



Universidad de Concepción

Tarea 03

Electrodinámica I

José Ignacio Rosas Sepúlveda

Noviembre 2025

Índice

1 Problema 1	2
2 Problema 2	8
2.1 Campo magnético en el exterior de la esfera a través del potencial vectorial por integración directa	8
2.2 Gráfico del campo magnético al exterior de la esfera	11
A Demostración del Potencial Newtoniano para una Esfera Uniforme	13

1. Problema 1

Una esfera conductora de radio R flota semisumergida en un líquido de constante dieléctrica κ_1 . La región sobre el líquido contiene un gas de constante dieléctrica κ_2 . Si la carga externa total sobre la esfera es Q , determine el campo eléctrico que ella produce y las densidades de carga de polarización en cada punto de su superficie.

Solución:

Consideremos un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) con **origen en el centro de la esfera**, cuyo observador se ubica en dicho punto. Alineamos los ejes de modo que el plano xy coincida con la interfase entre los dieléctricos. De esta forma, un corte transversal del sistema en el plano yz intersecando en $x = 0$ (el origen del sistema de coordenadas y centro de la esfera) es tal como el que se observa en la figura 1. Se identifica simetría azimutal en el sistema.

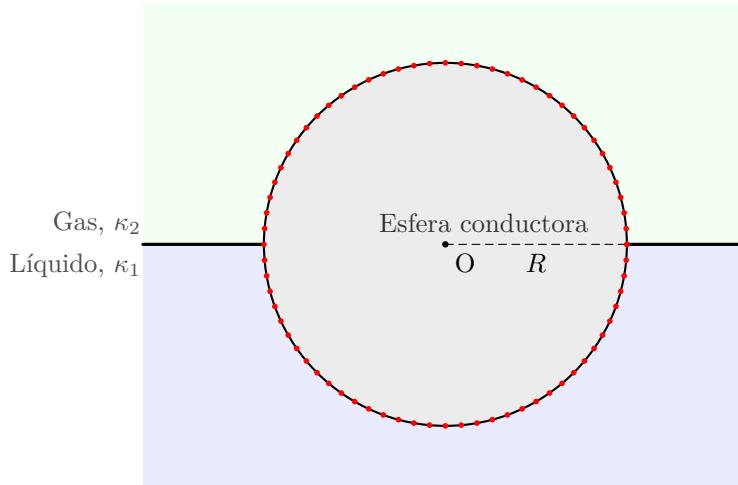


Figura 1: Esfera conductora de radio R semisumergida en la interfaz entre un líquido (constante dieléctrica κ_1) y un gas (constante dieléctrica κ_2). La esfera posee una carga total Q distribuida en su superficie.

En función de las coordenadas radial y colatitudinal (r, θ) se describe la **permittividad dieléctrica** del sistema, para todo punto en el espacio, distinguiendo el interior del conductor y las regiones ocupadas por el gas y el líquido, de modo:

$$\epsilon(r, \theta) = \begin{cases} \epsilon_0, & 0 < r < R; \\ \epsilon_0 \kappa_2, & r > R \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ \epsilon_0 \kappa_1, & r > R \wedge \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (1.1)$$

Idealizamos tanto el líquido como el gas como medios **dieleéctricos lineales e isótropos**, caracterizados por las **constants dieléctricas** κ_1 y κ_2 , respectivamente. En este tipo de medios la **polarización** \vec{P} depende local y linealmente de **EL campo eléctrico macroscópico** del sistema, \vec{E} , es decir

$$\vec{P}_i(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_i \vec{E}(\vec{r}), \quad (1.2)$$

donde: \vec{r} es un punto de observación sobre el espacio; χ_i es la **susceptibilidad eléctrica del medio**, con $i = 1, 2$ un índice que etiqueta al medio dieléctrico en cuestión.

Cabe mencionar que la susceptibilidad eléctrica se relaciona con la **constante dieléctrica** κ_i (que es el dato que nos entrega el problema para ambos medios dieléctricos) de la siguiente forma

$$\kappa_i = 1 + \chi_i \iff \chi_i = \kappa_i - 1. \quad (1.3)$$

Es por ello que podemos definir una segunda función por tramos con la cual se **describe la susceptibilidad dieléctrica**

del sistema en función de las coordenadas (r, θ) , es decir

$$\chi_e(r, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 < r < R; \\ \kappa_2 - 1, & r > R \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ \kappa_1 - 1, & r > R \wedge \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (1.4)$$

Por otra parte, el **desplazamiento eléctrico** del sistema, en las regiones de los medios dieléctricos, está dado por

$$\vec{D}_i(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}_i(\vec{r}).$$

Sustituyendo (1.2) y (1.3) en esta ecuación, se sigue

$$\begin{aligned} \vec{D}_i(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \epsilon_0 \chi_i \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_i) \vec{E}(\vec{r}) \\ &= \epsilon_0 \kappa_i \vec{E}(\vec{r}). \end{aligned}$$

