



**Universidad de Concepción**

**Certamen 2**

**Mecánica Clásica**

José Ignacio Rosas Sepúlveda

Junio 2025

# Índice

<b>1</b>	<b>Problema 1</b>	<b>2</b>
1.1	Configuración del sistema y coordenadas generalizadas . . . . .	2
1.2	Velocidades generalizadas de la masa . . . . .	3
1.3	Construcción del Lagrangiano . . . . .	4
1.4	Ecuaciones de Lagrange . . . . .	4
1.5	Hamiltoniano . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Problema 2</b>	<b>8</b>
2.1	Deducción general de una constante del movimiento . . . . .	8
2.2	Aplicación — Constante del movimiento en un potencial anisotrópico . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Problema 3</b>	<b>11</b>
3.1	Hallar la ecuación de movimiento para $q$ . . . . .	11
3.2	Hallar una transformación canónica que reduzca $H$ a la forma de un oscilador armónico. Demostrar que, para las variables transformadas, la solución es tal que se cumple la ecuación de movimiento hallada en la sección anterior . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Problema 4</b>	<b>18</b>

# 1. Problema 1

Un hilo que soporta la masa de un péndulo pasa a través de un pequeño orificio en un tablero  $B$ , como muestra la figura 1. El tablero se hace oscilar verticalmente según el eje  $y$ , de tal manera que su posición está dada por  $s = A \sin(\omega t)$ . Encuentre el **Lagrangiano**, las **ecuaciones de Lagrange** y el **Hamiltoniano**.

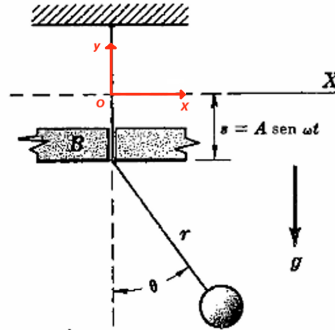


Figura 1: Péndulo oscilando verticalmente a través de un orificio.

## 1.1. Configuración del sistema y coordenadas generalizadas

**Descripción física:** El sistema consta de:

1. Una masa  $m$  unida a un hilo **inextensible de longitud total fija**  $L_0$ .
2. Un tablero móvil  $B$  con movimiento vertical prescrito:  $s(t) = A \sin(\omega t)$ .
3. Un orificio en  $B$  que permite el deslizamiento sin fricción del hilo.

**Longitud variable:**

- Dado que la longitud total del hilo es constante e igual a  $L_0$ , cualquier desplazamiento vertical del tablero modifica directamente la distancia entre el orificio y la masa. Por ende, la longitud efectiva,  $r(t)$ , del péndulo en cada instante es

$$r(t) = L_0 - s(t). \quad (1.1)$$

- Derivada temporal de  $r(t)$ :

$$\dot{r}(t) = -\dot{s}(t) = -A\omega \cos(\omega t). \quad (1.2)$$

**Coordenada generalizada:** Elegimos  $\theta$  como coordenada generalizada porque describe naturalmente la posición angular del péndulo respecto a la vertical, aprovechando la simetría radial del sistema y simplificando el análisis dinámico.

Además, esta elección permite resolver de forma directa el vínculo holonómico impuesto por la geometría del hilo:

$$x(t)^2 + [y(t) - s(t)]^2 = r(t)^2.$$

**Posición cartesiana de  $m$ :** Adoptamos un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional cuyo origen coincide con la posición de equilibrio del tablero  $B$ . El eje  $y$  apunta verticalmente hacia arriba, y el eje  $x$  hacia la derecha. La posición de la masa  $m$  en función del tiempo queda entonces dada por  $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ , donde  $x(t)$  e  $y(t)$  describen las componentes horizontal y vertical, respectivamente:

$$x(t) = r(t) \sin \theta(t), \quad (1.3)$$

$$y(t) = s(t) - r(t) \cos \theta(t). \quad (1.4)$$

## 1.2. Velocidades generalizadas de la masa

La velocidad instantánea  $\vec{v}(t)$  de la masa  $m$  se obtiene como la derivada temporal de su posición  $\vec{x}(t)$ :

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Derivando con respecto al tiempo  $t$  las expresiones (1.3) y (1.4), obtenemos:

- Para  $x(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{d}{dt} (r(t) \sin \theta) \\ &= \dot{r}(t) \sin \theta + r(t) \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

- Para  $y(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{d}{dt} (s(t) - r(t) \cos \theta) \\ &= \dot{s}(t) - \dot{r}(t) \cos \theta + r(t) \dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

En ambos casos, la función  $r(t)$  está dada por (1.1). Por otra parte, la relación  $\dot{r}(t) = -\dot{s}(t)$ , dada en (1.2), refleja que un movimiento ascendente del tablero reduce directamente la longitud efectiva del péndulo. Esta relación expresa una conexión cinemática esencial: el ritmo al que cambia la longitud del péndulo es igual pero opuesto a la velocidad del tablero, lo que resulta de la constancia de la longitud total del hilo.

