CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

4.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Neste capítulo estudaremos um tipo especial de função (ou aplicação), onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais. Estamos particularmente interessados nas funções vetoriais lineares, que serão denominadas transformações lineares.

Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se $T: V \longrightarrow W$. Sendo T uma função, cada vetor $v \in V$ tem um só vetor imagem $w \in W$, que será indicado por $w = T(v)$.

Vamos exemplificar, considerando $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$.

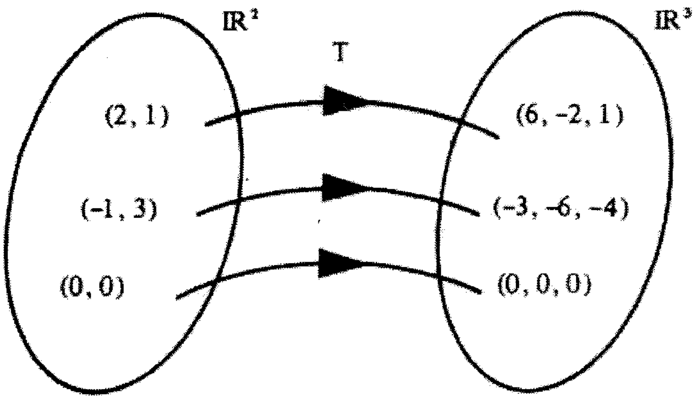
Uma transformação $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associa vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ com vetores $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se a lei que define a transformação T for

$$T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$$

o diagrama da página seguinte apresenta três vetores particulares v e suas correspondentes imagens w.

Deve ficar bem claro que, para calcular, por exemplo, $T(2, 1)$, tem-se: $x = 2$ e $y = 1$, e daí:

$$T(2, 1) = (3 \times 2, -2 \times 1, 2 - 1) = (6, -2, 1)$$



4.1.1 Definição

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \longrightarrow W$ é chamada *transformação linear* de V em W se:

I) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Observação

Uma transformação linear de V em V (é o caso de $V = W$) é chamada *operador linear sobre* V.

Exemplos

1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é linear.

De fato:

I) Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores genéricos de $\mathbb{R}^2$.

Então:

$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(u + v) = (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$

$T(u + v) = (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

$T(u + v) = (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2)$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

II) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e para qualquer $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1)$

$T(\alpha u) = (3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1)$

$T(\alpha u) = \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$

$T(\alpha u) = \alpha T(u)$

2) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x$ ou $T(x) = 3x$ é linear

De fato:

I) Sejam $u = x_1$ e $v = x_2$ vetores quaisquer de $\mathbb{R}$ (os vetores, nesse caso, são números reais). Então:

$T(u + v) = T(x_1 + x_2)$

$T(u + v) = 3(x_1 + x_2)$

$T(u + v) = 3x_1 + 3x_2$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

II) Para $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u = x_1 \in \mathbb{R}$, tem-se:

$T(\alpha u) = T(\alpha x_1)$

$$T(\alpha u) = 3\alpha x_1$$

$$T(\alpha u) = \alpha(3x_1)$$

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Observação

Essa transformação linear representa uma reta que passa pela origem (Figura 4.1.1a). É fácil ver que, se uma transformação representar uma reta que não passa pela origem, ela *não* é linear. Por exemplo:

$$T\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ T(x) = 3x + 1$$

não é linear.

De fato:

Se $u = x_1$ e $v = x_2$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}$, tem-se:

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2)$$

$$T(u + v) = 3(x_1 + x_2) + 1$$

$$T(u + v) = 3x_1 + 3x_2 + 1 = (3x_1 + 1) + 3x_2$$

$$T(u + v) \neq T(u) + T(v) = (3x_1 + 1) + (3x_2 + 1)$$

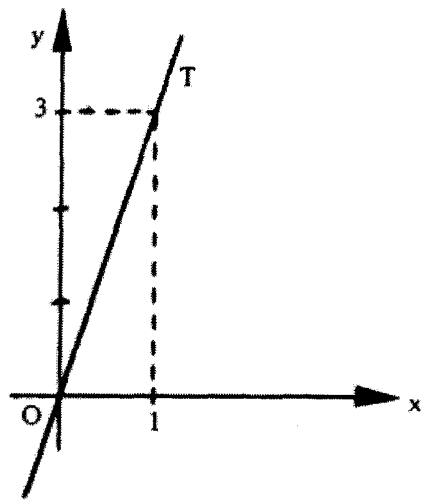


Figura 4.1.1a

Seria bem mais fácil constatar neste exemplo que T *não é linear,* se conhecêssemos a propriedade:

"Em toda transformação linear $T{:}V \longrightarrow W$, *a imagem do vetor* $0 \in V$ *é o vetor* $0 \in W$, *isto é* $T(0) = 0$."

