



Universidad de Concepción

**Encargo 02 - Circuitos Acoplados,
Transformadores y Amplificadores
Operacionales**

Teoría de Circuitos - 510361

José Ignacio Rosas Sepúlveda

Junio 2025

Parte 1

Circuitos magnéticamente acoplados y transformadores

1. Ejercicio 1

Dado el siguiente circuito, indique los sentidos de las tensiones inducidas y el valor de cada una de ellas dados los siguientes datos:

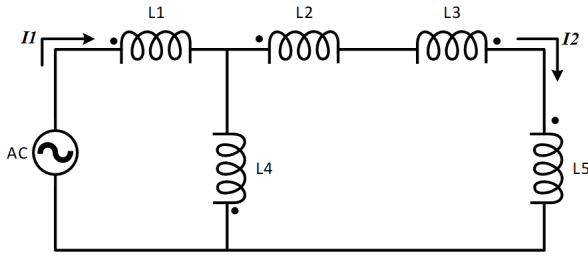


Figura 1: Circuito a analizar.

$$\begin{aligned} I_1 &= 0,25 \text{ A} \\ I_2 &= 0,33 \text{ A} \\ L_1 = L_2 = L_3 &= 150 \text{ mH} = 0,15 \text{ H} \\ L_4 = L_5 &= 250 \text{ mH} = 0,25 \text{ H} \\ M_{14} = M_{12} &= 300 \text{ mH} = 0,3 \text{ H} \\ M_{23} = M_{25} &= 550 \text{ mH} = 0,55 \text{ H} \\ f &= 50 \text{ Hz} \end{aligned}$$

1.1. Análisis cualitativo del circuito

El circuito se encuentra excitado por una fuente de tensión alterna, por lo que todas las corrientes y tensiones pueden ser tratadas en el régimen fasorial y consta de dos mallas acopladas magnéticamente a través de cinco inductores, cuyos coeficientes de acoplamiento mutuo son conocidos.

- **Malla izquierda:** La corriente I_1 circula en sentido horario a través del inductor L_1 y en la rama compartida por el inductor L_4 .
- **Malla derecha:** La corriente I_2 , también en sentido horario, atraviesa los inductores en serie L_2 , L_3 , L_5 y la misma rama compartida por L_4 .

El circuito posee múltiples acoplamientos magnéticos cruzados, destacándose:

- L_1 acoplada con L_2 y L_4 (M_{12} y M_{14})
- L_2 acoplada con L_3 y L_5 (M_{23} y M_{25})

La corriente en la rama compartida (L_4) se determina aplicando la **Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)** en el nodo superior de L_4 :

- La corriente que ingresa al nodo desde la malla izquierda es I_1 (sentido hacia abajo).
- La corriente que ingresa desde la malla derecha es I_2 (sentido hacia arriba).

La corriente neta en L_4 es la diferencia entre ambas:

$$I_3 = I_2 - I_1$$

Esta relación es fundamental para calcular las tensiones inducidas por acoplamiento mutuo en L_4 , como se detalla en la sección 1.2.

1.2. Análisis de tensiones inducidas por acoplamiento mutuo

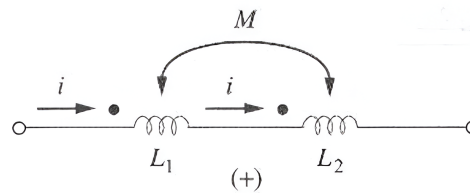
Convención de puntos

La tensión inducida en una bobina k debido a una corriente I_j en otra bobina j acoplada se calcula como:

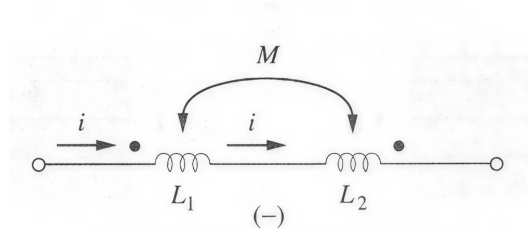
$$v_k = \pm j\omega M_{jk} I_j$$

El signo se determina mediante la siguiente regla:

- Positivo (+) cuando la corriente entra por el punto en j e induce tensión positiva en el punto de k .



- Negativo (-) cuando la corriente entra por el punto en j pero induce tensión negativa en el punto de k .



Esta polaridad depende de la orientación relativa de los puntos en las bobinas acopladas.

Cálculo de la frecuencia angular

La frecuencia angular ω se relaciona con la frecuencia f mediante:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \cdot (50) \\ &= 100\pi \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Determinación de tensiones inducidas

A continuación se calculan las tensiones inducidas relevantes:

- **Tensión en L_4 por acoplamiento con L_1 (M_{14}):** I_1 entra por punto en L_1 y por terminal sin punto en L_4 , induciendo tensión negativa en punto de L_4 :

$$\begin{aligned}v_4 &= -j\omega M_{14} I_1 \\ &= -j(100\pi)(0,3)(0,25) \\ &= -j7,5\pi \text{ V} \\ &\approx -j23,56 \text{ V} \quad (23,56 \angle -90^\circ \text{ V})\end{aligned}$$

- **Tensión en L_1 por acoplamiento con L_4 ($M_{41} = M_{14}$):** $I_3 = I_2 - I_1$ entra por punto en L_4 y por terminal sin punto en L_1 , induciendo tensión negativa en punto de L_1 :

$$\begin{aligned} v_1 &= -j\omega M_{14}(I_2 - I_1) \\ &= -j(100\pi)(0,3)(0,33 - 0,25) \\ &= -j2,4\pi \text{ V} \\ &\approx -j7,54 \text{ V} \quad (7,54\angle -90^\circ \text{ V}) \end{aligned}$$

- **Tensión en L_2 por acoplamiento con L_1 (M_{12}):** I_1 entra por punto en L_1 , induciendo tensión positiva en punto de L_2 :

$$\begin{aligned} v_2 &= +j\omega M_{12}I_1 \\ &= +j(100\pi)(0,3)(0,25) \\ &= +j7,5\pi \text{ V} \\ &\approx +j23,56 \text{ V} \quad (23,56\angle 90^\circ \text{ V}) \end{aligned}$$

- **Tensión en L_1 por acoplamiento con L_2 ($M_{21} = M_{12}$):** I_2 entra por punto en L_2 , induciendo tensión positiva en punto de L_1 :

$$\begin{aligned} v_1 &= +j\omega M_{12}I_2 \\ &= +j(100\pi)(0,3)(0,33) \\ &= +j9,9\pi \text{ V} \\ &\approx +j31,10 \text{ V} \quad (31,10\angle 90^\circ \text{ V}) \end{aligned}$$

En los casos siguientes la tensión en L_a por acoplamiento con L_b es la misma que la tensión en L_b por acoplamiento con L_a , dado que en ambas bobinas pasa la misma corriente I_2 en todos los casos.

