2.4.4.1 Teorema

Se V é a soma direta de S_1 e S_2, todo vetor $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma:

$$v = u + w$$

onde:

$$u \in S_1 \quad e \quad w \in S_2$$

De fato, de $V = S_1 \oplus S_2$, vem, para qualquer $v \in V$:

$$v = u + w, \quad \text{onde} \quad u \in S_1 \quad e \quad v \in S_2 \qquad (2.4.4.1\text{-I})$$

Suponhamos que v pudesse exprimir-se também pela forma:

$$v = u' + w', \quad \text{onde} \quad u' \in S_1 \quad e \quad w' \in S_2 \qquad (2.4.4.1\text{-II})$$

As igualdades 2.4.4.1-I e 2.4.4.1-II permitem escrever:

$$u + w = u' + w'$$

ou:

$$u - u' = w' - w$$

onde:

$$u - u' \in S_1 \quad e \quad w' - w \in S_2$$

Tendo em vista que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$:

$$u - u' = w' - w = 0$$

isto é:

$$u = u' \quad e \quad w = w'$$

Exemplo:

O espaço vetorial $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c);\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ é a soma direta dos subespaços vetoriais:

$$S_1 = \{(a, b, 0);\ a, b \in \mathbb{R}\} \quad e \quad S_2 = \{(0, 0, c);\ c \in \mathbb{R}\}$$

pois qualquer vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como soma de um vetor de S_1 e um vetor de S_2 de modo único:

$$(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$$

e, portanto:

$$\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$$

2.5 COMBINAÇÃO LINEAR

Sejam os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, ..., a_n$. Qualquer vetor $v \in V$ da forma:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

Exemplo

No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau $\leqslant 2$, o polinômio $v = 7x^2 + 11x - 26$ é uma combinação linear dos polinômios:

$$v_1 = 5x^2 - 3x + 2 \quad e \quad v_2 = -2x^2 + 5x - 8$$

De fato:

$$v = 3v_1 + 4v_2$$

isto é:

$$7x^2 + 11x - 26 = 3(5x^2 - 3x + 2) + 4(-2x^2 + 5x - 8)$$
$$7x^2 + 11x - 26 = 15x^2 - 9x + 6 - 8x^2 + 20x - 32$$
$$7x^2 + 11x - 26 = 7x^2 + 11x - 26$$

2.5.1 Problemas Resolvidos

Para os problemas de 1 a 4, consideremos, no $\mathbb{R}^3$, os seguintes vetores: $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

1) Escrever o vetor $v = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

Solução

Pretende-se que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

sendo a_1 e a_2 escalares a determinar. Então, devemos ter:

$$(-4, -18, 7) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1)$$

ou:

$$(-4, -18, 7) = (a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -a_2)$$

ou:

$$(-4, -18, 7) = (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$$

Pela condição de igualdade de dois vetores, resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$.

Portanto,

$$v = 2v_1 - 3v_2$$

Observação

Esse sistema e outros deste Capítulo estão resolvidos no Apêndice.

2) Mostrar que o vetor $v = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

Solução

Deve-se mostrar que não existem escalares a_1 e a_2 tais que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

Com procedimento análogo ao do problema anterior, temos:

$$(4, 3, -6) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1)$$

de onde resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 4 \\ -3a_1 + 4a_2 = 3 \\ 2a_1 - a_2 = -6 \end{cases}$$

Observemos que esse sistema difere do anterior pelos termos independentes. Como é incompatível, o vetor v *não* pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2.

3) Determinar o valor de k para que o vetor $u = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução

Devemos ter:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

ou:

$$(-1, k, -7) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1)$$

de onde vem o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -3a_1 + 4a_2 = k \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}$$

do qual resulta, como solução do problema proposto, $k = 13$ ($a_1 = -3$ e $a_2 = 1$).

De fato:

$(-1, 13, -7) = -3(1, -3, 2) + 1(2, 4, -1)$

$(-1, 13, -7) = (-3, 9, -6) + (2, 4, -1)$

$(-1, 13, -7) = (-1, 13, -7)$.

4) Determinar a condição para x, y e z de modo que (x, y, z) seja combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

Solução

Devemos ter:

$(x, y, z) = a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1)$

de onde vem o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -3a_1 + 4a_2 = y \\ 2a_1 - a_2 = z \end{cases}$$

O vetor (x, y, z) somente será combinação linear de v_1 e v_2 se o sistema tiver solução, e isto somente ocorre se:

$x - y - 2z = 0$

ou:

$x = y + 2z$

Assim, todos os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, que são combinações lineares de v_1 e v_2, têm a forma:

$(y + 2z, y, z)$

com $y, z \in \mathbb{R}$.

