2.3 PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS VETORIAIS

Da definição de espaço vetorial V decorrem as seguintes propriedades:

I) Existe um único vetor nulo em V (elemento neutro da adição).

II) Cada vetor $u \in V$ admite apenas um simétrico $(-u) \in V$.

III) Para quaisquer $u, v, w \in V$, se $u + w = v + w$, então $u = v$.

IV) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se:

$$-(-v) = v$$

isto é, o oposto de $-v$ é v.

V) Quaisquer que sejam $u, v \in V$, existe um e somente um $x \in V$ tal que:

$$u + x = v$$

Esse vetor x será representado por:

$$x = v - u$$

VI) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se:

$$0v = 0$$

Naturalmente, o primeiro zero é o número real zero, e o segundo é o vetor $0 \in V$.

VII) Qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\lambda 0 = 0$$

VIII) $\lambda v = 0$ implica $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

IX) Qualquer que seja $v \in V$, tem-se:

$$(-1)v = -v$$

X) Quaisquer que sejam $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$$

2.4 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. O subconjunto S é um *subespaço vetorial* de V se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

Para mostrar que um subconjunto S é um subespaço vetorial de V, deveríamos testar os oito axiomas de espaço vetorial relativos à adição e à multiplicação por escalar. No entanto, como S é parte de V, que já se sabe ser um espaço vetorial, não há necessidade da verificação de certos axiomas em S. Por exemplo, o axioma A_2 diz que $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$. Ora, se a comutatividade da adição é válida para todos os vetores de V, ela valerá, conseqüentemente, para todos os vetores de S. Existem outros axiomas de espaço vetorial merecedores de comentário idêntico. O teorema seguinte estabelece as condições para que um subconjunto S de um espaço vetorial V seja um subespaço vetorial de V.

2.4.1 Teorema

Um subconjunto S, *não-vazio*, de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se estiverem satisfeitas as condições:

I) Para quaisquer $u, v \in S$, tem-se:

$$u + v \in S$$

II) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in S$, tem-se:

$$\alpha u \in S$$

Vamos mostrar que sendo válidas essas duas condições em S, os oito axiomas de espaço vetorial também se verificam em S.

De fato:

Seja u um vetor qualquer de S. Pela condição II, $\alpha u \in S$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Fazendo $\alpha = 0$, vem $0u \in S$, ou seja, $0 \in S$ (axioma A_3). Fazendo $\alpha = -1$, segue $(-1)u = -u \in S$ (axioma A_4).

Os demais axiomas A_1, A_2, M_1, M_2, M_3 e M_4 de espaço vetorial são verificados em S pelo fato de ser S um subconjunto não-vazio de V.

Observação

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{0\}$, chamado subespaço zero ou subespaço nulo, e o próprio espaço vetorial V. Esses dois são os subespaços *triviais* de V. Os demais subespaços são denominados subespaços *próprios* de V.

Por exemplo, os subespaços triviais de $V = \mathbb{R}^3$ são $\{(0, 0, 0)\}$ (verificar as condições I e II do teorema 2.4.1) e o próprio $\mathbb{R}^3$. Os subespaços próprios do $\mathbb{R}^3$ são as retas e os planos que passam pela origem.

Para $V = \mathbb{R}^2$, os subespaços triviais são: $\{(0, 0)\}$ e $\mathbb{R}^2$, enquanto os subespaços próprios são as retas que passam pela origem.

Exemplos

1) Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ ou $S = \{(x, 2x); x \in \mathbb{R}\}$, isto é, S é o conjunto dos vetores do plano que têm a segunda componente igual ao dobro da primeira.

Evidentemente, $S \neq \phi$, pois $(0, 0) \in S$.

Verifiquemos as condições I e II.

Para $u = (x_1, 2x_1) \in S$ e $v = (x_2, 2x_2) \in S$, tem-se:

I) $u + v = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)) \in S$, pois a segunda componente de $u + v$ é igual ao dobro da primeira.

II) $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in S$, pois a segunda componente de αu é igual ao dobro da primeira.

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Esse subespaço S representa geometricamente uma reta que passa pela origem (Figura 2.4.1a).

Observemos que ao tomarmos dois vetores u e v da reta, o vetor soma $u + v$ ainda é da reta. E se multiplicarmos um vetor u da reta por um número real α, o vetor αu ainda estará na reta.