En general, se describe el desplazamiento eléctrico del sistema en todo el espacio como el producto entre el campo eléctrico macroscópico, $\vec{E}(\vec{r})$, y la función que hemos definido anteriormente en (1.1), la cual describe la permitividad dieléctrica del sistema, es decir

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon(r, \theta) \vec{E}(\vec{r}). \quad (1.5)$$

Ahora por la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico, es decir, considerando el flujo de \vec{D} que atraviesa una superficie gaussiana esférica de radio r , circuncentrica a la esfera conductora, denotada por S_r que encierra solo las cargas libres Q_{free} presentes en el sistema,

$$\oint_{S_r} \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = Q_{\text{free}}.$$

Sustituyendo (1.5) en esta última ecuación, se obtiene

$$\oint_{S_r} \epsilon(r, \theta) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = Q_{\text{free}}. \quad (1.6)$$

Ahora bien, si consideramos que el radio de S_r es menor al de la esfera conductora, $r < R$, entonces la superficie gaussiana descrita en (1.6) no encierra cargas libres, es decir $Q_{\text{free}} = 0$ (Véase la Figura 2).

Físicamente esto es dado porque el sistema se encuentra en **estado estacionario**, las cargas libres del conductor están distribuidas en su totalidad sobre la superficie del mismo dada la presencia de un campo externo distinto a EL campo eléctrico macroscópico que se nos pide calcular (nótese que el campo externo contribuye a EL campo eléctrico macroscópico por principio de superposición lineal), estas cargas libres distribuidas sobre la superficie del conductor generan su propio campo eléctrico de modo que se equilibra con el campo externo anulando toda fuerza que ponga en dinámica las cargas al interior del conductor, es así como tanto física como matemáticamente podemos describir que al interior del conductor no hay cargas libres y que incluso El campo eléctrico macroscópico es nulo en dicha región.

En resumen, para $r < R$ se tiene

$$\epsilon_0 \oint_{S_r} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = 0,$$

con $\epsilon(r, \theta)$ una función constante al interior de la esfera conductora, la ecuación anterior se satisface en el equilibrio electrostático sabiendo que el campo eléctrico se anula en la región interior al conductor, es decir

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}, \quad r < R,$$

como ya mencionamos, físicamente esto se interpreta como si al interior de la esfera conductora hubiera campo eléctrico externo, las cargas libres se moverían hasta anularlo para así lograr el estado estacionario.

Para S_r con $r > R$, se tendrán todas las cargas libres del sistema agrupadas sobre la superficie del conductor, es decir $Q_{\text{free}} = Q$ (Véase la Figura 3). Entonces, el campo eléctrico al exterior de la esfera lo podemos calcular con (1.6) de modo que la ecuación quedará dada por

$$\oint_{S_r} \epsilon(r, \theta) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = Q. \quad (1.7)$$

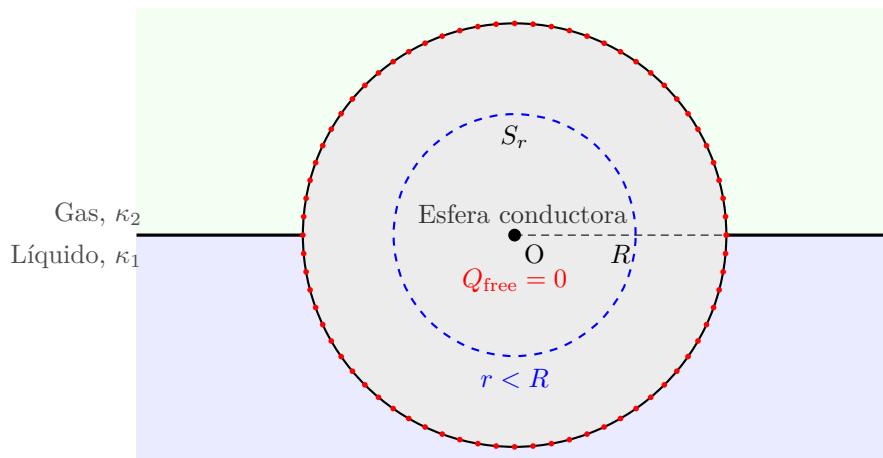


Figura 2: Superficie gaussiana esférica S_r (con $r < R$) concéntrica con la esfera conductora semisumergida. Toda la carga reside sobre la superficie del conductor, por lo que S_r no encierra carga alguna.

