) = f(x, u) - Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1(\sin x_1 - x_1) + bu \end{bmatrix}. \quad (11.28)$$

Obserwator jest opisany równaniem

$$\dot{w} = Fw + Gy + h(w, u), \quad \dot{x} = w, \quad (11.29)$$

z macierzami  $F$  i  $G$  określonymi przez (11.20) i (11.21).

#### REGULATOR PROPORCJONALNY

Aby wyznaczyć regulator, dla systemu zlinearyzowanego (11.17) definiujemy kwadratowy wskaźnik jakości (11.7). Żądamy, żeby para macierzy  $(W, A)$  była wykrywalna. Regulator (11.14) w rozważanym zadaniu przybiera postać

$$u(t) = -R^{-1}B^T K \hat{x}(t), \quad (11.30)$$

gdzie  $\hat{x}$  jest wyjściem obserwatora, a  $K$  jest rozwijaniem układu (11.10), (11.11). Przyjmując

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_3 \end{bmatrix}, \quad (11.31)$$

wpisujemy (11.30) jako

$$u(t) = -R^{-1}b [K_2 \ K_3] \hat{x}(t). \quad (11.32)$$

Oznaczając

$$\beta = R^{-1}b^2, \quad W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2 & W_3 \end{bmatrix}, \quad (11.33)$$

otrzymujemy z (11.10) i (11.11)

$$K_2 = \frac{1}{\beta} \left( a_1 + \sqrt{a_1^2 + \beta W_1} \right), \quad K_3 = \frac{1}{\beta} \left( a_2 + \sqrt{a_2^2 + \beta(W_3 + 2K_2)} \right), \quad (11.34)$$

$$K_1 = \beta K_2 K_3 - a_2 K_2 - a_1 K_3 - W_2. \quad (11.35)$$

#### Uwaga

Obiekt nietliniowy (11.15) można również ustabilizować za pomocą regulatora proporcjonalnego, działającego na wyjście:  $u(t) = Ly(t)$ . Wartości własne macierzy stanu zlinearyzowanego systemu zamkniętego

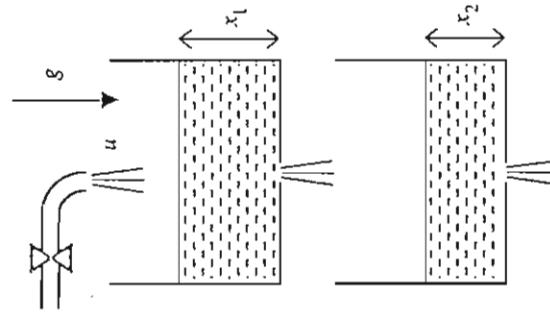
$$A + BL C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + bL & a_2 \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

mają części rzeczywiste ujemne, gdy  $a_1 + bL < 0$ . Porównać działanie takiego regulatora z opisanym wyżej kompensatorem dynamicznym.

#### Stabilizacja poziomu w systemie zbiorników wodnych

##### Zadanie 11.2

System przedstawiony na rysunku 11.5 składa się z dwóch identycznych zbiorników o stałym (niezależnym od wysokości) przekroju poziomym, umieszczonych jeden nad drugim w ziemskim polu grawitacyjnym. Do górnego zbiornika woda wpływa przez sterowany zawór z natężeniem  $u$ . Przez otwór w dnie woda swobodnie wypływa pod działaniem siły ciężkości i wpada do dolnego zbiornika. Przez otwór w dnie dolnego zbiornika woda swobodnie wypływa na zewnątrz systemu. Przyjąć, że szybkość wypływu jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z wysokością spływu (prawo Torricellego).



Rys. 11.5. System zbiorników wodnych

nik jakości. Wejściem regulatora jest estymata stanu, otrzymana z obserwatora. Kompenator ma stabilizować położenie wahadła w punkcie równowagi  $x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$ . Zbadajmy, dąc wpływ typu i parametrów obserwatora oraz wag we wskaźniku jakości, shującym do określenia regulatora, na zakres stabilizacji w przestrzeni stanu. Jak zależy od nich szybkość zdążania stanu do położenia równowagi? Jaka jest wrażliwość układu zamkniętego na zakłócenia i niedokładności modelowania? Zbadać wpływ typu i parametrów obserwatora oraz wag we wskaźniku jakości na działanie kompensatora w obecności zakłóceń – zaproponować odpowiedni wskaźnik jakości. Jako wnioski, stwierdzać zalecenia dotyczące projektowania kompensatora dynamicznego.

#### Rozwiążanie

##### MODEL OBIEKTU

Oznaczając przez  $i$  natężenie prądu twomika, zapisujemy równanie elektryczne i równanie mechaniczne silnika:  $u = ri + k_e \dot{x}_1, f \ddot{x}_1 = ki + mgl \sin x_1$ . Stąd równania stanu i wyjścia obiektu

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.15)$$

gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ a_1 \sin x_1 + a_2 x_2 + bu \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad (11.16)$$

$$a_1 = \frac{mgl}{r} > 0, \quad a_2 = -\frac{k k_e}{rJ} < 0, \quad b = \frac{k}{rJ} > 0.$$

Model zlinearyzowany w punkcie równowagi  $x_{01} = 0, x_{02} = 0, u_0 = 0$  ma postać

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (11.17)$$

$$y = Cx, \quad (11.18)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że system (11.17), (11.18) jest niestabilny, sterowany i obserwowany.

Rozważmy trzy obserwatory Luenbergera, z których dwa pierwsze będą odpowiednie dla schematu kompensatora z rysunku 11.2, a trzeci – dla schematu z rysunku 11.3.

#### OBSEWATOR LINIOWY PEŁNEGO RZĘDU

Dla zlinearyzowanego modelu obiektu konstrujemy liniowy obserwator Luenbergera pełnego rzędu

$$\dot{w} = Fw + Gy + Bu. \quad (11.19)$$

Zmienna  $w(t)$  jest dwuwymiarową estymatą stanu  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t) = w(t)$ . Macierze współczynników spełniają relacje

$$F = A - GC,$$

$$G_1 = a_2 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad G_2 = a_1 + a_2 G_1 + \lambda_1 \lambda_2,$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $F$ .

#### ZREDUKOWANY OBSEWATOR LINIOWY

Zredukowany liniowy obserwator Luenbergera ma postać

$$\dot{w} = Fw + Gy + Hu, \quad (11.22)$$

$$\dot{x} = Nw + My. \quad (11.23)$$

Zmienna  $w(t)$  ma wymiar jeden,  $\dot{x}(t)$  jest dwuwymiarową estymatą stanu  $x(t)$ . Macierz współczynników spełniają relacje

$$MC + NP = I, \quad FP = PA - GC, \quad H = PB, \quad F < 0. \quad (11.24)$$

Przyjmując

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad P = [P_1 \ P_2], \quad (11.25)$$

otrzymujemy stąd

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 1/P_2, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = a_2 - F, \quad P_1 = (F - a_2)P_2,$$

$$C = (a_1 + a_2 F - F^2)P_2, \quad H = bP_2. \quad (11.26)$$

#### OBSEWATOR NIELINIOWY PEŁNEGO RZĘDU

Zapiszmy równania wyjściowego systemu nieliniowego w postaci

$$\dot{x} = Ax + h(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.27)$$

#### OBSEWATOR LINIOWY PEŁNEGO RZĘDU

Dla zlinearyzowanego modelu obiektu konstrujemy liniowy obserwator Luenbergera pełnego rzędu

$$\dot{w} = Fw + Gy + Bu. \quad (11.19)$$

Zmienna  $w(t)$  jest dwuwymiarową estymatą stanu  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t) = w(t)$ . Macierze współczynników spełniają relacje

$$F = A - GC,$$

$$G_1 = a_2 - \lambda_1 - \lambda_2, \quad G_2 = a_1 + a_2 G_1 + \lambda_1 \lambda_2,$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $F$ .

