4.6 TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS

Entende-se por transformações lineares planas as transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Veremos algumas de especial importância e suas correspondentes interpretações geométricas.

4.6.1 Reflexões

a) *Reflexão em torno do eixo dos* x

Essa transformação linear leva cada ponto (x, y) para sua imagem $(x, -y)$, simétrica em relação ao eixo dos x.

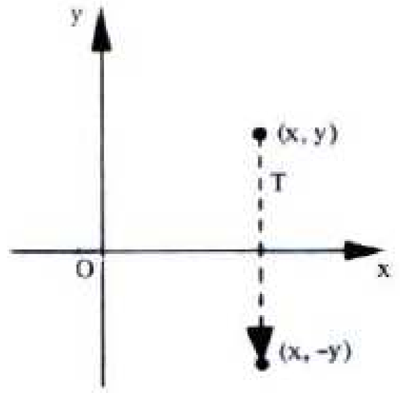
Demonstra-se que as reflexões são transformações lineares.

Esta particular transformação é

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, -y) \quad \text{ou}$$

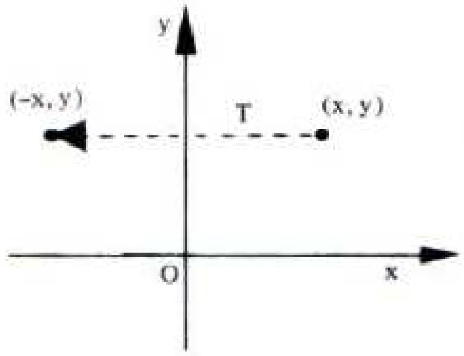
$$T(x, y) = (x, -y)$$



sendo $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sua matriz canônica, isto é:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) *Reflexão em torno do eixo dos* y



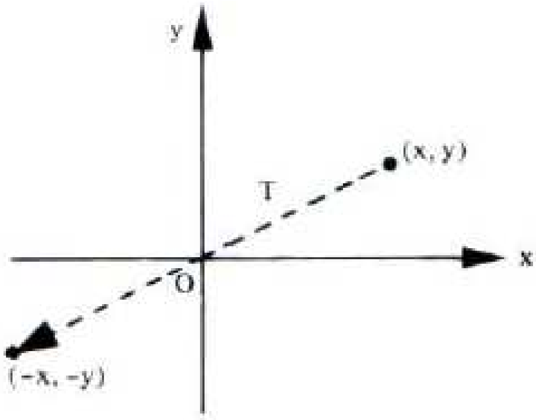
$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (-x, y)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

c) *Reflexão na origem*



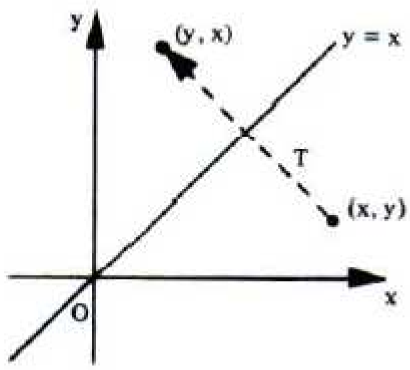
$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (-x, -y)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d) *Reflexão em torno da reta* $y = x$



$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

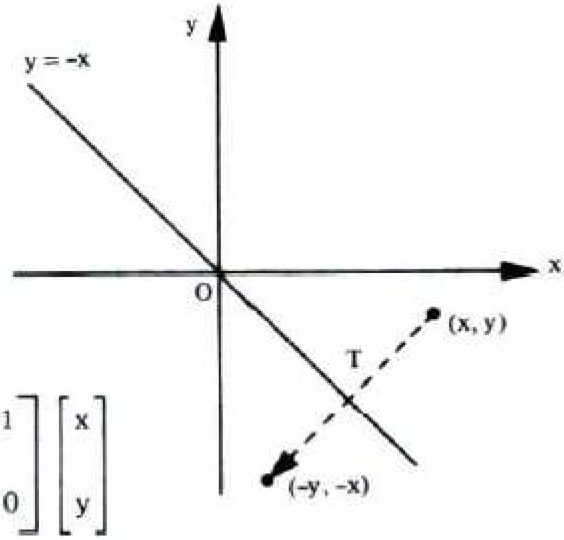
ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e) *Reflexão em torno da reta* $y = -x$

