PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x - 2y, x + 4y)$. Utilizar os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (3, -1)$ para mostrar que $T(3u + 4v) = 3T(u) + 4T(v)$.

2) Dada a transformação linear $T: V \longrightarrow W$, tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$, calcular em função de u e v:

a) $T(u + v)$

b) $T(3v)$

c) $T(4u - 5v)$

3) Dentre as transformações $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas pelas seguintes leis, verificar quais lineares:

a) $T(x, y) = (x - 3y, 2x + 5y)$

b) $T(x, y) = (y, x)$

c) $T(x, y) = (x^2, y^2)$

d) $T(x, y) = (x + 1, y)$

e) $T(x, y) = (y - x, 0)$

f) $T(x, y) = (|x|, 2y)$

g) $T(x, y) = (\text{sen}x, y)$

h) $T(x, y) = (xy, x - y)$

i) $T(x, y) = (3y, -2x)$

4) Seja $V = \mathbb{R}^2$. Fazer um gráfico de um vetor genérico $v = (x, y)$ do domínio e de sua imagem $T(v)$ sob a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

a) $T(x, y) = (2x, 0)$

b) $T(x, y) = (2x, y)$

c) $T(x, y) = (-2x, 2y)$

d) $T(x, y) = (3x, -2y)$

e) $T(x, y) = -2(x, y)$

f) $T(x, y) = (x, -y)$

5) Dentre as seguintes funções, verificar quais são lineares:

a) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y) = (x - y, 3x, -2y)$

b) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$

c) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$

d) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, 2)$

e) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = -3x + 2y - z$

f) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (|x|, y)$

g) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = x$

h) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = xy$

i) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = (y, x, y, x)$

j) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(2, 2)$, $T(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{bmatrix}\right)$

k) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c, b + c)$

l) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

m) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

6) Seja a aplicação $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \longrightarrow (x + ky, x + k, y)$$

Verificar em que caso(s) T é linear:

a) $k = x$

b) $k = 1$

c) $k = 0$

7) a) Determinar a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$.

b) Encontrar $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-2, 1, -3)$.

8) a) Determinar a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 0) = (1, 1)$ $T(0, 1, 1) = (2, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 3)$.

b) Achar $T(1, 0, 0)$ e $T(0, 1, 0)$.

9) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$.

a) Determinar $T(x, y, z)$.

b) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3, -2)$.

c) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (0, 0)$.

10) Seja T o operador linear no $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 0, 3)$. Determinar $T(x, y, z)$ e o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (5, 4, -9)$.

11) Determinar a transformação linear $T: P_2 \longrightarrow P_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

12) Seja o operador linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x + y,\ 4x + 2y).$$

Quais dos seguintes vetores pertencem a $N(T)$?

a) $(1, -2)$ b) $(2, -3)$ c) $(-3, 6)$

13) Para o mesmo operador linear do exercício anterior, verificar quais dos vetores pertencem a $Im(T)$.

a) $(2, 4)$ b) $(-\frac{1}{2}, -1)$ c) $(-1, 3)$

Nos problemas 14 a 21 são apresentadas transformações lineares. Para cada uma delas:

51) Determinar o ângulo α formado pelos vetores v e T(v) quando o espaço gira em torno do eixo dos z de um ângulo θ, nos seguintes casos:

a) $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ e $\theta = 180°$

b) $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\theta = 180°$

c) $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\theta = 60°$

4.8.1 Respostas de Problemas Propostos

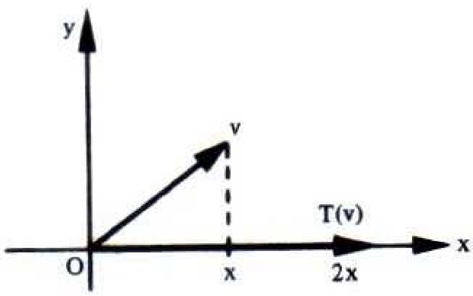
2) a) 4u - v

b) 3u - 3v

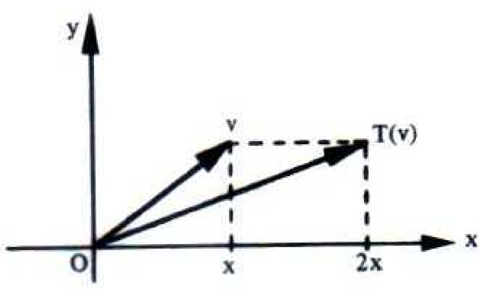
c) 7u + 5v

3) São lineares: a), b), e), i)

4) a)



b)



c), d), e) e f) a cargo do leitor.

5) São lineares: a), b), e), g), i), j), k), m).

6) c) é linear

7) a) $T(x, y) = (-2x + y,\ -x + y,\ -x)$

b) $v = (3, 4)$

8) a) $T(x, y, z) = (-y + 3z,\ -y + 3z)$

b) $T(1, 0, 0) = (0, 0)$ e $T(0, 1, 0) = (-1, -1)$

9) a) $T(x, y, z) = (3x - y - z, 4x - y - z)$

b) $v = (1, 6 - z, z)$

c) $v = (0, -z, z)$

10) $T(x, y, z) = (-z, 2x, -2y + 3z)$

$v = (2, -3, -5)$

11) $T(a + bx + cx^2) = b + (a + c)x + (-b + 2c)x^2$

12) a), c)

13) a), b)

14) a) $N(T) = \{(x, 3x)/x \in \mathbb{R}\}$; $\dim N(T) = 1$

T não é injetora, porque $N(T) \neq \{(0, 0)\}$.

b) $Im(T) = \{(-y, y)/y \in \mathbb{R}\}$; $\dim Im(T) = 1$

T não é sobrejetora, porque $Im(T) \neq \mathbb{R}^2$.

15) a) $N(T) = \{(0, 0)\}$; $\dim N(T) = 0$.

T é injetora, porque $N(T) = \{0\}$.