#### ZREDUKOWANY OBSEWATOR LINIOWY

Zredukowany liniowy obserwator Luenbergera ma postać

$$\dot{w} = Fw + Gy + Hu, \quad (11.22)$$

$$\dot{x} = Nw + My. \quad (11.23)$$

Zmienna  $w(t)$  ma wymiar jeden,  $\dot{x}(t)$  jest dwuwymiarową estymatą stanu  $x(t)$ . Macierz współczynników spełniają relacje

$$MC + NP = I, \quad FP = PA - GC, \quad H = PB, \quad F < 0. \quad (11.24)$$

Przyjmując

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad P = [P_1 \ P_2], \quad (11.25)$$

otrzymujemy stąd

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 1/P_2, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = a_2 - F, \quad P_1 = (F - a_2)P_2,$$

$$C = (a_1 + a_2 F - F^2)P_2, \quad H = bP_2. \quad (11.26)$$

#### OBSEWATOR NIELINIOWY PEŁNEGO RZĘDU

Zapiszmy równania wyjściowego systemu nieliniowego w postaci

$$\dot{x} = Ax + h(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.27)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, należy skonstruować kompensator dynamiczny, złożony z obserwatora Luenbergera i regulatora proporcjonalnego. Kompensator ma stabilizować poziomy wody w obu zbiornikach. Zagadnienia do zbadania są takie same jak poprzednio.

Rozwiążanie

#### MODEL OBIEKTU

Oznaczamy przez  $x_1$  i  $x_2$  poziomy wody w zbiornikach. Zapisujemy równania stanu i wyjścia.

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = Cx,$$

gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} -k\sqrt{x_1 + u} \\ k\sqrt{x_1 - k\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 1], \quad k > 0. \quad (11.34)$$

Obiekt jest w stanie równowagi wtedy i tylko wtedy, gdy poziomy wody w obu zbiornikach są stałe i równe sobie,  $x_1(t) \equiv x_2(t) \equiv \bar{x}$ , a natężenie dopływu jest również stałe i ma wartość

$$u(t) \equiv u_0 = k\sqrt{\bar{x}}. \quad (11.36)$$

Oczywiście,  $\bar{x}$  może być dowolna liczbą nieujemną.

Równania obiektu liniaryzujemy wokół punktu równowagi, podstawiając  $u = u_0 + \Delta u$ ,  $x_1 = \bar{x} + \Delta x_1$ ,  $x_2 = \bar{x} + \Delta x_2$ . Otrzymujemy

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u$$

$$\Delta y = C \Delta x,$$

gdzie

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}, \quad A = a \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a = \frac{k^2}{2u_0}. \quad (11.37)$$

System (11.37), (11.38) jest asymptotycznie stabilny, sterowany i obserwowany.

Podobnie jak wyżej, skonstruujemy trzy obserwatory Luenbergera. Dwa pierwsze będą odpowiednie dla schematu kompensatora z rysunku 11.2, a trzeci – zależnie od wersji – dla schematu z rysunku 11.3 lub 11.2.

#### OBSERWATOR LINIOWY PEŁNEGO RZĘDU

Obserwator ten jest opisany równaniami

$$\dot{w} = Fw + G\Delta y + B\Delta u, \quad \Delta \hat{x} = w. \quad (11.40)$$

Macierze współczynników spełniają relację

$$F = A - GC, \quad C_1 = \frac{1}{a}(\lambda_1 + a)(\lambda_2 + a), \quad C_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 - 2a, \quad (11.41)$$

gdzie  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  są wartościami własnymi macierzy  $F$ .

#### ZREDUKOWANY OBSERWATOR LINIOWY

Zredukowany liniowy obserwator Luenbergera ma postać

$$w = Fw + G\Delta y + H\Delta u, \quad (11.42)$$

$$\Delta \hat{x} = Nw + M\Delta y. \quad (11.43)$$

Macierze współczynników spełniają relacje (11.24), (11.25), skąd

$$N_1 = \frac{F + a}{aP_2}, \quad N_2 = 0, \quad M_1 = -\frac{F + a}{a}, \quad M_2 = L, \quad (11.24)$$

$$\rho_1 = \frac{a}{F + a} P_2, \quad G = -(F + a)P_2, \quad H = P_1. \quad (11.44)$$

#### OBSERWATOR NIELINIOWY PEŁNEGO RZĘDU

Zapiszmy równania obiektu nieliniowego (11.34) w postaci

$$\dot{x} = Ax + h(x, u), \quad y = Cx, \quad (11.38)$$

gdzie

$$h(x, u) = f(x, u) - Ax = \begin{bmatrix} -k\sqrt{x_1 + u} \\ k\sqrt{x_1 - k\sqrt{x_2}} \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x. \quad (11.45)$$

Obserwator jest opisany równaniem (macierze  $F$  i  $G$  są określone przez (11.41))

$$\dot{w} = Fw + Gy + h(w, u), \quad (11.46)$$

$$\dot{w} = -GCw + Gy + f(w, u). \quad (11.47)$$

Zwracamy uwagę, że ten obserwator oddawuje pełny stan ( $\hat{x} = w$ ), a jego wejście stanowi pełne sygnały  $y$  i  $u$ . Można go więc zastosować w schemacie z rysunku 11.3.

Zapiszmy z kolej równania systemu w postaci przyrostowej, oznaczając

$$x_0 = \text{col}(\bar{x}, \bar{x}) :$$

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u), \quad \Delta y = C \Delta x,$$

$$h(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) = f(x_0 + \Delta x, u_0 + \Delta u) - A \Delta x. \quad (11.49)$$

Odpowiada im równanie obserwatora

$$\begin{aligned} \dot{w} &= F_w + G \Delta y + h(x_0 + w, u_0 + \Delta u) = \\ &\approx -G C_w + G \Delta y + f(x_0 + w, u_0 + \Delta u). \end{aligned} \quad (11.50)$$

Tutaj  $w$  jest estymatą odchyłki stanu  $\Delta x$ ,  $\Delta \dot{x} = w$ . Obserwator (11.50) można zastosować w schemacie z rysunku 11.2, pod warunkiem, że do obserwatora wprowadzić informację o wartościach  $x_0$  i  $u_0$ .

#### REGULATOR PROPORCJONALNY

Przyjmujemy kwadratowy wskaźnik jakości (11.7) z macierzami  $W = \text{diag}(W_1, W_2)$ ,  $W_1 \geq 0$ ,  $W_2 > 0$ ,  $R = 1$ . Regulator proporcjonalny jest określony przez formułę (11.14)

$$\Delta u(t) = -[K_1 \ K_2] \Delta \dot{x}(t). \quad (11.51)$$

Macierz  $K$  ma postać (11.31) i jest jedynym rozwiązaniem układu (11.10), (11.11), skąd

$$K_1 = -2a + \sqrt{2aT + W_1}, \quad K_2 = T - \sqrt{2aT + W_1}, \quad K_3 = \frac{1}{2a}(W_2 - K_2^2), \quad (11.52)$$

$$\text{gdzie } T = a + \sqrt{a^2 + W_1 + W_2}.$$

#### 11.4. Literatura

- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.  
Mitkowski W. (2006): *Równania macierzowe i ich zastosowania*. UWND AGH, Kraków.

## 12. Filtr Kalmana–Bucy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + L\nu(t), \quad t \geq t_0, \\ y(t) &= Cx(t) + w(t). \end{aligned} \quad (12.1)$$

### 12.1. Model systemu

Rozważamy system

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + L\nu(t), \quad t \geq t_0, \\ y(t) &= Cx(t) + w(t). \\ x(t) &\in R^n, \quad \nu(t) \in R^q, \quad y(t), w(t) \in R^p. \end{aligned}$$

Procesy stochastyczne  $\nu$  i  $w$  są białymi szumami gaussowskimi o zerowej wartości średniej i macierzach kowariancji

$$\begin{aligned} E(v(t)v(t)^T) &= Q\delta(t - \tau), \quad Q = Q^T \geq 0, \\ E(w(t)w(t)^T) &= R\delta(t - \tau), \quad R = R^T > 0, \end{aligned} \quad (12.2)$$

gdzie symbol  $\delta(t - \tau)$  oznacza deltę Diraca.

Procesy  $\nu$  i  $w$  są wzajemnie niezależne, zatem

$$E(w(t)v(\tau)^T) = 0 \quad \forall t, \tau \geq t_0. \quad (12.3)$$

Stan początkowy  $x(t_0)$  jest wektorem losowym o rozkładzie gaussowskim z zerową wartością średnią. Jest on niezależny od  $v$  i  $w$ , a jego macierz kowariancji

$$E(x(t_0)x(t_0)^T) = P(t_0) \quad (12.4)$$

jest półokreśiona dodatnio.