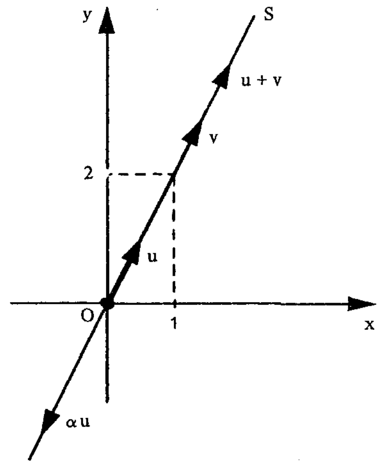

Figura 2.4.1a

O mesmo não ocorre quando a reta não passa pela origem. Por exemplo, a reta:

$S = \{(x, 4 - 2x);\ x \in \mathbb{R}\}$

não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. Se escolhermos os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (2, 0)$ de S, temos $u + v = (3, 2) \notin S$ (Figura 2.4.1b).

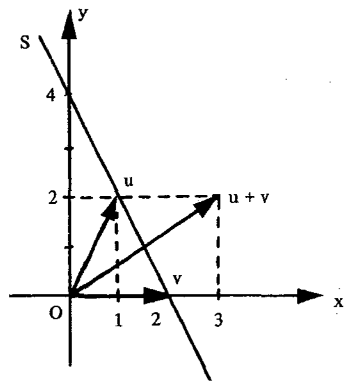

Figura 2.4.1b

Observemos ainda que $\alpha u \notin S$, para $\alpha \neq 1$.

Os exemplos destas duas últimas retas sugerem, para qualquer subconjunto S de um espaço vetorial V, que: sempre que $0 \notin S$, S *não* é subespaço de V. Aliás, esse fato é sempre útil para detectar, muitas vezes de imediato, que um subconjunto S não é subespaço vetorial. No entanto, não nos enganemos pensando que, se $0 \in S$, S é subespaço, pois podemos ter $0 \in S$ sem que S seja subespaço. É o caso do subconjunto

$$S = \{(x; |x|);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Observemos que $(0, 0) \in S$ e que, se tomarmos os vetores $u = (3, 3)$ e $v = (-2, 2)$ de S, teremos $u + v = (1, 5) \notin S$ (Figura 2.4.1c).

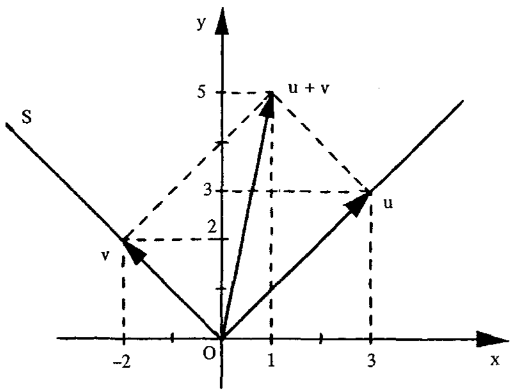

Figura 2.4.1c

Observemos ainda que $\alpha u \notin S$, $\alpha < 0$.

Observação

Nos exemplos trabalharemos somente com conjuntos não-vazios, ficando dispensada a necessidade de mostrar que o conjunto é não-vazio.

2) Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e

$$S = \{(x, y, z) / \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\}$$

Nesse caso:

$u = (x_1, y_1, z_1) \in S$ implica $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$

$v = (x_2, y_2, z_2) \in S$ implica $ax_2 + by_2 + cz_2 = 0$

I) Somando essas igualdades, resulta:

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0$$

e essa igualdade mostra que:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$$

pois as coordenadas de $u + v$ satisfazem a equação

$$ax + by + cz = 0$$

II) Por outro lado,

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S$$

pois, se:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = 0,$$

então:

$$\alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) = \alpha 0$$

ou:

$$a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) = 0$$

o que vem mostrar que as coordenadas de αu satisfazem a equação $ax + by + cz = 0$. Logo, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Esse subespaço S representa um plano qualquer passando pela origem no $\mathbb{R}^3$.

3) Sejam $V = \mathbb{R}^4$

e

$S = \{(x, y, z, 0);\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

isto é, S é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^4$ que têm a quarta componente nula.

Verifiquemos as condições I e II de subespaço.

Para $u = (x_1, y_1, z_1, 0) \in S$ e $v = (x_2, y_2, z_2, 0) \in S$, tem-se:

I) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, 0) \in S$, pois a quarta componente de $u + v$ é nula.

II) $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, 0) \in S$, pois a quarta componente de αu é nula.

Logo, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

4) Sejam

$$V = M(2, 2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

isto é, S é o conjunto das matrizes quadradas, de ordem 2, cujos elementos da segunda linha são nulos.