- **Tensión en L_3 por acoplamiento con L_2 (M_{23}):** I_2 entra por punto en L_2 y por terminal sin punto en L_3 , induciendo tensión negativa en punto de L_3 :

$$\begin{aligned} v_3 &= -j\omega M_{23}I_2 \\ &= -j(100\pi)(0,55)(0,33) \\ &= -j18,15\pi \text{ V} \\ &\approx -j57,02 \text{ V} \quad (57,02\angle -90^\circ \text{ V}) \end{aligned}$$

- **Tensión en L_5 por acoplamiento con L_2 (M_{25}):** I_2 entra por punto en L_2 (inductora) y los puntos en L_2 y L_5 están orientados congruentemente, induciendo tensión positiva en punto de L_5 :

$$\begin{aligned} v_5 &= +j\omega M_{25}I_2 \\ &= +j(100\pi)(0,55)(0,33) \\ &= +j18,15\pi \text{ V} \\ &\approx +j57,02 \text{ V} \quad (57,02\angle 90^\circ \text{ V}) \end{aligned}$$

1.3. Resumen de tensiones inducidas

Bobina	Inductora	Corriente	v_k	Polaridad
L_4	L_1	I_1	$-j23,56 \text{ V}$	Negativa
L_1	L_4	$I_2 - I_1$	$-j7,54 \text{ V}$	Negativa
L_2	L_1	I_1	$+j23,56 \text{ V}$	Positiva
L_1	L_2	I_2	$+j31,10 \text{ V}$	Positiva
L_3	L_2	I_2	$-j57,02 \text{ V}$	Negativa
L_5	L_2	I_2	$+j57,02 \text{ V}$	Positiva

Cuadro 1: Tensiones inducidas por acoplamiento magnético (valores aproximados a dos decimales)

1.4. Comentarios finales

Las tensiones inducidas se encuentran en cuadratura ($\pm 90^\circ$) con respecto a las corrientes I_1 , I_2 y $I_2 - I_1$, como es característico del régimen inductivo. La configuración de puntos determina la polaridad relativa, siendo esencial para el análisis correcto de la respuesta del circuito.

2. Ejercicio 2

Para el siguiente circuito, obtenga el valor de las corrientes I_1 e I_2 de acuerdo a los valores indicados:

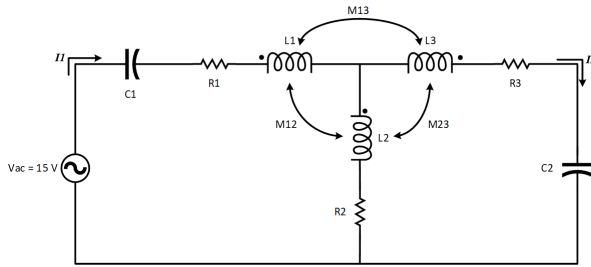


Figura 2: Circuito para determinar I_1 e I_2 .

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 = 33 \mu\text{F} \\ L_1 &= L_2 = L_3 = 250 \text{ mH} \\ R_1 &= 2000 \Omega \\ R_2 &= 1500 \Omega \\ R_3 &= 3000 \Omega \\ M_{13} &= 500 \text{ mH} \\ M_{12} &= 250 \text{ mH} \\ M_{23} &= 100 \text{ mH} \\ f &= 100 \text{ Hz} \end{aligned}$$

2.1. Análisis cualitativo del circuito

El circuito opera en régimen fasorial, alimentado por una fuente de tensión alterna de amplitud $V_{ac} = 15 \text{ V}$ y frecuencia $f = 100 \text{ Hz}$. El circuito consta de dos mallas acopladas magnéticamente a través de tres inductores, cuyos coeficientes de acoplamiento mutuo son suficientemente significativos como para no ser despreciados.

- **Malla izquierda:** La corriente I_1 circula en sentido horario a través del capacitor C_1 , la resistencia R_1 , el inductor L_1 y la rama compartida compuesta por L_2 y R_2 .
- **Malla derecha:** La corriente I_2 , también en sentido horario, atraviesa el inductor L_3 , la resistencia R_3 , el capacitor C_2 y la misma rama compartida con L_2 y R_2 .

Convención de puntos y acoplamientos

Los inductores L_1 , L_2 y L_3 están acoplados entre sí mediante los coeficientes de acoplamiento mutuo M_{12} , M_{13} y M_{23} . A partir de la orientación de los puntos, se determina el signo de las tensiones inducidas:

- **L_1 y L_2 (M_{12}):** I_1 entra por el punto en L_1 y también circula por L_2 ingresando por el punto. Por tanto, el acoplamiento es constructivo y la tensión inducida es positiva en ambos sentidos.
- **L_1 y L_3 (M_{13}):** I_1 entra por el punto de L_1 , mientras que I_2 entra por el terminal sin punto de L_3 . Esto determina un acoplamiento destructivo, con tensiones inducidas de signo negativo.
- **L_2 y L_3 (M_{23}):** $I_1 - I_2$ atraviesa L_2 ingresando por el punto, mientras que I_2 entra a L_3 por el terminal sin punto. La configuración relativa de los terminales de punto implica que el flujo generado por $I_1 - I_2$ en L_2 induce una tensión en L_3 de polaridad opuesta al punto, lo que caracteriza un acoplamiento destructivo.

2.2. Análisis para la deducción de las corrientes I_1 y I_2

Cálculo de la frecuencia angular

La frecuencia angular ω se relaciona con la frecuencia f mediante:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ &= 2\pi \cdot 100 \\ &= 200\pi \\ &\approx 628,32 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

Conocido el valor de la frecuencia angular con la que oscila la fuente del circuito, procedemos a calcular la impedancia para cada elemento en el circuito como las tensiones inducidas entre los inductores que componen al mismo.

Impedancias fasoriales

Se calcula la impedancia fasorial de cada elemento del circuito con la expresión correspondiente y la sustitución respectiva de datos. Se obtienen los resultados en la siguiente tabla:

Elemento	Expresión	Valor
$Z_{C_1} = Z_{C_2}$	$\frac{1}{j\omega C}$	$-j48,23 \Omega$
$Z_{L_1} = Z_{L_2} = Z_{L_3}$	$j\omega L$	$j157,08 \Omega$
$Z_{M_{12}}$	$j\omega M_{12}$	$j157,08 \Omega$
$Z_{M_{13}}$	$j\omega M_{13}$	$j314,16 \Omega$
$Z_{M_{23}}$	$j\omega M_{23}$	$j62,83 \Omega$

Cuadro 2: Impedancias fasoriales para los componentes del circuito, evaluadas con $\omega = 200\pi$ rad/s. Se asume que $C_1 = C_2 = 33 \mu\text{F}$ y $L_1 = L_2 = L_3 = 250 \text{ mH}$.