## 12.2. Postawienie zadania

Poszukujemy estymaty stanu  $x(t)$ , określonej na podstawie pomiaru wielkości wyciagowej  $y(\tau)$  w przedziale  $t_0 \leq \tau \leq t$ . Estymatą tą oznaczamy przez  $\hat{x}(t)$ . Błąd estymacji jest określony jako

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t).$$

Macierz kowariancji błędu (przy estymacji nieobciążonej) wynosi

$$\tilde{P}(t) = E\left(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T\right).$$

Żądamy, żeby estymata była optymalna, to znaczy wariancja błędu estymacji ma być minimalna. Jest to równoważne żądaniu, aby ślad macierzy  $\tilde{P}(t)$ , oznaczany przez  $\text{tr } \tilde{P}(t)$ , był minimalny.

## 12.3. Filtr Kalmana–Bucy

Rozwiązańiem postawionego zadania jest filtr Kalmana–Bucy, określony w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 12.1**

W rozważanym problemie liniowy nieobciążony estymator stanu, optymalny w podanym sensie, spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = 0. \quad (12.7)$$

Macierz filtra  $K(t)$  ma wymiar  $n \times p$  i jest określona wzorem

$$K(t) = \tilde{P}(t)C^T R^{-1}. \quad (12.8)$$

Błąd estymacji  $\tilde{x}(t)$  jest procesem stochastycznym Gaussa–Markowa o zerowej wartości średniej. Jego macierz kowariancji spełnia macierzowe równanie różniczkowe typu Riccatiego

$$\dot{\tilde{P}}(t) = A\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A^T - \tilde{P}(t)C^T R^{-1}C\tilde{P}(t) + LQL^T, \quad t \geq t_0 \quad (12.9)$$

z warunkiem początkowym

$$\tilde{P}(t_0) = P(t_0).$$

Uogólnimy opisany rezultat na przypadek systemu sterowanego, ze stanem początkowym o niekoniecznie zerowej wartości średniej

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lv(t), \quad t \geq t_0, \quad E(x(t_0)) = \xi, \quad (12.11)$$

$$y(t) = Cx(t) + w(t), \quad (12.5)$$

$$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^m, \quad v(t) \in R^q, \quad y(t), w(t) \in R^p.$$

Stetowanie  $u$  traktuje się jako zadaną deterministyczną funkcję czasu, poza tym założenia są jak w twierdzeniu 12.1.

**Twierdzenie 12.2**

W problemie określonym przez (12.11), liniowy nieobciążony estymator stanu, minimalizujący wariancję błędu estymacji, spełnia równanie różniczkowe:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad \hat{x}(t_0) = \xi. \quad (12.12)$$

Macierz filtra  $K(t)$  spełnia (12.3). Błąd estymacji  $\hat{x}(t)$  jest procesem stochastycznym Gaussa–Markowa o zerowej wartości średniej. Macierz kowariancji błędu estymacji spełnia macierzowe równanie różniczkowe typu Riccatiego (12.9) z warunkiem początkowym

$$\tilde{P}(t_0) = E\left((x(t_0) - \xi)(x(t_0) - \xi)^T\right) \approx P(t_0). \quad (12.13)$$

Przy założeniu wykrywalności systemu (12.1) lub (12.11) (tzn. wykrywalności pary macierzy  $(C, A)$ ), przejdziemy do  $-\infty$  z początkową chwilą obserwacji  $t_0$ . Macierz kowariancji błędu  $\tilde{P}(t)$  zazęga wtedy do wartości stałej, której oznaczamy przez  $\tilde{P}$ . Macierz  $\tilde{P}$  jest jedynym rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego spełniającym warunki

$$\dot{\tilde{P}} + \tilde{P}A^T - \tilde{P}C^T R^{-1}C\tilde{P} + LQL^T = 0, \quad (12.14)$$

Stała macierz filtra jest określona przez (12.8)

$$\tilde{P} = \tilde{P}^T \geq 0. \quad (12.15)$$

$$K = \tilde{P}C^T R^{-1}. \quad (12.16)$$

Filtr (12.12) z taką macierzą  $K$  (podstawiona za  $K(t)$ ) jest asymptotycznie stabilny (to znaczy macierz  $A - KC$  ma wszystkie wartości własne w lewej półpłaszczyźnie zespolonej). Filtr ten jest szczególnym przypadkiem obserwatora Luenbergera pełnego rzędu.

#### 12.4. Przykłady

##### Przykład 12.1

Rozważmy najpierw prosty system pierwszego rzędu

$$\dot{x} = v,$$

$$y = x + w,$$

z  $Q = R = 1$ . Mamy  $A = \beta = 0$ ,  $C = I_n = 1$ . Graniczny filtr Kalmana–Bucy jest określony przez (12.14)–(12.16). Stąd  $\tilde{P} = K = 1$ , a optymalny estymator spełnia równanie

$$\dot{\hat{x}} = y - \hat{x}.$$

##### Przykład 12.2

Niech w systemie (12.11)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \quad B = L = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad R = 1.$$

Oznaczając

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_3 \end{bmatrix}, \quad \beta = b^2 Q,$$

dostajemy z rozpisania równania macierzowego Riccatiego (12.14)

$$2\rho_2 - \rho_1^2 = 0,$$

$$a\rho_1 + \rho_3 - \rho_1\rho_2 = 0,$$

$$2a\rho_2 - \rho_2^2 + \beta = 0.$$

Stąd

$$\rho_2 = a + \sqrt{\beta + a^2},$$

$$\rho_1 = \sqrt{2\rho_2}, \quad \rho_3 = \rho_1(\rho_2 - a)$$

#### Macierz filtru

$$K = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}.$$

Warto porównać tak otrzymany filtr Kalmana–Bucy z innymi obserwatorami Luenbergera pełnego rzędu. Przypomnijmy, że obserwator Luenbergera pełnego rzędu dla systemu (12.11) jest każdy układ postaci

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + G(y(t) - C\hat{x}(t))$$

z  $n \times p$ -wymiarową macierzą  $G$  tak dobraną, że macierz  $A - GC$  jest asymptotycznie stabilna. Oznaczając  $G = \text{col}(G_1, G_2)$ , w rozważanym przykładzie otrzymamy

$$A - GC = \begin{bmatrix} -\rho_1 & 1 \\ a - \rho_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz ta jest asymptotycznie stabilna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\rho_1 > 0$  i  $G_1 - a > 0$ .

#### 12.5. Literatura

Meditch J.S. (1975): *Estymacja i sterowanie statystycznie optymalne w układach liniowych*. Warszawa, WNT.

Bobrowski D. (1980): *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*. Warszawa, WNT.

Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. Warszawa, WNT.

## 13. Stabilizacja systemów dyskretnych

### 13.1. Sterowalność w systemach dyskretnych

Przed przedstawieniem metod stabilizacji systemów dyskretnych omówimy pojęcie sterowalności systemu dyskretnego.

#### Definicja

System dyskretny (13.2), niekoniecznie stwarzający z (13.1), jest sterowany wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $x_0 \in R^n$ , dla każdego  $x_i \in R^n$ , istnieje  $k_1 > 0$ ,  $k_1 < \infty$ ,  $k_1 \in N$  oraz sterowanie  $u^*$  takie, że  $x^*(0) = x_0$  i  $x^*(k_1) = x_1$ , przy czym  $x^*$  jest rozwiązaniem równania różnicowego (13.2) przy ciągu sterowania  $u$  (zob. np. Mirkowski 1996, s. 118).

Do weryfikacji, czy system (13.2) jest sterowany, posłuży następujące (podobne jak dla systemów ciągłych) twierdzenie.

#### Twierdzenie

System dyskretny (13.2) jest sterowany wtedy i tylko wtedy, gdy para  $(A^+; B^+)$  jest sterowalna. Czyli gdy rząd macierzy  $Q = [B^+ \ A^+ B^+ \ (A^+)^2 B^+ \ ... \ (A^+)^{n-1} B^+]$  jest równy  $n$ , jeżeli rozpatrywany system ciągły (13.1) jest sterowany, to w zależności od wartości okresu próbkowania  $h$ , system dyskretny może być sterowany lub nie.

Twierdzenie (zob. Mirkowski 1991, s. 141).

Niech  $\lambda_s$  i  $\lambda_r$  są odpowiednio s-tą i i-tą wartością własną macierzy  $A$  systemu (13.1) oraz niech dla każdego  $i \neq s$  takiego, że  $\text{Re}(\lambda_s - \lambda_i) = 0$  zachodzi warunek:

Twierdzenie (zob. Mirkowski 1991, s. 141).

