Observação

Se todos os subconjuntos próprios de um conjunto finito de vetores são LI, o fato não significa que o conjunto seja LI. De fato, se considerarmos no $\mathbb{R}^2$ os vetores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ e $v = (4, 5)$, verificaremos que cada um dos subconjuntos $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, v\}$, $\{e_2, v\}$, $\{e_1\}$, $\{e_2\}$ e $\{v\}$ é LI, enquanto o conjunto $\{e_1, e_2, v\}$ é LD.

V) Se $A = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é LI e $B = \{v_1, ..., v_n, w\} \subset V$ é LD, então w é combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

De fato:

Como B é LD, existem escalares $a_1, \dots, a_n, b$, nem todos nulos, tais que:

$a_1v_1 + ... + a_nv_n + bw = 0$.

Ora, se $b = 0$, então algum dos a_i não é zero na igualdade:

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$$

Porém esse fato contradiz a hipótese de que A é LI. Conseqüentemente, tem-se $b \neq 0$, e, portanto:

$$bw = -a_1v_1 - ... - a_nv_n$$

o que implica:

$$w = -\frac{a_1}{b}v_1 - ... - \frac{a_n}{b}v_n$$

isto é, w é combinação linear de $v_1, ..., v_n$.

2.8 BASE E DIMENSÃO

2.8.1 Base de um Espaço Vetorial

Um conjunto $B = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

I) B é LI;

II) B gera V.

Exemplos:

1) $B = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

De fato:

I) B é LI, pois $a(1, 1) + b(-1, 0) = (0, 0)$ implica:

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

e daí:

$$a = b = 0$$

II) B gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$(x, y) = y(1, 1) + (y - x)(-1, 0)$$

Realmente, a igualdade

$$(x, y) = a(1, 1) + b(-1, 0)$$

implica:

$$\begin{cases} a - b = x \\ a = y \end{cases}$$

donde:

$$a = y \quad e \quad b = y - x$$

Os vetores da base B estão representados na Figura 2.8.1. Em 2.7.2 já havíamos visto que dois vetores não-colineares são LI. Sendo eles do $\mathbb{R}^2$, irão gerar o próprio $\mathbb{R}^2$. Na verdade, quaisquer dois vetores não-colineares do $\mathbb{R}^2$ formam uma base desse espaço.

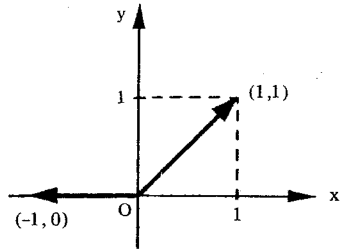

Figura 2.8.1

2) $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$, denominada *base canônica.*

De fato:

I) B é LI, pois $a(1, 0) + b(0, 1) = (0, 0)$ implica $a = b = 0$;

II) B gera $\mathbb{R}^2$, pois todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é tal que:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

3) Consideremos os vetores $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. No exemplo 3 de 2.7.1 deixamos claro que o conjunto $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é LI em $\mathbb{R}^n$. Tendo em vista que todo vetor $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como combinação linear de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, isto é:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

conclui-se que B gera o $\mathbb{R}^n$. Portanto, B é uma base de $\mathbb{R}^n$. Essa base é conhecida como *base canônica* do $\mathbb{R}^n$.

Conseqüentemente:

$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$;

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$;

$\{(1, 0), (0, 1)\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$;

$\{1\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}$.

4) $$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é a base canônica de $M(2, 2)$.

De fato:

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e daí:

$$a = b = c = d = 0.$$

Portanto, B é LI.

Por outro lado, B gera o espaço $M(2, 2)$, pois qualquer

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, 2)$$

pode ser escrito assim:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, B é base de $M(2, 2)$.

5) O conjunto $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n.

De fato:

$$a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = 0$$

implica $a_0 = a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ pela condição de identidade de polinômios. Portanto, B é LI.

Por outro lado, B gera o espaço vetorial P_n, pois qualquer polinômio $p \in P_n$ pode ser escrito assim:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

que é uma combinação linear de $1, x, x^2, ..., x^n$.

Logo, B é uma base de P_n. Essa é a *base canônica* de P_n e tem $n + 1$ vetores.

6) $B = \{(1, 2), (2, 4)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois B é LD (exercício a cargo do leitor).