Este vínculo dinámico entre  $r(t)$  y  $s(t)$  introduce un acoplamiento directo entre el movimiento forzado del tablero y el movimiento angular de la masa:

$$\dot{x} = -\dot{s}(t) \sin \theta + r(t) \dot{\theta} \cos \theta, \quad (1.5)$$

$$\dot{y} = \dot{s}(t)(1 + \cos \theta) + r(t) \dot{\theta} \sin \theta. \quad (1.6)$$

Estas expresiones para  $\dot{x}(t)$  y  $\dot{y}(t)$  permitirán calcular la energía cinética de la masa en la siguiente sección.

### 1.3. Construcción del Lagrangiano

Sabemos que el Lagrangiano  $L$  está dado por:

$$L = T - U, \quad (1.7)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema y  $U$  la energía potencial gravitatoria. Estas se definen por las ecuaciones:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (1.8)$$

$$U = mgy(t). \quad (1.9)$$

**Energía cinética:** Para determinar la energía cinética del sistema, se sustituyen las expresiones (1.5) y (1.6) en (1.8), y se desarrolla:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m \left[ (-\dot{s}(t)\sin\theta + r(t)\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (\dot{s}(t)(1+\cos\theta) + r(t)\dot{\theta}\sin\theta)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \underbrace{\dot{s}(t)^2\sin^2\theta - 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + r(t)^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}_{\dot{x}^2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\dot{s}(t)^2(1+\cos\theta)^2 + 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta(1+\cos\theta) + r(t)^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta}_{\dot{y}^2} \right] \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \dot{s}(t)^2(\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2) + r(t)^2\dot{\theta}^2(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}) \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta((1+\cos\theta) - \cos\theta) \right] \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \dot{s}(t)^2(\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) + r(t)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta \right] \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \dot{s}(t)^2 \left( 1 + 2\cos\theta + \underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1} \right) + r(t)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta \right] \\ &= \frac{1}{2}m \left[ 2\dot{s}(t)^2(1+\cos\theta) + r(t)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la energía cinética del sistema está dada por:

$$T = \frac{1}{2}m \left[ 2\dot{s}(t)^2(1+\cos\theta) + r(t)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta \right]. \quad (1.10)$$

**Energía potencial gravitatoria:** Para determinar la energía potencial gravitatoria del sistema, se sustituye la ecuación (1.4) en (1.9), y se obtiene:

$$\begin{aligned} U &= mgy(t) \\ &= mg[s(t) - r(t)\cos\theta]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$U = mg[s(t) - r(t)\cos\theta]. \quad (1.11)$$

**Lagrangiano:** Sustituyendo (1.10) y (1.11) en (1.7), se tiene:

$$L = \frac{1}{2}mr(t)^2\dot{\theta}^2 + m\dot{s}(t)^2(1+\cos\theta) + m\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta + mgr(t)\cos\theta - mgs(t). \quad (1.12)$$

El término cruzado  $m\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}\sin\theta$  actúa como un acoplamiento dinámico que media el intercambio de energía entre el movimiento vertical del soporte y la rotación del péndulo.

### 1.4. Ecuaciones de Lagrange

Recordemos que la ecuación de Lagrange para la coordenada generalizada  $\theta$  está dada por:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (1.13)$$

A partir del Lagrangiano obtenido en (1.12), se calcula:

- Derivada parcial del Lagrangiano respecto de  $\dot{\theta}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr(t)^2 \dot{\theta} + m\dot{s}(t)r(t) \sin \theta. \quad (1.14)$$

- Derivada parcial del Lagrangiano respecto de  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m\dot{s}(t)^2 \sin \theta + m\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta - mgr(t) \sin \theta. \quad (1.15)$$

Calculamos ahora la derivada temporal de (1.14):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d}{dt} [mr(t)^2 \dot{\theta} + m\dot{s}(t)r(t) \sin \theta] \\ &= m \frac{d}{dt} [r(t)^2 \dot{\theta}] + m \frac{d}{dt} [\dot{s}(t)r(t) \sin \theta] \\ &= m [2r(t)\dot{r}(t)\dot{\theta} + r(t)^2 \ddot{\theta}] \\ &\quad + m [\ddot{s}(t)r(t) \sin \theta + \dot{s}(t)\dot{r}(t) \sin \theta + \dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta] \\ &= m [r(t)^2 \ddot{\theta} + 2\dot{r}(t)r(t)\dot{\theta} + \ddot{s}(t)r(t) \sin \theta + \dot{s}(t)\dot{r}(t) \sin \theta + \dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta]. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m [r(t)^2 \ddot{\theta} + 2\dot{r}(t)r(t)\dot{\theta} + \ddot{s}(t)r(t) \sin \theta + \dot{s}(t)\dot{r}(t) \sin \theta + \dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta]. \quad (1.16)$$

Sustituyendo (1.14), (1.15) y (1.16) en la ecuación de Lagrange (1.13), se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= m [r(t)^2 \ddot{\theta} + 2\dot{r}(t)r(t)\dot{\theta} + \ddot{s}(t)r(t) \sin \theta + \dot{s}(t)\dot{r}(t) \sin \theta + \dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta \\ &\quad + \dot{s}(t)^2 \sin \theta - \dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta + gr(t) \sin \theta] \end{aligned}$$

