



Universidad de Concepción

Encargo 01

Teoría de Circuitos - 510361

José Ignacio Rosas Sepúlveda

Junio 2025

Parte 1 - Circuito RLC

1. Ejercicio 1

Para el siguiente circuito RLC, la tensión de entrada tiene una amplitud de 50 Volts a una frecuencia de 100 Hz. El desfase en la fuente es nulo. Determine:

- La expresión para la corriente i .
- El valor efectivo de la tensión de entrada y la corriente i .
- El desfase de la corriente sobre la carga RLC.
- Indique la frecuencia de resonancia y comente acerca de la eficiencia del circuito.

Todas las resistencias tienen un valor de $500\ \Omega$, las capacitancias un valor de $10\ \mu\text{F}$ y las bobinas un valor de $100\ \text{mH}$.

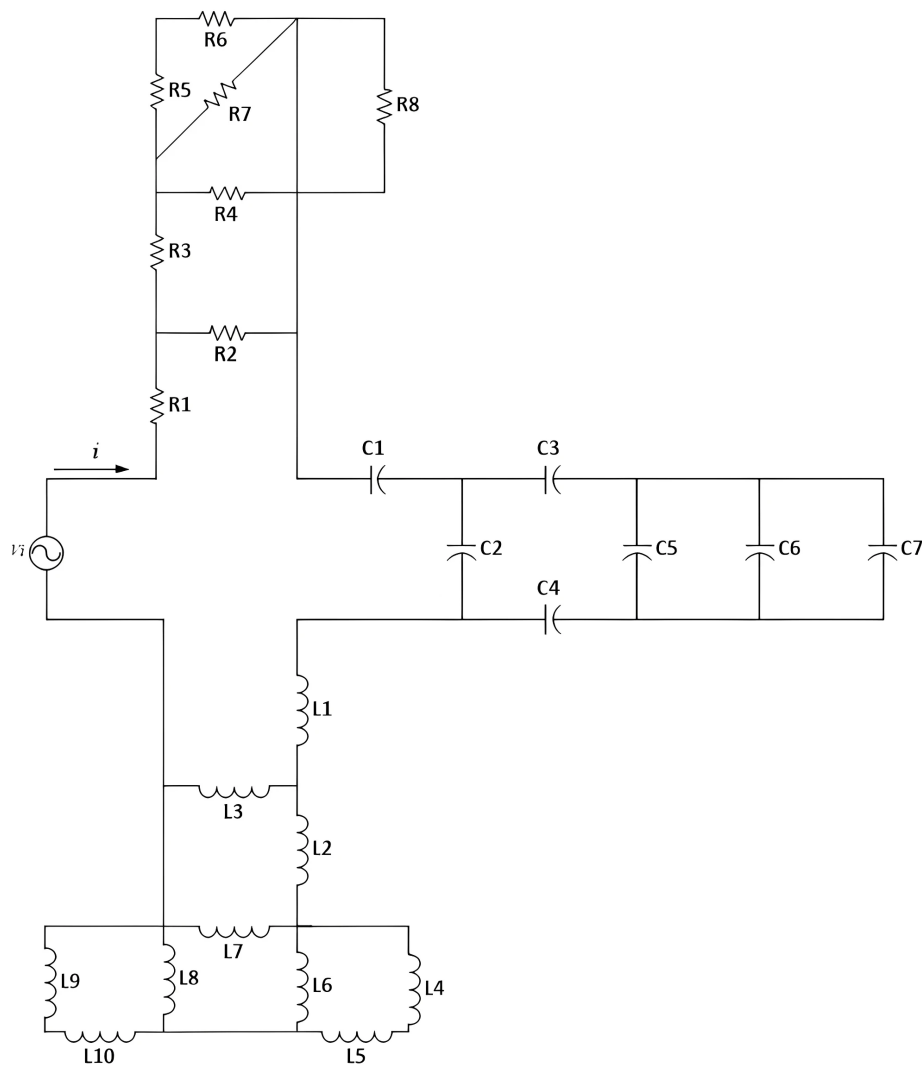


Figura 1: Circuito a analizar.

1.1. Cálculo de la resistencia equivalente total:

Considerando que todas las resistencias tienen el mismo valor $R_i = 500 \, \Omega$, procedemos a calcular la resistencia total del circuito paso a paso, identificando cada resistencia equivalente con subíndices numerados.

- En primer lugar, calculamos la resistencia equivalente de R_5 y R_6 en serie:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq } 1} &= R_5 + R_6 \\ &= 500 \, \Omega + 500 \, \Omega \\ &= 1000 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq } 1} = 1000 \, \Omega. \quad (1.1)$$

- Esta resistencia equivalente (1.1) está en paralelo con R_7 , por tanto:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq } 2} &= \left(\frac{1}{R_{\text{eq } 1}} + \frac{1}{R_7} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{1000 \, \Omega} + \frac{1}{500 \, \Omega} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3}{1000} \right)^{-1} \\ &= 333.\bar{3} \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta segunda resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq } 2} = 333.\bar{3} \, \Omega.$$

Dado que el nodo donde confluyen $R_5 + R_6$ y R_7 está conectado directamente al nodo final mediante un conductor ideal, se produce un **cortocircuito** en paralelo con R_8 , por lo que esta última puede descartarse del análisis.

