$$D = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{36}{5} & \frac{52}{5} \\ \frac{48}{5} & \frac{39}{5} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

6.6 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Verificar, utilizando a definição, se os vetores dados são vetores próprios das correspondentes matrizes:

a) $v = (-2, 1)$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $v = (1, 1, 2)$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $v = (-2, 1, 3)$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2) Determinar os valores próprios e os vetores próprios das seguintes transformações lineares:

a) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$

b) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y)$

c) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x - y, x + 3y)$

d) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, -x)$

e) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$

f) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, -2x - y, 2x + y + 2z)$

g) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y, z)$

3) Calcular os valores próprios e os correspondentes vetores próprios das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Provar as seguintes proposições:

a) Se um operador linear $T: V \longrightarrow V$ admite $\lambda = 0$ como valor próprio, então T não é inversível.

b) Uma matriz A e sua transposta A^t possuem os mesmos valores próprios.

c) Os valores próprios de uma matriz triangular (ou diagonal) são os elementos da diagonal principal.

5) Os vetores $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (2, -1)$ são vetores próprios de um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, associados a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -1$, respectivamente. Determinar a imagem do vetor $v = (4, 1)$ por esse operador.

6) a) Determinar o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cujos valores próprios são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ associados aos vetores próprios $v_1 = (y, -y)$ e $v_2 = (0, y)$, respectivamente.

b) Mesmo enunciado para $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ e $v_1 = x(1, 2)$, $v_2 = x(-1, 0)$.

7) a) Quais são os valores próprios e os vetores próprios da matriz identidade?

b) Se $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$ são valores próprios de um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ associados aos vetores próprios $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 3)$, respectivamente, determinar $T(3u - v)$

c) Mostrar que se u e v são vetores próprios de uma transformação linear associados a λ, então $\alpha u - \beta v$ é também vetor próprio associado ao mesmo λ.

8) Seja $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = (2, 1)$ e triplica o comprimento do vetor $v = (1, 2)$, sem alterar as direções nem inverter os sentidos.

a) Calcular $T(0, 3)$.

b) Determinar $T(x, y)$.

c) Qual a matriz do operador T na base $\{(2, 1), (1, 2)\}$?

9) a) Determinar as matrizes das rotações em $\mathbb{R}^2$ que admitem valores e vetores próprios.

b) Determinar os valores e os vetores próprios das rotações referidas em a).

10) Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear não-inversível. Os vetores não-nulos do núcleo de T são vetores próprios? Em caso afirmativo, determinar o valor próprio associado e, em caso negativo, justificar.

11) Verificar se a matriz A é diagonalizável. Caso seja, determinar uma matriz P que diagonaliza A e calcular $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

12) Seja $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por

$T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$

a) Determinar uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.

b) Dar a matriz de T nessa base.

13) Para cada uma das seguintes matrizes simétricas A, encontrar uma matriz ortogonal P, para a qual P^tAP seja diagonal:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

14) Determinar uma matriz P que diagonaliza A ortogonalmente e calcular $P^{-1}AP$.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

6.6.1 Respostas de Problemas Propostos

1) a) sim b) sim c) não

2) a) $\lambda_1 = 3$, $v_1 = (y, y)$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (2y, y)$

b) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = y(-2, 1)$; $\lambda_2 = 4$. $v_2 = x(1, 1)$

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $v = x(1, 1)$

d) Não existem.

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $v = (x, y, -y)$; $\lambda_3 = 4$, $v_3 = x(1, 1, 2)$

f) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = z(3, -3, 1)$; $\lambda_2 = -1$, $v_2 = z(0, -3, 1)$; $\lambda_3 = 2$, $v_3 = z(0, 0, 1)$

g) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $v = (x, 0, z)$, x e z não simultaneamente nulos.

3) a) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = y(3, 1)$; $\lambda_2 = 4$, $v_2 = y(1, 1)$

b) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (-y, y)$; $\lambda_2 = 5$, $v_2 = (x, 3x)$

c) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (x, 0, -x)$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = (-2z, 2z, z)$; $\lambda_3 = 3$, $v_3 = (x, -2x, -x)$

d) $\lambda_1 = -1$, $v_1 = x(1, 1, 1)$; $\lambda_2 = 2$, $v_2 = x(1, 1, 0)$; $\lambda_3 = 3$, $v_3 = x(1, 0, 0)$

e) $\lambda_1 = 1$, $v_1 = (2z, 2z, z)$; λ_2 e λ_3 imaginários

f) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = (x, y, -x - 2y)$; $\lambda_2 = 6$, $v_2 = (x, x, x)$

g) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $v = (x, y, 2x + \frac{3}{2}y)$

h) $\lambda_1 = 2$, $v_1 = x(1, 0, 1)$; $\lambda_2 = -1$, $v_2 = y(0, 1, 0)$; $\lambda_3 = -2$, $v_3 = x(1, 0, -1)$

5) (8, 11)

6) a) $T(x, y) = (x, 2x + 3y)$

b) $T(x, y) = (-2x + \frac{5}{2}y, 3y)$

7) a) $\lambda = 1$, todos os vetores do espaço com exceção do vetor nulo.

b) (26, 6)

8) a) (2, 10); b) $T(x, y) = (\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y, -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}y)$; c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

9) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (rotação de 0°) e $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (rotação de 180°)

b) $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, respectivamente; com exceção do vetor zero, todos os vetores do $\mathbb{R}^2$ são vetores próprios.

10) Todos os vetores do núcleo, com exceção do zero, são vetores próprios associados a $\lambda = 0$.

11) a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

c) Não diagonalizável.

d) $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) Não diagonalizável.

f) $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

h) Não diagonalizável.

12) a) $\{(-2, 1), (1, 2)\}$

b) $\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

13) a) $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$

d) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$

e) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

14) a) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. $P^tAP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. $P^tAP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$