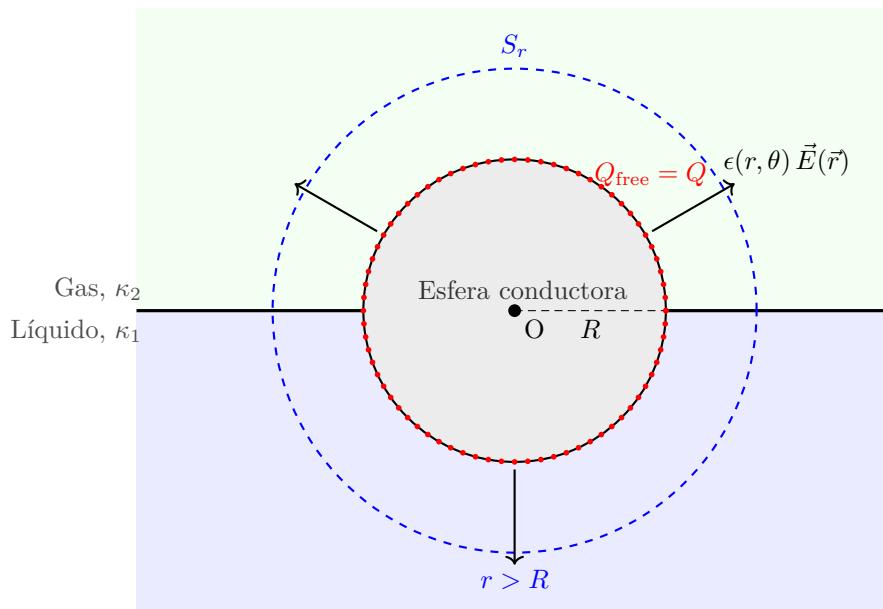


Figura 3: Esquema de la ley de Gauss para el desplazamiento eléctrico en una esfera conductora de radio R semisumergida en la interfaz entre un líquido (constante dieléctrica κ_1) y un gas (constante dieléctrica κ_2).

Ahora bien, no conocemos el campo eléctrico macroscópico neto $\vec{E}(\vec{r})$ en la región exterior a la esfera, particularmente si este está descrito por una función con dependencia radial, de modo que no cuente con dependencia angular alguna (que no esté en función de las coordenadas (θ, φ)). Por la simetría de revolución alrededor del eje z del sistema, es de al menos suponer que \vec{E} sea independiente de la coordenada azimutal φ . Por otra parte, dadas las regiones Ω_i , con $i = 1, 2$,

$$\Omega_1 = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > R, \pi/2 \leq \theta \leq \pi\} \quad (\text{hemisferio donde gobierna el líquido}),$$

$$\Omega_2 = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r > R, 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \quad (\text{hemisferio donde gobierna el gas}),$$

a priori no hay razón para descartar que el campo eléctrico macroscópico presente comportamientos distintos en cada una de las regiones dieléctricas Ω_1 y Ω_2 .

Para despejar estas incógnitas, primero determinaremos el potencial electrostático Φ y luego obtendremos el campo eléctrico macroscópico mediante $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$. En ausencia de cargas libres, el potencial en un medio dieléctrico satisface

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla}\Phi) = 0.$$

Como en el interior del conductor y en cada uno de los dos medios (gas y líquido) la permitividad ε es constante, en cada región esta ecuación se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Phi = 0.$$

Buscaremos entonces la solución general de $\nabla^2\Phi = 0$ en el interior del conductor y en la región exterior $r > R$, e impondremos después las condiciones de borde físicas del sistema.

Dada la simetría azimutal del sistema, la solución general a la ecuación de Laplace quedara dada en función de los polinomios de Legendre (estandar). Salvaguardando la **hipótesis que el campo eléctrico se comportara de forma distinta dependiendo del medio en que se encuentra**, esto nos conduce a considerar el potencial electrostático como una función compuesta, la cual describe **potenciales electrostáticos en medios distintos** en función de la coordenada colatitudinal θ que es justamente la que discrimina el medio dieléctrico del sistema para $r > R$ según la ecuación (1.1). De este modo, el potencial queda dado por

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(2)} r^n + B_n^{(2)} r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta), & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(1)} r^n + B_n^{(1)} r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta), & \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}, \quad (1.8)$$

donde $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}$ son las constantes a determinar por las condiciones de borde del potencial electrostático en el medio dieléctrico asociado a κ_1 , forma análoga con $A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$ respecto a κ_2 .

Por la continuidad del potencial electrostático en todo el espacio, de inmediato nos damos cuenta que (1.8) debe satisfacer la condición

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \Phi(\vec{r}) = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \Phi(\vec{r}),$$

la cual debe cumplirse para todo $r > R$. Si se escribe explícitamente esta igualdad usando (1.8) en $\theta = \pi/2$, se obtiene una relación entre los coeficientes $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}$ y $A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$ (en particular para aquellos órdenes n tales que $P_n(0) \neq 0$). Además, la expansión en polinomios de Legendre es única y el potencial electrostático es, en rigor, un solo campo escalar definido en todo el dominio, de modo que no se pierde generalidad al reagrupar la solución imponiendo que un mismo conjunto de coeficientes describa el potencial a ambos lados de la interfaz. En este sentido, es natural tomar

$$A_n^{(1)} = A_n^{(2)} \equiv A_n \quad \text{y} \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)} \equiv B_n.$$

Esto indica que el potencial electrostático es el mismo sobre ambos medios; cualquier diferencia entre ellos quedará codificada posteriormente en las relaciones constitutivas que vinculan Φ con los campos macroscópicos. Lo anterior tampoco demuestra aún que el campo eléctrico macroscópico \vec{E} no tiene dependencia colatitudinal θ , puesto que no hemos terminado de caracterizar la solución del potencial eléctrico con todas las condiciones de borde del sistema.