- Luego, $R_{\text{eq } 2}$ está en paralelo con R_4 , por lo que:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq } 3} &= \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{\text{eq } 2}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{500 \, \Omega} + \frac{1}{333.\bar{3} \, \Omega} \right)^{-1} \\ &\approx 200 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta tercera resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq } 3} = 200 \, \Omega. \quad (1.2)$$

- A continuación, sumamos esta resistencia (1.2) con R_3 , ya que están en serie:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq } 4} &= R_3 + R_{\text{eq } 3} \\ &= 500 \, \Omega + 200 \, \Omega \\ &= 700 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cuarta resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq } 4} = 700 \, \Omega. \quad (1.3)$$

- Esta resistencia (1.3) está en paralelo con R_2 , por lo que:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq } 5} &= \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\text{eq } 4}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{500 \, \Omega} + \frac{1}{700 \, \Omega} \right)^{-1} \\ &\approx 292 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cuarta resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq } 5} \approx 292 \, \Omega.$$

- Finalmente, sumamos esta última resistencia $R_{\text{eq } 5}$ con R_1 , para obtener la resistencia total del circuito:

$$\begin{aligned} R_{\text{total}} &= R_1 + R_{\text{eq } 5} \\ &= 500 \, \Omega + 292 \, \Omega \\ &= 792 \, \Omega. \end{aligned}$$

Así, la **resistencia total** del circuito es:

$$R_{\text{total}} = 792 \, \Omega.$$

1.2. Cálculo de la capacitancia equivalente total:

Considerando que todos los capacitores tienen el mismo valor $C_i = 10 \, \mu\text{F}$, procedemos a calcular la capacitancia total del circuito paso a paso, identificando cada capacitancia equivalente con subíndices numerados.

- En primer lugar, los capacitores C_6 y C_7 están conectados en paralelo, por lo que su capacitancia equivalente es:

$$\begin{aligned} C_{\text{eq } 1} &= C_6 + C_7 \\ &= 10 \, \mu\text{F} + 10 \, \mu\text{F} \\ &= 20 \, \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera capacitancia equivalente es:

$$C_{\text{eq } 1} = 20 \, \mu\text{F}. \quad (1.4)$$

- Esta capacitancia equivalente (1.4) está en paralelo con C_5 , por lo que:

$$\begin{aligned} C_{\text{eq } 2} &= C_{\text{eq } 1} + C_5 \\ &= 20 \, \mu\text{F} + 10 \, \mu\text{F} \\ &= 30 \, \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda capacitancia equivalente es:

$$C_{\text{eq } 2} = 30 \, \mu\text{F}. \quad (1.5)$$

- Esta capacitancia (1.5) está en serie con los capacitores C_3 y C_4 , por lo que su combinación se evalúa mediante:

$$\begin{aligned} C_{\text{eq } 3} &= \left(\frac{1}{C_{\text{eq } 2}} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{30 \, \mu\text{F}} + \frac{1}{10 \, \mu\text{F}} + \frac{1}{10 \, \mu\text{F}} \right)^{-1} \\ &\approx 4,3 \, \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta tercera capacitancia equivalente es:

$$C_{\text{eq } 3} \approx 4,3 \, \mu\text{F}. \quad (1.6)$$

- Esta capacitancia (1.6) está en paralelo con C_2 , por lo que:

$$\begin{aligned} C_{\text{eq } 4} &= C_{\text{eq } 3} + C_2 \\ &= 4,3 \mu\text{F} + 10 \mu\text{F} \\ &= 14,3 \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cuarta capacitancia equivalente es:

$$C_{\text{eq } 4} \approx 14,3 \mu\text{F}. \quad (1.7)$$

- Finalmente, esta capacitancia $C_{\text{eq } 4}$ está en serie con C_1 , por lo que la capacitancia total del circuito es:

$$\begin{aligned} C_{\text{total}} &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{\text{eq } 4}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{10 \mu\text{F}} + \frac{1}{14,3 \mu\text{F}} \right)^{-1} \\ &\approx 5,9 \mu\text{F}. \end{aligned}$$

Así, la **capacitancia total** del circuito es:

$$C_{\text{total}} = 5,9 \times 10^{-6} \text{ F}.$$

1.3. Cálculo de la inductancia equivalente total:

Considerando que todas las bobinas tienen el mismo valor $L_i = 100 \text{ mH}$, procedemos a calcular la inductancia total del circuito paso a paso, identificando cada inductancia equivalente con subíndices numerados.

- En primer lugar, las bobinas L_9 y L_{10} están conectadas en serie, por lo que su inductancia equivalente es:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 1} &= L_9 + L_{10} \\ &= 100 \text{ mH} + 100 \text{ mH} \\ &= 200 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera inductancia equivalente es:

$$L_{\text{eq } 1} = 200 \text{ mH}. \quad (1.8)$$

- Esta inductancia (1.8) está en paralelo con L_8 , por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 2} &= \left(\frac{1}{L_{\text{eq } 1}} + \frac{1}{L_8} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{200 \text{ mH}} + \frac{1}{100 \text{ mH}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3}{200} \right)^{-1} \\ &\approx 66,7 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda inductancia equivalente es:

$$L_{\text{eq } 2} \approx 66,7 \text{ mH}. \quad (1.9)$$

- Por otra parte, las bobinas L_4 y L_5 están en serie, por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 3} &= L_4 + L_5 \\ &= 100 \text{ mH} + 100 \text{ mH} \\ &= 200 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{eq } 3} = 200 \text{ mH}. \quad (1.10)$$

- Esta inductancia (1.10) está en paralelo con L_6 , por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 4} &= \left(\frac{1}{L_{\text{eq } 3}} + \frac{1}{L_6} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{100} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{3}{200} \right)^{-1} \\ &\approx 66,7 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{eq } 4} \approx 66,7 \text{ mH}. \quad (1.11)$$

