e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

f) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ ad - bc \neq 0 \right\}$ (conjunto de matrizes inversíveis)

27) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

28) Consideremos no espaço $P_2 = \{ at^2 + bt + c / a, b, c \in \mathbb{R} \}$ os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2.

c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3.

d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

29) Seja o espaço vetorial $M(2, 2)$ e os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrever o vetor

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

30) Escrever o vetor $0 \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores

a) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 6)$

b) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 5)$

31) Sejam os vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $u = (-8, 4, 1)$, $v = (0, 2, 3)$ e $w = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

32) Expressar o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

33) Seja S o subespaço do $\mathbb{R}^4$ definido por:

$S = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0 \}$

Pergunta-se:

a) $(-1, 2, 3, 0) \in S$?

b) $(3, 1, 4, 0) \in S$?

c) $(-1, 1, 1, 1) \in S$?

34) Seja S o subespaço de $M(2, 2)$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{bmatrix} ;\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Pergunta-se:

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S$?

b) Qual deve ser o valor de k para que o vetor

$$\begin{bmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

pertença a S?

35) Determinar os subespaços do $\mathbb{R}^3$ gerados pelos seguintes conjuntos:

a) $A = \{(2, -1, 3)\}$

b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$

c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$

d) $A = \{(-1, 1, 0), (0, 1, -2), (-2, 3, 1)\}$

e) $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (-2, -1, 1)\}$

f) $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 0), (0, 0, 2), (-2, 1, 0)\}$

36) Seja o conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (-1, 3, -1)$ e $v_2 = (1, -2, 4)$.

Determinar:

a) O subespaço G(A).

b) O valor de k para que o vetor $v = (5, k, 11)$ pertença a G(A).

37) Sejam os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$ e $v_3 = (1, 3, -1)$. Se $(3, -1, k) \in [v_1, v_2, v_3]$, qual o valor de k?

38) Determinar os subespaços de P_2 (espaço vetorial dos polinômios de grau $\leqslant 2$) gerados pelos seguintes vetores:

a) $p_1 = 2x + 2$, $p_2 = -x^2 + x + 3$ e $p_3 = x^2 + 2x$

b) $p_1 = x^2$, $p_2 = x^2 + x$

c) $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$

39) Determinar o subespaço G(A) para $A = \{(1, -2), (-2, 4)\}$. O que representa geometricamente esse subespaço?

40) Mostrar que os vetores $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^2$.

41) Mostrar que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$.

42) Seja o espaço vetorial M(2, 2). Determinar seus subespaços gerados pelos vetores

a) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

43) Determinar o subespaço de P_3 (espaço dos polinômios de grau $\leqslant 3$) gerado pelos vetores $p_1 = x^3 + 2x^2 - x + 3$ e $p_2 = -2x^3 - x^2 + 3x + 2$.

44) Determinar o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u = (2, -1, 1, 4)$, $v = (3, 3, -3, 6)$ e $w = (0, 4, -4, 0)$.

45) Verificar se o vetor $v = (-1, -3, 2, 0)$ pertence ao subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (2, -1, 3, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, -1, 0)$.

46) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ em LI ou LD:

a) $\{(1, 3)\}$

b) $\{(1,3),(2,6)\}$

c) $\{(2,-1),(3,5)\}$

d) $\{(1,0),(-1,1),(3,5)\}$

47) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ em LI ou LD:

a) $\{(2,-1,3)\}$

b) $\{(1,-1,1),(-1,1,1)\}$

c) $\{(2,-1,0),(-1,3,0),(3,5,0)\}$

d) $\{(2,1,3),(0,0,0),(1,5,2)\}$

e) $\{(1,2,-1),(2,4,-2),(1,3,0)\}$

f) $\{(1,-1,-2),(2,1,1),(-1,0,3)\}$

g) $\{(1,2,-1),(1,0,0),(0,1,2),(3,-1,2)\}$

48) Quais dos seguintes conjuntos de vetores pertencentes ao P_2 são LD?

a) $2+x-x^2, -4-x+4x^2, x+2x^2$

b) $1-x+2x^2, x-x^2, x^2$

c) $1+3x+x^2, 2-x-x^2, 1+2x-3x^2, -2+x+3x^2$

d) x^2-x+1, x^2+2x

49) Quais dos seguintes conjuntos de vetores do $\mathbb{R}^4$ são LD?

a) $(2,1,0,0),(1,0,2,1),(-1,2,0,-1)$

b) $(0,1,0,-1),(1,1,1,1),(-1,2,0,1),(1,2,1,0)$

c) $(1,-1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1),(1,2,1,-2)$

d) $(1,1,2,4),(1,-1,-4,2),(0,-1,-3,1),(2,1,1,5)$

50) Sendo V o espaço vetorial das matrizes 2×3, verificar se $\{A, B, C\}$ é LI ou LD, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

51) Determinar o valor de k para que seja LI o conjunto

$\{(-1,0,2),(1,1,1),(k,-2,0)\}$

52) Determinar k para que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

seja LD.

53) Mostrar que são LD os vetores v_1, v_2 e v_3, com v_1 e v_2 vetores arbitrários de um espaço vetorial V e $v_3 = 2v_1 - v_2$.

54) Mostrar que se u, v e w são LI, então $u+v$, $u+w$ e $v+w$ são também LI.

55) Sendo $v_1 = (1,2) \in \mathbb{R}^2$, determinar $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base de $\mathbb{R}^2$.

56) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam base do $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(1,2,),(-1,3)\}$

b) $\{(3,-6),(-4,8)\}$

c) $\{(0,0),(2,3)\}$

d) $\{(3,-1),(2,3)\}$

57) Para que valores de k o conjunto $\beta = \{(1,k),(k,4)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$?

58) O conjunto $\beta = \{(2,-1),(-3,2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. Escrever o vetor genérico do $\mathbb{R}^2$ como combinação linear de β.

32. $v = -v_1 + 3v_2 + 2v_3$

33. a) sim b) não c) não

34. a) sim b) $k = -2$

35. a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2y \text{ e } z = -3y\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 7x + 5y - 4z = 0\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

d) $\mathbb{R}^3$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$

f) $\mathbb{R}^3$

36. a) $G(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 10x + 3y - z = 0\}$

b) $k = -13$

37. $k = 7$

38. a) $\{ax^2 + bx + c / b = 2a + c\}$

b) $\{ax^2 + bx / a, b \in \mathbb{R}\}$

c) P_2

39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -2x\}$

Representa uma reta que passa pela origem.

40. $(x, y) = (x - y)(2, 1) + (-x + 2y)(1, 1)$

41. $(x, y, z) = xv_1 + (y - x)v_2 + (z - y)v_3$

42. a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ b = -2a - 5d \text{ e } c = -a - d \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ a + b - c + d = 0 \right\}$

43. $\{ax^3 + bx^2 + cx + d / b = 5a + 3c \text{ e } d = 11a + 8c\}$

44. $\{(x, y, z, t) / 2x - t = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

45. Pertence.

46. a) LI b) LD c) LI d) LD

47. a) LI b) LI c) LD d) LD

e) LD f) LI g) LD

48. a, c

49. b, d

50. LI

51. $k \neq -3$

52. $k = 3$

55. $v_2 \neq kv_1,\ \forall k \in \mathbb{R}$

56. a, d

57. $k \neq \pm 2$

58. $(x, y) = (2x + 3y)(2, -1) + (x + 2y)(-3, 2)$

59. a), c)

60. b), c), d)