De este modo el potencial electrostático en todo el espacio de momento queda dado por

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta), \quad (1.9)$$

Dado que el potencial electrostático decrece cuando la norma de \vec{r} , denotada desde ahora como $\|\vec{r}\| = r$, tiende a infinito y debe converger cuando la norma de \vec{r} tiende a cero, entonces (1.9) satisfacer las condiciones

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(\vec{r}) = 0, \quad r > R; \quad (1.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Phi(\vec{r}) < \infty, \quad r < R. \quad (1.11)$$

Imponiendo (1.10) y (1.11) sobre (1.9), se obtiene

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta), & r < R; \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), & r > R. \end{cases} \quad (1.12)$$

Como ya se menciono, el potencial electrostático es descrito por una función continua, por lo mismo este debe satisfacer condiciones de continuidad en la superficie de la esfera conductora, lo cual impone la condición

$$\lim_{r \rightarrow R^+} \Phi(\vec{r}) = \lim_{r \rightarrow R^-} \Phi(\vec{r}) = \Phi(R, \theta). \quad (1.13)$$

Imponiendo (1.13) sobre (1.12), se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) &= \lim_{r \rightarrow R^+} \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) = \Phi(R, \theta), \\ \implies \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), \\ \implies B_n &= A_n R^{2n+1}. \end{aligned}$$

Por lo que el potencial electrostático se escribe como

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(2n+1)} r^n P_n(\cos \theta), & r < R; \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta), & r > R. \end{cases} \quad (1.14)$$

Como en la superficie del conductor el potencial electrostático es constante, entonces

$$\Phi(R, \theta) = \Phi_0,$$

Entonces, para terminar de imponer la condición (1.13), notemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^+} \Phi(\vec{r}) &= \Phi(R, \theta) \implies \sum_{n=0}^{\infty} B_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) = \Phi_0 \\ \implies B_n &= \begin{cases} \Phi_0 R, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que el potencial electrostático adopta la forma:

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} \Phi_0, & r < R; \\ \frac{\Phi_0 R}{r}, & r > R. \end{cases} \quad (1.15)$$

Con ello se ve que el potencial electrostático resultante no depende de la coordenada angular θ ; la presencia de los dos dieléctricos sólo se manifiesta en el potencial electrostático sobre la superficie del conductor Φ_0 . Dado que el sistema es estacionario, podemos deducir la forma del campo eléctrico en todo el espacio por medio de la relación $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, obteniéndose

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0}, & r < R; \\ \frac{\Phi_0 R}{r^2} \hat{r}, & r > R. \end{cases} \quad (1.16)$$

Observe que **hemos demostrado la dependencia radial del campo eléctrico macroscópico en todo el espacio**. Ahora solo basta determinar el potencial electrostático en la superficie del conductor esférico.

Para asegurarnos que la función compuesta dada en (1.16) describa fielmente el campo eléctrico macroscópico del sistema, matemáticamente debemos determinar Φ_0 de modo que este quede en función de los parámetros físicos que caracterizan al sistema. Para ello, consideremos la ecuación (1.7) y sustituyamos en ella las ecuaciones (1.1) y (1.16), para $r > R$ y con $\hat{n} = \hat{r}$, es decir

$$\begin{aligned} Q &= \oint_{S_r} \epsilon(r, \theta) \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \epsilon(r, \theta) \left(\frac{\Phi_0 R}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}) \\ &= R\Phi_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \epsilon(r, \theta) \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} \cdot \hat{r} \\ &= 2\pi R\Phi_0 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \epsilon_0 \kappa_2 \sin \theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \epsilon_0 \kappa_1 \sin \theta d\theta \right) \\ &= 2\pi \epsilon_0 R\Phi_0 (\kappa_2 + \kappa_1), \end{aligned}$$

ahora bien podemos despejar Φ_0 , determinando así el potencial electrostático sobre la superficie del conductor esférico, de modo:

$$\Phi_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R(\kappa_2 + \kappa_1)}. \quad (1.17)$$

Sustituyendo (1.17) en (1.16), obtenemos el campo eléctrico macroscópico del sistema en toda región del espacio:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0}, & r < R; \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\kappa_2 + \kappa_1)r^2}\hat{r}, & r > R. \end{cases} \quad (1.18)$$

Recordando la discusión sobre la polarización en los medios que nos llevó a presentar la ecuación (1.2), podemos describir la **polarización del sistema en toda región del espacio** como una función compuesta definida de la forma

$$\vec{P}(r, \theta) = \epsilon_0 \chi_e(r, \theta) \vec{E}(r).$$

A partir del campo eléctrico macroscópico ya obtenido en (1.18) y la función que describe la susceptibilidad dieléctrica del sistema dada en (1.4), se sigue entonces para la polarización del sistema:

$$\vec{P}(r, \theta) = \begin{cases} \vec{0}, & 0 < r < R; \\ \frac{Q(\kappa_2 - 1)}{2\pi(\kappa_2 + \kappa_1)r^2}\hat{r}, & r > R \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ \frac{Q(\kappa_1 - 1)}{2\pi(\kappa_2 + \kappa_1)r^2}\hat{r}, & r > R \wedge \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (1.19)$$