7) $B = \{(1, 0), (0, 1), (3, 4)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$, pois B é LD (exercício a cargo do leitor).

8) $B = \{(2, -1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$. B é LI, mas não gera todo $\mathbb{R}^2$, isto é, $[(2, -1)] \neq \mathbb{R}^2$. Esse conjunto gera uma reta que passa pela origem.

9) $B = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\}$ não é base de $\mathbb{R}^3$. B é LI, mas não gera todo $\mathbb{R}^3$.

Observação

"*Todo conjunto* LI *de um espaço vetorial* V *é base do subespaço por ele gerado.*"

Por exemplo, o conjunto $B = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI e gera o subespaço

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y - z = 0\}$

Então, B é base de S, pois B é LI e gera S.

2.8.2 Teorema

Se $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *for uma base de um espaço vetorial* V, *então todo conjunto com mais de* n *vetores será linearmente dependente.*

De fato:

Seja $B' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores de V, com $m > n$. Pretende-se mostrar que B' é LD. Para tanto, basta mostrar que existem escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ *não todos nulos* tais que

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + ... + x_m w_m = 0 \qquad (1)$$

Como B é uma base de V, cada vetor w_i pertencente a B' é uma combinação linear dos vetores de B, isto é, existem números $\alpha_i, \beta_i, \cdots, \delta_i$ tais que:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \\ w_2 &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n \\ &\vdots \\ w_m &= \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + ... + \delta_n v_n \end{aligned} \qquad (2)$$

Substituindo as relações (2) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} & x_1 (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) + \\ + & x_2 (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n) + \\ & .... \\ + & x_m (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + ... + \delta_n v_n) = 0 \end{aligned}$$

ou ordenando os termos convenientemente:

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + ... + \delta_1 x_m) v_1 + \\ + & (\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \delta_2 x_m) v_2 + \\ & .... \\ + & (\alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + ... + \delta_n x_m) v_n = 0 \end{aligned}$$

Tendo em vista que $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI, os coeficientes dessa combinação linear são nulos:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + ... + \delta_1 x_m = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \delta_2 x_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + ... + \delta_n x_m = 0 \end{cases}$$

Esse sistema linear homogêneo possui m variáveis $x_1, x_2, ..., x_m$ e n equações. Como $m > n$, existem soluções não-triviais, isto é, existe $x_i \neq 0$. Logo, $B' = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ é LD.

2.8.3 Corolário

Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.

De fato:

Sejam $A = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B = \{w_1, ..., w_m\}$ duas bases de um espaço vetorial V.

Como A é base e B é LI, pelo teorema anterior, $n \geqslant m$. Por outro lado, como B é base e A é LI, tem-se $n \leqslant m$. Portanto, $n = m$.

Exemplos

1) A base canônica do $\mathbb{R}^3$ tem três vetores. Logo, qualquer outra base do $\mathbb{R}^3$ terá também três vetores.

2) A base canônica de $M(2, 2)$ tem quatro vetores. Portanto, toda base de $M(2, 2)$ terá quatro vetores.

2.8.4 Dimensão de um Espaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial.

Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e anota-se $\dim V = n$.

Se V não possui base, $\dim V = 0$.

Se V tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão de V é infinita e anota-se $\dim V = \infty$.

Exemplos

1) $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, pois toda base do $\mathbb{R}^2$ tem dois vetores.

2) $\dim \mathbb{R}^n = n$.

3) $\dim M(2, 2) = 4$.

4) $\dim M(m, n) = m \times n$.

5) $\dim P_n = n + 1$.

6) $\dim \{0\} = 0$.

Observações

1) Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$.

Se S é um subespaço de V, então $\dim S \leqslant n$. No caso de $\dim S = n$, tem-se $S = V$.

Para permitir uma interpretação geométrica, consideremos o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$).

A dimensão de qualquer subespaço S do $\mathbb{R}^3$ só poderá ser 0, 1, 2 ou 3. Portanto, temos os seguintes casos:

I) $\dim S = 0$, então $S = \{0\}$ é a origem.

II) $\dim S = 1$, então S é uma reta que passa pela origem.

III) dim S = 2, então S é um plano que passa pela origem.

IV) dim S = 3, então S é o próprio $\mathbb{R}^3$.

2) Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Então, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.

