## 2.9 ESPAÇOS VETORIAIS ISOMORFOS

Consideremos o espaço vetorial

$$V = P_3 = \{ at^3 + bt^2 + ct + d/a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$$

e seja $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base de $P_3$. Fixada uma base, para cada vetor $v \in P_3$, existe uma só quádrupla $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

Reciprocamente, dada uma quádrupla $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, existe um só vetor em $P_3$ da forma:

$$a_1 v_1 + \ldots + a_4 v_4$$

Assim sendo, a base $B = \{v_1, \ldots, v_4\}$ determina uma *correspondência biunívoca* entre os vetores de $P_3$ e as quádruplas $(a_1, \ldots, a_4)$ em $\mathbb{R}^4$.

Observemos ainda que:

a) Se $v = a_1 v_1 + \ldots + a_4 v_4 \in P_3$ corresponde a $(a_1, \ldots, a_4) \in \mathbb{R}^4$ e $w = b_1 v_1 + \ldots + b_4 v_4 \in P_3$ corresponde a $(b_1, \ldots, b_4) \in \mathbb{R}^4$ então:

$$v + w = (a_1 + b_1) v_1 + \ldots + (a_4 + b_4) v_4 \in P_3$$

corresponde a

$$(a_1 + b_1, \ldots, a_4 + b_4) \in \mathbb{R}^4$$

b) Para $k \in \mathbb{R}$,

$$kv = (ka_1) v_1 + \ldots + (ka_4) v_4 \in P_3$$

corresponde a

$$(ka_1, \ldots, ka_4) \in \mathbb{R}^4.$$



Assim, quando os vetores de $P_3$ são representados como combinação linear dos vetores da base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, a adição de vetores e a multiplicação por escalar se "comportam" exatamente da mesma forma como se fossem quádruplas do $\mathbb{R}^4$.

Em outras palavras diríamos que a correspondência biunívoca entre $P_3$ e $\mathbb{R}^4$ preserva as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, isto é:

$$(v + w)_B = v_B + w_B \quad \text{e} \quad (kv)_B = k(v_B)$$

e, nesse caso, dizemos que os espaços $P_3$ e $\mathbb{R}^4$ são *isomorfos*.

Observemos ainda que o espaço vetorial $M(2, 2)$ é também isomorfo ao $\mathbb{R}^4$.

De forma análoga, prova-se que:

$P_2$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$M(3, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$M(2, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$

e assim por diante.

De um modo geral, tem-se:

"Se $V$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\dim V = n$, *então* $V$ *e* $\mathbb{R}^n$ *são isomorfos.*"

## 2.10 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas 1 a 7 apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

1) $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
$k(x, y, z) = (0, 0, 0)$

2) $\{(x, 2x, 3x);\ x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

3) $\mathbb{R}^2$, $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

4) $\mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$

5) $\mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$

6) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 5x\}$ com as operações usuais

7) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M(2, 2)/a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais

Nos problemas 8 a 13 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Verificar quais deles são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^2$ relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

8) $S = \{(x, y)/y = -x\}$

9) $S = \{(x, x^2);\ x \in \mathbb{R}\}$

10) $S = \{(x, y)/x + 3y = 0\}$

11) $S = \{(y, y);\ y \in \mathbb{R}\}$

12) $S = \{(x, y)/y = x + 1\}$

13) $S = \{(x, y)/x \geqslant 0\}$

Nos problemas 14 a 25 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

14) $S = \{(x, y, z)/x = 4y \text{ e } z = 0\}$

15) $S = \{(x, y, z)/z = 2x - y\}$

16) $S = \{(x, y, z)/x = z^2\}$

17) $S = \{(x, y, z)/y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$



18) $S = \{(x, x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$

19) $S = \{(x, x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$

20) $S = \{(x, y, z)/xy = 0\}$

21) $S = \{(x, y, z)/x = 0 \text{ e } y = |z|\}$

22) $S = \{(x, -3x, 4x);\ x \in \mathbb{R}\}$

23) $S = \{(x, y, z)/x \geqslant 0\}$

24) $S = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$

25) $S = \{(4t, 2t, -t);\ t \in \mathbb{R}\}$

26) Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$:

a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$

b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes triangulares superiores)

c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes simétricas)

d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a + b \\ a - b & b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Junella Cavalcante

d) $\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$

## 2.10.1 Respostas de Problemas Propostos

1. Não é espaço vetorial. Falha o axioma $M_4$
2. O conjunto é um espaço vetorial
3. Não é espaço vetorial. Falham os axiomas $A_2$, $A_3$ e $A_4$
4. Não é espaço vetorial. Falha o axioma $M_2$
5. Não é espaço vetorial. Falha o axioma $M_4$
6. O conjunto é um espaço vetorial
7. O conjunto é um espaço vetorial
8. S é subespaço
9. S não é subespaço
10. É
11. É
12. Não é
13. Não é
14. É
15. É
16. Não é



17. Não é
18. É
19. É
20. Não é
21. Não é
22. É
23. Não é
24. É
25. É
26. São subespaços: a), b), c), d)
27. a) $w = 3u - v$

    b) $k = 12$

    c) $16a + 10b - c = 0$
28. a) $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$

    b) impossível

    c) $a + 2b - c = 0$

    d) não é possível
29. $v = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3$
30. a) $0 = -2v_1 + v_2$

    b) $0 = 0v_1 + 0v_2$
31. $u = 3v_1 - v_2 + 2v_3$

    $v = v_1 + v_2$

    $w = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$