- Las dos inductancias equivalentes anteriores, $L_{\text{eq } 2}$ y $L_{\text{eq } 4}$, están en serie, por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 5} &= L_{\text{eq } 2} + L_{\text{eq } 4} \\ &\approx 66,7 \text{ mH} + 66,7 \text{ mH} \\ &= 133,4 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{eq } 5} \approx 133,4 \text{ mH}. \quad (1.12)$$

- Esta inductancia está en paralelo con L_7 , por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 6} &= \left(\frac{1}{L_{\text{eq } 5}} + \frac{1}{L_7} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{133,4 \text{ mH}} + \frac{1}{100 \text{ mH}} \right)^{-1} \\ &\approx 57,2 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{eq } 6} \approx 57,2 \text{ mH}. \quad (1.13)$$

- Esta inductancia está en serie con L_2 , por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 7} &= L_{\text{eq } 6} + L_2 \\ &= 57,2 \text{ mH} + 100 \text{ mH} \\ &= 157,2 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{eq } 7} = 157,2 \text{ mH}. \quad (1.14)$$

- Esta inductancia está en paralelo con L_3 , por lo que:

$$\begin{aligned} L_{\text{eq } 8} &= \left(\frac{1}{L_{\text{eq } 7}} + \frac{1}{L_3} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{157,2 \text{ mH}} + \frac{1}{100 \text{ mH}} \right)^{-1} \\ &\approx 61,13 \text{ mH}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$L_{\text{eq } 8} \approx 61,1 \text{ mH}. \quad (1.15)$$

- Finalmente, esta inductancia equivalente está en serie con L_1 , por lo que la inductancia total del circuito es:

$$\begin{aligned} L_{\text{total}} &= L_1 + L_{\text{eq } 8} \\ &= 100 \text{ mH} + 61,1 \text{ mH} \\ &= 161,1 \text{ mH} . \end{aligned}$$

Así, la **inductancia total** del circuito es:

$$L_{\text{total}} = 161,1 \times 10^{-3} \text{ H} .$$

1.4. Circuito RLC equivalente

Considerando los valores previamente determinados para la resistencia total, la capacitancia total y la inductancia total, podemos representar el sistema mediante un circuito RLC equivalente, mostrado en la Figura 2:

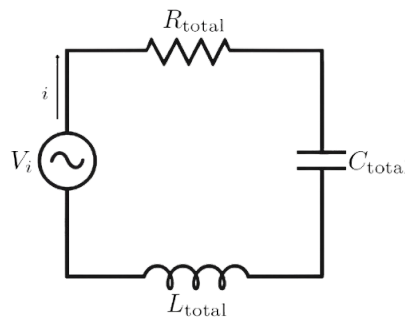


Figura 2: Circuito RLC equivalente.

Los parámetros del circuito son los siguientes:

- Resistencia total:**

$$R_{\text{total}} = 792 \, \Omega . \quad (1.16)$$

- Capacitancia total:**

$$C_{\text{total}} = 5,9 \times 10^{-6} \text{ F} . \quad (1.17)$$

- Inductancia total:**

$$L_{\text{total}} = 161,1 \times 10^{-3} \text{ H} . \quad (1.18)$$

La fuente de tensión es alterna, con una frecuencia de $f = 100 \text{ Hz}$ y una amplitud de $V_i = 50 \text{ V}$. A partir de la frecuencia, se calcula la frecuencia angular asociada:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \cdot 100 \\ &= 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la frecuencia angular está dada por:

$$\omega = 200\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}} . \quad (1.19)$$

1.5. Cálculo de la intensidad de corriente

Para determinar la intensidad de corriente que circula por el circuito RLC equivalente, comenzamos calculando su impedancia total compleja. En un circuito RLC en serie, la impedancia está dada por la expresión:

$$Z = R_{\text{total}} + i \left(\omega L_{\text{total}} - \frac{1}{\omega C_{\text{total}}} \right). \quad (1.20)$$

Sustituyendo en (1.20) los valores obtenidos previamente para R_{total} , L_{total} , C_{total} y la frecuencia angular ω , correspondientes a las ecuaciones (1.16), (1.17), (1.18) y (1.19), se tiene:

$$\begin{aligned} Z &= 792 + i \left(200\pi \cdot 161,1 \times 10^{-3} - \frac{1}{200\pi \cdot 5,9 \times 10^{-6}} \right) \Omega \\ &= 792 - i168,5 \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la impedancia total del circuito resulta ser:

$$Z = 792 - i168,5 \Omega. \quad (1.21)$$

A continuación, calculamos el módulo de la impedancia, necesario para determinar la amplitud de la corriente alterna:

$$\|Z\| = \sqrt{\text{Re}(Z)^2 + \text{Im}(Z)^2}. \quad (1.22)$$

Sustituyendo los valores numéricos en (1.22):

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{792^2 + (-168,5)^2} \\ &= \sqrt{655656,25} \\ &\approx 809,7 \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el módulo de la impedancia es:

$$\|Z\| = 809,7 \Omega. \quad (1.23)$$

La magnitud de la corriente alterna está dada por:

$$i = \frac{V_i}{\|Z\|}, \quad (1.24)$$

Sustituyendo $V_i = 50 \text{ V}$ y (1.23) en (1.24), obtenemos:

$$i = 61,8 \times 10^{-3} \text{ A}. \quad (1.25)$$

1.6. Valor efectivo de la tensión de entrada y la corriente

El **valor efectivo de la tensión** se define como:

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_i}{\sqrt{2}}, \quad (1.26)$$

donde $V_i = 50 \text{ V}$ es la amplitud de la fuente alterna. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} V_{\text{ef}} &= \frac{50}{\sqrt{2}} \\ &= 25\sqrt{2} \\ &\approx 35,36 \text{ V}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor eficaz de la tensión de entrada es:

$$V_{\text{ef}} \approx 35,36 \text{ V}. \quad (1.27)$$

De manera análoga, el valor **efectivo de la corriente** se calcula como:

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{\|Z\|}, \quad (1.28)$$

donde $\|Z\| = 809,7 \Omega$ es el módulo de la impedancia total. Sustituyendo (1.27) en (1.28), se tiene:

$$\begin{aligned} I_{\text{ef}} &= \frac{35,36 \text{ V}}{809,7 \Omega} \\ &\approx 43,7 \times 10^{-3} \text{ A}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor eficaz de la corriente es:

$$I_{\text{ef}} \approx 43,7 \text{ mA}. \quad (1.29)$$

1.7. Ángulo de desfase

El ángulo de desfase entre la tensión y la corriente esta definido por:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \right). \quad (1.30)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan \left(\frac{-168,5}{792} \right) \\ &\approx -0,2 \text{ rad}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el angulo de desfase queda determinado por:

$$\phi = -0,2 \text{ rad}. \quad (1.31)$$

El signo negativo indica que la corriente se adelanta respecto de la tensión, lo cual es característico de un circuito en el que la reactancia capacitiva X_C domina sobre la inductiva X_L . Es decir, el circuito presenta un comportamiento **predominantemente capacitivo**.

1.8. Frecuencia de resonancia y eficiencia del circuito

En un circuito RLC en serie, la **frecuencia angular de resonancia** ω_0 se define como la frecuencia a la cual las reactancias inductiva y capacitiva se cancelan mutuamente, resultando en una impedancia puramente resistiva. Es decir, cuando la parte imaginaria de la impedancia (1.20) es nula:

$$\text{Im}(Z) = 0 \Rightarrow \omega_0 L_{\text{total}} - \frac{1}{\omega_0 C_{\text{total}}} = 0$$

Al despejar ω_0 se obtiene la expresión para la frecuencia angular de resonancia:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{total}} C_{\text{total}}}}. \quad (1.32)$$

Sustituyendo los valores previamente determinados para L_{total} y C_{total} :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{161,1 \times 10^{-3} \text{ H} \cdot 5,9 \times 10^{-6} \text{ F}}} \\ &\approx 1025,7 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la frecuencia angular de resonancia del circuito es:

$$\omega_0 = 1025,7 \text{ rad/s}. \quad (1.33)$$

La **frecuencia de resonancia** f_0 en hertzios se obtiene dividiendo ω_0 por 2π :

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\omega_0}{2\pi} \\ &= \frac{1025,7}{2\pi} \\ &\approx 163,2 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la frecuencia de resonancia del circuito es:

$$f_0 = 163,2 \text{ Hz} \quad (1.34)$$

El **factor de calidad** Q se define como:

$$Q = \frac{\omega_0 L_{\text{total}}}{R_{\text{total}}} \quad (1.35)$$

Sustituyendo los valores de ω_0 , L_{total} y R_{total} en (1.35):

$$Q = \frac{1025,7 \text{ rad/s} \cdot 161,1 \times 10^{-3} \text{ H}}{792 \Omega} \approx 0,2.$$

El valor obtenido para el factor de calidad, $Q \approx 0,21$, indica que el circuito presenta una respuesta ampliamente amortiguada, con fuerte disipación resistiva. En consecuencia, la eficiencia del sistema para almacenar energía en torno a la frecuencia de resonancia es baja, y el circuito no presenta un comportamiento selectivo ni resonante significativo.

2. Ejercicio 2

Dado el siguiente circuito, que se encuentra encendido por mucho tiempo, calcule la potencia disipada por el circuito completo.

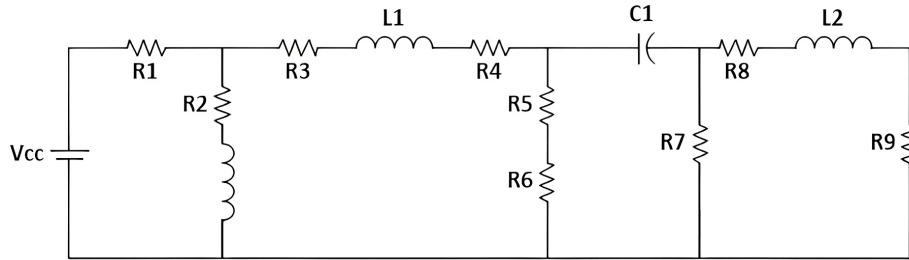


Figura 3: Circuito a analizar.

Datos del problema

- Tensión de la fuente: $V_{cc} = 40 \text{ V}$
- Resistencias: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_9 = 300 \, \Omega$
- Inductancias: $L_1 = L_2 = 150 \text{ mH}$
- Capacitancia: $C_1 = 100 \text{ nF}$

2.1. Análisis cualitativo del circuito

Se observa que el circuito posee una fuente de tensión en corriente continua. Dado que ha permanecido encendido durante un **tiempo prolongado**, se asume que se encuentra en **régimen estacionario en corriente continua**. En este régimen, las bobinas L_1 y L_2 se comportan como **cortocircuitos**, mientras que el capacitor C_1 actúa como un **circuito abierto**.