Observamos que los términos  $\pm \dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} \cos \theta$  se cancelan. Entonces:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m [r(t)^2 \ddot{\theta} + 2\dot{r}(t)r(t)\dot{\theta} + (\ddot{s}(t)r(t) + \dot{s}(t)\dot{r}(t) + \dot{s}(t)^2 + gr(t)) \sin \theta]$$

Utilizando  $\dot{r}(t) = -\dot{s}(t)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\dot{r}(t)r(t)\dot{\theta} &= -2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta}, \\ \dot{s}(t)\dot{r}(t) &= -\dot{s}(t)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m [r(t)^2 \ddot{\theta} - 2\dot{s}(t)r(t)\dot{\theta} + (\ddot{s}(t)r(t) + gr(t)) \sin \theta]$$

Finalmente, factorizando  $r(t)$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr(t) [r(t)\ddot{\theta} - 2\dot{s}(t)\dot{\theta} + (g + \ddot{s}(t)) \sin \theta]$$

Como  $m > 0$  y  $r(t) > 0$ , la ecuación de movimiento resultante es:

$$\boxed{r(t)\ddot{\theta} - 2\dot{s}(t)\dot{\theta} + (g + \ddot{s}(t)) \sin \theta = 0}$$

### Interpretación física:

- El término  $-2\dot{s}(t)\dot{\theta}$  actúa como una fuerza tipo **Coriolis efectiva**, consecuencia del acoplamiento cinemático entre la longitud variable del péndulo y su movimiento angular. Representa conservación del momento angular frente a la variación de  $r(t)$ .
- El término  $(g + \ddot{s}(t)) \sin \theta$  puede interpretarse como un campo gravitacional efectivo. La aceleración inercial  $\ddot{s}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t)$  modifica la magnitud del peso aparente que siente la masa.

### 1.5. Hamiltoniano

Partimos del momento conjugado asociado a la coordenada  $\theta$ :

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr(t)^2 \dot{\theta} + m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta.$$

Despejamos  $\dot{\theta}$  en función de  $p_\theta$ :

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta}{mr(t)^2}.$$

La función Hamiltoniana se obtiene mediante la transformación de Legendre estándar:

$$\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} - L.$$

Evaluamos el término  $p_\theta \dot{\theta}$ :

$$\begin{aligned} p_\theta \dot{\theta} &= p_\theta \left( \frac{p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta}{mr(t)^2} \right) \\ &= \frac{p_\theta^2}{mr(t)^2} - \frac{p_\theta \dot{s}(t) \sin \theta}{r(t)}. \end{aligned}$$

Ahora escribimos el Lagrangiano en términos de  $r(t)$ ,  $s(t)$  y  $\dot{\theta}$ :

$$L = \frac{1}{2} mr(t)^2 \dot{\theta}^2 + m\dot{s}(t)^2 (1 + \cos \theta) + m\dot{s}(t) r(t) \dot{\theta} \sin \theta + mgr(t) \cos \theta - mgs(t).$$

Sustituimos  $\dot{\theta}$  en los términos cuadráticos y lineales:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= \left( \frac{p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta}{mr(t)^2} \right)^2 = \frac{(p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta)^2}{m^2 r(t)^4} \\ m\dot{s}(t) r(t) \dot{\theta} \sin \theta &= m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta \cdot \frac{p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta}{mr(t)^2} \\ &= \frac{\dot{s}(t) \sin \theta}{r(t)} (p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta) \end{aligned}$$

El Hamiltoniano completo queda entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{p_\theta^2}{mr(t)^2} - \frac{p_\theta \dot{s}(t) \sin \theta}{r(t)} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2mr(t)^2} (p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta)^2 + m\dot{s}(t)^2 (1 + \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{s}(t) \sin \theta}{r(t)} (p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta) + mgr(t) \cos \theta - mgs(t) \right] \end{aligned}$$

Desarrollamos el cuadrado:

$$(p_\theta - m\dot{s}(t) r(t) \sin \theta)^2 = p_\theta^2 - 2m\dot{s}(t) r(t) p_\theta \sin \theta + m^2 \dot{s}(t)^2 r(t)^2 \sin^2 \theta$$

Ahora expandimos y agrupamos términos semejantes, teniendo especial cuidado con los coeficientes:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left[ \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2mr^2} p_\theta^2 \right] + \left[ -\frac{p_\theta \dot{s} \sin \theta}{r} + \frac{1}{mr^2} m\dot{s} r p_\theta \sin \theta - \frac{\dot{s} \sin \theta}{r} p_\theta \right] \\ &\quad + \left[ -\frac{1}{2} m\dot{s}^2 \sin^2 \theta + m\dot{s}^2 \sin^2 \theta \right] - m\dot{s}^2 (1 + \cos \theta) - mgr \cos \theta + mgs \\ &= \frac{1}{2mr^2} p_\theta^2 - \frac{p_\theta \dot{s} \sin \theta}{r} + \frac{1}{2} m\dot{s}^2 \sin^2 \theta - m\dot{s}^2 (1 + \cos \theta) - mgr \cos \theta + mgs \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma simplificada y correcta del Hamiltoniano es:

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2mr(t)^2} - \frac{p_\theta \dot{s}(t) \sin \theta}{r(t)} + \frac{1}{2} m\dot{s}(t)^2 \sin^2 \theta - m\dot{s}(t)^2 (1 + \cos \theta) - mgr(t) \cos \theta + mgs(t)$$

donde  $r(t) = L_0 - s(t)$ ,  $\dot{s}(t) = A\omega \cos(\omega t)$  y  $s(t) = A \sin(\omega t)$ .

