OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Adição

Sejam $T_1 : V \longrightarrow W$ e $T_2 : V \longrightarrow W$ transformações lineares. Chama-se *soma* das transformações lineares T_1 e T_2 à transformação linear

$$T_1 + T_2 : V \longrightarrow W$$

$$v \longmapsto (T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v), \ \forall v \in V$$

Se A e B são bases de V e W, respectivamente, demonstra-se que:

$$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$$

Multiplicação por Escalar

Sejam $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear e $\alpha \in \mathbb{R}$. Chama-se *produto* de T pelo escalar α à transformação linear

$$\alpha T: V \longrightarrow W$$

$$v \longmapsto (\alpha T)(v) = \alpha T(v), \ \forall v \in V$$

Se A e B são bases de V e W, respectivamente, demonstra-se que:

$$[\alpha T]_B^A = \alpha [T]_B^A$$

Exemplo 1:

Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ transformações lineares definidas por

$T_1(x, y) = (x + 2y, 2x - y, x)$ e $T_2(x, y) = (-x, y, x + y)$. Determinar:

a) $T_1 + T_2$

b) $3T_1 - 2T_2$

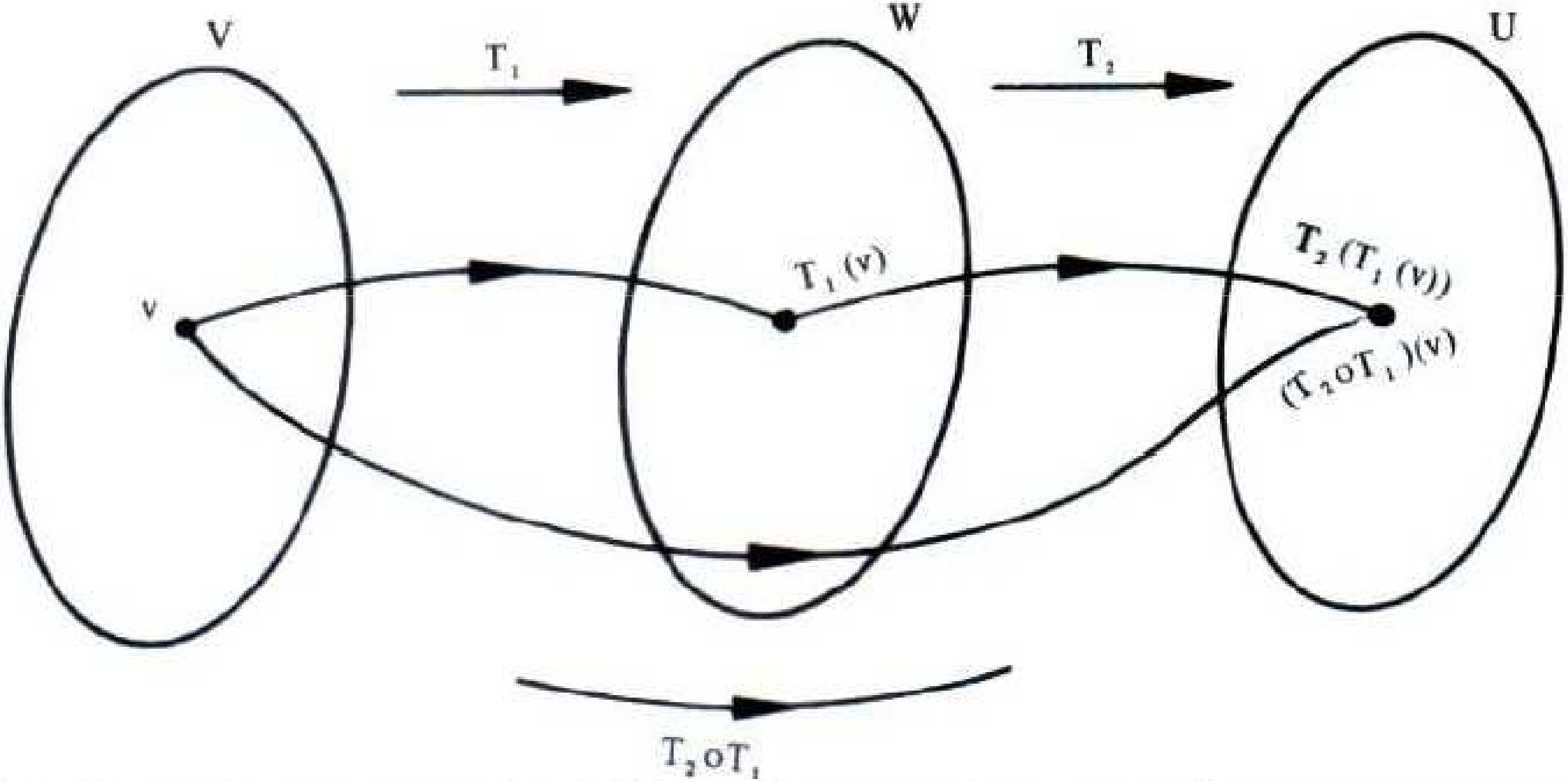
c) a matriz canônica de $3T_1 - 2T_2$ e mostrar que:

$$[3T_1 - 2T_2] = 3\,[T_1] - 2\,[T_2]$$

Composição

Sejam $T_1 : V \longrightarrow W$ e $T_2 : W \longrightarrow U$ transformações lineares. Chama-se aplicação *composta* de T_1 com T_2, e se representa por $T_2 \circ T_1$, à transformação linear:

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 : V &\longrightarrow U \\ v &\longmapsto (T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v)), \ \forall v \in V \end{aligned}$$



Se A, B e C são bases de V, W e U, respectivamente, demonstra-se que:

$$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B \times [T_1]_B^A$$

Exemplo 2

Sejam S e T operadores lineares no $\mathbb{R}^2$ definidos por

$S(x, y) = (2x, y)$ e $T(x, y) = (x, x - y)$. Determinar:

a) $S \circ T$ b) $T \circ S$ c) $S \circ S$ d) $T \circ T$

40) Sejam as transformações lineares

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ T(x, y) = (x - y, \ 2x + y, \ -2x)$$

e

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ T_2(x, y) = (2x - y, \ x - 3y, \ y).$$

Determinar as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$:

a) $T_1 - T_2$.

b) $3T_1 - 2T_2$.

41) Consideremos as transformações lineares S e T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $S(x, y, z) = (2x - y, 3x - 2y + z)$ e $T(x, y, z) = (x + y - z, y - 2z)$.

a) Determinar o núcleo da transformação linear $S + T$.

b) Encontrar a matriz canônica de $3S - 4T$.

42) Sejam S e T operadores lineares de $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (x - 2y, y)$ e $T(x, y) = (2x, -y)$. Determinar:

a) $S + T$ d) $S \circ T$

b) $T - S$ e) $T \circ S$

c) $2S + 4T$ f) $S \circ S$

43) Seja a transformação linear:

$S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $S(x, y, z) = (x + y, z, x - y, y + z)$

a) Calcular $(S \circ T)(x, y)$ se

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y) \longmapsto (2x + y, x - y, x - 3y)$

b) Determinar a matriz canônica de $S \circ T$ e mostrar que ela é o produto da matriz canônica de S pela matriz canônica de T.

44) As transformações $S: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ são tais que $S(x, y) = (y, x - y, 2x + 2y)$ e $T(x, y, z) = (x, y)$.

a) Sendo $B = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, determinar a matriz $[S \circ T]_B$.

b) Determinar $[T \circ S]_{B'}$ e $[T \circ S]_{B''}$, sendo $B' = \{(1, 1), (0, -1)\}$ e B'' a base canônica.

45) Sendo S e T operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ definidos por $S(x, y, z) = (x, 2y, x - y)$ e $T(x, y, z) = (x - z, y, z)$, determinar:

a) $[S \circ T]$.

b) $[T \circ S]$.

Respostas:

40) a) $T_1(x, y) = (-x, x + 4y, -2x - y)$

b) $T_2(x, y) = (-x - y, 4x + 9y, -6x - 2y)$

41) a) $\{(x, 0, 3x)/x \in \mathbb{R}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 9 & -10 & 11 \end{bmatrix}$

42) a) $(S + T)(x, y) = (3x - 2y, 0)$

b) $(T - S)(x, y) = (x + 2y, -2y)$

c) $(2S + 4T)(x, y) = (10x - 4y, -2y)$

d) $(S \circ T)(x, y) = (2x + 2y, -y)$

e) $(T \circ S)(x, y) = (2x - 4y, -y)$

f) $(S \circ S)(x, y) = (x - 4y, y)$

43) a) $(S \circ T)(x, y) = (3x, x - 3y, x + 2y, 2x - 4y)$