Como consecuencia, la rama que contiene al capacitor C_1 no permite el paso de corriente, lo que implica que los elementos R_7 , R_8 , L_2 y R_9 no participan en el flujo de corriente ni contribuyen a la disipación de potencia. Por tanto, los únicos elementos activos del circuito son las resistencias R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 y R_6 .

2.2. Análisis de la resistencia equivalente

Se observa que las resistencias R_3 , R_4 , R_5 y R_6 se encuentran conectadas en serie, por lo que pueden agruparse en una sola resistencia equivalente:

$$\begin{aligned} R_{eq\ 1} &= R_3 + R_4 + R_5 + R_6 \\ &= 4 \cdot 300 \, \Omega \\ &= 1200 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera resistencia equivalente es:

$$R_{eq\ 1} = 1200 \, \Omega. \quad (2.1)$$

Dicha resistencia equivalente (2.1) se encuentra en paralelo con la resistencia R_2 , por lo que se obtiene una nueva resistencia equivalente:

$$\begin{aligned} R_{\text{eq } 2} &= \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\text{eq } 1}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{300 \, \Omega} + \frac{1}{1200 \, \Omega} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{5}{1200} \right)^{-1} \\ &= 240 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta segunda resistencia equivalente es:

$$R_{\text{eq } 2} = 240 \, \Omega. \quad (2.2)$$

Finalmente, la resistencia equivalente (2.2) se encuentra en serie con la resistencia R_1 , por lo que la resistencia total del circuito es:

$$\begin{aligned} R_{\text{total}} &= R_1 + R_{\text{eq } 2} \\ &= 300 \, \Omega + 240 \, \Omega \\ &= 540 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la resistencia total del circuito es:

$$R_{\text{total}} = 540 \, \Omega. \quad (2.3)$$

2.3. Cálculo de la potencia disipada

Conocida la resistencia total del circuito (2.3) en régimen estacionario, y dado que la fuente de tensión entrega un voltaje constante de $V_{\text{cc}} = 40 \, \text{V}$, la potencia disipada por el circuito completo se determina mediante la **ley de Joule**:

$$P = \frac{V_{\text{cc}}^2}{R_{\text{total}}}. \quad (2.4)$$

Sustituyendo en (2.4):

$$\begin{aligned} P &= \frac{(40 \, \text{V})^2}{540 \, \Omega} \\ &= \frac{1600 \, \text{V}^2}{540 \, \Omega} \\ &\approx 2,96 \, \text{W}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la potencia total disipada por el circuito es:

$$P = 2,96 \, \text{W}. \quad (2.5)$$

Parte 2 - Señales

Usando comandos de referencia de MATLAB indicados en ANEXOS, y de acuerdo con video de referencia, grafique las siguientes señales:

1. $y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$
 - El vector de tiempo debe generarse entre 0 y 6π .
 - Graficar luego la función exponencial.
2. $y_2(t) = \sin(\omega_1 t) \cdot \sin(\omega_2 t)$
 - El vector de tiempo debe generarse entre 0 y 6π .
 - La frecuencia angular $\omega_1 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$ y $\omega_2 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$

A continuación, implementamos en Python las bibliotecas `numpy` y `matplotlib` para generar las señales solicitadas¹: Importamos las librerías necesarias en nuestro script mediante el siguiente código:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

Definimos una variable `t`, la cual representa el vector de tiempo. Utilizamos la función `linspace` para generar un arreglo de 1000 valores igualmente espaciados entre 0 y 6π . Esta variable será empleada para graficar ambas señales junto con sus respectivas envolventes.

```
1 t = np.linspace(0, 6 * np.pi, 1000)
```

1. Señal $y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$

Definimos la señal $y_1(t)$ mediante la siguiente expresión en Python:

```
1 y1 = np.exp(-0.1 * t) * np.sin(2 * t)
```

A continuación, generamos su representación gráfica utilizando `matplotlib`, incorporando etiquetas a los ejes, título, leyenda explicativa y cuadrícula de referencia:

```
1 plt.figure(figsize=(10, 4))
2 plt.plot(t, y1, label=r'$y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$', color='blue')
3 plt.title(r'Señal $y_1(t)$')
4 plt.xlabel(r'Tiempo $t$ [s]')
5 plt.ylabel(r'Amplitud')
6 plt.legend()
7 plt.grid(True)
8 plt.tight_layout()
9 plt.show()
```

¹Debido a problemas técnicos al intentar acceder a MATLAB, y con autorización del profesor de la asignatura, el desarrollo de esta sección fue realizado utilizando el lenguaje de programación Python.

Se obtuvo la siguiente figura:

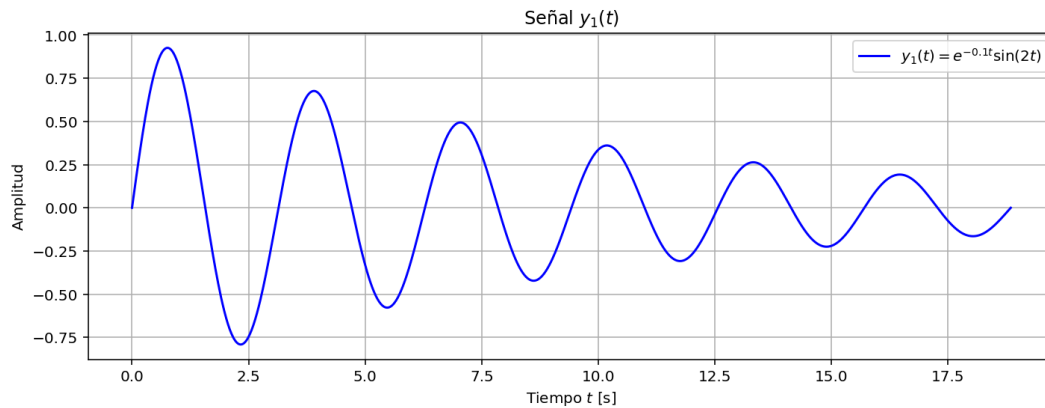


Figura 4: Gráfico generado en Python de la señal $y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$.