Niech  $\lambda_s - \lambda_r \neq 2\pi k$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

$h \cdot \text{Im}(\lambda_s - \lambda_r) \neq 2\pi k$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

$h > 0$  jest okresem próbkiowania.

Jeżeli  $h > 0$  spełnia warunek (13.4) i para  $(A; B)$  jest sterowalna, to para  $(A^+; B^+)$  jest również sterowalna,

Jeżeli  $h > 0$  spełnia warunek (13.4) i para  $(C; A)$  jest obserwowały, to para  $(C^+; A^+)$  jest również obserwowały.

Zbiór wszystkich takich okresów próbkiowania  $h$ , dla których warunek (13.4) nie jest spełniony, jest przeliczalny i złożony z pojedynczych punktów leżących na osi liczb rzeczywistych.

Powyższe twierdzenie ilustruje przykład obliczeniowy.

#### Przykład 13.1.

Rozważmy system (13.1) z macierzami:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \pi \\ -\pi & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

System dyskretny (13.2) opisuje zależność  $y^*(i)$  od  $u^*(i)$  układu dyskretnego ciągłego powstającego z szeregowego połączenia ekstrapolatora rzędu zerowego, systemu (13.1) i impulsatora idealnego (zob.rys. 7.1).

Para  $(A; B)$  jest sterowalna oraz para  $(C; A)$  jest obserwowała. System dyskretny (13.2) ma, zgodnie z zależnościami (13.3), następujące macierze:

$$A^+ \approx e^{-h} \begin{bmatrix} \cos \pi h & \sin \pi h \\ -\sin \pi h & \cos \pi h \end{bmatrix},$$

$$B^+ = \frac{1}{1 + \pi^2} \begin{bmatrix} 1 + \pi - (1 + \pi)e^{-h} \cos \pi h + (\pi - 1)e^{-h} \sin \pi h \\ 1 - \pi - (1 - \pi)e^{-h} \cos \pi h + (1 + \pi)e^{-h} \sin \pi h \end{bmatrix},$$

$$C^+ = [1 \quad 1].$$

Przeprowadźmy spełnienie warunku (13.4) dla  $h > 0$ . Macierz  $A$  ma wartości własne  $\lambda_{1,2} = -1 \pm j\pi$ . Warunek (13.4) nie jest spełniony, gdy  $2/h = 2\pi$  dla  $k$  całkowitego. Zatem warunek (13.6) nie jest spełniony dla  $h = 1, 2, 3, 4, \dots$

Zwróciśmy uwagę, że dla  $h = 1, 2, 3, 4, \dots$  mamy  $\cos th = (-1)^h$  i  $\sin th = 0$  i zatem macierze  $A^+$  i  $B^+$  przyjmują postać:

$$A^+ = (-1)^h e^{-h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^+ = \frac{1}{1 + \pi^2} \begin{bmatrix} 1 + \pi - (1 + \pi)e^{-h} (-1)^h \\ 1 - \pi - (1 - \pi)e^{-h} (-1)^h \end{bmatrix}.$$

Sprawdźmy teraz, sterowalność pary  $(A^+; B^+)$ , budując macierz Kalmana sterowalności

$$Q = \begin{bmatrix} B^+ & A^+ B^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^+ & (-1)^h e^{-h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^+ & (-1)^h e^{-h} B^+ \end{bmatrix}.$$

Łatwo można zauważyć, że kolumny macierzy  $Q$  są liniowo zależne, czyli  $\det Q = 0$ . Oznacza to, że rzad  $Q$  jest mniejszy od  $n = 2$ , czyli że para  $(A^+; B^+)$  nie jest sterowalna (system (13.2) jest niesterywalny). Analogicznie dla  $h$  naturalnych rozpatrywany system (13.2) będzie nieobserwowałny.

### 13.2. Regulator dead-beat

Rozważmy system (13.2) ze sprzężeniem zwrotnym  $u^+(i) = Kx^+(i)$ . System zaklęty ma postać

$$x^+(i+1) = (A^+ + B^+ K)x^+(i),$$

zaś wartość  $x^+(i)$  dla dowolnego  $i = 0, 1, 2, \dots$  określa równośc

$$x^+(i) = (A^+ + B^+ K)^i x^+(0).$$

Jeżeli para  $(A^+; B^+)$  jest sterowalna, to możemy tak dobrąć macierz  $K$ , aby wielomian charakterystyczny macierzy  $(A^+ + B^+ K)$  miał z góry zadane współczynniki (aż tem i zadane wartości własne). W szczególności możemy dobrąć taką macierz  $K$ , aby wielomian charakterystyczny miał postać

$$\det(\lambda I - A^+ - B^+ K) = \lambda^n.$$

W tym przypadku wartości własne macierzy  $(A^+ + B^+ K)$  są równe zeru.

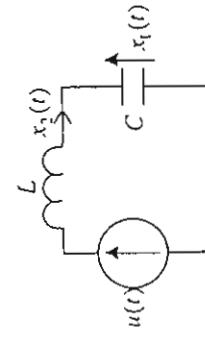
Wtedy z twierdzenia Hamiltona-Cayleya (Turowicz 2005, s. 131) mamy  $(A^+ + B^+ K)^n = 0$ , i zatem  $x^+(n) = (A^+ + B^+ K)^n x^+(0) = 0$  dla dowolnego  $v > n$ .

$(n$  jest wymiarem macierzy stanu  $A$ , podobnie będzie dla każdego  $v > n$ ). Zeroowe (wszystkie) wartości własne macierzy stanu systemu dyskretnego zapewniają asymptotyczną stabilność. Dodatkowo okazuje się, że  $\forall x^+(0) \in R^n$  w  $n$ -tym kroku  $x^+(n) = 0$  (układ dochodzi do zera).

Przykład 13.2

Rozważmy oscylator LC (zob. rys. 13.1), który przy  $LC = 1$ , opisują równości (13.1) z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = I.$$



Rys. 13.1. Oscylator LC

Przy synchronicznej pracy przenośnika (ekstrapolatora) i impulsatora ze stałym okresem próbkowania  $h > 0$  otrzymujemy układ dyskretny (13.2) z macierzami

$$A^+ = \begin{bmatrix} \cosh & \sinh \\ -\sinh & \cosh \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} 1 - \cosh h \\ \sinh h \end{bmatrix}, \quad C^+ = I.$$

Dobierając okresy próbkowania  $h \neq \pi k$ , poszukujemy regulatora  $u^+(i) = Ku^+(i)$ ,  $K = [K_1 \ K_2]$  tak, by macierz  $A^+ + B^+ K$  miała wyłącznie zero wartości własne.

Dla macierzy  $A$  o wymiarze  $n = 2$  wielomian charakterystyczny ma postać

$$W(\lambda) = \det(\lambda J - A) = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

gdzie:  $a = -\text{tr}(A)$ ,  $b = \det(A)$ , gdzie  $\text{tr}$  oznacza sumę elementów leżących na głównej przekątnej). Wielomian charakterystyczny macierzy  $A^* + B^* K$  w tym przypadku, ma postać

$$W(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A^* + B^* K)\lambda + \det(A^* + B^* K).$$

Jżeli  $\text{tr}(A^* + B^* K) = 0$  i  $\det(A^* + B^* K) = 0$ , to  $W(\lambda) = \lambda^2$  i zatem macierz  $A^* + B^* K$  ma wyłącznie zerowe wartości własne. Z równań  $\text{tr}(A^* + B^* K) = 0$  i  $\det(A^* + B^* K) = 0$  wyznaczamy  $K = [K_1, K_2]$

$$K_1 = \frac{1 - 2 \cosh}{2 - 2 \cosh},$$

$$K_2 = \frac{-\cosh - 1/2}{\sinh}.$$

Taki regulator zapewnia sprowadzenie układu ciągłego w czasie (13.1) (dla oscylatora LC) do zera w skończonym czasie  $T \leq 2h$ .

Działanie regulatora ilustruje rysunek 13.2.

Dla dowolnego  $n$  mamy

$$W(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Dla  $a_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  mamy  $W(\lambda) = \lambda^n$ . Z równań  $a_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$  można wyznaczyć  $K$  takie, które zapewni zerowanie stanu w układzie (13.1) w skończonym czasie sterowania  $T \leq nh$ .

