10) Sejam $V = M(2, 2)$ e o subconjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Determinar o subespaço $G(A)$.

Solução

Para todo vetor

$$v = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G(A),$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí o sistema:

$$\begin{cases} -a + 3b = x \\ 2a - b = y \\ -2a + b = z \\ 3a + b = t \end{cases}$$

que é compatível se:

$$z = -y \quad \text{e} \quad x = -2y + t$$

Logo:

$$G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y + t & y \\ -y & t \end{bmatrix}; \ y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

2.6 ESPAÇOS VETORIAIS FINITAMENTE GERADOS

Um espaço vetorial V é *finitamente gerado* se existe um conjunto finito A, $A \subset V$, tal que $V = G(A)$.

Com exceção do Exemplo 6 de 2.2, os demais exemplos de espaços vetoriais citados até aqui são finitamente gerados. Por exemplo, vimos que o $\mathbb{R}^3$ é gerado pelo conjunto finito de três vetores

$$A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

pois, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Em nosso estudo trataremos somente de espaços vetoriais finitamente gerados.

Um exemplo de espaço vetorial que *não* é finitamente gerado é o espaço P de todos os polinômios reais.

Na verdade, dado $A = \{p_1, ..., p_n\} \subset P$, onde p_i é um polinômio de grau i e p_n o de mais alto grau, qualquer combinação linear

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n$$

tem grau $\leqslant n$. Assim, o subespaço $[p_1, ..., p_n]$ contém somente polinômios de grau menor ou igual ao grau de p_n. Como P é formado por todos os polinômios, existem nele polinômios de grau maior que o de p_n. Logo, $G(A) \neq P$ para todo conjunto finito $A \subset P$.

2.7 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

No problema 8 de 2.5.2.1, chamamos a atenção para o fato de que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado por três vetores, ou também por quatro, ou por cinco etc. Assim, três vetores constituem o número mínimo necessário para gerar o $\mathbb{R}^3$. No entanto, quatro, cinco ou mais vetores podem gerar o $\mathbb{R}^3$. Porém, nesse caso, sobram vetores no conjunto gerador. Em nosso estudo temos grande interesse no conjunto gerador que seja o menor possível. Para a determinação do menor conjunto gerador de um espaço vetorial, precisamos ter a noção de dependência e independência linear.

2.7.1 Definição

Sejam V um espaço vetorial e

$A = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$

Consideremos a equação

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \qquad (2.7)$$

Sabemos que essa equação admite pelo menos uma solução:

$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, ..., a_n = 0$

chamada solução trivial.

O conjunto A diz-se *linearmente independente* (LI), ou os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são LI, caso a equação (2.7) admita *apenas a solução trivial.*

Se existirem soluções $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto A é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $v_1, ..., v_n$ são LD.

Exemplos

1) No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, os vetores $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 0, -2)$ e $v_3 = (2, -3, 1)$ formam um conjunto linearmente dependente, pois

$3v_1 + 4v_2 - v_3 = 0$

ou seja:

$3(2, -1, 3) + 4(-1, 0, -2) - (2, -3, 1) = (0, 0, 0)$

2) No espaço vetorial $V = \mathbb{R}^4$, os vetores $v_1 = (2, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 4, -2)$ são linearmente independentes. De fato:

$a(2, 2, 3, 4) + b(0, 5, -3, 1) + c(0, 0, 4, -2) = (0, 0, 0, 0)$

$(2a, 2a, 3a, 4a) + (0, 5b, -3b, b) + (0, 0, 4c, -2c) = (0, 0, 0, 0)$

$(2a, 2a + 5b, 3a - 3b + 4c, 4a + b - 2c) = (0, 0, 0, 0)$

isto é:

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a + 5b = 0 \\ 3a - 3b + 4c = 0 \\ 4a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

O sistema admite unicamente a solução:

$a = 0, \quad b = 0$ e $c = 0$

3) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$, tal que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, é LI.