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (-y, -x)$



ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

4.6.2 Dilatações e Contrações

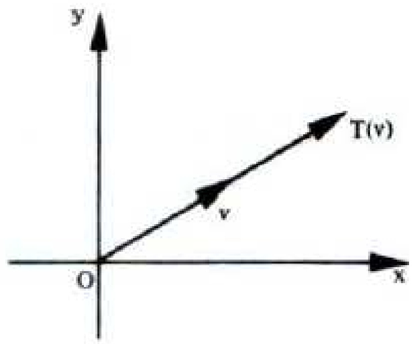
a) *Dilatação ou contração na direção do vetor*

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto \alpha(x, y), \ \alpha \in \mathbb{R}$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



Observemos que:

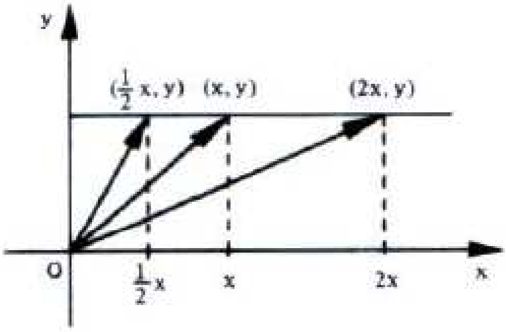
se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor;
se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor;
se $\alpha = 1$, T é a identidade I;
se $\alpha < 0$, T troca o sentido do vetor.

A transformação $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$ é um exemplo de contração.

b) *Dilatação ou contração na direção do eixo dos* x

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (\alpha x, y), \ \alpha > 0$$



ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

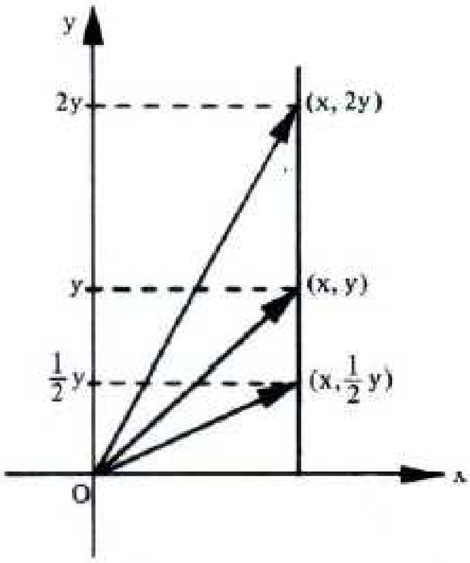
Observemos que:

se $\alpha > 1$, T dilata o vetor;
se $0 < \alpha < 1$, T contrai o vetor.

Essa transformação é também chamada dilatação ou contração na direção 0x (ou horizontal) de um fator α.

A figura da página anterior sugere uma dilatação de fator $\alpha = 2$ e uma contração de fator $\alpha = 1/2$.

c) *Dilatação ou contração na direção do eixo dos* y



$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, \alpha y), \ \alpha > 0 \text{ (Ver figura acima.)}$$

4.6.3 Cisalhamentos

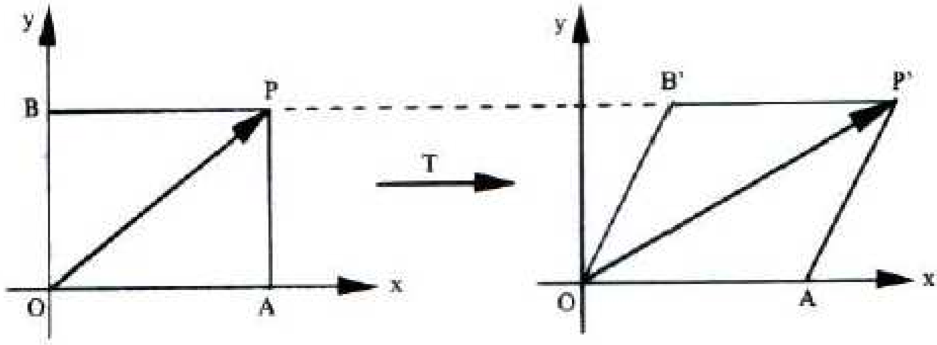
a) *Cisalhamento na direção do eixo dos* x

