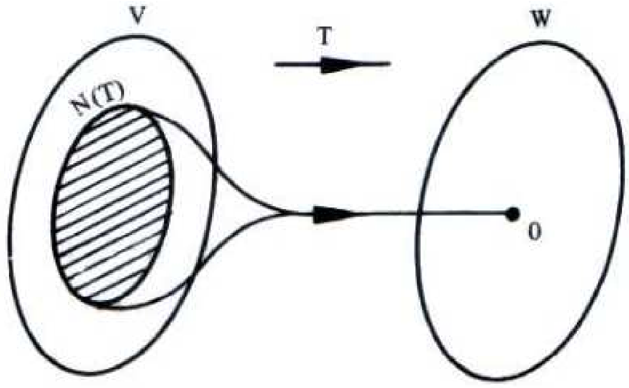
4.2 NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Definição

Chama-se *núcleo* de uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ ao conjunto de todos os vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$. Indica-se esse conjunto por $N(T)$ ou $\ker(T)$:

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = 0\}$$



Observemos que $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \emptyset$, pois $0 \in N(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$.

Exemplos

1) O núcleo da transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

é o conjunto:

$$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0)\}$$

o que implica:

$$(x + y, 2x - y) = (0, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

sistema cuja solução é:

$$x = 0 \quad e \quad y = 0$$

logo:

$$N(T) = \{(0, 0)\}$$

2) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por:

$$T(x, y, z) = (x - y + 4z,\ 3x + y + 8z)$$

Nesse caso, temos:

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\}$$

isto é, um vetor $(x, y, z) \in N(T)$ se, e somente se:

$$(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

sistema homogêneo de solução $x = -3z$ e $y = z$.

Logo:

$$N(T) = \{(-3z, z, z)/z \in \mathbb{R}\}$$

ou:

$$N(T) = \{z(-3, 1, 1)/z \in \mathbb{R}\}$$

ou, ainda:

$$N(T) = [(-3, 1, 1)]$$

Observemos que esse conjunto representa uma reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e tal que todos os seus pontos têm por imagem a origem do $\mathbb{R}^2$ (Figura 4.2).

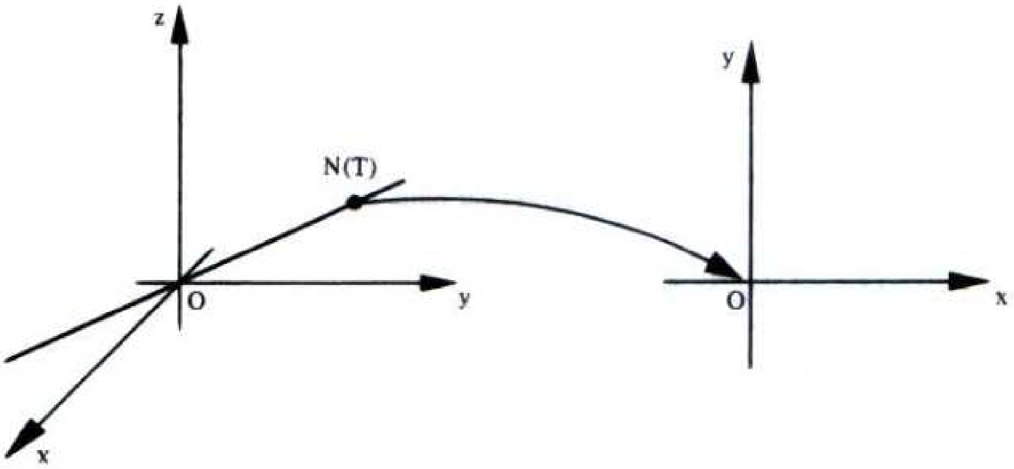


Figura 4.2

4.2.1 Propriedades do Núcleo

1) O núcleo de uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ é um *subespaço* vetorial de V.

De fato:

Sejam v_1 e v_2 vetores pertencentes ao $N(T)$ e α um número real qualquer. Então, $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Assim:

I) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$

isto é:

$v_1 + v_2 \in N(T)$

II) $T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha 0 = 0$

isto é:

$\alpha v_1 \in N(T)$

2) Uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

Lembremos que uma aplicação $T: V \longrightarrow W$ é injetora se $\forall v_1, v_2 \in V$, $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$ ou, de modo equivalente, se $\forall v_1, v_2 \in V$, $v_1 \neq v_2$ implica $T(v_1) \neq T(v_2)$.

A demonstração dessa propriedade tem duas partes:

a) Vamos mostrar que se T é injetora, então $N(T) = \{0\}$.

De fato:

Seja $v \in N(T)$, isto é, $T(v) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo, $T(v) = T(0)$. Como T é injetora por hipótese, $v = 0$. Portanto, o vetor zero é o único elemento do núcleo, isto é, $N(T) = \{0\}$.

b) Vamos mostrar que se $N(T) = \{0\}$, então T é injetora.

De fato:

Sejam $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = T(v_2)$. Então, $T(v_1) - T(v_2) = 0$ ou $T(v_1 - v_2) = 0$ e, portanto, $v_1 - v_2 \in N(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor 0, e, portanto, $v_1 - v_2 = 0$, isto é, $v_1 = v_2$. Como $T(v_1) = T(v_2)$ implica $v_1 = v_2$, T é injetora.