Esta expresión incluye todos los términos relevantes del sistema, tanto cinéticos como potenciales, junto con las contribuciones inducidas por el movimiento vertical forzado del tablero.

## 2. Problema 2

Demuestre que si el Hamiltoniano de un sistema físico puede expresarse como

$$H(q_i, p_i) = H(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_f, p_2, \dots, p_f),$$

entonces la función  $f(q_1, p_1)$  es una constante del movimiento.

Utilice el resultado anterior para encontrar una constante del movimiento para una partícula en dos dimensiones bajo el potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3},$$

siendo  $\vec{a}$  un vector constante dado.

### 2.1. Deducción general de una constante del movimiento

**Enunciado:** Sea un sistema físico descrito por un Hamiltoniano de la forma:

$$H(q_i, p_i) = H(f(q_1, p_1), q_2, \dots, q_f, p_2, \dots, p_f),$$

donde  $f(q_1, p_1)$  es una función que depende únicamente de  $q_1$  y  $p_1$ , y el resto de las variables aparecen explícitamente en  $H$ . Demuéstrese que la función  $f(q_1, p_1)$  es una constante del movimiento.

#### Planteamiento teórico

**Definición:** Una función  $g(q_i, p_i, t)$  es una *constante del movimiento* si su derivada total respecto del tiempo se anula a lo largo de la evolución del sistema:

$$\frac{dg}{dt} = 0.$$

**Corchete de Poisson:** Para funciones suaves  $u(q_i, p_i)$  y  $v(q_i, p_i)$  en el espacio de fases, se define:

$$\{u, v\} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right).$$

**Teorema fundamental:** En sistemas autónomos ( $\partial H / \partial t = 0$ ), se cumple:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

#### Demostración

Como  $f = f(q_1, p_1)$  no depende explícitamente del tiempo ( $\partial f / \partial t = 0$ ) y el Hamiltoniano tiene la forma  $H = H(f, q_2, \dots, q_f, p_2, \dots, p_f)$ , evaluamos su corchete con  $H$ :

$$\{f, H\} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right).$$

Pero  $f$  depende exclusivamente de  $q_1$  y  $p_1$ , por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p_k} = 0 \quad \forall k \neq 1.$$

Así, la suma se reduce al término  $k = 1$ :

$$\{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

Aplicamos ahora la regla de la cadena a las derivadas de  $H$ :

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \{f, H\} &= \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ &= \frac{\partial H}{\partial f} \left( \frac{\partial f}{\partial q_1} \frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial f} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

**Conclusión**

$$\boxed{\{f(q_1, p_1), H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0}$$

Por tanto,  $f(q_1, p_1)$  es una constante del movimiento a lo largo de la evolución hamiltoniana del sistema.  $\square$

## 2.2. Aplicación — Constante del movimiento en un potencial anisotrópico

**Enunciado:** Considere una partícula de masa  $m$  en el plano, sometida al potencial:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = (x, y), \quad \vec{a} = (a_x, a_y) \in \mathbb{R}^2.$$

Encuéntrese una constante del movimiento para este sistema.

### 2.2.1. Forma del Hamiltoniano

El sistema está descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad \text{con } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Se trata de un sistema central no isotrópico: el campo  $\nabla V$  no es radial, ya que depende de la orientación de  $\vec{a}$  respecto de  $\vec{r}$ . En particular, no se conserva el momento angular ordinario  $L_z = xp_y - yp_x$ .

### 2.2.2. Paso a coordenadas polares

Introducimos coordenadas polares:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

Los momentos generalizados asociados son:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\phi = mr^2\dot{\phi} = L_z.$$

El Hamiltoniano se expresa en estas coordenadas como:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

Para obtener la expresión explícita del potencial, proyectamos  $\vec{a}$  sobre  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{r} &= a_x r \cos \phi + a_y r \sin \phi = r(a_x \cos \phi + a_y \sin \phi), \\ \Rightarrow V(r, \phi) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{a_x \cos \phi + a_y \sin \phi}{r^2}.\end{aligned}$$

### 2.2.3. Rotación del sistema de coordenadas

Dado que  $\vec{a}$  es un vector constante, y sólo importa su dirección relativa respecto de  $\vec{r}$ , podemos elegir sin pérdida de generalidad un sistema de coordenadas rotado donde:

$$\vec{a} = (a, 0), \quad \text{con } a = \|\vec{a}\|.$$

Esta rotación pasiva simplifica el potencial sin afectar las leyes de conservación. En este nuevo sistema:

$$V(r, \phi) = \frac{a \cos \phi}{r^2},$$

y el Hamiltoniano toma la forma:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{p_\phi^2}{2m} + a \cos \phi \right). \quad (2.1)$$

### 2.2.4. Identificación de una constante del movimiento

Definimos la función:

$$f(\phi, p_\phi) = \frac{p_\phi^2}{2m} + a \cos \phi.$$

Así, el Hamiltoniano queda escrito como:

$$H(r, p_r, \phi, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{f(\phi, p_\phi)}{r^2}.$$