Este fato decorre da condição (II) da definição, para $\alpha = 0$:

$$T(0) = T(0\,.\,v) = 0\,.\,T(v) = 0$$

Nos exemplos 1) e 2), de transformações lineares, tivemos:

$$T(0, 0) = (0, 0, 0) \text{ e } T(0) = 0$$

Nesse último exemplo, de transformação não-linear, verifica-se que: $T(0) \neq 0$, pois $T(0) = 1$.

Assim, também não é linear a transformação

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y, z) = (3x + 2, 2y - z)$$

pois $T(0, 0, 0) = (2, 0) \neq (0, 0)$.

Insistindo: se $T: V \longrightarrow W$ é linear, então $T(0) = 0$. No entanto, a recíproca dessa propriedade não é verdadeira, pois existe transformação com $T(0) = 0$ e T não é linear. É o caso da transformação

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x^2, 3y)$$

De fato:

Se $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$, tem-se:

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2)^2, 3(y_1 + y_2)) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2)$$

enquanto:

$$T(u) + T(v) = (x_1^2, 3y_1) + (x_2^2, 3y_2) = (x_1^2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2)$$

isto é:

$$T(u + v) \neq T(u) + T(v)$$

3) A transformação identidade

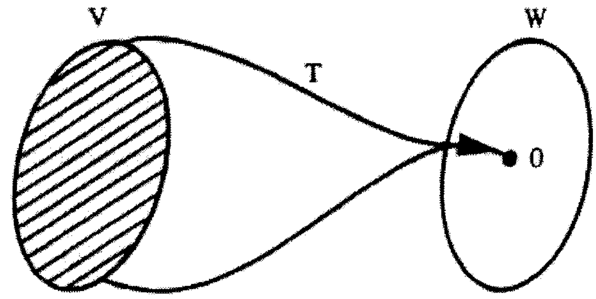
$$\begin{aligned} I: V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned} \quad \text{ou } I(v) = v \text{ é linear}$$

De fato:

I) $I(u + v) = u + v = I(u) + I(v)$

II) $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u)$

4) A transformação nula (ou zero)



$$T: V \longrightarrow W$$
$$v \longmapsto 0 \text{ ou } T(v) = 0 \text{ é linear}$$

De fato:

I) $T(u + v) = 0 = 0 + 0 = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = 0 = \alpha \times 0 = \alpha Tu$

5) A simetria em relação à origem O (Figura 4.1.1b) no $\mathbb{R}^3$

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$v \longmapsto -v \text{ é linear}$$

De fato:

I) $T(u + v) = -(u + v) = -u - v = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = -\alpha u = \alpha(-u) = \alpha T(u)$

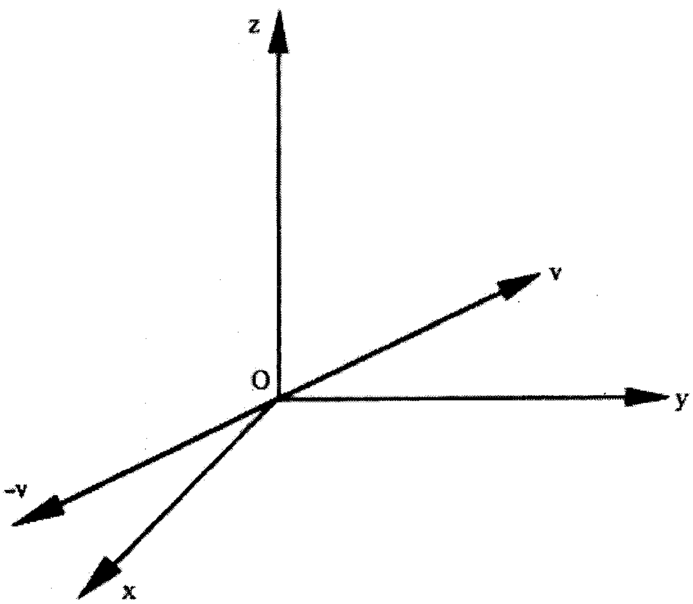


Figura 4.1.1b

6) A projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy (Figura 4.1.1c)

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0) \quad \text{ou} \quad T(x, y, z) = (x, y, 0)$$

é linear (verificar!).