De fato, a equação:

$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$

ou:

$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

transforma-se em:

$(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$

e, portanto:

$a_1 = a_2 = a_3 = 0$

Logo, o conjunto:

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

é LI.

De forma análoga mostra-se que os vetores

$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$

formam um conjunto linearmente independente no $\mathbb{R}^n$.

4) No espaço vetorial M(3, 1) das matrizes-colunas, de ordem 3×1, os vetores:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são LI (verificação a cargo do leitor).

5) No $\mathbb{R}^2$, os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são LI. No entanto, os vetores e_1, e_2 e $v = (a, b)$ são LD. De fato:

$$x(1, 0) + y(0, 1) + z(a, b) = (0, 0)$$
$$(x, 0) + (0, y) + (az, bz) = (0, 0)$$
$$(x + az,\ y + bz) = (0, 0)$$

isto é:

$$\begin{cases} x + az = 0 \\ y + bz = 0 \end{cases}$$

O sistema admite ao menos uma solução não-trivial. Por exemplo, fazendo $z = 1$, vem:

$x = -a$ e $y = -b$

Logo:

$$-ae_1 - be_2 + v = 0$$

6) No espaço vetorial M(2, 2), o conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LD.

Examinemos a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \tag{1}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou, de modo equivalente:

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí o sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$.

Como existem soluções $a_i \neq 0$ para a equação (1), o conjunto A é LD.

Observação

Vamos substituir a solução do sistema na equação (1):

$$-a_3 v_1 - 2a_3 v_2 + a_3 v_3 = 0$$

ou:

$$a_3 v_1 + 2a_3 v_2 - a_3 v_3 = 0$$

para todo $a_3 \in \mathbb{R}$.

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $a_3 \neq 0$, resulta:

$$v_1 + 2v_2 - v_3 = 0$$

e daí, vem:

$$v_1 = -2v_2 + v_3 \qquad (v_1 \text{ é combinação linear de } v_2 \text{ e } v_3)$$

ou:

$$v_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3 \qquad (v_2 \text{ é combinação linear de } v_1 \text{ e } v_3)$$

ou, ainda:

$$v_3 = v_1 + 2v_2 \qquad (v_3 \text{ é combinação linear de } v_1 \text{ e } v_2)$$

Como se observa, sendo A um conjunto LD, então um vetor de A é combinação linear dos outros. Esse fato e sua recíproca constituem o teorema seguinte.

2.7.2 Teorema

"Um conjunto $A = \{v_1, ..., v_i, ..., v_n\}$ é LD se, e somente se, pelo menos um desses vetores é combinação linear dos outros."

A demonstração é constituída de duas partes:

1ª) Seja A linearmente dependente. Então, por definição, um dos coeficientes da igualdade:

$$a_1v_1 + ... + a_iv_i + ... + a_nv_n = 0$$

deve ser diferente de zero. Supondo que $a_i \neq 0$, vem:

$$a_i v_i = -a_1v_1 - ... - a_{i-1}v_{i-1} - a_{i+1}v_{i+1} - ... - a_nv_n$$

ou:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i}v_1 - ... - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - ... - \frac{a_n}{a_i}v_n$$

e, portanto, v_i é uma combinação linear dos outros vetores.

2ª) Por outro lado, seja v_i uma combinação linear dos outros vetores:

$$v_i = b_1v_1 + ... + b_{i-1}v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + ... + b_nv_n$$

ou, ainda:

$$b_1v_1 + ... + b_{i-1}v_{i-1} - 1v_i + b_{i+1}v_{i+1} + ... + b_nv_n = 0$$

e, portanto, a equação

$$b_1v_1 + ... + (-1)v_i + ... + b_nv_n = 0$$

se verifica para $b_i \neq 0$. No caso, $b_i = -1$.

Logo, A é LD.

Observações

1) Esse último teorema pode ser enunciado de forma equivalente:

"Um conjunto $A = \{v_1, ..., v_n\}$ é LI se, e somente se, nenhum desses vetores for combinação linear dos outros."