### 13.3. Obszernik Luenergera dla systemu dyskretnego

Rozważmy system (13.2) i obserwator o postaci

$$\begin{aligned} w(i+1) &= Fw(i) + Gy^+(i) + Hu^+(i), \\ \dot{x}^+(i) &= My^+(i) + Nw(i), \end{aligned} \quad (13.5)$$

gdzie  $w(i) \in R^s$ ,  $s \leq n$ ,  $\dot{x}^+ \in R^n$ ,  $F, G, H, M, N$ , są stałymi macierzami rzeczywistymi. Niech błąd estymacji wyraża się wzorem

$$e(i) = w(i) - Px^+(i),$$

gdzie  $P$  jest stałą macierzą rzeczywistą o wymiarach  $s \times n$ . Jeżeli porównaj z podrozdziałem 10.3)

$$GC^+ + FP = PA^+, \quad MC^+ + NP = I, \quad H = PB^+, \quad (13.6)$$

to

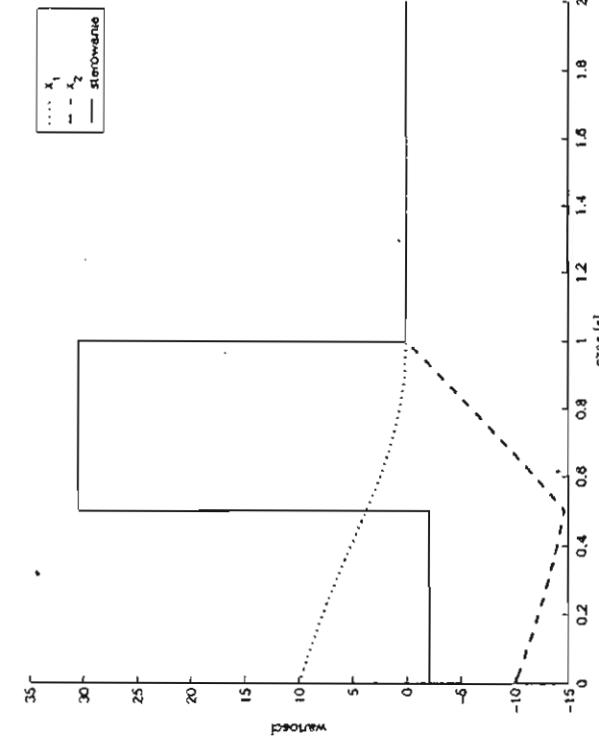
$$e(i+1) = Fe(i), \quad \dot{x}^+(i) \rightarrow x^+(i) = Ne(i).$$

Jeżeli para  $(C^+; d^+)$  jest obserwowała, możemy uzyskać dowolny rozkład wartości własnych macierzy  $F$ . W szczególności  $| \lambda(F) | < 1$  i zatem  $\dot{x}^+(i) \rightarrow x^+(i)$  przy  $i \rightarrow \infty$ .

Równania (13.5) i (13.6) opisują ogólną postać obserwatora. Jeżeli przyjąć  $P = I$  oraz  $M = 0$  i  $s = n$ , to wtedy uzyskamy równania tzw. obserwatora pełnego rzędu (inaczej identycznosciowego), o postaci

$$\dot{x}^+(i+1) = F\dot{x}^+(i) + Gy^+(i) + Hu^+(i),$$

gdzie:  $H = B^+$ ,  $F = A^* - GC^+$ ,  $N = I$ . W tym przypadku  $\dot{x}^+ = w(i)$ .



Rys. 13.2. Działanie regulatora dead-beat dla oscylatora LC przy  $h = 0,5$  s

### 13.4. Dyskretny problem liniowo-kwadratowy

Rozważmy system (13.2) i wskaźnik jakości

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( x(k)^T W x(k) + u(k)^T R u(k) \right), \quad (13.7)$$

gdzie  $R = R^T > 0$  i  $W = W^T \geq 0$ . Jeżeli para  $(A^+, B^+)$  jest stabilizowalna, a  $(W, A^+)$  wykrywalna (stabilizowalność i wykrywalność w sensie układu dyskretnego), to sterowanie (dokładnie jedno) minimalizujące wskaźnik jakości (13.7) ma postać

$$u_o^+(i) = K_o x^+(i), \quad (13.8)$$

gdzie

$$K_o = -R^{-1} B^{+T} D(I + B^+ R^{-1} B^{+T} D)^{-1} A^+,$$

przy czym  $D$  jest jedynym półdodatnio określonym, symetrycznym rozwiązaniem dyskretnego równania Riccatiego

D = A^{+T} D(I + B^+ R^{-1} B^{+T} D)^{-1} A^+ + W \quad (13.9)

zaś wartość optymalna wskaźnika jakości wynosi

$$J(u_o) = x(0)^T D x(0) \quad (13.10)$$

oraz

$$|\lambda(A^+ + B^+ K)| < 1. \quad (13.11)$$

Istnieją również wersje wzorów (13.8) i (13.9), z których poniższa jest zaimplementowana w MATLAB-ie w postaci funkcji d1qr przybornika Control. W tym przypadku

$$u_o^+(i) = -(R + B^{+T} S B^+)^{-1} B^{+T} S A^+ x^+(i) \quad (13.12)$$

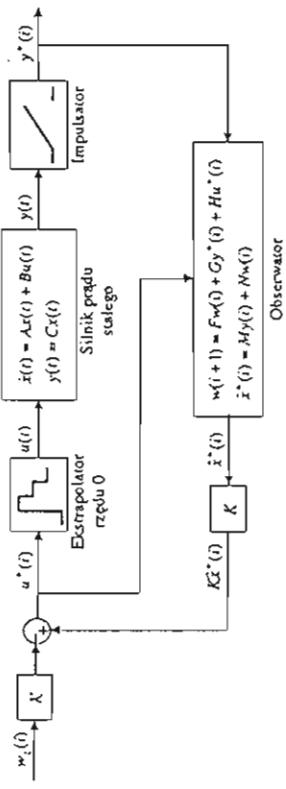
$S$  jest zaś jedynym półdodatnio określonym, symetrycznym rozwiązaniem równania

$$S = W + A^{+T} S A^+ - A^{+T} S(R + B^{+T} S B^+)^{-1} S A. \quad (13.13)$$

Warto zaznaczyć, że  $D = S$ . Regulator (13.8) lub (13.12) stabilizują system (13.2) (zachodzi warunek (13.11)).

### 13.5. Dyskretne dynamiczne sprzężenie zwrotne

W sposób podobny jak w rozdziale 11 można zbudować dyskretną wersję kompensatora. W szczególności można zbudować taki kompensator, by wartości własne systemu zamkniętego były równe zeru. Zaprojektujemy taki układ dla silnika elektrycznego prądu stałego (rys. 13.3), sterowanego za pomocą przetwornika cyfrowo-analogowego (Mirkowski 1991, s. 158, 165).



Rys. 13.3. Schemat sterowania silnikiem prądu stałego za pomocą dyskretnego dynamicznego sprzężenia zwrotnego

Przykład 13.3

Rozpatrywany jest silnik prądu stałego. Przyjmijmy  $x_1$  jako położenie katowe walu silnika, a  $x_2$  jako prędkość katową. Dodatkowo zakładamy, że dostępny jest jeden niepomierny położenia katowego. Silnik teraz można zamodelować za pomocą równania różniczkowego (13.1) z macierząmi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \quad 0].$$

Celem sterowania jest stabilizacja położenia katowego wału w zadanym położeniu. Podawane ono będzie zgodnie z rysunkiem 13.2 za pomocą ciągu  $w_i(t)$ , którego elementami są wartości zadane położenia w chwilach  $t = ih$  gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots$

Przy sterowaniu komputerowym (jak na rys. 13.2) jako model silnika może postać zyć równanie różnicowe (13.2) z macierzami

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B^+ = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C^+ = [c \quad 0],$$

gdzie:  $a_{12} = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ ,  $a_{22} = e^{-\alpha t}$ ,  $b_1 = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$ ,  $b_2 = \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ . Macierze te zostały obliczone z równości (13.3).