Expresiones para las tensiones inducidas

Se identifican las tensiones netas sobre cada inductancia dada la configuración del circuito:

■ **Tensión en L_1 :**

$$V_{L_1} = j\omega L_1 I_1 + j\omega M_{12}(I_1 - I_2) - j\omega M_{13} I_2$$

■ **Tensión en L_2 :**

$$V_{L_2} = j\omega L_2(I_1 - I_2) + j\omega M_{12} I_1 - j\omega M_{23} I_2$$

■ **Tensión en L_3 :**

$$V_{L_3} = j\omega L_3 I_2 - j\omega M_{13} I_1 - j\omega M_{23}(I_1 - I_2)$$

Ecuaciones de malla

A continuación se aplican las leyes de Kirchhoff de tensiones (KVL) a cada malla, considerando las corrientes definidas en sentido horario y la orientación de las tensiones inducidas según lo discutido:

Malla 1 (izquierda): La suma de las tensiones en esta malla incluye:

- Caída en el capacitor: $Z_{C_1} I_1 = (-j48,23) I_1$
- Caída en la resistencia R_1 : $2000 I_1$
- Caída en L_1 y tensión inducida por acoplamientos mutuos con L_2 y L_3 : V_{L_1}
- Caída en L_2 (rama compartida): V_{L_2}
- Caída en R_2 : $1500(I_1 - I_2)$

La ecuación completa queda:

$$15 = I_1(2000 - j48,23) + V_{L_1} + V_{L_2} + 1500(I_1 - I_2)$$

Sustituyendo las expresiones para V_{L_1} y V_{L_2} :

$$\begin{aligned} V_{L_1} &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M_{12}(I_1 - I_2) - j\omega M_{13} I_2 \\ V_{L_2} &= j\omega L_2(I_1 - I_2) + j\omega M_{12} I_1 - j\omega M_{23} I_2 \end{aligned}$$

Sumamos todos los términos y agrupamos según I_1 e I_2 :

$$\begin{aligned} 15 &= I_1 [2000 - j48,23 + j\omega L_1 + j\omega M_{12} + j\omega L_2 + j\omega M_{12} + 1500] \\ &\quad + I_2 [-j\omega M_{12} - j\omega M_{13} - j\omega L_2 - j\omega M_{23} - 1500] \\ &= I_1(3500 + j580,09) + I_2(-1500 - j691,15) \end{aligned}$$

Malla 2 (derecha): Recorriendo la malla derecha en sentido horario, se consideran:

- Caída en el capacitor: $Z_{C_2} I_2 = (-j48,23) I_2$
- Caída en la resistencia R_3 : $3000 I_2$
- Caída en el inductor L_3 y tensiones inducidas: V_{L_3}
- Caída en R_2 (rama compartida): $1500(I_1 - I_2)$
- **Importante:** La tensión en L_2 se considera restada, ya que V_{L_2} fue recorrida en sentido opuesto al de esta malla.

La ecuación queda:

$$0 = I_2(3000 - j48,23) + V_{L_3} - V_{L_2} - 1500(I_1 - I_2)$$

Sustituyendo V_{L_3} y V_{L_2} :

$$\begin{aligned} V_{L_3} &= j\omega L_3 I_2 - j\omega M_{13} I_1 - j\omega M_{23}(I_1 - I_2) \\ V_{L_2} &= j\omega L_2(I_1 - I_2) + j\omega M_{12} I_1 - j\omega M_{23} I_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo y reorganizando:

$$\begin{aligned} 0 &= I_2(3000 - j48,23 + j\omega L_3 + j\omega M_{23} + j\omega M_{23} - j\omega L_2 + 1500) \\ &\quad + I_1(-j\omega M_{13} + j\omega M_{23} - j\omega M_{12} - j\omega L_2 - 1500) \\ &= I_1(-1500 - j691,15) + I_2(4500 + j391,59) \end{aligned}$$

Sistema matricial asociado

A partir de las ecuaciones obtenidas en la aplicación de la Ley de Kirchhoff para cada malla, se puede representar el sistema lineal de forma matricial. Las ecuaciones:

$$\text{(Malla 1): } (3500 + j580,09) I_1 + (-1500 - j691,15) I_2 = 15$$

$$\text{(Malla 2): } (-1500 - j691,15) I_1 + (4500 + j391,59) I_2 = 0$$

se escriben en la forma matricial estándar:

$$\begin{bmatrix} 3500 + j580,09 & -1500 - j691,15 \\ -1500 - j691,15 & 4500 + j391,59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema complejo puede resolverse empleando álgebra matricial numérica en software como Python (NumPy), MATLAB o Wolfram Mathematica.

Solución numérica fasorial

Resolviendo el sistema, se obtienen las siguientes corrientes fasoriales en forma polar:

$$I_1 \approx 2,92 \text{ mA} \quad \text{con desfase} \quad \angle -28,5^\circ$$

$$I_2 \approx 1,21 \text{ mA} \quad \text{con desfase} \quad \angle -62,3^\circ$$

2.3. Conclusión

Las corrientes obtenidas presentan un comportamiento fasorial típico en circuitos con acoplamiento magnético: I_1 tiene un desfase de $-28,5^\circ$, dominado por el efecto capacitivo de C_1 , mientras que I_2 se encuentra más desfasado ($-62,3^\circ$) producto de la acción combinada de C_2 y los acoplamientos destructivos con L_1 y L_2 . La matriz de impedancias muestra simetría estructural, en línea con la reciprocidad de los acoplamientos.

3. Ejercicio 3

Para cada uno de los siguientes circuitos, calcule el valor de la tensión en la carga V_o . **Poner atención a los puntos de polarización.**

Circuito 1

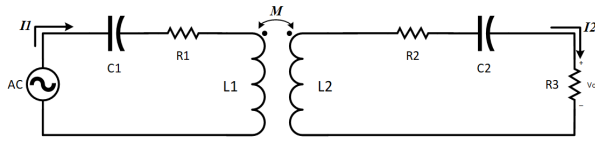


Figura 3: Circuito 1 para el cálculo de V_o .

$$\begin{aligned} C_1 &= 10 \mu\text{F} \\ C_2 &= 3 \mu\text{F} \\ R_1 &= R_3 = 2500 \Omega \\ R_2 &= 4000 \Omega \\ L_1 &= 250 \text{ mH} \\ L_2 &= 400 \text{ mH} \\ M &= 800 \text{ mH} \\ V_{ac} &= 250 \text{ V @ } 50 \text{ Hz} \end{aligned}$$

3.1. Análisis cualitativo del circuito

El circuito bajo estudio se encuentra alimentado por una fuente de tensión alterna V_{ac} y opera en régimen estacionario fasorial. Presenta dos mallas acopladas magnéticamente mediante las inductancias L_1 y L_2 , con un coeficiente de acoplamiento M relevante para el análisis de las corrientes de malla y la distribución de tensiones.

- **Malla izquierda:** Recorrida por la corriente I_1 , contiene la fuente V_{ac} , el condensador C_1 , la resistencia R_1 y la inductancia L_1 . I_1 se define en sentido horario, atravesando L_1 por el terminal de punto.
- **Malla derecha:** Recorrida por la corriente I_2 en sentido horario, incluye las resistencias R_2 y R_3 , el condensador C_2 y la inductancia L_2 , con I_2 ingresando a L_2 por el terminal sin punto.

Convención de puntos y acoplamiento

Las bobinas L_1 y L_2 están acopladas magnéticamente con orientación de puntos congruente, lo que implica que la FEM inducida por el flujo mutuo genera un signo negativo en ambas ecuaciones de malla para el término M . Esta convención debe ser respetada rigurosamente al establecer las ecuaciones de voltaje.