2) Para o caso particular de dois vetores, temos:

"Dois vetores v_1 e v_2 são LD se, e somente se, um vetor é múltiplo escalar do outro."

Por exemplo, os vetores

$$v_1 = (1, -2, 3) \quad \text{e} \quad v_2 = (2, -4, 6)$$

são LD, pois

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2$$

ou:

$$v_2 = 2v_1$$

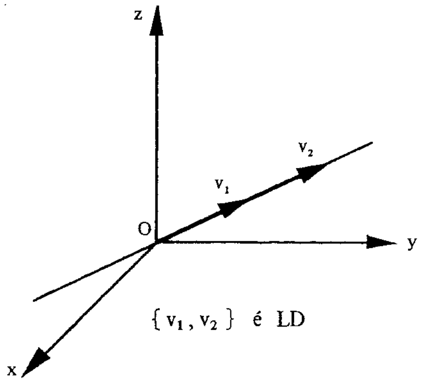
enquanto:

$v_1 = (1, -2, 3)$ e $v_2 = (2, 1, 5)$

são LI, pois

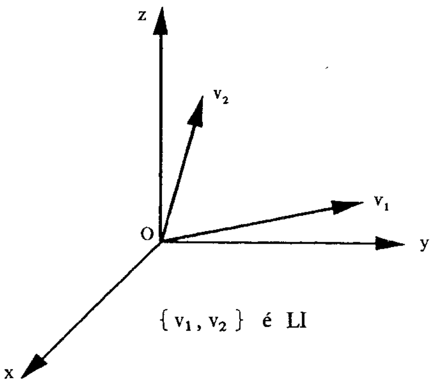
$v_1 \neq kv_2$
para todo $k \in \mathbb{R}$.

3) Nos gráficos a seguir apresentamos uma interpretação geométrica da dependência linear de dois e três vetores no $\mathbb{R}^3$.

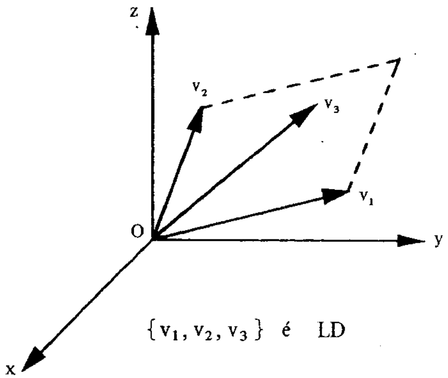


$\{v_1, v_2\}$ é LD

(v_1 e v_2 estão representados na mesma reta que passa pela origem)

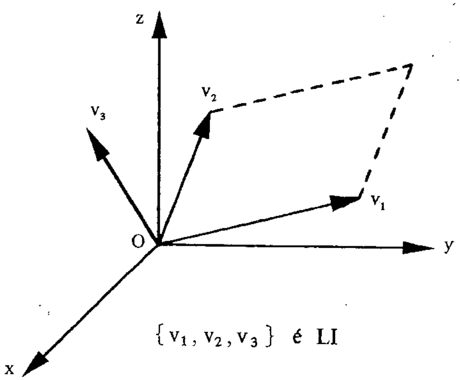


$\{v_1, v_2\}$ é LI



$\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD

(v_1, v_2 e v_3 estão representados no mesmo plano que passa pela origem)



$\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI

2.7.3 Problemas Resolvidos

11) Verificar se são LI ou LD os seguintes conjuntos:

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & -9 \end{bmatrix} \right\} \subset M(2, 2)$

b) $\{(2, -1), (1, 3)\} \subset \mathbb{R}^2$

c) $\{(-1, -2, 0, 3), (2, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$

d) $\{1 + 2x - x^2,\ 2 - x + 3x^2,\ 3 - 4x + 7x^2\} \subset P_2$

Solução

a) Como o conjunto tem apenas dois vetores com um deles sendo múltiplo escalar do outro (o segundo vetor é o triplo do primeiro), o conjunto é LD, de acordo com a Observação 2 do Teorema 2.7.2.

b) Tendo em vista que um vetor não é múltiplo escalar do outro, o conjunto é LI.