Con ello, calculamos las densidades de carga ligada, superficiales como volumétricas, por medio de las funciones

$$\sigma_b(r, \theta) = \vec{P}(r, \theta) \cdot \hat{n}_e,$$

$$\rho_b(r, \theta) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(r, \theta).$$

Aquí \hat{n}_e denota el vector normal unitario saliendo de cada medio dieléctrico. En la interfaz esférica conductor–dieléctrico (superficie $r = R$) el volumen dieléctrico ocupa la región $r > R$, de modo que la normal saliente del medio apunta hacia el conductor y se tiene

$$\hat{n}_e = -\hat{r} \quad \text{sobre } r = R.$$

En la interfaz plana entre los dos medios (plano $\theta = \pi/2$) la normal es perpendicular a dicho plano, pero como \vec{P} es puramente radial, $\vec{P} \cdot \hat{n}_e = 0$ allí y no aparece carga ligada superficial en esa frontera.

Evaluando entonces la densidad de carga ligada superficial sobre la superficie de contacto entre el conductor y cada dieléctrico, esto es, en $r = R^+$, se obtiene

$$\sigma_b(\theta) = \vec{P}(R^+, \theta) \cdot \hat{n}_e = \begin{cases} -\frac{Q(\kappa_2 - 1)}{2\pi(\kappa_2 + \kappa_1)R^2}, & r = R^+ \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{Q(\kappa_1 - 1)}{2\pi(\kappa_2 + \kappa_1)R^2}, & r = R^+ \wedge \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi. \end{cases}$$

El signo menos proviene precisamente de la elección $\hat{n}_e = -\hat{r}$, esto es, de tomar la normal saliendo del medio dieléctrico hacia el interior del conductor.

Por otra parte, para la densidad volumétrica de cargas ligadas basta notar que, en la región donde $r > R$, se tiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \vec{P}(r, \theta) \right) = 0$$

para $r \neq 0$, y además $\vec{P} = \vec{0}$ en el interior del conductor. Por lo tanto, la densidad volumétrica de cargas ligadas será nula en todo el espacio:

$$\rho_b(r, \theta) = 0.$$

En conclusión, el campo eléctrico en todo el espacio está dado en (1.18) y las densidades de carga ligadas son únicamente superficiales mas no volumétricas, concentrándose sobre la superficie de contacto $r = R$ entre el conductor y cada medio dieléctrico, como se observa en las expresiones anteriores.

2. Problema 2

Una esfera de radio R , que tiene una densidad de carga superficial σ constante rígidamente ligada a ella, gira con velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro.

- Integrando directamente la expresión general para el potencial vectorial de una distribución de corriente, encuentre una expresión para el campo magnético \vec{B} producido en su exterior.

Sugerencia. La siguiente identidad podría ser de utilidad:

$$\oint_{\partial V} \frac{dS'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int_V \partial'_i \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' = - \int_V \partial_i \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) dV' = - \partial_i \left(\int_V \frac{dV'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right).$$

- Grafeque el campo magnético fuera de la esfera.

Solución:

2.1. Campo magnético en el exterior de la esfera a través del potencial vectorial por integración directa

Elegimos un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) con origen en el centro de la esfera, alineando la dirección positiva del eje z con el eje de rotación de la esfera (Véase la Figura 4). De este modo, la velocidad angular de la esfera queda descrita de la forma