Definimos a continuación la función exponencial correspondiente a la envolvente de la señal:

```
1 exponencial = np.exp(-0.1 * t)
```

Luego representamos gráficamente la envolvente superior e inferior mediante líneas discontinuas, manteniendo la coherencia visual con etiquetas, leyenda y grilla:

```
1 plt.figure(figsize=(10, 4))
2 plt.plot(t, exponencial, 'r--', label=r'Envolvente superior $e^{-0.1t}$')
3 plt.plot(t, -exponencial, 'r--', label=r'Envolvente inferior $-e^{-0.1t}$')
4 plt.title(r'Envolvente de la señal $y_1(t)$')
5 plt.xlabel(r'Tiempo $t$ [s]')
6 plt.ylabel(r'Amplitud')
7 plt.legend()
8 plt.grid(True)
9 plt.tight_layout()
10 plt.show()
```

Se obtuvo la figura:

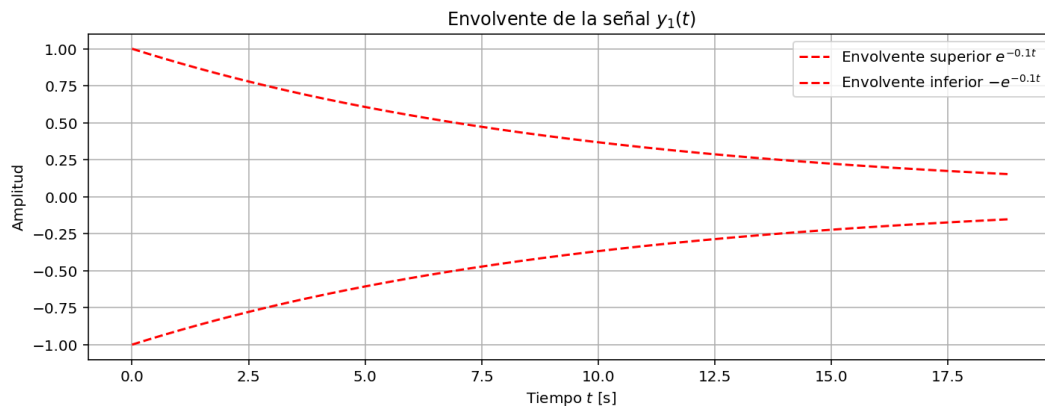


Figura 5: Gráfico generado en Python de la envolvente de la señal $y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$.

Finalmente, se grafican de forma conjunta la señal $y_1(t)$ y sus envolventes, generando una visualización completa de la modulación de amplitud por decaimiento exponencial:

```

1 plt.figure(figsize=(10, 4))
2 plt.plot(t, y1, label=r'$y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$', color='blue')
3 plt.plot(t, exponencial, 'r--', label=r'Envolvente superior $e^{-0.1t}$')
4 plt.plot(t, -exponencial, 'r--', label=r'Envolvente inferior $-e^{-0.1t}$')
5 plt.title(r'Señal $y_1(t)$ y su envolvente')
6 plt.xlabel(r'Tiempo $t$ [s]')
7 plt.ylabel(r'Amplitud')
8 plt.legend()
9 plt.grid(True)
10 plt.tight_layout()
11 plt.show()

```

Se obtiene la figura:

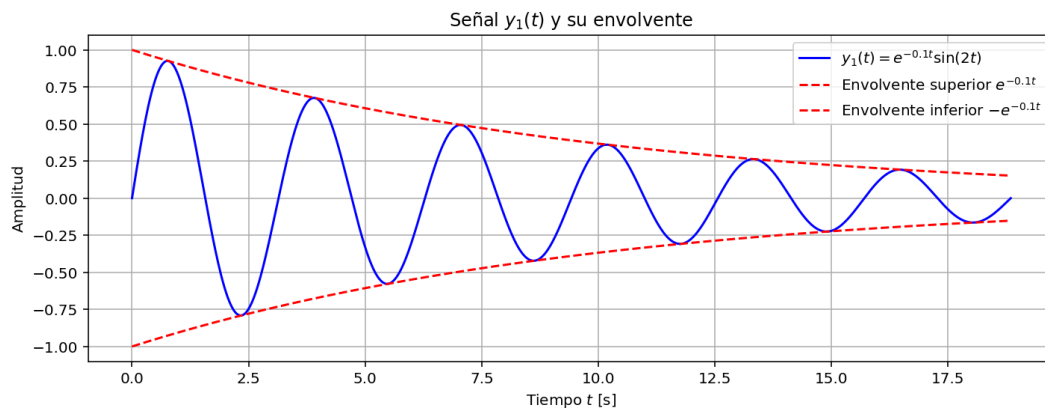


Figura 6: Gráfico generado en Python de la señal $y_1(t) = e^{-0.1t} \sin(2t)$ y su envolvente.

