A origem do sistema $O(0, 0, 0)$ representa o vetor nulo.

O vetor oposto de $v = (x, y, z)$ é o vetor $-v = (-x, -y, -z)$.

De forma análoga à que tivemos no plano, teremos no espaço:

I) Dois vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

II) Dados os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $a \in \mathbb{R}$, define-se:

$$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$au = (ax_1, ay_1, az_1)$$

III) Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos quaisquer no espaço, então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

IV) O produto escalar dos vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é o número real:

$$u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

V) O módulo do vetor $v = (x, y, z)$ é dado por:

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

VI) se u e v são vetores não-nulos e θ é o ângulo formado por eles, então:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

VII) Para $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, tem-se:

a) $u \,//\, v$ se, e somente se, $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$;

b) $u \perp v$ se, e somente se, $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 INTRODUÇÃO

Sabe-se que o conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,/\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

é interpretado geometricamente como sendo o plano cartesiano. Um par (x, y) pode ser encarado como um ponto (Figura 2.1a) e, nesse caso, x e y são coordenadas, ou pode ser encarado como um vetor (Figura 2.1b) e, nesse caso, x e y são componentes (ou coordenadas).

Essa mesma idéia, em relação ao plano, estende-se para o espaço tridimensional que é a interpretação geométrica do conjunto $\mathbb{R}^3$. Embora se perca a visão geométrica de espaços com dimensão acima de 3, é possível estender essa idéia a espaços como $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, ..., $\mathbb{R}^n$. Assim,

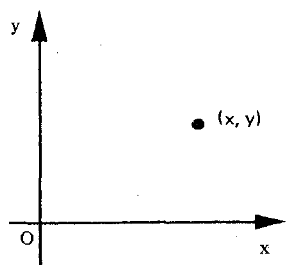

Figura 2.1a

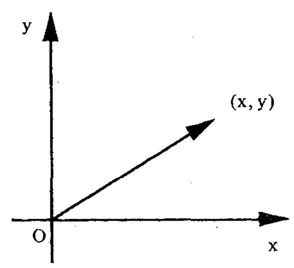

Figura 2.1b

quádruplas de números (x_1, x_2, x_3, x_4) podem ser vistas como pontos ou vetores no espaço $\mathbb{R}^4$ de quarta dimensão. A quíntupla $(2, -1, 3, 5, 4)$ será interpretada como um ponto ou um vetor no espaço $\mathbb{R}^5$ de dimensão cinco. Então, o espaço de dimensão n (ou espaço n-dimensional) será constituído pelo conjunto de todas as n-uplas ordenadas e representado por $\mathbb{R}^n$, isto é:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$

A maneira de se trabalhar nesses espaços é idêntica àquela vista em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$.

Por exemplo, se:

$u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $v = (y_1, y_2, ..., y_n)$

são vetores no $\mathbb{R}^n$ e α um escalar, define-se:

a) $u = v$ se, e somente se, $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$.

b) $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

c) $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

d) $u . v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$.

e) $|u| = \sqrt{u . u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

Desde já é bom observar que o vetor $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ aparecerá, às vezes, com a notação matricial (matriz-coluna $n \times 1$):

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

e é fácil ver que $u + v$ e αu na notação matricial são os vetores:

$$u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Vamos agora transmitir uma idéia nova. Para tanto, consideremos dois conjuntos: o $\mathbb{R}^n$ e o conjunto das matrizes reais de ordem $m \times n$, representado por $M(m, n)$. Como nesses conjuntos estão definidas as operações de adição e multiplicação por escalar, constata-se a existência de uma série de propriedades comuns a seguir enumeradas.

Se $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e se $A, B, C \in M(m, n)$, podemos verificar que:

a) *Em relação à adição valem as propriedades:*

1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ e

$(A + B) + C = A + (B + C)$ (associatividade da adição)

2) $u + v = v + u$ e

$A + B = B + A$ (comutatividade da adição)

3) Existe um só elemento em $\mathbb{R}^n$ e um só em $M(m, n)$ indicado por 0 e tal que:

$u + 0 = u$ e

$A + 0 = A$ (existência do elemento neutro)

O elemento 0, nesse caso, será o vetor $0 = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$, na primeira igualdade, e a matriz nula:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M(m, n)$$

na segunda igualdade.