Observamos que  $H$  depende de  $\phi$  y  $p_\phi$  únicamente a través de  $f$ . Como el resto de variables ( $r$ ,  $p_r$ ) no intervienen en  $f$ , podemos aplicar directamente el resultado general demostrado en la Parte 1:

$$\{f(\phi, p_\phi), H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ es constante del movimiento.}$$

### 3. Problema 3

(Goldstein, 3ra ed., problema 9-25) El Hamiltoniano de un sistema tiene la forma:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right). \quad (3.1)$$

#### 3.1. Hallar la ecuación de movimiento para $q$ .

##### Ecuaciones de Hamilton

Consideremos las ecuaciones canónicas de Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (3.2)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (3.3)$$

Evaluando el Hamiltoniano del sistema (3.1) en (3.2):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{1}{2} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (2pq^4) \\ &= pq^4. \\ \therefore \quad \dot{q} &= pq^4. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Al despejar  $p$  en (3.4), se obtiene:

$$p = \frac{\dot{q}}{q^4}. \quad (3.5)$$

Se deriva respecto al tiempo la ecuación obtenida en (3.5):

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{dp}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}}{q^4} \right) \\ &= \frac{\ddot{q}q^4 - 4\dot{q}^2q^3}{q^8} \\ &= \ddot{q}q^{-4} - 4\dot{q}^2q^{-5}. \\ \therefore \quad \dot{p} &= \ddot{q}q^{-4} - 4\dot{q}^2q^{-5}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por otra parte, evaluando el Hamiltoniano del sistema (3.1) en (3.3):

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ &= -\frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{1}{2} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( 4p^2 q^3 - \frac{2}{q^3} \right) \\ &= -2p^2 q^3 + \frac{1}{q^3}. \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{p} = -2p^2 q^3 + q^{-3}. \quad (3.7)$$

Igualando (3.6) con (3.7):

$$\ddot{q}q^{-4} - 4\dot{q}^2 q^{-5} = -2p^2 q^3 + q^{-3}. \quad (3.8)$$

Sustituyendo (3.5) en el miembro derecho de la ecuación (3.8) y desarrollando:

$$\begin{aligned} -2p^2 q^3 + q^{-3} &= -2 \left( \frac{\dot{q}}{q^4} \right)^2 q^3 + q^{-3} \\ &= -2 \frac{\dot{q}^2}{q^8} q^3 + q^{-3} \\ &= -2\dot{q}^2 q^{-5} + q^{-3}. \end{aligned}$$

Entonces, podemos expresar la ecuación (3.8) de forma:

$$\ddot{q}q^{-4} - 4\dot{q}^2 q^{-5} = -2\dot{q}^2 q^{-5} + q^{-3}.$$

Multiplicando por  $q^4$  e igualando a 0 la anterior ecuacion, se obtiene:

$$\boxed{\ddot{q} - 2\dot{q}^2 q^{-1} - q = 0.}$$

Esta es la ecuación de movimiento del sistema en forma autónoma de segundo orden. El término no lineal en  $-2\dot{q}^2 q^{-1}$  revela una estructura cinemáticamente deformada respecto a la dinámica de un oscilador armónico.

### 3.2. Hallar una transformación canónica que reduzca $H$ a la forma de un oscilador armónico. Demostrar que, para las variables transformadas, la solución es tal que se cumple la ecuación de movimiento hallada en la sección anterior

#### Objetivo

Se desea encontrar una transformación canónica  $(q, p) \mapsto (Q, P)$  que reduzca el Hamiltoniano original:

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right)$$

a la forma estándar del oscilador armónico:

$$K(Q, P) = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2).$$

Esta transformación debe preservar la estructura canónica (i.e., los corchetes de Poisson fundamentales), y permitir verificar que la dinámica inducida por  $K$  en las variables transformadas reproduce la ecuación de movimiento obtenida previamente.

Se espera que:

$$\begin{aligned} H(q, p) = K(Q, P) &\Rightarrow \frac{1}{2} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right) = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \\ &\Rightarrow p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} = (P^2 + Q^2). \end{aligned}$$

De lo anterior, consideramos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} P^2 &= p^2 q^4, \\ Q^2 &= \frac{1}{q^2}. \end{aligned}$$

Al tomar la raíz cuadrada de las igualdades anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} P &= \pm p q^2, \\ Q &= \pm \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Proponemos el siguiente cambio de variables:

$$P = -p q^2, \tag{3.9}$$

$$Q = q^{-1}. \tag{3.10}$$

#### Construcción de la función generatriz

Para que la transformación sea canónica, buscamos una función generatriz de tipo  $F_2(q, P)$ , independiente del tiempo, que satisfaga:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \tag{3.11}$$

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}. \tag{3.12}$$

Sustituyendo (3.10) en (3.12), se obtiene:

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = q^{-1}.$$

Integrando respecto a  $P$ :

$$F_2 = P q^{-1} + g(q),$$

donde  $g(q)$  es una función a determinar que aparece luego de integrar como constante de integración. Ahora, reemplazando esta expresión para  $F_2$  en (3.11):