Para quaisquer

$$u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S, \qquad v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

tem-se:

I) $u + v \in S$

II) $\alpha u \in S$

Logo, S é um subespaço vetorial de $M(2, 2)$.

Observação

É interessante observar que se tivéssemos considerado $V = \mathbb{R}^4$ e $S = \{(a, b, 0, 0);\ a, b \in \mathbb{R}\}$, o raciocínio seria idêntico ao que foi feito para as matrizes acima.

5) Sejam $V = M(n, n)$, B uma matriz fixa de V e

$S = \{A \in M(n, n)/AB = 0\}$

isto é, S é o conjunto das matrizes que, multiplicadas à esquerda por B, têm como resultado a matriz nula.

Então:

$A_1 \in S$ implica $A_1 B = 0$

$A_2 \in S$ implica $A_2 B = 0$

I) Somando essas igualdades, vem:

$A_1 B + A_2 B = 0$

ou:

$(A_1 + A_2) B = 0$

e, portanto:

$A_1 + A_2 \in S$

II) Multiplicando por α real a primeira igualdade, vem:

$$\alpha(A_1 B) = \alpha 0$$

ou:

$$(\alpha A_1) B = 0$$

e, portanto:

$$\alpha A_1 \in S.$$

Logo, S é um subespaço vetorial de M(2, 2).

6) Sejam V = M(3, 1) e

S o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo a três variáveis.

Consideremos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sistema, em notação matricial, será dado por $AX = 0$, sendo X elemento do conjunto-solução S.

Se

$$u = X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad e \quad v = X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema, então:

$$AX_1 = 0 \quad e \quad AX_2 = 0$$

I) Somando essas igualdades, vem:

$$AX_1 + AX_2 = 0$$

ou:

$$A(X_1 + X_2) = 0$$

o que implica

$$X_1 + X_2 \in S$$

isto é, a soma de duas soluções é ainda uma solução do sistema.

II) Multiplicando por α real a primeira igualdade, vem:

$$\alpha(AX_1) = \alpha 0$$

ou:

$$A(\alpha X_1) = 0$$

o que implica

$$\alpha X_1 \in S$$

isto é, o produto de uma constante por uma solução é ainda uma solução.

Logo, o conjunto-solução S do sistema linear homogêneo é um subespaço vetorial de M(3, 1).

Observações

1) Esse conjunto-solução S pode também ser considerado subespaço de $\mathbb{R}^3$, pois um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tem notação matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

2) Esse subespaço S é também chamado *espaço-solução* do sistema $AX = 0$.

3) Se tivermos um sistema homogêneo de m equações lineares com n variáveis, o espaço-solução será um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

4) Se um sistema linear é *não-homogêneo*, o seu conjunto-solução S *não* é um subespaço vetorial (verificação a cargo do leitor).

7) Sejam $V = \mathbb{R}^2$

e

$$S = \{(x, y);\ x > 0\}$$

isto é, S é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^2$ cuja primeira componente é positiva.

Sendo

$u = (x_1, y_1),\ x_1 > 0,$ e

$v = (x_2, y_2),\ x_2 > 0$

vetores quaisquer do S, temos:

I) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in S$ pois $x_1 + x_2 > 0$, isto é, a soma de dois vetores com a primeira componente positiva é um vetor cuja primeira componente é também positiva.

II) $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1) \notin S$ quando $\alpha \leqslant 0$, isto é, nem sempre o produto de um vetor com a primeira componente positiva por um número real α resulta um vetor cuja primeira componente é positiva. Por exemplo, $u = (3, -4) \in S$ e $-2(3, -4) = (-6, 8) \notin S$.
Logo, S não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.
Para chegar a essa conclusão poderíamos ter usado o fato de que $(0, 0) \notin S$ (imediata).

2.4.2 Interseção de dois Subespaços Vetoriais

Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V. A interseção S de S_1 e S_2, que se representa por $S = S_1 \cap S_2$, é o conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $v \in S_1$ e $v \in S_2$.

2.4.2.1 Teorema

A interseção S de dois subespaços vetoriais S_1 e S_2 de V é um subespaço vetorial de V. De fato:

I) se $u, v \in S_1$, então $u + v \in S_1$;

se $u, v \in S_2$, então $u + v \in S_2$.

Logo:

$u + v \in S_1 \cap S_2 = S.$

II) Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$:

se $v \in S_1$, então $\lambda v \in S_1$;

se $v \in S_2$, então $\lambda v \in S_2$.

Logo:

$\lambda v \in S_1 \cap S_2 = S$

Exemplos:

1) Seja V o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Sejam S_1 e S_2 subespaços vetoriais de V:

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$