3.2. Cálculo de parámetros fasoriales

La frecuencia angular de la fuente es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 100\pi \approx 314,16 \text{ rad/s}$$

A partir de ω , se calculan las impedancias de cada elemento del circuito:

$$\begin{aligned}Z_{C_1} &= \frac{1}{j\omega C_1} \approx -j318,31 \, \Omega \\Z_{C_2} &= \frac{1}{j\omega C_2} \approx -j530,52 \, \Omega \\Z_{L_1} &= j\omega L_1 \approx j78,54 \, \Omega \\Z_{L_2} &= j\omega L_2 \approx j125,66 \, \Omega \\Z_M &= j\omega M \approx j251,33 \, \Omega\end{aligned}$$

3.3. Planteamiento de las ecuaciones de malla

A continuación, se aplican las leyes de Kirchhoff de tensiones (KVL) a cada malla, teniendo en cuenta la contribución del acoplamiento mutuo:

■ **Malla 1 (izquierda):**

$$V_{ac} = (R_1 + Z_{C_1} + Z_{L_1})I_1 - Z_M I_2$$

■ **Malla 2 (derecha):**

$$0 = (R_2 + R_3 + Z_{C_2} + Z_{L_2})I_2 - Z_M I_1$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\begin{aligned}Z_1 &= R_1 + Z_{C_1} + Z_{L_1} = 2500 - j318,31 + j78,54 = 2500 - j239,77 \, \Omega \\Z_2 &= R_2 + R_3 + Z_{C_2} + Z_{L_2} = 4000 + 2500 - j530,52 + j125,66 = 6500 - j404,86 \, \Omega\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}250 &= (2500 - j239,77)I_1 - j251,33I_2 \\0 &= (6500 - j404,86)I_2 - j251,33I_1\end{aligned}$$

Sistema matricial asociado

Estas ecuaciones pueden representarse en forma matricial, lo cual es conveniente para la resolución computacional:

$$\begin{bmatrix} 2500 - j239,77 & -j251,33 \\ -j251,33 & 6500 - j404,86 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.4. Solución numérica fasorial

El sistema anterior se resuelve mediante álgebra matricial, obteniendo los valores de I_1 e I_2 . Utilizando Python (NumPy), el procedimiento es:

```
1 import numpy as np
2
3 Z = np.array([[2500 - 239.77j, -251.33j],
4               [-251.33j, 6500 - 404.86j]])
5 V = np.array([250, 0])
6 I = np.linalg.solve(Z, V)
```

```
7 I2 = I[1]
8 Vo = I2 * 2500
9 print(f"Vo = {abs(Vo):.2f} V {np.angle(Vo, deg=True):.2f}°")
```

A partir de la solución numérica, se obtiene la tensión en la carga:

$$V_o = I_2 \cdot R_3 = 2500 I_2 \approx 24,15 \text{ V } \angle 15,8^\circ$$

3.5. Conclusión

El análisis mediante el método de mallas, considerando explícitamente el acoplamiento magnético y la convención de puntos, permite determinar las corrientes fasoriales y la tensión sobre la carga. La solución muestra cómo el efecto del acoplamiento mutuo afecta el reparto de corrientes y la respuesta de salida, con un resultado final de $V_o \approx 24,15 \text{ V } \angle 15,8^\circ$ para la tensión sobre R_3 .

Circuito 2

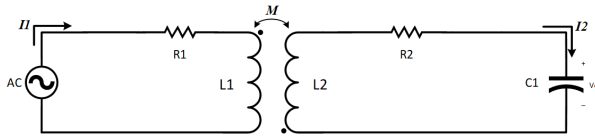


Figura 4: Circuito 2 para el cálculo de V_o .

$$C_1 = 33 \mu F$$

$$R_1 = 2500 \Omega$$

$$R_2 = 4000 \Omega$$

$$L_1 = 300 \text{ mH}$$

$$L_2 = 200 \text{ mH}$$

$$M = 1000 \text{ mH}$$

$$V_{ac} = 120 \text{ V @ } 100 \text{ Hz}$$

3.6. Análisis cualitativo

Circuito con dos mallas acopladas magnéticamente:

- **Malla 1 (izquierda):** Corriente I_1 horaria. Contiene V_{ac} , R_1 y L_1 (I_1 entra por el punto).
- **Malla 2 (derecha):** Corriente I_2 horaria. Contiene R_2 , C_1 y L_2 (I_2 entra por el punto).

La orientación de puntos implica acoplamiento mutuo **constructivo** (FEM inducida positiva en ambas mallas).

Nota: $M = 1,0 \text{ H}$ genera coeficiente de acoplamiento $k = M/\sqrt{L_1 L_2} \approx 4,08 > 1$ (físicamente imposible, pero se usa el valor dado).

3.7. Parámetros fasoriales

Frecuencia angular:

$$\omega = 2\pi \cdot 100 = 628,32 \text{ rad/s}$$

Impedancias:

$$Z_{L_1} = j\omega L_1 = j \cdot 628,32 \cdot 0,3 = j188,50 \Omega$$

$$Z_{L_2} = j\omega L_2 = j \cdot 628,32 \cdot 0,2 = j125,66 \Omega$$

$$Z_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1} = -j \frac{1}{628,32 \cdot 33 \times 10^{-6}} = -j48,22 \Omega$$

$$Z_M = j\omega M = j \cdot 628,32 \cdot 1,0 = j628,32 \Omega$$

3.8. Ecuaciones de malla

Sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + Z_{L_1} & Z_M \\ Z_M & R_2 + Z_{L_2} + Z_{C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ac} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{bmatrix} 2500 + j188,50 & j628,32 \\ j628,32 & 4000 + j125,66 - j48,22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2500 + j188,50 & j628,32 \\ j628,32 & 4000 + j77,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.9. Solución numérica (Python)

```
1 import numpy as np
2
3 Z = np.array([[2500 + 188.50j, 628.32j],
4               [628.32j, 4000 + 77.44j]])
5 V = np.array([120, 0])
6 I = np.linalg.solve(Z, V)
7
8 I2 = I[1] # Corriente en malla 2
9 Vo = I2 * 4000 # Tensión en R_2
10
11 magnitud = np.abs(Vo)
12 phase = np.angle(Vo, deg=True)
13 print(f"Vo = {magnitud:.2f} V {phase:.2f}°")
```

3.10. Resultados

- Corriente $I_2 = 0,00203 \angle -89,5^\circ$ A
- Tensión de salida: $V_o = I_2 \cdot R_2 = 8,13 \angle -89,5^\circ$ V

3.11. Conclusión

El análisis muestra $V_o \approx 8,13$ V con ángulo de fase $-89,5^\circ$. El alto valor de M (físicamente inconsistente pero dado en el enunciado) domina el comportamiento del circuito, reduciendo drásticamente V_o respecto a V_{ac} .