Mesmo que fôssemos examinar a igualdade:

$a(2, -1) + b(1, 3) = (0, 0)$

concluiríamos que o sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + 3b = 0 \end{cases}$$

admite somente a solução trivial, o que vem confirmar ser o conjunto LI.

c) Consideremos a equação:

$$a(-1, -2, 0, 3) + b(2, -1, 0, 0) + c(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Portanto:

$$\begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ -2a - b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases}$$

Como o sistema admite apenas a solução trivial:

$a = b = c = 0$,

o conjunto é LI.

d) Seja a equação:

$$a(1 + 2x - x^2) + b(2 - x + 3x^2) + c(3 - 4x + 7x^2) = 0 \qquad (1)$$

ou:

$$(a + 2b + 3c) + (2a - b - 4c)x + (-a + 3b + 7c)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

Pelo princípio da identidade de polinômios, vem:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a - b - 4c = 0 \\ -a + 3b + 7c = 0 \end{cases}$$

Como esse sistema admite outras soluções além da trivial, o conjunto é LD.

Observação

O leitor deve ter notado que a variável x nos polinômios desse problema não desempenha nenhum papel no cálculo. Com o objetivo de simplificar, a cada polinômio do tipo $a_0 + a_1x + a_2x^2$, associa-se a terna (a_0, a_1, a_2).

Assim, a igualdade (1) desse problema poderia ter sido escrita assim:

$$a(1, 2, -1) + b(2, -1, 3) + c(3, -4, 7) = (0, 0, 0)$$

Simplificações análogas a essa podem ser feitas, por exemplo, associando:

1) $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3$ com $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$

2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, 2)$ com $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

3) $a + cx^2 \in P_2$ com $(a, 0, c) \in \mathbb{R}^3$

e assim por diante.

12) Provar que se u e v são LI, então $u + v$ e $u - v$ também o são.

Solução

Consideremos a igualdade

$$a(u + v) + b(u - v) = 0 \qquad (2)$$

da qual resulta

$$(a + b)u + (a - b)v = 0 \qquad (3)$$

Como u e v são LI, nessa igualdade (3) deve-se ter:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

sistema que admite somente a solução $a = b = 0$. Logo, pela igualdade (2), $u + v$ e $u - v$ são LI.

13) Determinar o valor de k para que o conjunto

$\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)\}$

seja LI.

Solução

O conjunto será LI se, e somente se, a equação

$a(1, 0, -1) + b(1, 1, 0) + c(k, 1, -1) = (0, 0, 0)$

admitir apenas a solução $a = b = c = 0$. Dessa equação, vem:

$$\begin{cases} a + b + kc = 0 \\ \quad\;\; b + \;\; c = 0 \\ -a \qquad\; -c = 0 \end{cases}$$

Para que esse sistema admita apenas a solução trivial, deve-se ter $k \neq 2$ (a cargo do leitor).

Logo, o conjunto será LI se $k \neq 2$.

2.7.4 Propriedades da Dependência e da Independência Linear

Seja V um espaço vetorial.

I) Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então A é LI.

De fato:

Como $v \neq 0$, a igualdade

$av = 0$

só se verifica se $a = 0$.

Observação

Considera-se, por definição, que o conjunto vazio ϕ é LI.

II) Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD.

De fato:

Seja o conjunto $A = \{v_1, ..., 0, ..., v_n\}$.

Então, a equação

$0.v_1 + ... + a.0 + ... + 0.v_n = 0$

se verifica para todo $a \neq 0$. Portanto, A é LD.

III) Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é LD, então A é também LD.

De fato:

Sejam $A = \{v_1, ..., v_r, ..., v_n\}$ e a parte

$A_1 = \{v_1, ..., v_r\} \subset A$, A_1 é LD.

