24) Encontrar um operador linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por $(1, 2, -1)$ e $(1, -1, 0)$.

25) Encontrar uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $N(T) = [(1, 0, -1)]$.

26) Encontrar uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ cuja imagem é gerada por $(1, 3, -1, 2)$ e $(2, 0, 1, -1)$.

27) Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y)$ e as bases $A = \{(1, 0, 0), (2, -1, 0), (0, 1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(-1, 1), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$. Determinar a matriz $[T]_B^A$.

28) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e as bases $A = \{(-1, 1), (2, 1)\}$ e $B = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$. Determinar $[T]_B^A$. Qual a matriz $[T]_C^A$, onde C é a base canônica do $\mathbb{R}^3$?

29) Sabendo que a matriz de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nas bases $A = \{(-1, 1), (1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e $B = \{(1, 1, -1), (2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ e do $\mathbb{R}^3$ é:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

encontrar a expressão de $T(x, y)$ e a matriz $[T]$.

30) Seja

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a matriz canônica de uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se $T(v) = (2, 4, -2)$, calcular v.

31) Seja $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear com matriz

$$[T]_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

para $B = \{e_1, e_2\}$, base canônica do $\mathbb{R}^2$, e $B' = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, base do $\mathbb{R}^3$. Qual a imagem do vetor $(2, -3)$ pela T?

32) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo $B_1 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $B_2 = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

a) Encontrar a expressão de $T(x, y, z)$.

b) Determinar $\text{Im}(T)$ e uma base para esse subespaço.

c) Determinar $N(T)$ e uma base para esse subespaço.

d) T é injetora? T é sobrejetora? Justificar.

33) Consideremos o operador linear

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x + 2y, x - y)$

e as bases $A = \{(-1, 1), (1, 0)\}$, $B = \{(2, -1), (-1, 1)\}$ e C canônica.

Determinar $[T]_A$, $[T]_B$, $[T]_C$.

Respostas

23) a) $N(T) = \{(3y, y, 0, -2y)/y \in \mathbb{R}\}$

$Im(T) = \mathbb{R}^3$

b) e c) a cargo do leitor.

24) Um deles é $T(x, y, z) = (0, 0, x + y + 3z)$.

25) Uma delas é $T(x, y, z) = (x + z,\ y)$.

26) Uma delas é $T(x, y, z) = (x + 2y,\ 3x,\ -x + y,\ 2x - y)$.

27) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

28) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

29) $T(x, y) = (8x + 18y,\ 6x + 11y,\ -2x - 4y)$

$[T] = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

30) $v = (2, 0)$

31) $(11, -13, 2)$

32) a) $T(x, y, z) = (-2y + z,\ -x + y)$

b) $Im(T) = \mathbb{R}^2$; (base a cargo do leitor)

c) $N(T) = \{(x, x, 2x)/x \in \mathbb{R}\}$; (base a cargo do leitor)

d) T não é injetora.

T é sobrejetora.

33) $[T]_A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ e $[T]_C = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

34) a) $T(v_1)_B = (2, -1)$, $T(v_2)_B = (1, -3)$

b) $T(v_1) = (-1, 0)$, $T(v_2) = (-8, -5)$

c) $T(x, y) = (-6x + 5y, -5x + 5y)$

36) a) $(0, 0)$

b) $y(3, 1)$

c) $(1, 1)$

37) a) $N(T) = \{ z(2, -3, -4)/z \in \mathbb{R} \}$, $\dim N(T) = 1$

b) $Im(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \}$, $\dim Im(T) = 2$

38) b) $[T]^A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ d-2 & d \end{bmatrix}$; $d \in \mathbb{R}$

d) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & d \end{bmatrix};\ d \in \mathbb{R} \right\}$