Podemos fazer a interpretação geométrica desse resultado. Observemos que os vetores v_1 e v_2 não são colineares. O vetor a_1v_1 tem a direção de v_1, e o vetor a_2v_2, a direção de v_2. Logo, todos os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do tipo

$(x, y, z) = a_1v_1 + a_2v_2$

formam um plano π que passa pela origem conforme sugere a figura 2.5.1. Esse plano tem equação $x - y - 2z = 0$, que estabelece a condição solicitada entre os componentes x, y e z.

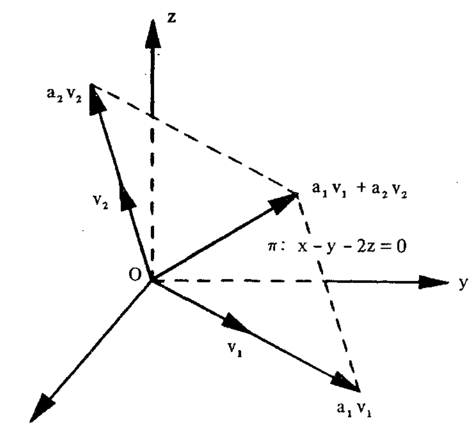


Figura 2.5.1

5) Mostrar que o vetor $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito de infinitas maneiras como combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (2, -1)$.

Solução

Tem-se:

$(3, 4) = a(1, 0) + b(0, 1) + c(2, -1)$

donde:

$$\begin{cases} a + 2c = 3 \\ b - \ \ c = 4 \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} a = 3 - 2c \\ b = 4 + \ \ c \end{cases}$$

e, portanto, para cada valor de c obtém-se um valor para a e outro para b.

2.5.2 Subespaços Gerados

Seja V um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$, $A \neq \phi$.

O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V.

De fato, se:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

e

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + ... + b_n v_n$$

são dois vetores quaisquer de S, pode-se escrever:

$$u + v = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + ... + (a_n + b_n) v_n$$

$$\alpha u = (\alpha a_1) v_1 + (\alpha a_2) v_2 + ... + (\alpha a_n) v_n$$

Tendo em vista que $u + v \in S$ e que $\alpha u \in S$, por serem combinações lineares de $v_1, v_2, ..., v_n$, conclui-se que S é um subespaço vetorial de V.

Simbolicamente, o subespaço S é:

$$S = \{v \in V / v = a_1 v_1 + ... + a_n v_n,\ a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

Observações

1) O subespaço S diz-se *gerado* pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$, ou gerado pelo conjunto A, e representa-se por:

$$S = [v_1, v_2, ..., v_n] \quad \text{ou} \quad S = G(A)$$

Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são chamados *geradores* do subespaço S, enquanto A é o *conjunto gerador* de S.

2) Para o caso particular de $A = \phi$, define-se: $[\phi] = \{0\}$.

3) $A \subset G(A)$, ou seja, $\{v_1, ..., v_n\} \subset [v_1, ..., v_n]$.

4) Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer $G(A) = V$. Nesse caso, A é um conjunto gerador de V.

Exemplos

1) Os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de i e j:

$$(x, y) = xi + yj = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Então:

$$[i, j] = \mathbb{R}^2$$

2) Os vetores $i = (1, 0, 0)$ e $j = (0, 1, 0)$ do $\mathbb{R}^3$ geram o subespaço

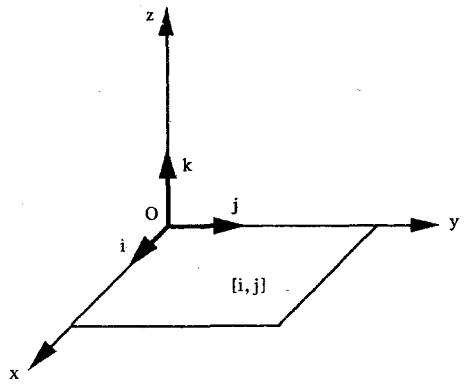
$$S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$$

pois:

$$(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$$

Então:

$[i, j] = S$ é um subespaço próprio do $\mathbb{R}^3$ e representa, geometricamente o plano xOy.



3) Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, pois qualquer $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de e_1, e_2 e e_3:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

ou:

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Então:

$$[e_1, e_2, e_3] = \mathbb{R}^3$$

Observação

Antes de resolvermos alguns problemas e fornecermos certas interpretações geométricas, atentemos para um fato importante.

Dados n vetores $v_1, ..., v_n$ de um espaço vetorial V, se $w \in V$ é tal que

$$w = a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

então:

$$[v_1, ..., v_n, w] = [v_1, ..., v_n]$$

pois *todo vetor* v *que é combinação linear de* $v_1, ..., v_n, w$ *é também combinação linear de* $v_1, ..., v_n$.