Do realizacji zadania sterowania posłużyły dynamiczne sprzężenie zwrotne zbudowane z dyskretnego obserwatora Luenbergera (13.5) z macierzami:

$$P = [-g \quad 1],$$

$$F = a_{22} - g a_{12},$$

$$G = \frac{1}{c}(-g + a_{22}g - a_{12}g^2),$$

$$H = b_2 - b_1g,$$

$$M = c^{-1}[1 \quad g],$$

$$N = [0 \quad 1].$$

oraz regulatora proporcjonalnego poстaci  $K = [k_1 \quad k_2]$ . Wartość sterowania w  $i$ -tym kroku okresła równość

$$u(i) = K\hat{x}^+(i) - K_w(i).$$

Parametry  $g$ ,  $k_1$  i  $k_2$  należy dobrać tak, aby  $\lambda(F) + \lambda(A^+ + B^+K)$  leżały we wnętrzu jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, o środku w zerze. Wtedy błąd estymacji stanu obserwatora będzie zanikał asymptotycznie do zera, aż system zamknięty dynamicznym sprzężeniem zwrotnym będzie asymptotycznie stabilny. W szczególnosci parametry te można dobrać tak, aby wszystkie wartości własne układu zamkniętego były równe 0, co w naszym przypadku otrzymujemy dla następujących parametrów:

$$g = a_{22} / a_{12},$$

$$k_1 = -b_2 / q,$$

$$k_2 = (a_{22}^2 b_1 - a_{22} a_{12} b_2 - a_{12} b_2) / q,$$

gdzie  $q = b_1 b_2 (1 - a_{22}) + b_2^2 a_{12}$ . W takiej sytuacji będziemy mieć do czynienia z regulatorem dead-beat, obserwator zaś będzie sprawdzał błąd estymacji do zera w jednym kroku.

### 13.6. Zadania do rozwiązania

#### Zadanie 13.1

Zamodelować układ złożony z regulatora dead-beat i oscylatora LC (przykład 13.2). Przenalizować działanie regulatora dla różnych warunków początkowych. Sprawdzić, w jakiej sytuacji układ zostanie sprowadzony do zera w czasie krótszym niż  $2h$ . Zaobserwować działanie regulatora w przypadku występowania ograniczeń sterowania (blok saturation w Simulinku).

#### Zadanie 13.2

Dla zamodelowanego oscylatora LC zaprojektować (za pomocą funkcji d1qr) dyskretny regulator LQ. Przeprowadzić analizę zachowania się systemu dla różnych macierzy  $W$  i  $R$  wskaźnika jakości (13.7). Obliczyć z darłych symulacyjnych wartości wskaźnika i porównać ją ze wzorem analitycznym (13.10). Porównanie przeprowadzić także w obecności ograniczeń sterowania.

#### Zadanie 13.3

Zamodelować system z przykładu 13.3 z parametrami podanymi przez prowadzącego. Przeanalizować działanie dyskretnego dynamicznego sprzężenia zwrotnego dla  $w_i(i) = 0$ . Zaobserwować występowanie błędów ustalonych dla  $w_i(i) = \text{const} \neq 0$  i zaproponować sposób ich uniknięcia. Zastać regulator dead-beat dyskretnym regułarem liniowo-kwadratowym i porównać ich działanie. Wprowadzić zakłócenia pomiaru wyjścia z obiektu i porównać ich wpływ na zachowanie się systemu. Zastąpić obserwator zredukowany obserwatorem pełnego rzędu i porównać zachowanie systemów (należy obliczyć odpowiednie wartości elementów macierzy  $G$ ).

### 13.7. Literatura

- Mitkowski W. (1991): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa.  
 Mitkowski W. (1996): *Stabilizacja systemów dynamicznych*. UWND AGH, Kraków, wydanie 3.  
 Mitkowski W. (2006): *Równania macierzowe i ich zastosowania*. UWND AGH, Kraków.  
 Turowicz A. (2005): *Teoria macierzy*. UWND AGH, Kraków, wydanie 6.

## 14. Systemy o „dziwnej” dynamicie

### 14.2. System Lorenza

Układ neliiniowy Lorenza ma postać:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1x_2.\end{aligned}\quad (14.1)$$

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z układami dynamicznymi o „dziwnych” zachowaniach, zaliczanych do zachowań „chaotycznych”. Rozpatrywane będą klasyczne przykłady takie, jak system Lorenza, obwód elektryczny Chua oraz odwzorowanie logistyczne. W przedstawionych przykładach należy zwrócić uwagę na zmianę dynamiki przy zaburzeniu układu liniowego członu neliiniowym.

### 14.1. Układy o dynamicie chaotycznej

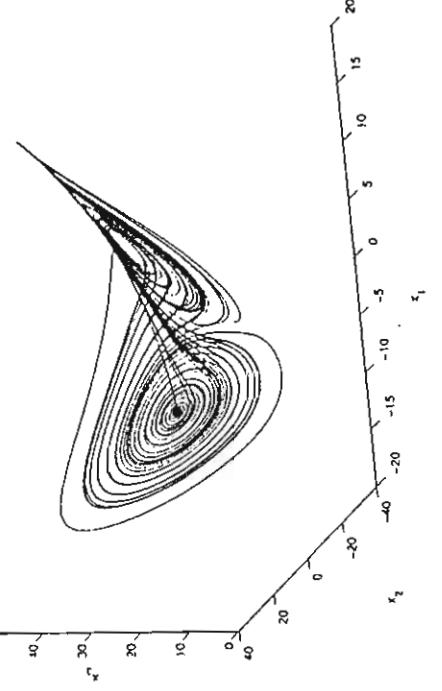
- Układy o dynamicie chaotycznej charakteryzują się następującymi własnościami:
  - występują w nim potoki jednoznacznego trajektorii niestabilnych i ograniczonych (podobnie jak potok gorski).
  - dynamika jest bardzo wrażliwa na małe zmiany parametrów układu.

W układach o dynamicie chaotycznej przewidywanie jest możliwe jedynie w niewielkim horyzoncie czasowym, mimo że układ jest w pełni deterministyczny. Trajektorie startujące blisko siebie po krótkim czasie stają się praktycznie dowolnie odległe. Pomiar jest zawsze obarczony pewnym błędem. Dokładna znajomość warunku początkowego nie jest możliwa praktycznie, czyli nasze przewidywanie co do zachowania się układu mogą znaczaco różnić się od rzeczywistości (w systemach stabilnych, trajektorie o mało różniących się od siebie warunkach początkowych również niewiele się od siebie różnią w chwilach późniejszych).

Dynamika chaotyczna może pojawiać się w układach opisywanych neliiniowymi równaniami różniczkowymi lub neliiniowymi równaniami rekurencyjnymi. W neliiniowym układzie z czasem ciągły chaos może wystąpić tylko wtedy, gdy rzad układu wynosi trzy lub więcej. W neliiniowych układach dyskretnych chaos może wystąpić już w układzie rzędu pierwszego.

Interesujące zachowanie systemu otrzymujemy dla następujących parametrów:  $\sigma = 10$ ,  $b = \frac{8}{3}$  i  $r = 28$ . Dla takiego zestawu parametrów wykonano rysunek 14.1 i 14.2.

$$r = 28$$



Rys. 14.1. Przykładowa trajektoria fazowa równania Lorenza

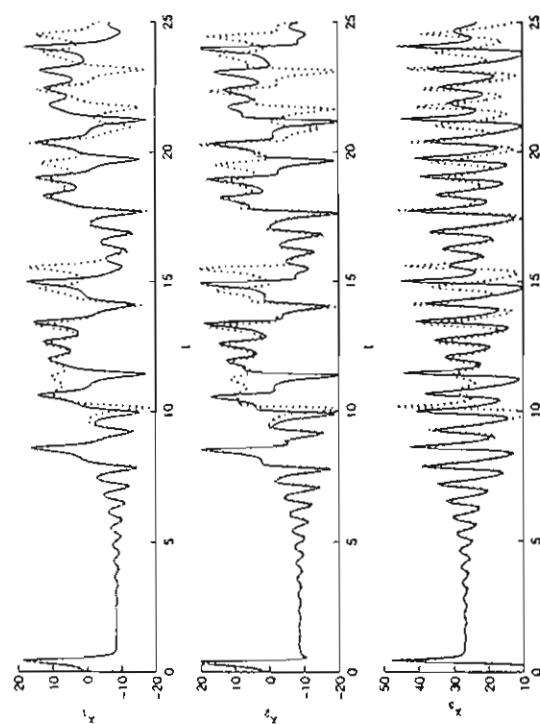
#### Rys historyczny

Edward Lorenz z Massachusetts Institute of Technology z zamilowania był matematykiem, natomiast z wykształcenia meteorologiem. W swojej pracy naukowej zajmował się prognozowaniem pogody przy użyciu komputerów. Zjawiska meteorologiczne bardzo silnie zależą od tak zwanego zjawiska konwekcji – czyli unoszenia ciepłego powietrza. Między innymi chmury burzowe powstają w wyniku konwekcji i dlatego mamy burze w gorące pary dnia. Rozróżnia się konwekcję stacjonarną i niestacjonarną. W konwekcji stacjonarnej ogrzane powietrze porusza się łagodnie do góry, natomiast w konwekcji niestacjonarnej ruch ten jest dużo bardziej złożony; tak