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}.$$

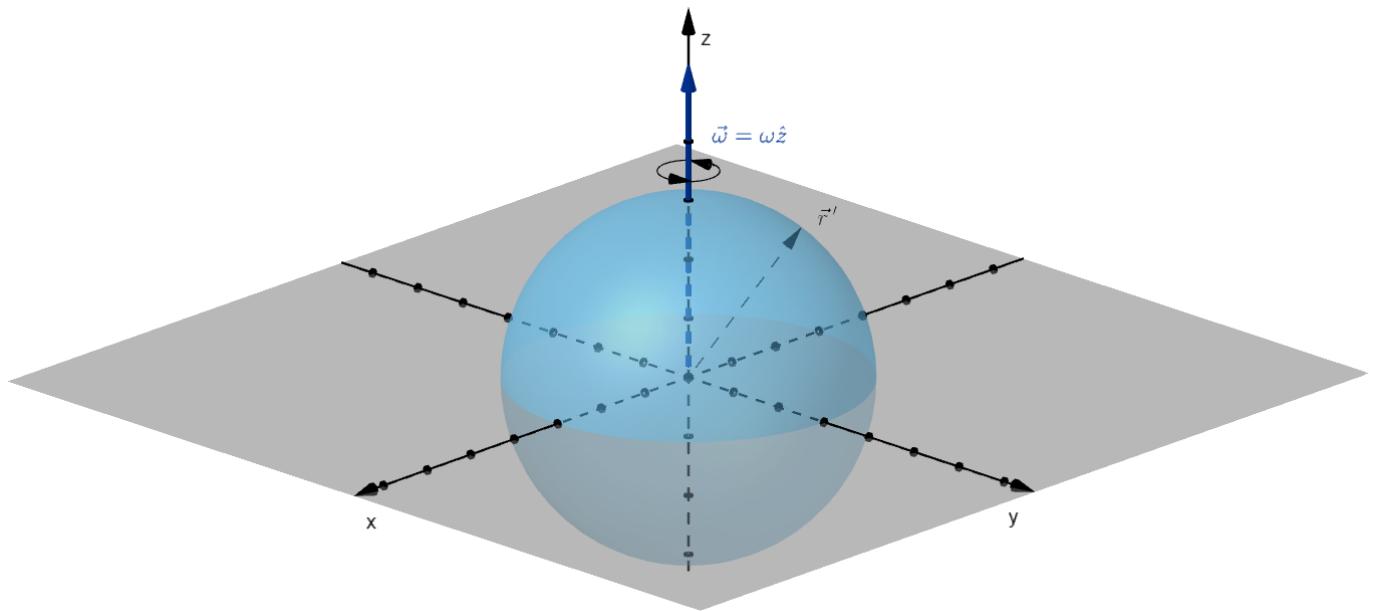


Figura 4: Sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) utilizado para describir la esfera conductora de radio R que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor del eje z . Se indica un punto genérico \vec{r}' sobre la superficie, empleado en la integración del potencial vectorial.

Dado que la densidad de carga superficial σ de la esfera, es constante y rígidamente ligada a ella, se tendrá para la **densidad de corriente superficial** que esta tendrá dependencia de la velocidad de un punto arbitrario sobre la superficie del cuerpo esférico, esto de la forma

$$\vec{K}(\vec{r}') = \sigma \vec{v}(\vec{r}'), \quad (2.1)$$

donde \vec{r}' es un punto arbitrario de la superficie esférica de radio R , descrito en coordenadas esféricas (R, θ', ϕ') con el vector de posición

$$\vec{r}' = R \hat{r}'.$$

La velocidad de un punto de la superficie en un cuerpo rígido en rotación, como lo es la esfera, estará dada por el producto cruz entre la velocidad angular del cuerpo y un vector posición sobre la superficie del mismo, de manera

$$\vec{v}(\vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (2.2)$$

Sustituyendo (2.2) en (2.1), se obtiene la densidad de corriente superficial en función de un punto arbitrario sobre la superficie de la esfera, es decir

$$\vec{K}(\vec{r}') = \sigma (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \quad (2.3)$$

En la magnetostática, el **potencial vectorial magnético** \vec{A} generado por una distribución de corriente superficial \vec{K} definido sobre una superficie S_R (en este caso, la superficie de la esfera de radio R es denotada por S_R) está dado por

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_R} \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS', \quad (2.4)$$

donde \vec{r} es el punto de observación; dS' es el elemento de área sobre la superficie de la esfera de radio R y por consiguiente la integral recorre toda la superficie de la misma.

Sustituyendo (2.3) en (2.4) y usando $\vec{r}' = R\hat{r}'$, se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S_R} \frac{\sigma(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS' \\ &= \frac{\mu_0\sigma}{4\pi} \oint_{S_R} \frac{\vec{\omega} \times (R\hat{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS' \\ &= \frac{\mu_0\sigma R}{4\pi} \oint_{S_R} \frac{\vec{\omega} \times \hat{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dS'. \end{aligned}$$

Es conveniente reescribir el elemento de área dS' como un elemento de área vectorial de forma $d\vec{S}' = \hat{r}' dS'$. Con ello,

$$(\vec{\omega} \times \hat{r}') dS' = \vec{\omega} \times (\hat{r}' dS') = \vec{\omega} \times d\vec{S}',$$

y la expresión para el potencial vectorial magnético se simplifica a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\sigma R}{4\pi} \oint_{S_R} \frac{\vec{\omega} \times d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}.$$

Como $\vec{\omega}$ es constante, puede salir de la integral:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\sigma R}{4\pi} \vec{\omega} \times \oint_{S_R} \frac{d\vec{S}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}. \quad (2.5)$$

Consideremos la identidad sugerida, para una superficie cerrada S que encierra un volumen V ,

$$\oint_S \frac{d\vec{S}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = -\nabla \left(\int_V \frac{dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right).$$

En nuestro caso V_R denota el volumen de la esfera conductora de radio R cuya superficie, como ya se mencionó anteriormente, es denotada por S_R . Vemos que la identidad sugerida la podemos implementar en (2.5) de manera

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\sigma R}{4\pi} \vec{\omega} \times \left[-\nabla \left(\int_{V_R} \frac{dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Ahora bien, para $r > R$, es decir en la región exterior de la esfera, se tendrá (véase el Apéndice A para una demostración rigurosa de esta identidad)

$$\int_V \frac{dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r}, \quad (2.7)$$

donde $r := \|\vec{r}\|$.