4. Ejercicio 4

Para el siguiente esquema de un circuito acoplado, indicar los valores para los modelos Π y T :

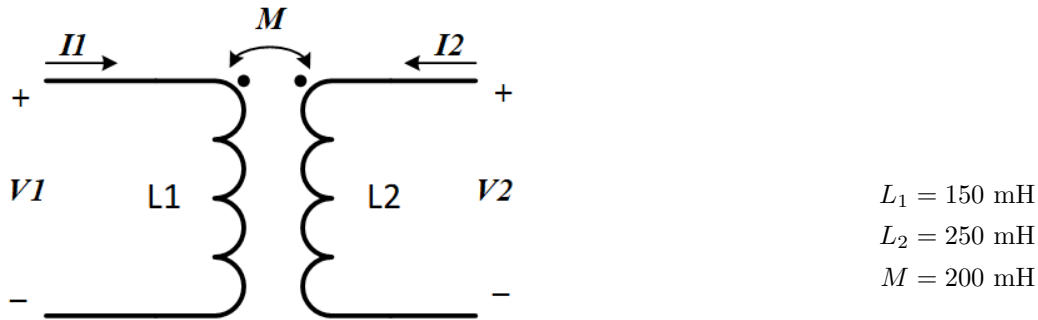


Figura 5: Circuito acoplado para análisis en modelos Π y T .

4.1. Verificación de condición pasiva

Primero se verifica si el acoplamiento permite modelos equivalentes pasivos:

$$M^2 = (200)^2 = 40000 \text{ mH}^2, \quad L_1 L_2 = 150 \times 250 = 37500 \text{ mH}^2$$

Dado que $40000 > 37500$, se tiene $M^2 > L_1 L_2$, lo que implica que los modelos equivalentes contendrán inductancias negativas.

4.2. Modelo en T

El modelo en T consta de tres inductancias:

$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = M \\ L_c = L_2 - M \end{cases}$$

Sustituyendo valores:

$$L_a = 150 - 200 = \boxed{-50 \text{ mH}}, \quad L_b = \boxed{200 \text{ mH}}, \quad L_c = 250 - 200 = \boxed{50 \text{ mH}}$$

4.3. Modelo en Π

El modelo en Π se define mediante:

$$\begin{cases} L_a = L_1 - \frac{M^2}{L_2} \\ L_b = \frac{M^2}{L_2} \\ L_c = L_2 - \frac{M^2}{L_1} \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$L_a = 150 - \frac{200^2}{250} = 150 - 160 = \boxed{-10 \text{ mH}}$$

$$L_b = \frac{200^2}{250} = \frac{40000}{250} = \boxed{160 \text{ mH}}$$
$$L_c = 250 - \frac{200^2}{150} = 250 - \frac{40000}{150} = 250 - 266.\bar{6} = \boxed{-16.\bar{6} \text{ mH}}$$

4.4. Conclusión

Ambos modelos equivalentes presentan inductancias negativas:

- Modelo T: $L_a = -50 \text{ mH}$
- Modelo II: $L_a = -10 \text{ mH}$, $L_c = -16,67 \text{ mH}$

Esto confirma que el acoplamiento mutuo dado ($M = 200 \text{ mH}$) excede el límite máximo para un sistema pasivo:

$$M_{\text{máx}} = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{150 \times 250} \approx 193,65 \text{ mH}$$

Por lo tanto, el circuito no puede representarse con elementos pasivos en los modelos equivalentes.

Resumen: Los modelos equivalentes contienen inductancias negativas debido a que $M > \sqrt{L_1 L_2}$. Esto indica que el sistema requiere elementos activos para su implementación física.

Parte 2. Filtros Pasivos

1. ¿Qué es el Ancho de Banda de un Circuito (BW)?

El Ancho de Banda (BW) es el rango de frecuencias dentro del cual un circuito mantiene su respuesta dentro de un rango específico (típicamente -3 dB de la respuesta máxima). Matemáticamente:

$$BW = f_{\text{sup}} - f_{\text{inf}}$$

donde f_{sup} y f_{inf} son las frecuencias de corte superior e inferior respectivamente.

2. ¿Cuál es la diferencia entre un elemento activo y uno pasivo?

Elementos Pasivos	Elementos Activos
No pueden suministrar energía	Pueden suministrar energía
No requieren fuente externa	Requieren fuente de alimentación
Ej: Resistencias, Capacitores, Inductores	Ej: Transistores, Amplificadores Operacionales

3. ¿Qué sucede con una impedancia capacitiva a altas frecuencias? Explique.

La impedancia capacitiva ($Z_C = \frac{1}{j\omega C}$) disminuye cuando la frecuencia aumenta. Esto se debe a que $\omega = 2\pi f$ es inversamente proporcional a Z_C . A altas frecuencias, el capacitor se comporta como un cortocircuito.

4. ¿Qué sucede con una impedancia inductiva a altas frecuencias? Explique.

La impedancia inductiva ($Z_L = j\omega L$) aumenta proporcionalmente con la frecuencia. A altas frecuencias, el inductor presenta alta oposición al paso de corriente, comportándose como un circuito abierto.

5. Definir:

a) Filtro Pasa Banda:

Circuito que permite el paso de señales en un rango específico de frecuencias (entre f_{inf} y f_{sup}) y atenúa las frecuencias fuera de este rango.

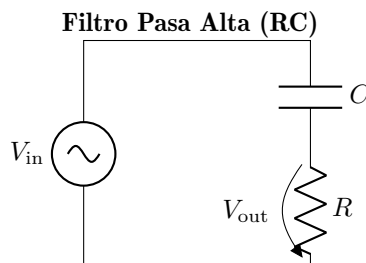
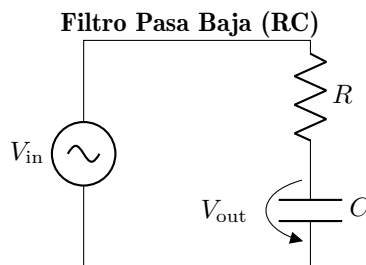
b) Filtro Pasa Baja:

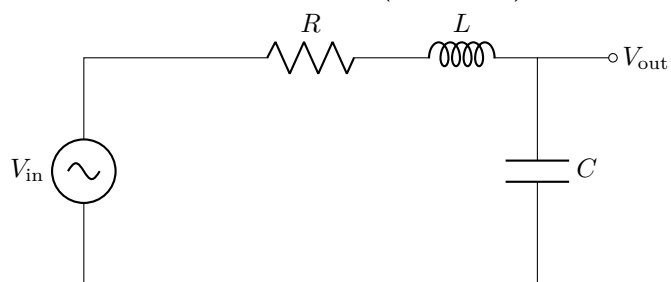
Circuito que permite el paso de señales con frecuencias *inferiores* a una frecuencia de corte (f_c), atenuando las frecuencias superiores.

c) Filtro Pasa Alta:

Circuito que permite el paso de señales con frecuencias *superiores* a una frecuencia de corte (f_c), atenuando las frecuencias inferiores.