2. Señal $y_2(t) = \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t)$

Definimos las frecuencias angulares y la señal $y_2(t)$ mediante:

```
1 omega1 = 1
2 omega2 = 100
3 y2 = np.sin(omega1 * t) * np.sin(omega2 * t)
```

Construimos su gráfico utilizando `matplotlib`, incorporando etiquetas, leyenda y cuadrícula:

```
1 plt.figure(figsize=(25, 5))
2 plt.plot(t, y2, color='purple', label=r'$y_2(t) = \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)$')
3 plt.title(r'Señal $y_2(t) = \sin(1t)\sin(100t)$')
4 plt.xlabel(r'Tiempo $t$ [s]')
5 plt.ylabel(r'Amplitud')
6 plt.legend()
7 plt.grid(True)
8 plt.tight_layout()
9 plt.show()
```

Se obtuvo la siguiente figura:

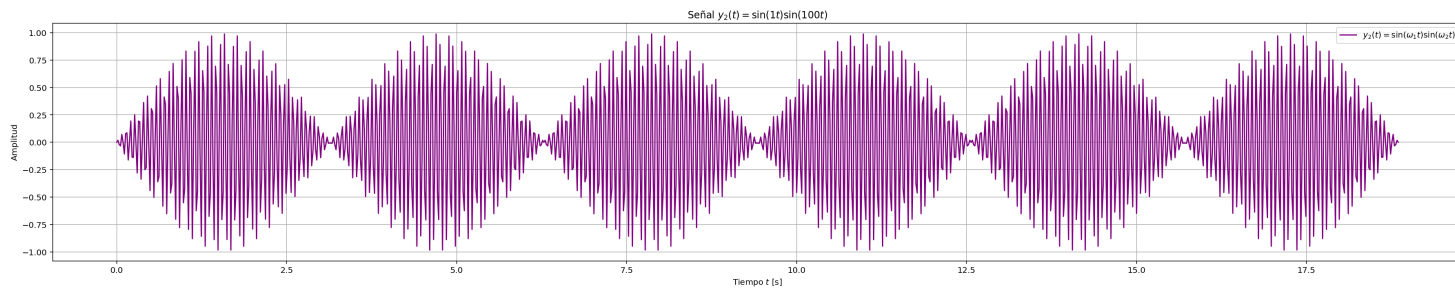


Figura 7: Gráfico generado en Python de la señal $y_2(t) = \sin(1t)\sin(100t)$.

3. Convolución de Señales

La convolución es una operación fundamental en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI), que permite determinar la salida $y[n]$ de un sistema ante una entrada $x[n]$, conociendo su respuesta al impulso $h[n]$:

$$y[n] = (x * h)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k]$$

Un ejemplo físico representativo es el de una palmada en una habitación vacía. La palmada corresponde a la señal de entrada $x[n]$; la respuesta natural del recinto, que incluye reflexiones y ecos, constituye la respuesta al impulso $h[n]$; y el sonido reverberado que finalmente se percibe corresponde a la salida $y[n]$, resultado de la convolución entre ambas señales.

Ejemplo en Python:

A continuación, se muestra un ejemplo donde se convolucionan un impulso con una respuesta discreta que modela una reverberación atenuada:

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from scipy.signal import convolve
4
5  # Entrada: impulso en t = 5
6  x = np.zeros(30)
7  x[5] = 1
8
9  # Respuesta al impulso: eco atenuado
10 h = np.array([0.9, 0.6, 0.3, 0.1])
11
12 # Convolución: salida del sistema
13 y = convolve(x, h)
14
15 # Gráficos
16 plt.figure(figsize=(8, 6))
17
18 # Entrada y respuesta
19 plt.subplot(2, 1, 1)
20 plt.stem(np.arange(len(x)), x, linefmt='b-', markerfmt='bo', basefmt=" ", label='x[n]')
21 plt.stem(np.arange(len(h)), h, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt=" ", label='h[n]')
22 plt.title("Entrada y respuesta al impulso")
23 plt.xlabel("n")
24 plt.ylabel("Amplitud")
25 plt.legend()
26 plt.grid(True)
27
28 # Salida
29 plt.subplot(2, 1, 2)
30 plt.stem(np.arange(len(y)), y, linefmt='g-', markerfmt='go', basefmt=" ")
31 plt.title("Salida del sistema: y[n] = x[n] * h[n]")
32 plt.xlabel("n")
33 plt.ylabel("y[n]")
34 plt.grid(True)
35
```