Calculando el gradiente de (2.7), con $V := V_R$, se obtiene

$$\nabla \left(\int_{V_R} \frac{dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r^2} \hat{r}. \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8) en (2.5), se sigue el desarrollo del potencial magnetostático en la región exterior de la esfera conductora, $r > R$, de modo

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0\sigma R}{4\pi} \vec{\omega} \times \left(\frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r^2} \hat{r} \right) \\ &= \frac{\mu_0\sigma R^4}{3r^2} \vec{\omega} \times \hat{r} \\ &= \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3r^2} \sin\theta \hat{\varphi},\end{aligned}$$

donde, dado que $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ y $\vec{\omega} \times \hat{r} = \omega \sin\theta \hat{\varphi}$. Finalmente se obtiene

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\sigma R^4\omega}{3r^2} \sin\theta \hat{\varphi}, \quad r > R. \quad (2.9)$$

Este resultado demuestra que \vec{A} es puramente azimutal y decrece como $1/r^2$ en el exterior. Con el potencial vectorial ya determinado en la región exterior de la esfera, (2.9), estamos en condiciones de calcular el campo magnético.

Recordemos que, en magnetostática, el campo magnético es igual al rotor del potencial vectorial magnético, es decir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}).$$

Dicho rotor en coordenadas esféricas se calcula como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin\theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

Ahora bien, para un campo puramente azimutal, como es el caso del potencial vectorial magnético que describe este sistema, $\vec{A} = A_\varphi(r, \theta) \hat{\varphi}$, el determinante anterior toma una forma particularmente sencilla:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin\theta \hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & r \sin\theta A_\varphi \end{vmatrix},$$

del cual se deduce que el campo magnético del sistema estará descrito por

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r(\vec{r}) \hat{r} + B_\theta(\vec{r}) \hat{\theta}, \quad (2.10)$$

donde las componentes de dicho campo vectorial están determinadas por

$$\begin{aligned}B_r &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\varphi), \\ B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \\ B_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Identificando desde (2.9) a A_φ , como

$$A_\varphi(r, \theta) = \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\sin\theta}{r^2},$$

es claro que toda la información de \vec{B} está codificada en la dependencia radial y angular de A_φ .

Derivando explícitamente en las componentes no nulas del campo magnético del sistema, se obtienen las siguientes igualdades:

- Para la componente radial de $\vec{B}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right) \\ &= \frac{2\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\cos \theta}{r^3}, \end{aligned}$$

$$\therefore B_r(r, \theta) = \frac{2\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\cos \theta}{r^3}. \quad (2.11)$$

- Para la componente colatitudinal de $\vec{B}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\sin \theta}{r^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\sin \theta}{r^3}, \end{aligned}$$

$$\therefore B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3} \frac{\sin \theta}{r^3}. \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.11) y (2.12) en (2.10), especificando ahora la dependencia radial y colatitudinal (r, θ) , se obtiene el campo magnético del sistema en la región exterior de la esfera

$$\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 R^4 \sigma \omega}{3r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad r > R. \quad (2.13)$$

2.2. Gráfico del campo magnético al exterior de la esfera

Para responder a la segunda parte del problema, basta con representar el campo (2.13) en el plano que contiene al eje de rotación (por ejemplo, el plano zy). Las líneas de campo tendrán la forma característica de un dipolo magnético: salen de la región polar “norte” de la esfera, se arquean hacia afuera y vuelven a entrar por la región polar “sur”, cerrándose en bucles alrededor del eje. Cuanto más alejado del origen, más parecido es el campo al de un dipolo puntual y más rápidamente decae su intensidad como $1/r^3$ (Véase la Figura 5).

Para generar la Figura 5, se utilizó la expresión del campo magnético en la región exterior, ecuación (2.13), reescrita en coordenadas cartesianas en el plano zy (con $x = 0$). En este plano se tiene $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ y $\cos \theta = z/r$, de modo que el campo dipolar de momento $\vec{m} \parallel \hat{z}$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} B_y(y, z) &= \frac{3Cyz}{r^5}, \\ B_z(y, z) &= \frac{C(2z^2 - y^2)}{r^5}, \\ C &= \frac{\mu_0 \sigma \omega R^4}{3}, \end{aligned}$$

que es la forma implementada en el **script numérico** utilizado para trazar las líneas de campo.