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F_2}{\partial q} \\ &= \frac{\partial}{\partial q} (Pq^{-1} + g(q)) \\ &= -Pq^{-2} + g'(q). \\ \therefore p &= -Pq^{-2} + g'(q). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.13):

$$\begin{aligned} p &= -(-pq^2) \cdot q^{-2} + g'(q) \\ &= pq^0 + g'(q) \\ &= p + g'(q). \end{aligned}$$

Lo cual implica que:

$$g'(q) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(q) = C.$$

Eliendo  $C = 0$ , la función generatriz es:

$$F_2(q, P) = Pq^{-1}. \quad (3.14)$$

Se verifica el resultado obtenido calculando las derivadas parciales de (3.14) respecto  $q$  y  $P$ :

■ **Derivada parcial de  $F_2$  respecto  $P$ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial P} (Pq^{-1}) \\ &= q^{-1} \cdot \frac{\partial P}{\partial P} \\ &= q^{-1} \cdot 1 \\ &= q^{-1}. \\ \therefore \frac{\partial F_2}{\partial P} &= q^{-1} \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.10) en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = Q.$$

Se verifica la ecuación (3.12).

■ **Derivada parcial de  $F_2$  respecto  $q$ :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial q} &= \frac{\partial}{\partial q} (Pq^{-1}) \\ &= P \cdot \frac{\partial}{\partial q} (q^{-1}) \\ &= P \cdot (-q^{-2}) \\ &= -Pq^{-2}. \\ \therefore \frac{\partial F_2}{\partial q} &= -Pq^{-2} \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.9) en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial q} &= -(-pq^2) \cdot q^{-2} \\ &= pq^0 \\ &= p. \\ \therefore \frac{\partial F_2}{\partial q} &= p \end{aligned}$$

Se verifica la ecuación (3.11).

### Verificación de la ecuación general para transformaciones canónicas

Es esperada que tras el cambio de coordenadas efectuado se satisfaga la ecuación general para transformaciones canónicas, la cual está dada por:

$$\sum_{i=1}^f \dot{q}^i P_i - H = \sum_{i=1}^f \dot{Q}^i P_i - K + \frac{dF}{dt}.$$

Asumiendo que el sistema tiene un grado de libertad  $f = 1$  y que  $F = F_2$  con independencia del tiempo, entonces la ecuación a satisfacer por el sistema es:

$$\dot{q}P - H = \dot{Q}P - K$$

Utilizando la ecuación del Hamiltoniano del sistema y el cambio de coordenadas dado por (3.9) y (3.10), observemos:

$$\begin{aligned} \dot{q}P - H &= \frac{d}{dt}(q)P - \left[ \frac{1}{2} \left( p^2 q^4 + \frac{1}{q^2} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt}(Q^{-1})P - \frac{1}{2} [(-pq^2)^2 + (q^{-1})^2] \\ &= -Q^{-2} \dot{Q}P - \frac{1}{2} (P^2 + Q^2) \\ &= \dot{Q}(-PQ^{-2}) - K \\ &= \dot{Q}[-P(q^{-1})^{-2}] - K \\ &= \dot{Q}[-Pq^2] - K \\ &= \dot{Q}p - K. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \dot{q}P - H = \dot{Q}P - K$$

Así queda verificada la ecuación general para transformaciones canónicas demostrando a su vez el nuevo Hamiltoniano:

$$K(Q, P) = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2).$$

que corresponde a un oscilador armónico con  $\omega = 1$ .

### Demostración de cumplimiento de la ecuación de movimiento

Consideremos las ecuaciones canónicas de Hamilton para el nuevo Hamiltoniano  $K(Q, P)$  definido en variables transformadas:

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = P, \quad (3.15)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -Q. \quad (3.16)$$

Por otra parte, recordemos que la transformación propuesta fue:

$$Q = q^{-1}, \quad (3.17)$$

$$P = -pq^2. \quad (3.18)$$

Derivando (3.17) respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{Q} = \frac{d}{dt}(q^{-1}) = -\dot{q}q^{-2}. \quad (3.19)$$

Comparando con la ecuación de Hamilton (3.15), se tiene:

$$\dot{Q} = P \quad \text{y} \quad \dot{Q} = -\dot{q}q^{-2} \quad \Rightarrow \quad P = -\dot{q}q^{-2}.$$

Entonces, despejamos  $\dot{q}$  en términos de  $P$ :

$$\dot{q} = -Pq^2. \quad (3.20)$$

Ahora derivamos (3.18) respecto al tiempo:

$$\dot{P} = \frac{d}{dt}(-pq^2) = -\dot{p}q^2 - 2p\dot{q}q. \quad (3.21)$$

Según la ecuación de Hamilton (3.16), se tiene  $\dot{P} = -Q$ . Entonces, sustituimos en (3.21):

$$-\dot{p}q^2 - 2p\dot{q}q = -q^{-1}.$$

Multiplicando ambos lados por  $-1$  y reordenando:

$$\dot{p}q^2 + 2p\dot{q}q = q^{-1}.$$

Dividimos ambos lados por  $q^2$ :

$$\dot{p} + 2p\dot{q}q^{-1} = q^{-3}. \quad (3.22)$$

Sustituimos la expresión de  $p$  en términos de  $\dot{q}$  usando la ecuación hallada en la parte (a), ecuación (3.5):

$$p = \dot{q}q^{-4}.$$

Derivando respecto al tiempo esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{q}}{q^4} \right) \\ &= \frac{\ddot{q}q^4 - 4\dot{q}^2q^3}{q^8} \\ &= \ddot{q}q^{-4} - 4\dot{q}^2q^{-5}. \end{aligned}$$