4) Para cada vetor $u \in \mathbb{R}^n$ e para cada matriz $A \in M(m, n)$ existe um só vetor $-u \in \mathbb{R}^n$ e uma só matriz $-A \in M(m, n)$ tais que

$u + (-u) = 0$ e

$A + (-A) = 0$ (existência do elemento simétrico)

Por exemplo, se tivermos $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$, então o vetor simétrico é $-u = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$, e, caso semelhante, para a matriz A e sua correspondente simétrica $-A$.

b) *Em relação à multiplicação por escalar valem as propriedades:*

1) $(\alpha\beta)\, u = \alpha\, (\beta u)$ e
$(\alpha\beta)\, A = \alpha\, (\beta A)$

2) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$ e
$(\alpha + \beta)\, A = \alpha A + \beta A$

3) $\alpha\, (u + v) = \alpha u + \alpha v$ e
$\alpha\, (A + B) = \alpha A + \alpha B$

4) $1u = u$ e
$1A = A$

Conforme acabamos de ver, os conjuntos $\mathbb{R}^n$ e $M(m, n)$, munidos desse par de operações, apresentam uma "estrutura" comum em relação a essas operações. Esse fato não só vale para esses dois conjuntos com essas operações mas para muitos outros, razão porque vamos estudá-los simultaneamente. Esses conjuntos serão chamados *espaços vetoriais.*

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$\forall u, v \in V, \; u + v \in V$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \; \forall u \in V, \; \alpha u \in V$

O conjunto V com essas duas operações é chamado *espaço vetorial real* (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

A_1) $(u + v) + w = u + (v + w), \;\; \forall u, v, w \in V$

A_2) $u + v = v + u, \;\; \forall u, v \in V$

A_3) $\exists 0 \in V, \; \forall u \in V, \; u + 0 = u$

A_4) $\forall u \in V, \; \exists (-u) \in V, \; u + (-u) = 0$

M) Em relação à multiplicação por escalar:

M_1) $(\alpha\beta)\, u = \alpha (\beta u)$

M_2) $(\alpha + \beta)\, u = \alpha u + \beta u$

M_3) $\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v$

M_4) $1u = u$

para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Observações

1) Os elementos do espaço vetorial V serão chamados *vetores*, independentemente de sua natureza. Pode parecer estranho, e à primeira vista não deixa de ser, o fato de se chamar de vetores os *polinômios* (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído por matrizes) os *números* (quando V for um conjunto numérico), e assim por diante. A justificativa está no fato de as operações de adição e multiplicação por escalar realizadas com esses elementos de natureza tão distinta se comportarem de forma idêntica, como se estivéssemos trabalhando com os próprios *vetores* do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$. Assim, a familiaridade que temos com os vetores do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$ terá continuidade nesses conjuntos, chamando seus elementos também de vetores.

2) Se na definição acima tivéssemos tomado para escalares o conjunto C dos números complexos, V seria um *espaço vetorial complexo.* Daqui por diante, salvo referência expressa em contrário, serão considerados somente espaços vetoriais reais. Assim, quando se disser que V é um espaço vetorial, deve ficar subentendido que V é um espaço vetorial sobre o conjunto $\mathbb{R}$, dos números reais.

Exemplos

1) O conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$ é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Essas são as operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Para verificarmos os oito axiomas de espaço vetorial, consideremos $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$. Tem-se:

A_1) $(u + v) + w = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$

$(u + v) + w = ((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) + (x_3, y_3)$

$(u + v) + w = ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$

$(u + v) + w = (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$

$(u + v) + w = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$

$(u + v) + w = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$(u + v) + w = u + (v + w)$

A_2) $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$u + v = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$

$u + v = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$

$u + v = v + u$

A_3) $\exists 0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $u + 0 = (x_1, y_1) + (0, 0)$

$u + 0 = (x_1 + 0, y_1 + 0)$

$u + 0 = (x_1, y_1)$

$u + 0 = u$

A_4) $\forall u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\exists(-u) = (-x_1, -y_1) \in \mathbb{R}^2$,

$u + (-v) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1)$

$u + (-u) = (x_1 - x_1, y_1 - y_1)$

$u + (-u) = (0, 0) = 0$

M_1) $(\alpha\beta) u = (\alpha\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha\beta) x_1, (\alpha\beta) y_1) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta y_1))$