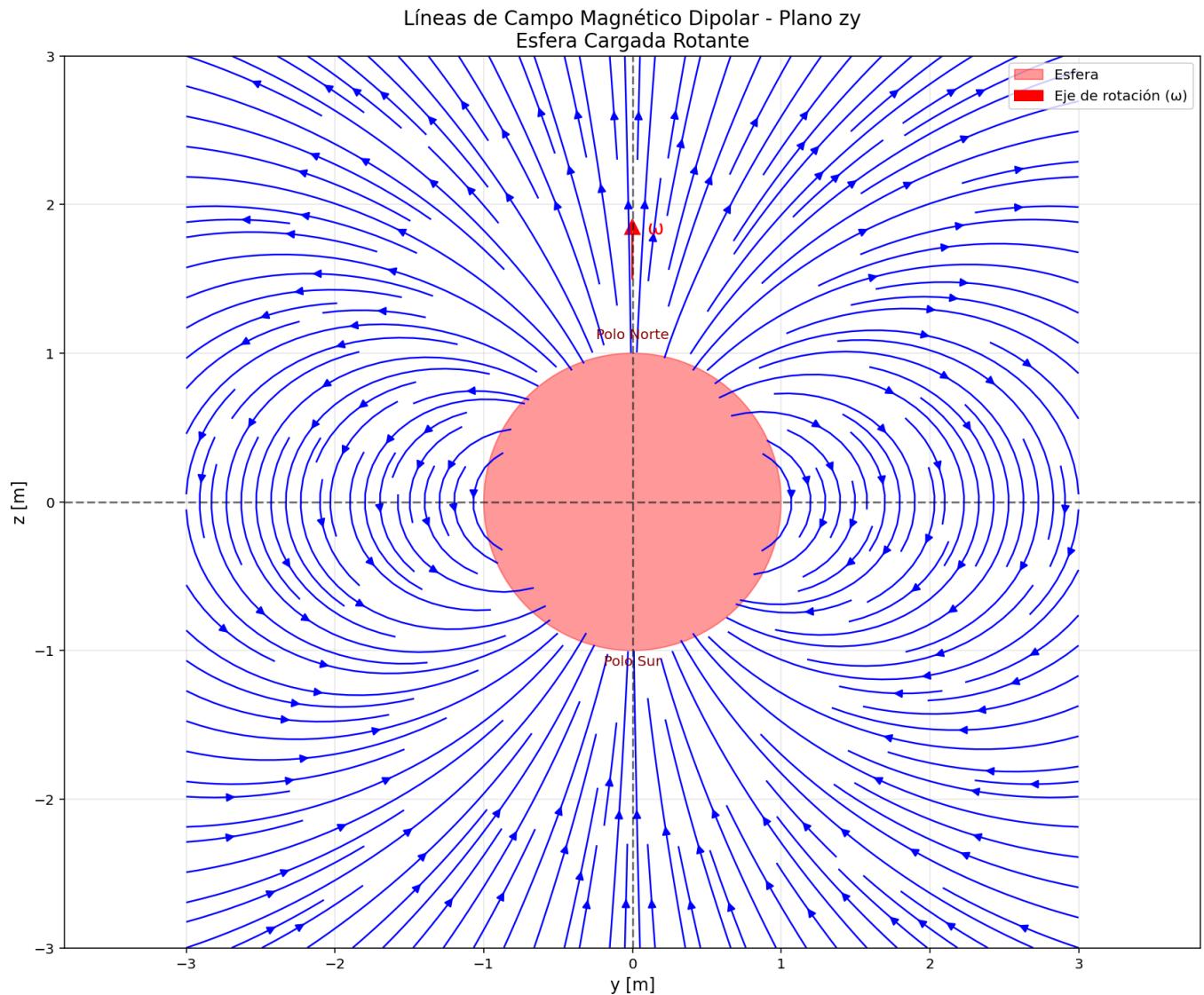


Figura 5: Líneas de campo magnético generadas por la esfera cargada en rotación, calculadas a partir de (2.13) y representadas en el plano zy . La región sombreada corresponde a la proyección de la esfera conductora, se indica el eje de rotación ω y la posición de los polos magnéticos norte y sur. El patrón de líneas ilustra el comportamiento característico de un dipolo magnético alineado con el eje z .

A. Demostración del Potencial Newtoniano para una Esfera Uniforme

La integral del lado izquierdo de (2.7) puede interpretarse como el potencial newtoniano generado por una esfera homogénea de densidad unitaria ocupando el volumen V :

$$I(r) := \int_V \frac{dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}.$$

Para $r > R$ el punto de observación se encuentra fuera de la esfera, de modo que toda la fuente está contenida en el interior. En esa región se tiene

$$\nabla^2 I(r) = \int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) dV' = 0,$$

ya que $\nabla^2(1/\|\vec{r} - \vec{r}'\|) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$ y el soporte de la delta queda fuera del dominio considerado. Por simetría esférica $I(r)$ depende sólo del módulo $r = \|\vec{r}\|$, y la solución general de la ecuación de Laplace con simetría radial en la región $r > R$ es de la forma

$$I(r) = A + \frac{B}{r}.$$

La condición de decayendo $I(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$ obliga a tomar $A = 0$. Para determinar B basta analizar el comportamiento asintótico de la integral para $r \gg R$. En ese límite puede aproximarse

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r^3}\right),$$

de modo que

$$I(r) = \int_V \frac{dV'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} = \frac{1}{r} \int_V dV' + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r^3}\right) = \frac{\text{Vol}(V)}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r^3}\right).$$

Como $\text{Vol}(V) = \frac{4\pi R^3}{3}$, el término dominante a grandes distancias es

$$I(r) \sim \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r}.$$

Por unicidad de la solución de la ecuación de Laplace con estas condiciones de contorno, este comportamiento asintótico fija únicamente el coeficiente B , y se concluye que

$$I(r) = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{1}{r}, \quad r > R,$$

lo que justifica la igualdad empleada en (2.7).