Supondo que:

$v \in [v_1, \ldots, v_n, w]$, então existem números reais $b_1, \ldots, b_n, b$

tais que

$$v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n + bw$$

mas:

$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

logo:

$$v = b_1 v_1 + \ldots + b_n v_n + b(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n)$$

ou

$$v = (b_1 + a_1 b)v_1 + \ldots + (b_n + a_n b)v_n$$

e, portanto, v é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$, isto é,

$$v \in [v_1, \ldots, v_n]$$

A recíproca, ou seja,

se $v \in [v_1, \ldots, v_n]$, então $v \in [v_1, \ldots, v_n, w]$

é trivial, pois

se $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, então $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + 0w$.

Assim, sendo S um subespaço gerado por um conjunto A, ao acrescentarmos vetores de S a esse conjunto A, os novos conjuntos continuarão gerando o mesmo subespaço S. Esse fato faz entender que um determinado subespaço S *pode ser gerado por uma infinidade de vetores, porém existe um número mínimo de vetores para gerá-lo.*

2.5.2.1 Problemas Resolvidos

6) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1, 2, 3)$.

Solução

Temos:

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = a(1, 2, 3), \ a \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade:

$(x, y, z) = a(1, 2, 3)$

vem:

$x = a$

$y = 2a$

$z = 3a$

donde

$y = 2x$

$z = 3x$

Logo,

$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x \quad e \quad z = 3x\}$

ou

$[v_1] = \{(x, 2x, 3x);\ x \in \mathbb{R}\}$

O subespaço gerado por um vetor $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 \neq 0$, é uma *reta que passa pela origem* (Figura 2.5.2a). Se a esse vetor acrescentarmos $v_2, v_3, \ldots$, todos *colineares* entre si, o subespaço gerado por 2, 3, ... vetores continuará sendo a mesma reta:

$[v_1] = [v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3] = \ldots$ (Figura 2.5.2b)

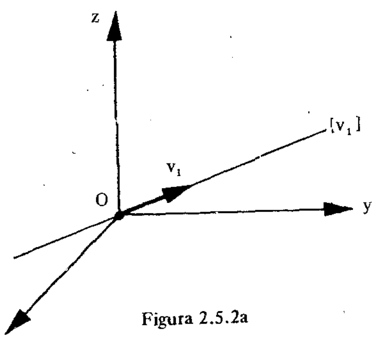


Figura 2.5.2a

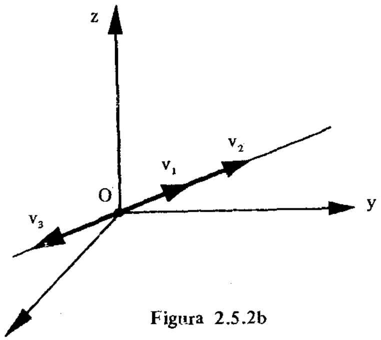


Figura 2.5.2b

7) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1, -2, -1)$ e $v_2 = (2, 1, 1)$.

Solução

Temos:

$[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = a_1(1, -2, -1) + a_2(2, 1, 1),\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

Da igualdade acima, vem:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -2a_1 + a_2 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases}$$

O vetor $(x, y, z) \in [v_1, v_2]$ se, e somente se, o sistema tem solução, e isto somente ocorre quando $x + 3y - 5z = 0$ (exercício a cargo do leitor).

Logo:

$[v_1, v_2] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 3y - 5z = 0\}$

O subespaço gerado pelos vetores v_1, $v_2 \in \mathbb{R}^3$, *não-colineares,* é um *plano* π *que passa pela origem* (Figura 2.5.2c). Se a esses dois vetores acrescentarmos $v_3, v_4, \ldots$, todos *coplanares*, o subespaço gerado por 3, 4, ... vetores continuará sendo o mesmo plano π:

$[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \ldots$ (Figura 2.5.2d)

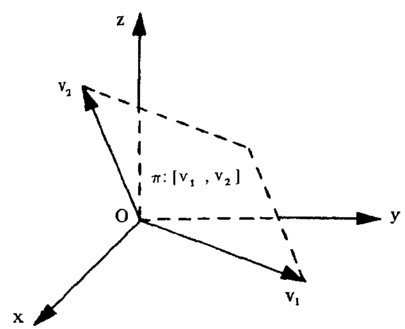


Figura 2.5.2c

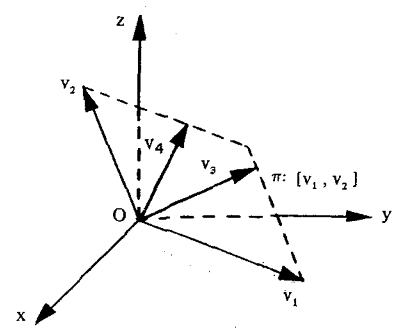


Figura 2.5.2d

8) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo conjunto $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, sendo $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$.