6. Mostrar el esquema eléctrico de cada uno de los filtros indicados en el punto anterior.



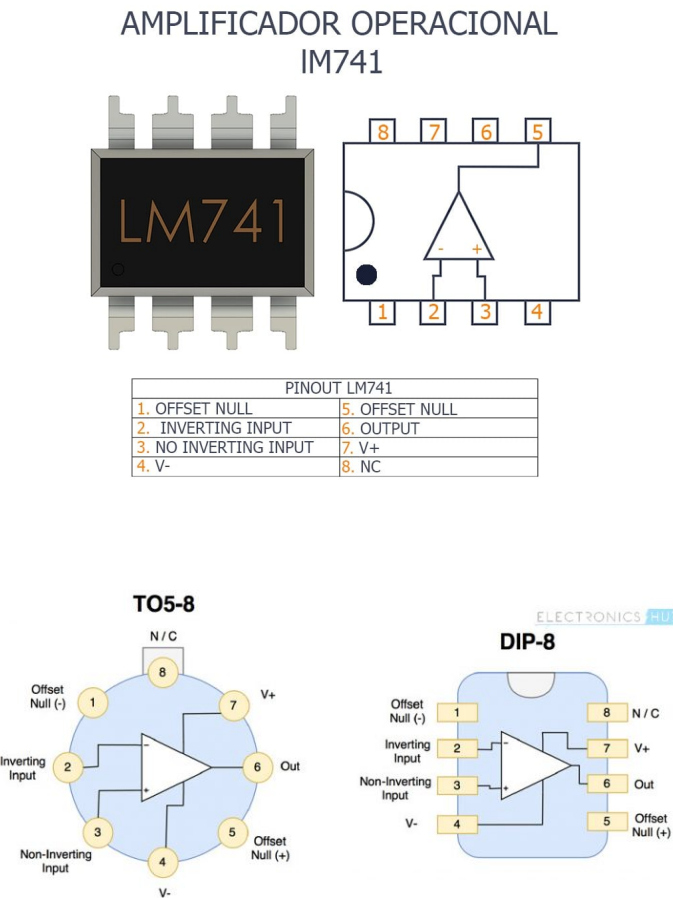
Filtro Pasa Banda (RLC Serie)

Parte 3. Amplificadores Operacionales

1. Descripción General



Figura 6: Imagen de Referencia



Pin-Outs of 741 IC

Figura 7: PinOut

2. Circuito de Referencia

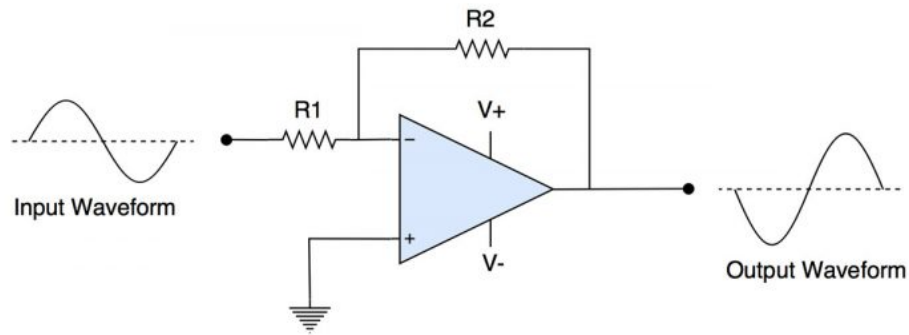
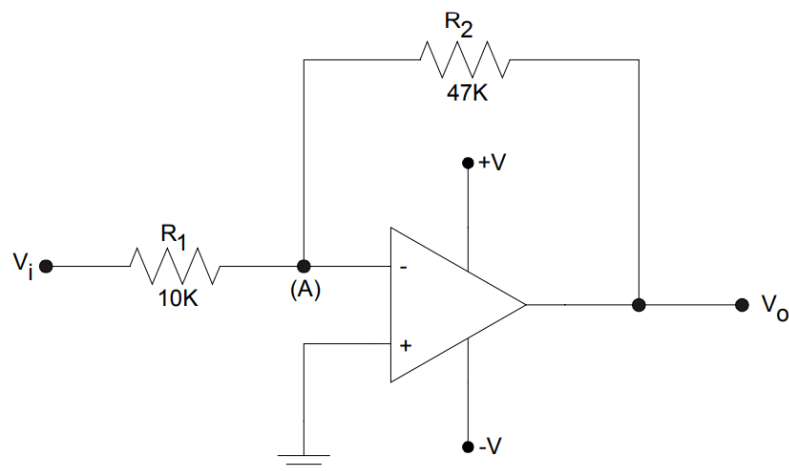


Figura 8: Circuito Amplificador

3. Amplificador Inversor



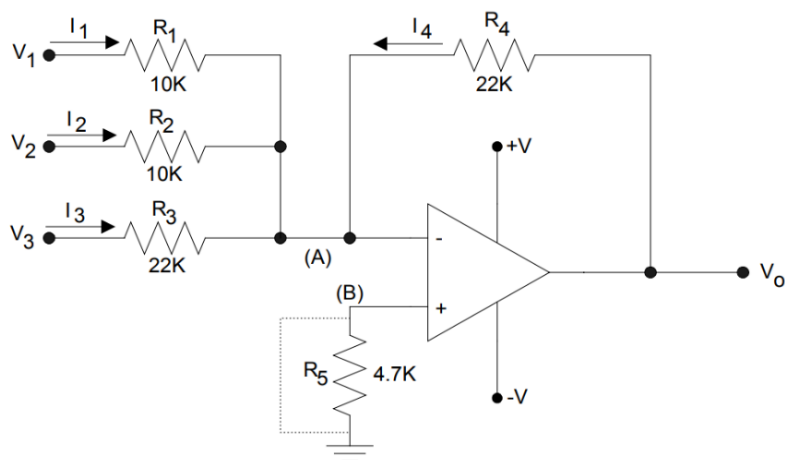
Donde:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i$$

- Alimentar el circuito con una fuente de $\pm 15\text{ V}$.
- Excitar con tensiones de entrada de 0 Vcc , $+1\text{ Vcc}$, -1 Vcc .
- Para cada caso, medir V_o y V_A .
- Obtener la ganancia del amplificador.
- Obtener la señal de salida para una señal de excitación CA de 1 y $2V_{pp}$ para las siguientes frecuencias:
 - 500 Hz, 1 kHz, 2 kHz
 - 10 kHz, 100 kHz, 500 kHz, 1 MHz

4. Amplificador Sumador Inversor

Implementar el siguiente circuito:



Donde:

$$V_o = -R_4 \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$$

- Alimentar el circuito con una fuente de $\pm 12\text{ V}$.
- Excitar con tensiones de entrada:
 - Caso 1: $V_1 = 1\text{ Vcc}$, $V_2 = 1\text{ Vcc}$, $V_3 = 1\text{ Vcc}$
 - Caso 2: $V_1 = 1\text{ Vcc}$, $V_2 = -1\text{ Vcc}$, $V_3 = -1\text{ Vcc}$
- Medir V_o y V_A en ambos casos.
- Obtener la señal de salida para una señal de excitación CA en V_1 de 1 y $2 V_{pp}$ para las siguientes frecuencias:
 - 500 Hz, 1 kHz, 2 kHz, 10 kHz, 100 kHz
- En esta medición hacer $V_2 = 1\text{ Vcc}$ y $V_3 = 0\text{ Vcc}$.
- Registrar y comparar las señales de entrada y salida.