Como A_1 é LD, existem $a_i \neq 0$ que verificam a igualdade:

$a_1v_1 + ... + a_rv_r = 0$

e esses mesmos $a_i \neq 0$ verificam também a igualdade

$a_1v_1 + ... + a_rv_r + 0.v_{r+1} + ... + 0.v_n = 0$

Logo, $A = \{v_1, ..., v_r, ..., v_n\}$ é LD.

IV) Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte A_1 de A é também LI.

De fato, se A_1 fosse LD, pela propriedade anterior o conjunto A seria também LD, o que contradiz a hipótese.

Observação

Se todos os subconjuntos próprios de um conjunto finito de vetores são LI, o fato não significa que o conjunto seja LI. De fato, se considerarmos no $\mathbb{R}^2$ os vetores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $v = (4, 5)$, verificaremos que cada um dos subconjuntos $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, v\}$, $\{e_2, v\}$, $\{e_1\}$, $\{e_2\}$ e $\{v\}$ é LI, enquanto o conjunto $\{e_1, e_2, v\}$ é LD.

V) Se $A = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é LI e $B = \{v_1, ..., v_n, w\} \subset V$ é LD, então w é combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

De fato:

Como B é LD, existem escalares $a_1, \ldots, a_n, b$, nem todos nulos, tais que:

$a_1v_1 + ... + a_nv_n + bw = 0.$

Ora, se $b = 0$, então algum dos a_i não é zero na igualdade:

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$$

Porém esse fato contradiz a hipótese de que A é LI. Conseqüentemente, tem-se $b \neq 0$, e, portanto:

$$bw = -a_1v_1 - ... - a_nv_n$$

o que implica:

$$w = -\frac{a_1}{b}v_1 - ... - \frac{a_n}{b}v_n$$

isto é, w é combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

2.8 BASE E DIMENSÃO

2.8.1 Base de um Espaço Vetorial

Um conjunto $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

I) B é LI;

II) B gera V.

Exemplos:

1) $B = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

De fato:

I) B é LI, pois $a(1, 1) + b(-1, 0) = (0, 0)$ implica:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

e daí:

$$a = b = 0$$

II) B gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$(x, y) = y(1, 1) + (y - x)(-1, 0)$$

Realmente, a igualdade

$$(x, y) = a(1, 1) + b(-1, 0)$$

implica:

$$\begin{cases} a - b = x \\ a = y \end{cases}$$

donde:

$$a = y \quad e \quad b = y - x$$

Os vetores da base B estão representados na Figura 2.8.1. Em 2.7.2 já havíamos visto que dois vetores não-colineares são LI. Sendo eles do $\mathbb{R}^2$, irão gerar o próprio $\mathbb{R}^2$. Na verdade, quaisquer dois vetores não-colineares do $\mathbb{R}^2$ formam uma base desse espaço.

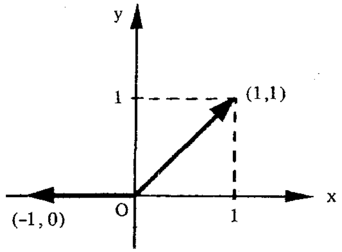


Figura 2.8.1

2) $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, denominada *base canônica*.

De fato:

I) B é LI, pois $a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$ implica $a = b = 0$;

II) B gera $\mathbb{R}^2$, pois todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é tal que:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

3) Consideremos os vetores $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. No exemplo 3 de 2.7.1 deixamos claro que o conjunto $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é LI em $\mathbb{R}^n$. Tendo em vista que todo vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, isto é:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

conclui-se que B gera o $\mathbb{R}^n$. Portanto, B é uma base de $\mathbb{R}^n$. Essa base é conhecida como *base canônica* do $\mathbb{R}^n$.

Conseqüentemente:

$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$;

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$;

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$;

$\{1\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}$.

4) $$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é a base canônica de $M(2, 2)$.

De fato:

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí:

$$a = b = c = d = 0.$$

Portanto, B é LI.

Por outro lado, B gera o espaço $M(2, 2)$, pois qualquer

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, 2)$$

pode ser escrito assim:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, B é base de $M(2, 2)$.