3) Sabemos que um conjunto B é base de um espaço vetorial V se B for LI e se B gera V. No entanto, se soubermos que dim V = n, para obtermos uma base de V basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita. A outra condição ocorre automaticamente. Assim:

I) Se dim V = n, *qualquer subconjunto de* V *com* n *vetores* LI *é uma base de* V.

II) Se dim V = n, *qualquer subconjunto de* V *com* n *vetores geradores de* V *é uma base de* V.

Exemplo

O conjunto $B = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$.

De fato, como dim $\mathbb{R}^2 = 2$ e os dois vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

2.8.5 Teorema

Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

Qualquer conjunto de vetores LI *em* V *é parte de uma base, isto é, pode ser completado até formar uma base de* V.

A demonstração está baseada no Teorema 2.7.2 e no conceito de dimensão.

Deixaremos de demonstrar o teorema e daremos apenas um exemplo a título de ilustração.

Exemplo

Sejam os vetores $v_1 = (1, -1, 1, 2)$ e $v_2 = (-1, 1, -1, 0)$.

Completar o conjunto $\{v_1, v_2\}$ de modo a formar uma base do $\mathbb{R}^4$.

Solução

Como dim $\mathbb{R}^4 = 4$, uma base terá quatro vetores LI. Portanto, faltam dois. Escolhemos um vetor $v_3 \in \mathbb{R}^4$ tal que v_3 *não* seja uma combinação linear de v_1 e v_2, isto é, $v_3 \neq a_1 v_1 + a_2 v_2$ para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dentre os infinitos vetores existentes, um deles é o vetor $v_3 = (1, 1, 0, 0)$, e o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI (se v_3 fosse combinação linear de v_1 e v_2 esse conjunto seria LD de acordo com o Teorema 2.7.2).

Para completar, escolhemos um vetor v_4 que *não* seja uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3. Um deles é o vetor $v_4 = (1, 0, 0, 0)$, e o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é LI. Logo,

$$\{(1, -1, 1, 2), (-1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$.

2.8.6 Teorema

Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Então, *todo vetor* $v \in V$ *se exprime de maneira única como combinação linear dos vetores de* B.

De fato:

Tendo em vista que B é uma base de V, para $v \in V$ pode-se escrever:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \qquad (1)$$

Supondo que o vetor v pudesse ser expresso como outra combinação linear dos vetores da base, ter-se-ia:

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n \qquad (2)$$

Subtraindo, membro a membro, a igualdade (2) da igualdade (1), vem:

$$0 = (a_1 - b_1)\,v_1 + (a_2 - b_2)\,v_2 + \ldots + (a_n - b_n)\,v_n$$

Tendo em vista que os vetores da base são LI:

$$a_1 - b_1 = 0, \quad a_2 - b_2 = 0, \ldots, a_n - b_n = 0$$

isto é:

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$$

Os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são, pois, univocamente determinados pelo vetor v e pela base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

2.8.7 Componentes de um Vetor

Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma *base* de V. Tomemos $v \in V$ sendo:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

Os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados *componentes* ou *coordenadas* de v em relação à base B e se representa por:

$$\boxed{v_B = (a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

ou, com a notação matricial:

$$v_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

A n-upla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é chamada *vetor-coordenada* de v em relação à base B, e o vetor-coluna

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

é chamado *matriz-coordenada* de v em relação à base B.

Exemplo

No $\mathbb{R}^2$, consideremos as bases

$$A = \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad B = \{(2, 0), (1, 3)\} \quad e \quad C = \{(1, -3), (2, 4)\}$$

Dado o vetor $v = (8, 6)$, tem-se:

$$(8, 6) = 8\,(1,0) + 6(0, 1)$$

$$(8, 6) = 3(2, 0) + 2(1, 3)$$

$$(8, 6) = 2(1, -3) + 3(2, 4)$$

Com a notação acima, escrevemos:

$$v_A = (8, 6) \qquad v_B = (3, 2) \qquad v_C = (2, 3)$$

O gráfico da página seguinte mostra a representação do vetor v = (8,6) em relação às bases A e B.

Observação

No decorrer do estudo de Álgebra Linear temos, às vezes, a necessidade de identificar rapidamente a dimensão de um espaço vetorial. E, uma vez conhecida a dimensão, obtém-se facilmente uma base desse espaço.