konwekcią jest bardziej istotna dla pogody. Badania nad tym zjawiskiem były prowadzone od dawna. W 1900 roku H. Bénard odkrył, że komórki konwekcyjne mają budowę podobną do plastrów miodu. W 1962 lord Rayleigh wyrowadził podstawową teorię rozpoczęcia konwekcji. W 1962 roku B. Saltzman podał równania dla prostego rozdaju konwekcji. Równania te zaciekawiły E. Lorenza i postronniów badać je dalej oraz upraszczać. Zauważał, że właściwie to tylko trzy zmienne odgrywają znaczącą rolę. W wyniku uproszczeń, z zachowaniem istotnych własności modelu wyjściowego, otrzymał układ równań (14.1), dzisiaj nazywany systemem Lorenza (rys. 14.1).

#### Efekt motyla

Równania, które podał Lorenz były przez niego także rozwiązywane numerycznie za pomocą komputera Royal McBee (Królewskiego Pszczółka) LGP-300 (komputer zbudowany jeszcze przy użyciu lamp elektronowych, jedna iteracja na sekundę). Podczas rozwiązywania układów równań Lorenz otrzymywał wyniki w postaci cyfr. Lorenz zauważał, że wprowadzenie warunków poczatkowych, które różnią się od poprzednich o bardzo niewiele, np. o 0,00001, powoduje, że otrzymywał zupełnie innie i różne od siebie rozwiązania. Nieprzewidywalność pogody znalazła swoje odbicie w modelu Lorenza. Okazało się bowiem, że niewielkie zaburzenie parametrów modelu – interpretowanych w rzeczywistości np. jako trzepot skrzydeł motyla – powoduje, że układ zachowuje się w sposób całkowicie odmienny. Trzepot skrzydeł motyla może zmienić pogodę w bardzo odległym miejscu na Ziemi. Ten właściwy efekt Lorenz nazwał „efektem motyla” (rys. 14.2). Informacje na temat historii równań Lorenza można znaleźć w pracy (Stewart, 2001).



Rys. 14.2. „Efekt motyla” – różnica pomiędzy warunkami początkowymi rzędu 0,1%. Wykres ciągły:  $x(0) = [1, 1, 10]$ , wykres kropkowany:  $x(0) = [1, 1, 10.01]$

Jak można zaobserwować, „efekt motyla” to właśnie wspomniana wcześniej wrażliwość na warunki początkowe. Obserwując dokładnie rysunek 14.2, możemy zauważyć, że trajektorie stanu są do siebie podobne przez pewien krótki czas, a następnie różniczności powiększają się. Można więc wnioskować, że przewidywanie zachowania się układu chaotycznego jest możliwe tylko dla najbliższej przeszłości. Ważne jest, aby podkreślić, że to numeryczne rozwiązywanie równań Lorenza prezentowane jest na rysunkach 14.1 i 14.2. Rozwiązywanie dokładne mogłoby wyglądać nieco inaczej, jednak własności byłyby zachowane.

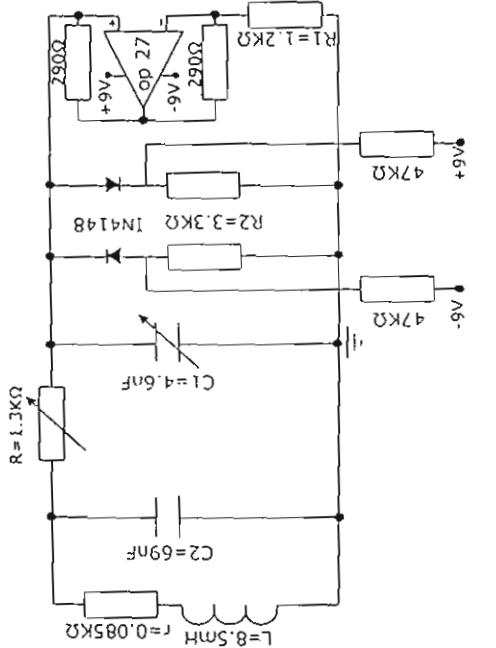
### 14.3. Obwód elektryczny Chua

Obwód elektryczny Chua był pierwszym rzeczywistym systemem dynamicznym zbudowanym w 1983 roku w skali laboratoryjnej, w którym występowali zjawiska podobne do dynamiki systemu Lorenza. Nicco uproszczony obwód elektryczny Leona Chua można opisać następującymi równaniami

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_2 - v_1) - f(v_1)] & \left[ \frac{dv_1}{dt} \right] &= \left[ \frac{-C}{C_1} \frac{C}{C_1} 0 \right] \left[ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} f(v_1) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3] & \Leftrightarrow \frac{dv_2}{dt} &= \left[ \frac{C}{C_2} -\frac{C}{C_2} \frac{1}{C_2} 0 \right] \left[ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \right] \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L} v_2 & \frac{di_3}{dt} &= 0 \quad -\frac{1}{L} -b \end{aligned} \quad (14.2)$$

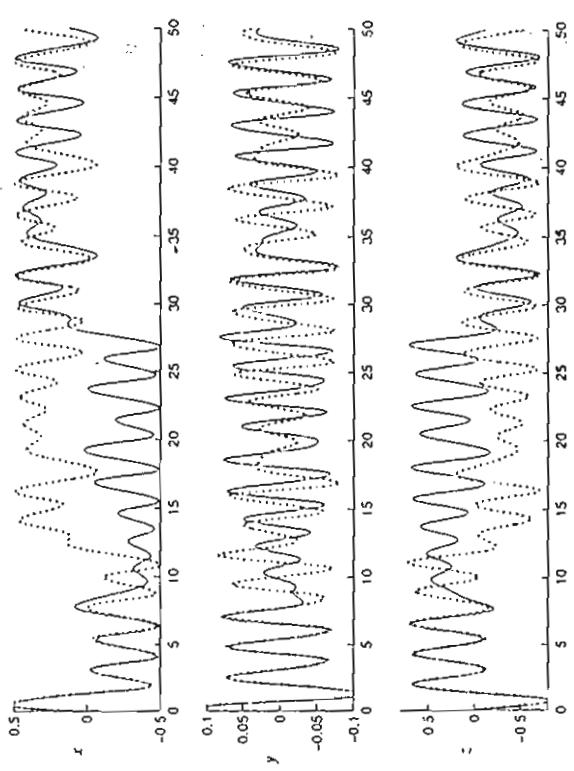
gdzie  $f(v_1)$  odpowiada za nieliniową oporność realizowaną fizycznie na wiele sposobów. Zazwyczaj za pomocą odpowiedniego wzmacniacza operacyjnego (przykładowa realizacja obwodu Chua jest pokazana na rys. 14.3). Bardzo podobne efekty „chaotyczne” można uzyskać w układzie równań różniczkowych z nielinowością  $f(v_1)$  będącą wielomianem trzeciego stopnia oraz ze współczynnikami odpowiednio przeskalowanymi. Otrzymano w ten sposób następujący układ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x^3 - cx) & \dot{x} &= \left[ \begin{array}{c} -\alpha c \quad \alpha y \quad 0 \\ 1 \quad -1 \quad 1 \\ 0 \quad -\beta \quad 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} -\alpha x^3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \dot{y} &= x - y + z & \dot{y} &= \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \\ \dot{z} &= -\beta y & \dot{z} &= 0 \end{aligned} \quad (14.3)$$



Rys. 14.3. Obwód elektryczny Chua

Dla takiego systemu przy parametrach  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 16$  i  $c = -0.143$  uzyskano trajektorie pokazane na rysunkach 14.4 i 14.5.