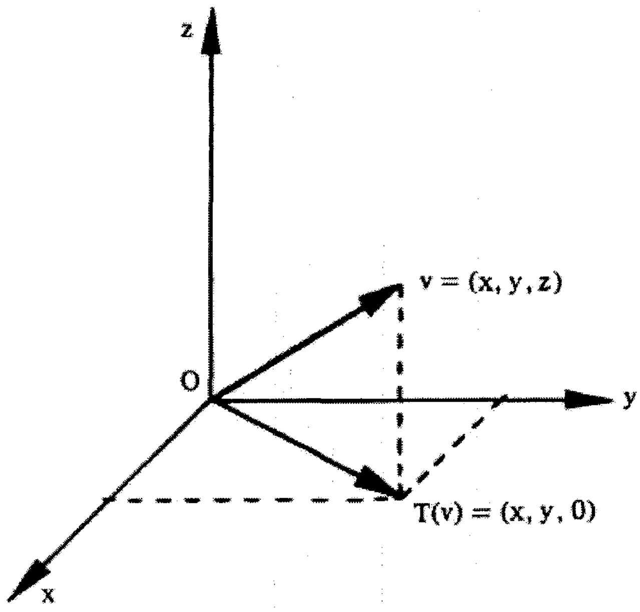


Figura 4.1.1c

7) A projeção no eixo dos x

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x, 0, 0)$$

é linear (verificar!).

8) Seja o espaço vetorial $V = P_n$ dos polinômios de grau $\leqslant n$. A aplicação derivada $D: P_n \longrightarrow P_n$, que leva $f \in P_n$ em sua derivada f', isto é, $D(f) = f'$, é linear.

De fato:

Pelas regras da derivação, sabe-se que:

$$D(f + g) = D(f) + D(g)$$

e

$$D(\alpha f) = \alpha D(f)$$

De forma análoga, tem-se:

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n) \qquad (1)$$

para $\forall v_i \in V$ e $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

Suponhamos agora que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seja uma *base* do domínio V e que se saiba quais são as imagens $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ dos vetores desta base:

sempre é possível obter a imagem T(v) de qualquer $v \in V$, pois sendo v uma combinação linear dos vetores da base, isto é:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

e, pela relação acima, vem:

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n)$$

Assim, uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ fica completamente definida quando se conhecem as imagens dos vetores de uma base de V.

O exemplo a seguir e os problemas resolvidos 8 e 9 são aplicações esclarecedoras desta propriedade.

Exemplo

Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, sendo $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0)$. Determinar $T(5, 3, -2)$, sabendo que $T(v_1) = (1, -2)$, $T(v_2) = (3, 1)$ e $T(v_2) = (0, 2)$.

Solução

Expressemos $v = (5, 3, -2)$ como combinação linear dos vetores da base:

$$(5, 3, -2) = a_1(0, 1, 0) + a_2(1, 0, 1) + a_3(1, 1, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + a_3 = 3 \\ a_2 \qquad = -2 \end{cases}$$

sistema cuja solução é:

$$a_1 = -4, \; a_2 = -2 \; \text{e} \; a_3 = 7$$

Então:

$$(5, 3, -2) = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3$$

logo:

$$T(5, 3, -2) = -4T(v_1) - 2T(v_2) + 7T(v_3)$$

$$T(5, 3, -2) = -4(1, -2) - 2(3, 1) + 7(0, 2)$$

$$T(5, 3, -2) = (-10, 20)$$

4.1.3 Problemas Resolvidos

Nos exercícios 1 a 4 são dadas transformações. Verificar quais delas são lineares.

1) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; T(x, y) = (x - y, 2x + y, 0)$

Solução

I) Para quaisquer vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, tem-se:

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$T(u + v) = ((x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 0)$$

$T(u + v) = (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2, 0)$

$T(u + v) = (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1, 0) + (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2, 0)$

$T(u + v) = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha y_1)$

$T(\alpha u) = (\alpha x_1 - \alpha y_1, 2\alpha x_1 + \alpha y_1, 0)$

$T(\alpha u) = \alpha(x_1 - y_1, 2x_1 + y_1, 0)$

$T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Logo, T é linear.

2) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2, y + 3)$

Solução

Sabe-se que em toda transformação linear $T: V \longrightarrow W$ deve-se ter $T(0) = 0$. Como $T(0, 0) = (2, 3) \neq (0, 0)$, T não é uma transformação linear.

Essa aplicação T é um exemplo de *translação* no plano.

3) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = |x|$

Solução

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$.

$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = |x_1 + x_2|$ e

$T(u) + T(v) = |x_1| + |x_2|$

Como, em geral, $|x_1 + x_2| \neq |x_1| + |x_2|$, conclui-se que T não é linear.