Solução

Para todo vetor $(x, y, z) \in [v_1, v_2, v_3]$, tem-se:

$$(x, y, z) = a_1(1, 1, 1) + a_2(1, 1, 0) + a_3(1, 0, 0)$$

Desta igualdade, vem:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_1 = z \end{cases}$$

ou:

$$\begin{cases} a_1 = z \\ a_2 = y - z \\ a_3 = x - y \end{cases}$$

Portanto:

$$(x, y, z) = z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0)$$

e, por conseguinte, os vetores v_1, v_2 e v_3 geram o $\mathbb{R}^3$, pois cada vetor do $\mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vetores dados.

Logo:

$$[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^3$$

O subespaço gerado por três vetores *não-coplanares* é o próprio $\mathbb{R}^3$ (Figura 2.5.2e). Se a esses três vetores acrescentarmos $v_4, v_5, \ldots$ quaisquer, o subespaço gerado pelos 4, 5, ... vetores continuará sendo o próprio $\mathbb{R}^3$:

$$[v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3, v_4] = \ldots$$

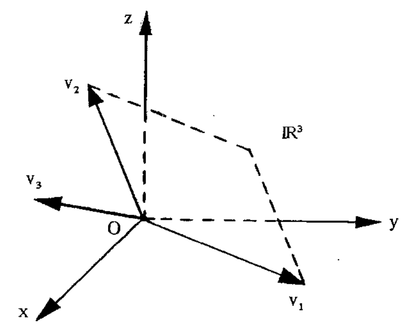


Figura 2.5.2e

9) Mostrar que o conjunto $A = \{(3, 1), (5, 2)\}$ gera o $\mathbb{R}^2$.

Solução

Vamos mostrar que todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear dos vetores do conjunto A, isto é, sempre existem os números reais a_1 e a_2 tais que:

$$(x, y) = a_1(3, 1) + a_2(5, 2)$$

Daí vem o sistema:

$$\begin{cases} 3a_1 + 5a_2 = x \\ a_1 + 2a_2 = y \end{cases}$$

que, resolvido em termos de x e y, fornece:

$$a_1 = 2x - 5y \quad \text{e} \quad a_2 = 3y - x$$

Portanto:

$$(x, y) = (2x - 5y)(3, 1) + (3y - x)(5, 2)$$

isto é:

$$G(A) = \mathbb{R}^2$$

10) Sejam $V = M(2, 2)$ e o subconjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Determinar o subespaço G(A).

Solução

Para todo vetor

$$v = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in G(A),$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí o sistema:

$$\begin{cases} -a + 3b = x \\ 2a - b = y \\ -2a + b = z \\ 3a + b = t \end{cases}$$

que é compatível se:

$$z = -y \quad \text{e} \quad x = -2y + t$$

Logo:

$$G(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y + t & y \\ -y & t \end{bmatrix}; \; y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

2.6 ESPAÇOS VETORIAIS FINITAMENTE GERADOS

Um espaço vetorial V é *finitamente gerado* se existe um conjunto finito A, $A \subset V$, tal que $V = G(A)$.

Com exceção do Exemplo 6 de 2.2, os demais exemplos de espaços vetoriais citados até aqui são finitamente gerados. Por exemplo, vimos que o $\mathbb{R}^3$ é gerado pelo conjunto finito de três vetores

$$A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

pois, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se:

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

Em nosso estudo trataremos somente de espaços vetoriais finitamente gerados.

Um exemplo de espaço vetorial que *não* é finitamente gerado é o espaço P de todos os polinômios reais.

Na verdade, dado $A = \{p_1, ..., p_n\} \subset P$, onde p_i é um polinômio de grau i e p_n o de mais alto grau, qualquer combinação linear

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + ... + a_n p_n$$

tem grau $\leqslant n$. Assim, o subespaço $[p_1, ..., p_n]$ contém somente polinômios de grau menor ou igual ao grau de p_n. Como P é formado por todos os polinômios, existem nele polinômios de grau maior que o de p_n. Logo, $G(A) \neq P$ para todo conjunto finito $A \subset P$.

2.7 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

No problema 8 de 2.5.2.1, chamamos a atenção para o fato de que o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado por três vetores, ou também por quatro, ou por cinco etc. Assim, três vetores constituem o número mínimo necessário para gerar o $\mathbb{R}^3$. No entanto, quatro, cinco ou mais vetores podem gerar o $\mathbb{R}^3$. Porém, nesse caso, sobram vetores no conjunto gerador. Em nosso estudo temos grande interesse no conjunto gerador que seja o menor possível. Para a determinação do menor conjunto gerador de um espaço vetorial, precisamos ter a noção de dependência e independência linear.