Rys. 14.5. Wrażliwość na warunki początkowe obwodu Chua – wykres ciągły:

$$x_0 = 0, 1, y_0 = 0, 1, z_0 = 0, 1, \text{ wykres kropkowany: } x_0 = 0, 10, y_0 = 0, 1, z_0 = 0, 1$$

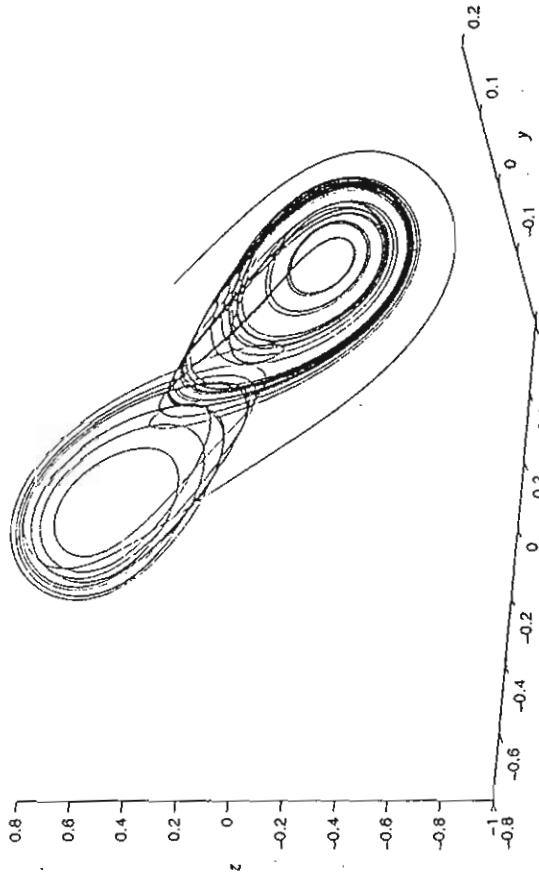
Więcej informacji na temat obwodu Chua można znaleźć np. w pracach (Ogorzański 1999; Galias 2003; Huang *et al.* 1996). Ponownie należy podkreślić, że wykresy uzyskane są numerycznie, jednakże pokrywają się one względnie dokładnie z przebiegiem uzyskiwanym na oscyloskopie.

#### 14.4. Odwzorowanie logistyczne

Odwzorowanie logistyczne  $f(x; K) = Kx(1-x)$  jest jednym z klasycznych przykładów odwzorowania, które pozwala utworzyć dyskretny układ o charakterze chaotycznym (np. Kudrewicz 1993). Nieliniowe równanie różnicowe pierwszego rzędu tworzy się np. w następujący sposób:

$$x(i+1) = f(x(i); K), \quad f(x; K) = Kx(1-x) = Kx - Kx^2, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli  $K \in [0, 4]$ ,  $x \in [0, 1]$  to  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Dobierając odpowiednie  $K$  i  $x(0)$ , możemy uzyskać różne zachowania trajektorii naszego układu dyskretnego. Wrażliwość na warunek początkowy ilustruje rysunek 14.6.



Rys. 14.4. Przykładowa trajektoria fazowa obwodu Chua z nieliniowością wielomianową

Ważnym rezultatem związанныm z chaotycznymi układami dyskretnymi jest następujące (będące wnioskiem z twierdzenia Szarkowskiego) twierdzenie.

Twierdzenie (zob. np. Miltkowski 2000, s. 67)

Jeżeli przy pewnym  $K$  odwzorowanie  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ma trajektorię o okresie równym 3, to ma również trajektorię o okresie równym dowolnej liczbie naturalnej.

Przykład jest pokazany na rysunku 14.7.

## 14.5. Zadania do rozwiązymania

### Zadanie 14.1

Zamodelować w MATLAB-ie system Lorenza dla podanych parametrów. Zaobserwować wrażliwość na warunki początkowe. Zmieniając wartości parametru  $r$ , oszacować zmiany dynamiki układu.

### Zadanie 14.2

Zamodelować obwód Chua z nieliniowością wielomianową (równanie (14.3)) i zbadać wpływ parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $c$  na dynamikę układu. Zaobserwować przykłady wrażliwości na warunki początkowe.

### Zadanie 14.3

Zamodelować odwzorowanie logistyczne, dobrąc takie  $K$  oraz warunki poczatkowe, aby zaobserwować zachowania „chaotyczne”. Dobrać takie  $K$ , aby uzyskać trajektorię o okresie 3 (czyli  $x(i+3) = x(i)$ ), a następnie zilustrować twierdzenie Szarkowskiego pokazując trajektorie o innych naturalnych okresach.

## 14.6. Literatura

Galias Z. (2003): *Metody arytmetyki przedziałowej w badaniu układów nielinijowych*. UWND AGH, Kraków (dostępna w Internecie <http://chopin.zet.agh.edu.pl/~galias/publ.html>).

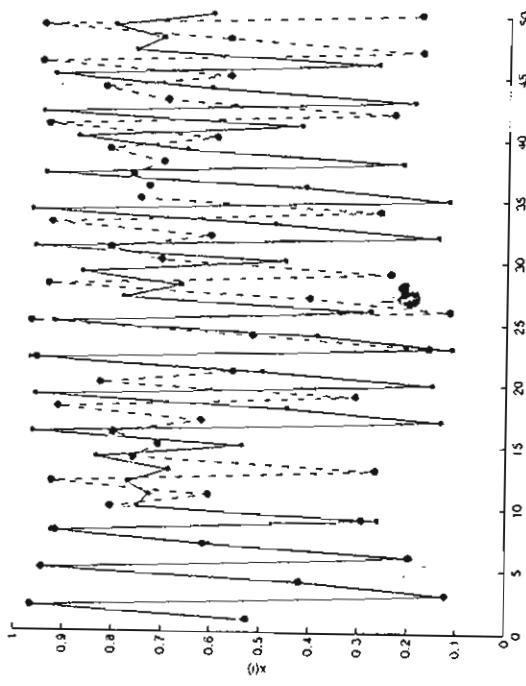
Huang A., Wu CW, Franz M., Pivka L. (1996): *Chua's equation with cubic nonlinearity*. Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 6, no. 12, 2175–2222.

Kudrewicz J. (1993): *Fraktały i chaos*. WNT, Warszawa.

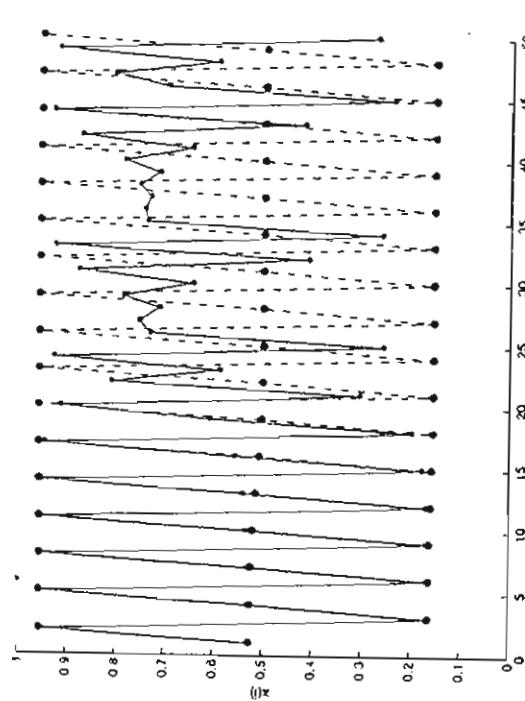
Miltkowski W. (2000): *Systemy dynamiczne – Materiały uzupełniające do wykłdu*. Wydawnictwa Wydziału Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki AGH, Kraków.

Ogorzałek M. (1991): *Drgania chaotyczne w autonomicznych obwodach elektrycznych*. Elektrotechnika, vol. 20, UWND AGH, Kraków.

Stewart I. (2001): *Czy Bóg gra w kości? – nowa matematyka chaosu*. PWN, Warszawa.



Rys. 14.6. Wrażliwość na warunki początkowe w odwzorowaniu logistycznym, różnica między warunkami początkowymi 0,001. Wykres (\*)  $x(0) = 0,528$ , wykres (•)  $x(0) = 0,527$



Rys. 14.7. Mała różnica warunków początkowych pokazuje, że system z trajektorią o okresie 3 (\*) ma także trajektorie o innych okresach (•)