También,

$$2p\dot{q}q^{-1} = 2 \cdot \frac{\dot{q}}{q^4} \cdot \dot{q} \cdot q^{-1} = 2\dot{q}^2q^{-5}.$$

Entonces, sustituyendo en el lado izquierdo de (3.22):

$$\dot{p} + 2p\dot{q}q^{-1} = (\ddot{q}q^{-4} - 4\dot{q}^2q^{-5}) + 2\dot{q}^2q^{-5} = \ddot{q}q^{-4} - 2\dot{q}^2q^{-5}.$$

El miembro derecho de (3.22) es  $q^{-3}$ , por lo tanto:

$$\ddot{q}q^{-4} - 2\dot{q}^2q^{-5} = q^{-3}.$$

Multiplicamos toda la ecuación por  $q^4$ :

$$\ddot{q} - 2\dot{q}^2q^{-1} = q \quad \Rightarrow \quad \ddot{q} - 2\dot{q}^2q^{-1} - q = 0.$$

$$\boxed{\ddot{q} - 2\dot{q}^2q^{-1} - q = 0}$$

Esta es precisamente la ecuación de movimiento hallada en la sección anterior, por lo tanto se ha demostrado que la dinámica generada por el nuevo Hamiltoniano  $K(Q, P)$  reproduce exactamente la misma ecuación de segundo orden para  $q(t)$ .

### Verificación directa de la solución de $q(t)$ a partir de $Q(t)$

Derivando (3.15) respecto al tiempo, se tiene:

$$\ddot{Q} = \dot{P}.$$

Sustituyendo (3.16) en la ecuación anterior:

$$\ddot{Q} = -Q.$$

Igualando esta ecuación a cero, se obtiene:

$$\boxed{\ddot{Q} + Q = 0}$$

Esta ecuación corresponde a la de un **oscilador armónico** de frecuencia angular unitaria. La cual tiene como solución:

$$Q(t) = A \sin(t),$$

donde  $A$  es una constante real arbitraria. Considerando ahora el cambio de coordenadas (3.17), se tiene:

$$q^{-1}(t) = A \sin(t) \Rightarrow q(t) = (A \sin(t))^{-1}.$$

Definiendo una constante real arbitraria  $B = A^{-1}$ , se escribe la solución de  $q$  de forma:

$$q(t) = B \csc(t). \quad (3.23)$$

Calculamos la primera y segunda derivada temporal de (3.23):

■ **Primera derivada temporal de  $q(t)$ :**

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{d}{dt} (B \csc(t)) \\ &= -B \csc(t) \cot(t). \\ \therefore \dot{q}(t) &= -B \csc(t) \cot(t). \end{aligned} \quad (3.24)$$

■ **Segunda derivada temporal de  $q(t)$ :**

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) &= \frac{d\dot{q}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (-B \csc(t) \cot(t)) \\ &= -B \left[ \frac{d}{dt} \cot(t) + \csc(t) \frac{d}{dt} \right] \\ &= -B [-\csc(t) \cot^2(t) + \csc(t)(-\csc^2(t))] \\ &= B \csc(t) \cot^2(t) + B \csc^3(t). \\ \therefore \ddot{q}(t) &= B \csc(t) \cot^2(t) + B \csc^3(t). \end{aligned} \quad (3.25)$$

La ecuación de movimiento hallada en la sección (a) es:

$$\ddot{q} - 2\dot{q}^2 q^{-1} - q = 0. \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.23), (3.24) y (3.25) en (3.26):

$$\begin{aligned} [B \csc(t) \cot^2(t) + B \csc^3(t)] - 2[-B \csc(t) \cot(t)]^2 [B \csc(t)]^{-1} - [B \csc(t)] &= 0 \\ B \csc(t) \cot^2(t) + B \csc^3(t) - 2B \csc(t) \cot^2(t) - B \csc(t) &= \\ B \csc^3(t) - B \csc(t) \cot^2(t) - B \csc(t) &= \\ B \csc^3(t) - B \csc(t)[\csc^2(t) - 1] - B \csc(t) &= \\ B \csc^3(t) - B \csc^3(t) + B \csc(t) - B \csc(t) &= \\ 0 &= . \end{aligned}$$

Verificamos que esta solución satisface la ecuación de movimiento de la coordenada  $q$ .

## 4. Problema 4

### Transformación a un sistema de referencia móvil: función generatriz y Hamiltoniano transformado

Considérese una transformación entre un sistema de referencia fijo  $(q_i, p_i)$  y un sistema móvil cuya posición relativa respecto al primero está dada por un vector función del tiempo  $d_i(t)$ . La relación entre las coordenadas generalizadas en ambos sistemas es:

$$\boxed{Q_i = q_i - d_i(t)}, \quad (4.1)$$

donde  $Q_i$  denota las coordenadas del sistema móvil, y  $d_i(t)$  es una función vectorial de tiempo arbitraria.