$(\alpha\beta) u = \alpha(\beta x_1, \beta y_1) = \alpha(\beta(x_1, y_1))$

$(\alpha\beta) u = \alpha(\beta u)$

M_2) $(\alpha + \beta) u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) = ((\alpha + \beta) x_1, (\alpha + \beta) y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$

$(\alpha + \beta) u = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1) = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1)$

$(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$

M_3) $\alpha(u + v) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2))$

$\alpha(u + v) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$

$\alpha(u + v) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2) = \alpha u + \alpha v$

M_4) $1u = 1(x_1, y_1) = (1x_1, 1y_1) = (x_1, y_1)$

$1u = u$

2) Os conjuntos $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, ..., $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Depois de verificados os oito axiomas de espaço vetorial para o $\mathbb{R}^2$, os mesmos ficam também evidentes nos conjuntos acima citados.

3) O conjunto $\mathbb{R}$ em relação às operações usuais de adição e multiplicação por escalar. Os vetores, nesse caso, são números reais, e sabe-se que a adição de números reais verifica as propriedades A_1, A_2, A_3 e A_4 da definição de espaço vetorial. Assim, também, o produto de reais é um número real, e a operação multiplicação satisfaz os axiomas M_1, M_2, M_3 e M_4.

4) O conjunto $M(m, n)$ das matrizes $m \times n$ com as operações adição e multiplicação por escalar usuais.

Em particular, o conjunto $M(n, n)$ das matrizes quadradas, de ordem n, é um espaço vetorial relativamente às mesmas operações.

5) O conjunto

$$P_n = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}\}$$

dos polinômios com coeficientes reais de grau $\leqslant n$, mais o polinômio nulo, em relação às operações usuais de adição de polinômios e multiplicação por escalar.

Em particular, o conjunto

$$P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial relativamente às mesmas operações.

6) O conjunto

$V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$

das funções reais definidas em toda reta. Se $f, g \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se:

$f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

e:

$\alpha f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

7) O conjunto

$V = \{(x, x^2)/x \in \mathbb{R}\}$

com as operações definidas por:

$(x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2)$

$\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Os símbolos $\oplus$ e $\odot$ são utilizados para indicar que a adição e a multiplicação por escalar não são as usuais.

8) O conjunto

$V = \{(x, y)/x, y > 0\}$

é um espaço vetorial com as operações adição e multiplicação por escalar definidas assim:

$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \times x_2,\ y_1 \times y_2)$

$\alpha \odot (x, y) = (x^\alpha, y^\alpha)$

O trabalho de testar os oito axiomas de espaço vetorial é um ótimo exercício para o leitor, o qual observará, por exemplo, que o elemento neutro da adição $\oplus$ (axioma A_3) é o vetor $(1, 1)$ e que o elemento simétrico (axioma A_4) de cada vetor $(x, y) \in V$ é o vetor $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}) \in V$.

9) Seja o conjunto:

$\mathbb{R}^2 = \{(a, b)/a, b \in \mathbb{R}\}$

Vamos mostrar que o conjunto $\mathbb{R}^2$ *não* é um espaço vetorial em relação às operações assim definidas:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$k(a, b) = (ka, b)$$

Ora, como a adição aqui definida é a usual, verificam-se os axiomas A_1, A_2, A_3 e A_4 de espaço vetorial, conforme vimos no exemplo 1. Logo, devem falhar algum ou alguns dos axiomas relativos à multiplicação. Vamos testá-los.

Consideremos:

$u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Temos, então:

M_1) $(\alpha\beta)u = (\alpha\beta)(x_1, y_1) = ((\alpha\beta)x_1, y_1) = (\alpha(\beta x_1), y_1) = \alpha(\beta x_1, y_1)$

$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta(x_1, y_1)) = \alpha(\beta u)$

(Este axioma se verifica.)

M_2) $(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) = ((\alpha + \beta)x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, y_1)$

$\alpha u + \beta u = \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1) + (\beta x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, 2y_1)$

Como se vê:

$(\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u$

e, portanto, não se verifica o axioma M_2, o que comprova *não* ser um espaço vetorial o conjunto de que trata esse exemplo.