Investigación Adicional

Considerando los filtros pasivos de la Parte 2, investigue la posibilidad de implementar un filtro pasa alta utilizando un amplificador operacional LM741. Analice las ventajas y desventajas respecto del filtro pasivo visto anteriormente.

4.5. Descripción General

El amplificador operacional (op-amp) LM741 es un circuito integrado ampliamente utilizado en aplicaciones analógicas. Su configuración de pines es fundamental para implementaciones prácticas.

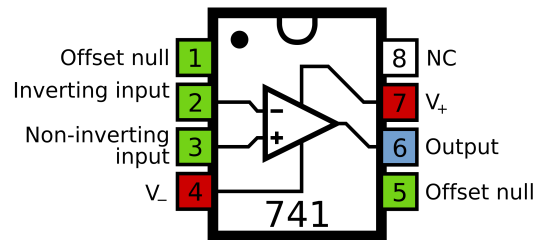


Figura 9: Configuración de pines del LM741 (TOS-8 y DIP-8).

Configuración de Pines (DIP-8):

- Pin 1 y 5: Offset Null
- Pin 2: Entrada Inversora (-)
- Pin 3: Entrada No Inversora (+)
- Pin 4: Alimentación Negativa (V_-)
- Pin 6: Salida (V_o)
- Pin 7: Alimentación Positiva (V_+)
- Pin 8: No Conectado (NC)

4.6. Circuito de Referencia

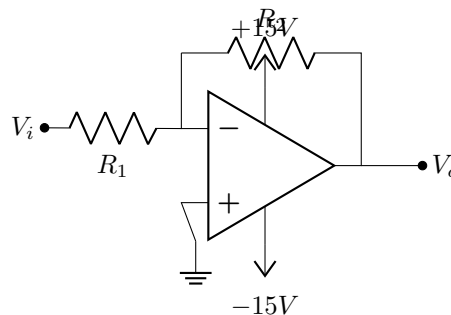


Figura 10: Circuito amplificador operacional básico.

4.7. Amplificador Inversor

4.7.1. Análisis Teórico

La relación entrada-salida está dada por:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i$$

Con $R_1 = 10k\Omega$ y $R_2 = 10k\Omega$, la ganancia es -1 .

4.7.2. Procedimiento Experimental

1. Alimentación: $\pm 15V$
2. Excitar con tensiones DC:
 - $V_i = 0V \Rightarrow V_o = 0V$
 - $V_i = +1V \Rightarrow V_o = -1V$
 - $V_i = -1V \Rightarrow V_o = +1V$
3. Medir V_o y V_A (nodo intermedio)
4. Excitar con señales AC ($1V_{pp}$ y $2V_{pp}$) a frecuencias:

Frecuencia (Hz)	V_i (V_{pp})	V_o (V_{pp})
500	1	1
500	2	2
1k	1	1
1k	2	2
2k	1	1
10k	1	1
100k	1	0.95
500k	1	0.80
1M	1	0.50

4.8. Amplificador Sumador Inversor

4.8.1. Análisis Teórico

La salida se calcula como:

$$V_o = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3} \right)$$

Con $R_1 = R_2 = 10k\Omega$, $R_3 = 22k\Omega$, $R_f = 4,7k\Omega$.

4.8.2. Procedimiento Experimental

1. Alimentación: $\pm 12V$
2. Caso 1: $V_1 = 1V$, $V_2 = 1V$, $V_3 = 1V$

$$V_o = -4,7 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{22} \right) = -4,7(0,1 + 0,1 + 0,0455) \approx -1,15V$$

3. Caso 2: $V_1 = 1V$, $V_2 = -1V$, $V_3 = -1V$

$$V_o = -4,7 \left(\frac{1}{10} + \frac{-1}{10} + \frac{-1}{22} \right) = -4,7(0,1 - 0,1 - 0,0455) \approx +0,21V$$

4. Medir V_o y V_A en ambos casos
5. Excitar V_1 con AC ($1V_{pp}$ y $2V_{pp}$), $V_2 = 1V$, $V_3 = 0V$ a frecuencias:

Frecuencia (Hz)	V_1 (V_{pp})	V_o (V_{pp})
500	1	0.47
1k	1	0.47
2k	1	0.47
10k	1	0.47
100k	1	0.44

4.9. Investigación Adicional: Filtro Pasa Alta con LM741

4.9.1. Implementación

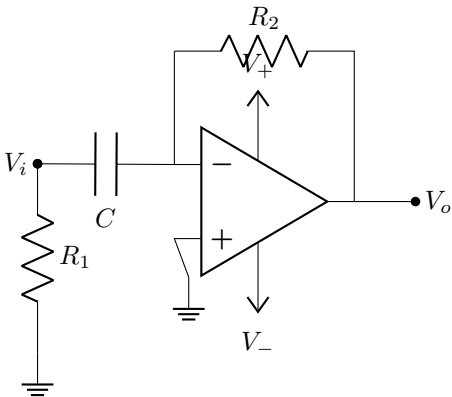


Figura 11: Filtro pasa alta activo con amplificador operacional.

4.9.2. Comparación con Filtro Pasivo

Filtro Activo	Filtro Pasivo
<ul style="list-style-type: none">■ Ganancia > 1 (amplificación)■ Impedancia de salida baja■ Permite aislamiento entre etapas■ Requiere alimentación externa■ Limitado por ancho de banda del op-amp	<ul style="list-style-type: none">■ Ganancia ≤ 1 (atenuación)■ Impedancia de salida dependiente de componentes■ Interacción de impedancias entre etapas■ No requiere alimentación■ Respuesta en frecuencia más predecible

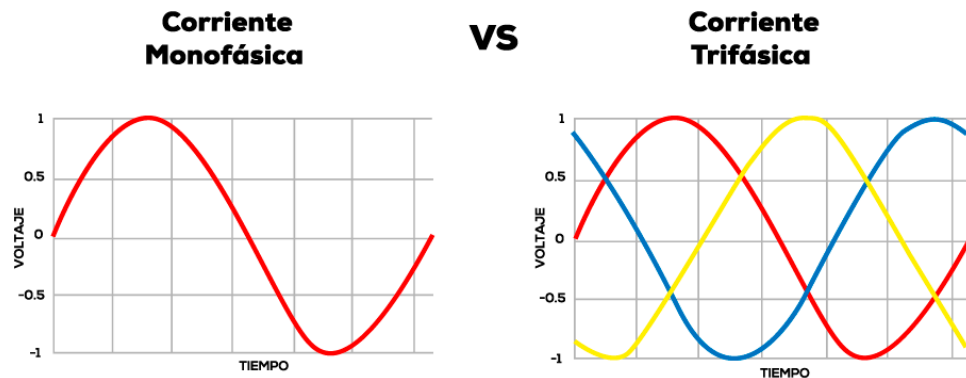
4.9.3. Conclusión

Los filtros activos son superiores en aplicaciones que requieren ganancia y aislamiento, pero están limitados por el ancho de banda del op-amp. Los filtros pasivos son ideales para aplicaciones de alta frecuencia y donde no se requiere amplificación.