Se pide:

- (a) Determinar una función generatriz  $F_2(q_i, P_i, t)$  que genere canónicamente esta transformación, y obtener las relaciones entre los momentos  $p_i$  y  $P_i$ .
- (b) Hallar la forma del nuevo Hamiltoniano  $K(Q_i, P_i, t)$ , suponiendo que el Hamiltoniano original es:

$$H(q_i, p_i) = \frac{p_i p_i}{2m} + V(q_i).$$

### (a) Función generatriz y transformación de momentos

#### Marco teórico

Una transformación canónica generada por una función  $F_2(q_i, P_i, t)$  está definida por las relaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i}. \end{aligned}} \quad (4.2)$$

La dependencia temporal de la transformación se refleja en un término adicional en el nuevo Hamiltoniano, como se detallará en la parte (b).

#### Construcción de la función generatriz

Dado que:

$$Q_i = q_i - d_i(t),$$

buscamos una función generatriz  $F_2(q_i, P_i, t)$  tal que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i = q_i - d_i(t).$$

La solución natural es:

$$\boxed{F_2(q_i, P_i, t) = P_i(q_i - d_i(t))}, \quad (4.3)$$

ya que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i - d_i(t), \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i.$$

### Relación entre momentos generalizados

A partir de la definición:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i,$$

con lo cual los momentos son invariantes bajo esta transformación:

$$\boxed{P_i = p_i.} \quad (4.4)$$

### (b) Hamiltoniano transformado en el sistema móvil

#### Transformación del Hamiltoniano

Cuando la transformación depende explícitamente del tiempo, el nuevo Hamiltoniano se obtiene mediante:

$$\boxed{K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i) + \frac{\partial F_2}{\partial t}.} \quad (4.5)$$

Primero evaluamos el término adicional:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = -P_i \dot{d}_i(t),$$

dado que  $q_i$  y  $P_i$  son independientes de  $t$ , y sólo  $d_i(t)$  varía temporalmente.

#### Expresión del Hamiltoniano en las nuevas variables

Dado que  $q_i = Q_i + d_i(t)$  y  $p_i = P_i$ , se tiene:

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &= \frac{p_i p_i}{2m} + V(q_i) = \frac{P_i P_i}{2m} + V(Q_i + d_i(t)), \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} &= -P_i \dot{d}_i(t). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\boxed{K(Q_i, P_i, t) = \frac{P_i P_i}{2m} + V(Q_i + d_i(t)) - P_i \dot{d}_i(t).} \quad (4.6)$$

En notación vectorial, donde  $\vec{P} = (P_1, \dots, P_f)$ ,  $\vec{d}(t) = (d_1(t), \dots, d_f(t))$ , y  $\vec{v}_d(t) = \dot{\vec{d}}(t)$ , esto se expresa como:

$$\boxed{K(\vec{Q}, \vec{P}, t) = \frac{\|\vec{P}\|^2}{2m} + V(\vec{Q} + \vec{d}(t)) - \vec{P} \cdot \dot{\vec{d}}(t).} \quad (4.7)$$

### Verificación de las ecuaciones de Hamilton

Demostramos que  $(\vec{Q}, \vec{P})$  satisfacen las ecuaciones de Hamilton con respecto al nuevo Hamiltoniano  $K$ .

Evolución de  $Q_i$ :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} = \frac{P_i}{m} - \dot{d}_i(t), \\ \text{pero también: } \dot{Q}_i &= \dot{q}_i - \dot{d}_i(t) = \frac{p_i}{m} - \dot{d}_i(t) = \frac{P_i}{m} - \dot{d}_i(t). \end{aligned}$$

**Evolución de  $P_i$ :**

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = -\frac{\partial V}{\partial Q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \dot{p}_i.$$

Por tanto, el sistema preserva su estructura hamiltoniana bajo la transformación.

## Interpretación física

La transformación corresponde a un cambio a un sistema de referencia cuyo origen se traslada con velocidad arbitraria  $\vec{v}_d(t) = \dot{\vec{d}}(t)$ .

El término adicional en el Hamiltoniano:

$$-\vec{P} \cdot \dot{\vec{d}}(t)$$

representa el acoplamiento inercial entre el momento lineal de la partícula y la velocidad del sistema de referencia. Este tipo de términos surge naturalmente en sistemas no inerciales y está relacionado con las fuerzas ficticias que aparecen en la formulación lagrangiana (como en el principio de D'Alembert para marcos acelerados).

## Conclusión

- La transformación canónica generada por:

$$F_2(q_i, P_i, t) = P_i(q_i - d_i(t))$$

describe un cambio de sistema de referencia con traslación arbitraria en el tiempo.

- El Hamiltoniano en el sistema móvil es:

$$K(Q_i, P_i, t) = \frac{P_i^2}{2m} + V(Q_i + d_i(t)) - P_i \dot{d}_i(t),$$

e incluye explícitamente el efecto inercial asociado al movimiento del origen.

- Las ecuaciones de Hamilton se preservan bajo esta transformación, garantizando la validez del formalismo hamiltoniano en marcos móviles.