```

36 plt.tight_layout()
37 plt.show()

```

Este ejemplo ilustra cómo una señal discreta puede ser modificada por la dinámica de un sistema. La salida $y[n]$ refleja cómo la respuesta al impulso $h[n]$ afecta temporalmente al impulso $x[n]$, generando una señal extendida y suavizada.

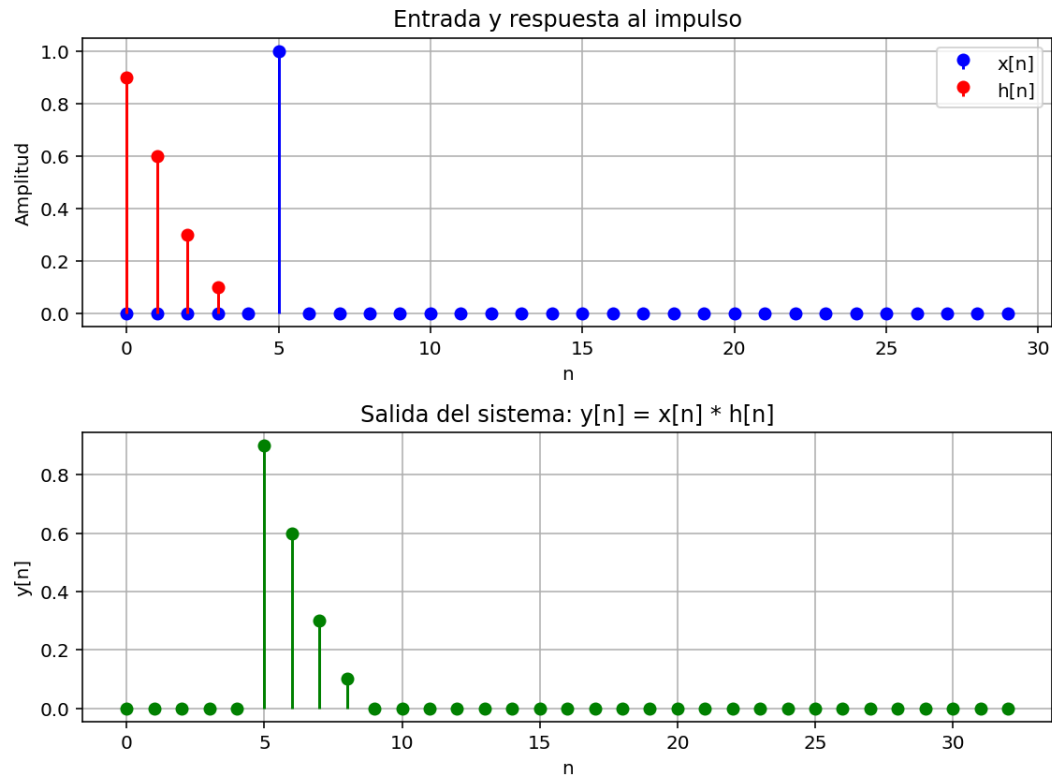


Figura 8: Gráfico de la señal de entrada, respuesta al impulso y salida del sistema tras la convolución.

4. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) es un algoritmo eficiente para calcular la Transformada Discreta de Fourier (DFT), utilizada para analizar el contenido frecuencial de una señal discreta en el tiempo.

La DFT de una señal $x[n]$ está definida por la expresión:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

La FFT reduce el costo computacional del cálculo de la DFT, y se utiliza comúnmente para identificar las frecuencias presentes en una señal, como en el análisis de vibraciones o señales acústicas.

Un ejemplo físico clásico donde se aplica la FFT es en el análisis de una cuerda vibrante, como la de una guitarra. Cuando se pulsa la cuerda, esta vibra en una combinación de frecuencias (modo fundamental y armónicos). Al aplicar la FFT a una grabación de dicha vibración, se puede obtener el espectro que muestra las componentes sinusoidales presentes en la señal.

Ejemplo en Python:

El siguiente script genera una señal compuesta por dos frecuencias puras (50 Hz y 120 Hz) y calcula su espectro usando la FFT:

```
1  # Parámetros de muestreo
2  fs = 1000 # Hz
3  t = np.linspace(0, 1, fs, endpoint=False)
4
5  # Señal compuesta por dos frecuencias
6  signal = np.sin(2 * np.pi * 50 * t) + 0.5 * np.sin(2 * np.pi * 120 * t)
7
8  # FFT
9  fft_vals = np.fft.fft(signal)
10 freqs = np.fft.fftfreq(len(signal), 1/fs)
11 magnitude = np.abs(fft_vals)
12
13 # Gráfico del espectro
14 plt.figure(figsize=(8, 3))
15 plt.plot(freqs[:fs//2], magnitude[:fs//2], color='purple')
16 plt.title("FFT de señal compuesta (50 Hz y 120 Hz)")
17 plt.xlabel("Frecuencia [Hz]")
18 plt.ylabel("Magnitud")
19 plt.grid(True)
20 plt.tight_layout()
21 plt.show()
```

El resultado muestra dos picos bien definidos en las frecuencias de 50 Hz y 120 Hz, lo cual confirma que la señal original está compuesta por dichas componentes sinusoidales.

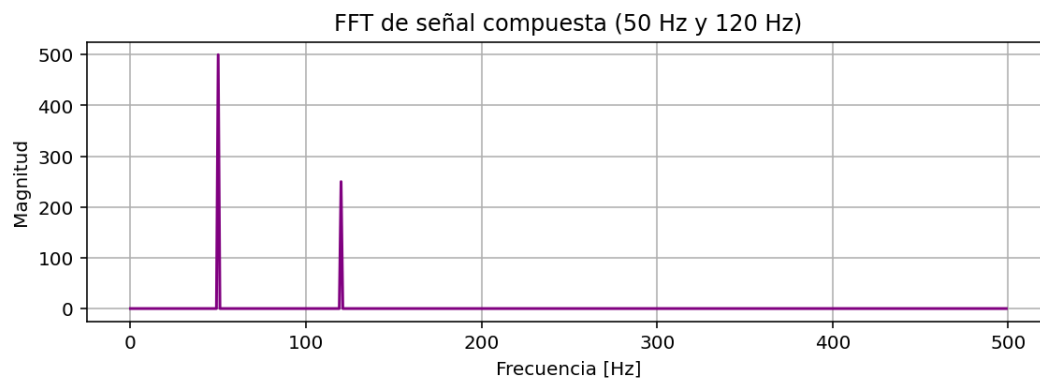


Figura 9: Espectro de magnitudes obtenido mediante la FFT de una señal compuesta.