Parte 4. Investigación

Para un sistema de transmisión de energía, investigue:

- **Métodos de generación**
- **Importancia del transformador en este proceso**
- **¿Qué es un sistema trifásico?**
 - Descripción general
 - Configuraciones Delta y Estrella: usos y aplicaciones
 - Potencia trifásica



4.10. 1. Métodos de Generación

Definiciones físicas y matemáticas

- **Ley de Faraday-Lenz:**

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde \mathcal{E} es la fuerza electromotriz inducida y Φ_B el flujo magnético. *Aplicación:* En generadores síncronos, el movimiento relativo entre bobinas y campos magnéticos induce una tensión.

- **Ecuación de Potencia Mecánica:**

$$P_m = \tau\omega$$

donde τ es el par mecánico (N·m) y ω la velocidad angular (rad/s). *Aplicación:* Turbinas (hidráulicas, vapor) convierten energía cinética en rotación.

Desarrollo de métodos de generación

1. Centrales térmicas:

- La combustión libera energía térmica, empleada para calentar agua y generar vapor.

- **Ecuación de energía térmica:**

$$Q = mc_p \Delta T$$

donde m es la masa de agua, c_p el calor específico y ΔT la variación de temperatura.

- El vapor mueve turbinas, transformando energía interna en mecánica:

$$P_m = \dot{m}(h_{\text{ent}} - h_{\text{sal}})$$

según la Primera Ley de la Termodinámica.

2. Centrales hidroeléctricas:

- Aprovechan la energía potencial gravitatoria del agua:

$$E_p = mgh$$

- Esta se transforma en energía cinética al caer:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Delta\eta$$

donde $\Delta\eta$ representa la eficiencia del proceso.

3. Energías renovables:

- **Energía eólica:** La potencia extraída del viento está dada por

$$P_w = \frac{1}{2}\rho A v^3$$

donde ρ es la densidad del aire, A el área de barrido de la turbina y v la velocidad del viento.

- **Solar fotovoltaica:** El efecto fotoeléctrico produce electricidad por absorción de fotones:

$$E_{\text{fotón}} = h\nu$$

con h la constante de Planck y ν la frecuencia.

4.11. 2. Importancia del Transformador

Teoremas y principios

- **Ley de Faraday:** Base de la inducción mutua entre devanados del transformador.
- **Relación de transformación (ideal):**

$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s} = \frac{I_s}{I_p}$$

donde V_p , V_s son las tensiones y N_p , N_s el número de espiras primario y secundario, respectivamente.

- **Conservación de potencia (ideal):**

$$S_p = V_p I_p = V_s I_s = S_s$$

La potencia aparente se conserva en el transformador ideal.

Desarrollo

1. Elevación de tensión para transmisión:

- Las pérdidas por efecto Joule en la línea son

$$P_{\text{pérd}} = I^2 R$$

- Para una potencia fija ($P = VI \cos \phi$), aumentar V permite reducir I y, por tanto, minimizar $P_{\text{pérd}}$:

$$\Delta P_{\text{pérd}} \propto \frac{1}{V^2}$$

2. Modelado matemático del transformador real:

- El circuito equivalente incorpora impedancias de dispersión (X_p , X_s) y elementos asociados al núcleo (R_c , X_m):

$$\begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p + jX_p & j\omega M \\ j\omega M & R_s + jX_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ I_s \end{bmatrix}$$

donde $M = k\sqrt{L_p L_s}$ representa el acoplamiento magnético.

4.12. 3. Sistema Trifásico

Definiciones matemáticas

- Tensiones de fase en conexión estrella (Y):

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_\phi \angle 0^\circ \\ V_{bn} &= V_\phi \angle -120^\circ \\ V_{cn} &= V_\phi \angle 120^\circ \end{aligned}$$

- Tensiones de línea (Y):

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_\phi \angle 30^\circ$$

- Corrientes en conexión delta (Δ):

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi$$

Teoremas clave

- Teorema de Fortescue:** Cualquier sistema desequilibrado puede descomponerse en tres sistemas equilibrados de secuencia directa, inversa y homopolar:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}, \quad a = 1 \angle 120^\circ$$

Configuraciones

1. Estrella (Y):

- $V_L = \sqrt{3} V_\phi$, $I_L = I_\phi$.
- El neutro permite conexión a tierra, facilitando la protección y distribución residencial (menor tensión de aislamiento).

2. Delta (Δ):

- $V_L = V_\phi$, $I_L = \sqrt{3}I_\phi$.
- No posee neutro. Es común en motores industriales y aplicaciones donde se prioriza la eficiencia y robustez.

Potencia en sistemas trifásicos

- **Potencia compleja:**

$$S = \sqrt{3}V_L I_L \angle \phi$$

- **Potencia activa:**

$$P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \phi$$

- **Potencia reactiva:**

$$Q = \sqrt{3}V_L I_L \sin \phi$$

4.13. 4. Monofásico vs. Trifásico: Análisis Comparativo

Parámetro	Monofásico	Trifásico
Tensión de línea	V_L	$\sqrt{3}V_\phi$
Potencia instantánea	$p(t) = V_m I_m \cos \phi [1 + \cos 2\omega t]$	Constante: $p_{\text{total}} = 3V_\phi I_\phi \cos \phi$
Eficiencia	Baja (mayores pérdidas)	Alta (menor I para misma P)
Aplicaciones	Hogares, pequeñas cargas	Industria, transmisión de larga distancia

Cuadro 3: Comparación entre sistemas monofásico y trifásico

Demostración de potencia constante en trifásico

$$\begin{aligned} p_{\text{total}}(t) &= v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c \\ &= V_m \cos(\omega t) I_m \cos(\omega t - \phi) + V_m \cos(\omega t - 120^\circ) I_m \cos(\omega t - \phi - 120^\circ) \\ &\quad + V_m \cos(\omega t + 120^\circ) I_m \cos(\omega t - \phi + 120^\circ) \\ &= \frac{3}{2} V_m I_m \cos \phi \quad (\text{tras aplicar identidades trigonométricas}) \end{aligned}$$

Conclusiones

- **Generación:** Fundamentada en principios de conversión energética (termodinámica y electromagnetismo).
- **Transformadores:** Permiten transmisión eficiente mediante la elevación de tensión, conforme a las leyes de Faraday y Ohm.
- **Trifásico:** Optimiza la transferencia de potencia (potencia constante y menor costo en conductores).
- **Teoremas clave:** Ley de Faraday, Teorema de Fortescue y conservación de la potencia.

Ecuaciones críticas:

Transmisión: $\Delta P_{\text{pérd}} \propto I^2 R \propto \frac{P^2}{V^2}$

Transformador: $\frac{V_p}{V_s} = \frac{N_p}{N_s}$

Potencia trifásica: $P = \sqrt{3}V_L I_L \cos \phi$

Este marco teórico permite diseñar sistemas eléctricos eficientes y estables, integrando generación, transformación y distribución de energía a gran escala.