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x + \alpha y, y)$

ou:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



O efeito do cisalhamento é transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B', de mesma base e mesma altura. Observemos que, por esse cisalhamento, cada ponto (x, y) se desloca paralelamente ao eixo dos x até chegar em $(x + \alpha y, y)$, com exceção dos pontos do próprio eixo dos x, que permanecem em sua posição, pois para eles $y = 0$. Com isso está explicado por que o retângulo e o paralelogramo da figura têm a mesma base $\overline{OA}$.

Esse cisalhamento é também chamado *cisalhamento horizontal de fator* α.

b) *Cisalhamento na direção do eixo dos* y

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x, y + \alpha x)$

A matriz canônica desse cisalhamento é: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

4.6.4 Rotação

A rotação do plano em torno da origem (Figura 4.6.4a), que faz cada ponto descrever um ângulo θ, determina uma transformação linear $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canônica é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

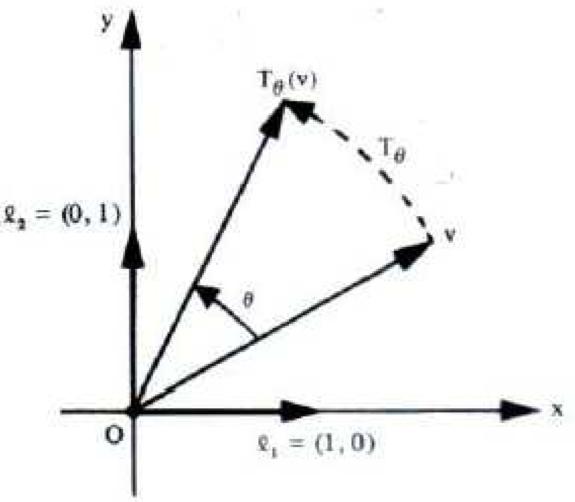


Figura 4.6.4a

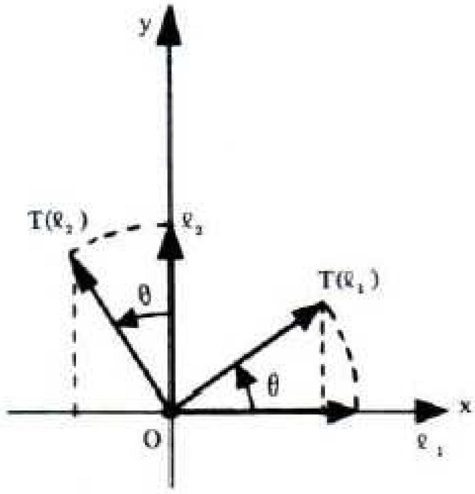


Figura 4.6.4b

As imagens dos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ (Figura 4.6.4b) são:

$T(e_1) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta)$

$T(e_2) = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta)$

isto é:

$T(e_1) = (\cos\theta)\,e_1 + (\text{sen}\,\theta)\,e_2$

$T(e_2) = (-\text{sen}\,\theta)\,e_1 + (\cos\theta)\,e_2$

Por conseguinte, a matriz da transformação T_θ é:

$$[T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Essa matriz chama-se matriz de rotação de um ângulo θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, e é a matriz canônica da transformação linear $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$.

Se, por exemplo, desejarmos a imagem do vetor $v = (4, 2)$ pela rotação de $\theta = \pi/2$, basta fazer:

$$[T(4, 2)] = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\text{sen}\ \pi/2 \\ \text{sen}\ \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[T(4, 2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [T(4, 2)] = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$