4.3 IMAGEM

Definição

Chama-se *imagem* de uma transformação linear $T: V \longrightarrow W$ ao conjunto dos vetores $w \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $v \in V$. Indica-se esse conjunto por **Im(T)** ou $T(V)$:

$$\text{Im}(T) = \{ w \in W / T(v) = w \text{ para algum } v \in V \}$$

A Figura 4.3 esclarece a definição.

Observemos que $\text{Im}(T) \subset W$ e $\text{Im}(T) \neq \phi$, pois $0 = T(0) \in \text{Im}(T)$. Se $\text{Im}(T) = W$, T diz-se *sobrejetora*, isto é, para todo $w \in W$ existe pelo menos um $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

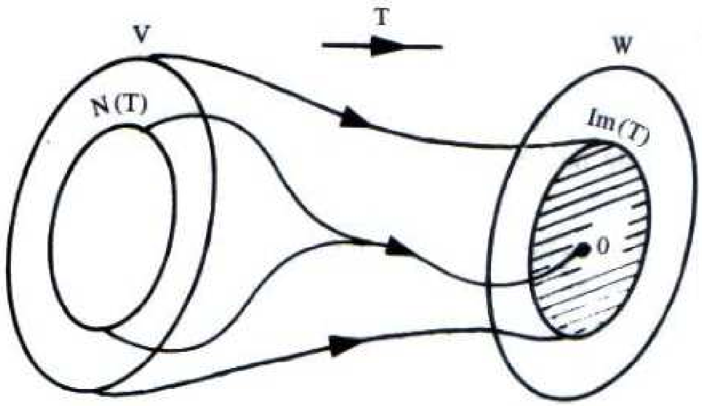
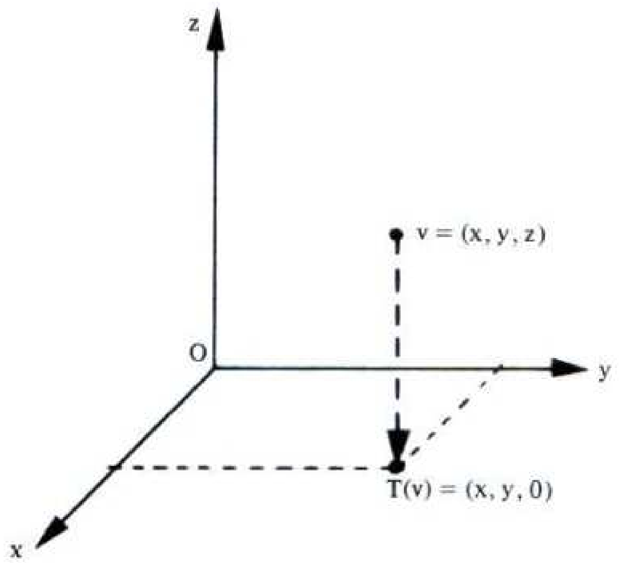


Figura 4.3

Exemplos

1) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y, 0)$ a projeção ortogonal do $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy. A imagem de T é o próprio plano xy:

$$Im(T) = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x, y \in \mathbb{R}\}$$



Observemos que o núcleo de T é o eixo dos z:

$$N(T) = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

pois $T(0, 0, z) = (0, 0, 0)$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

2) A imagem da transformação linear identidade $I: V \longrightarrow V$ definida por $I(v) = v$, $\forall v \in V$, é todo espaço V. O núcleo, neste caso, é $N(I) = \{0\}$.

3) A imagem da transformação nula $T: V \longrightarrow W$ definida por $T(v) = 0$, $\forall v \in V$, é o conjunto $Im(T) = \{0\}$. O núcleo, nesse caso, é todo o espaço V.

4.3.1 Propriedade da Imagem

"A imagem de uma transformação $T: V \longrightarrow W$ é um *subespaço* de W."

De fato:

Sejam w_1 e w_2 vetores pertencentes a $Im(T)$ e α um número real qualquer. Devemos mostrar que $w_1 + w_2 \in Im(T)$ e $\alpha w_1 \in Im(T)$, isto é, devemos mostrar que existem vetores v e u pertencentes a V tais que $T(v) = w_1 + w_2$ e $T(u) = \alpha w_1$.

Como $w_1, w_2 \in Im(T)$, existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Fazendo $v = v_1 + v_2$ e $u = \alpha v_1$, tem-se:

$$T(v) = T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

e:

$$T(u) = T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1) = \alpha w_1$$

e, portanto, $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

4.3.2. Teorema da Dimensão

"Seja V um espaço de dimensão finita e $T: V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Então, $\dim N(T) + \dim Im(T) = \dim V$."

Deixaremos de demonstrar o teorema e faremos algumas comprovações por meio dos exemplos e de problemas resolvidos logo a seguir.

No exemplo 1 de 4.3, o núcleo (eixo dos z) da projeção ortogonal T tem dimensão 1 e a imagem (plano xy) tem dimensão 2, enquanto o domínio $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3.

No exemplo 2 da transformação identidade, temos $\dim N(T) = 0$. Conseqüentemente, $\dim Im(T) = \dim V$ pois $Im(T) = V$.

No exemplo 3 da transformação nula, temos $\dim Im(T) = 0$. Portanto, $\dim N(T) = \dim V$, pois $N(T) = V$.

4.3.3 Problemas Resolvidos

10) Determinar o núcleo e a imagem do operador linear

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$$

Solução

a) $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$

De:

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (0, 0, 0)$$

vem o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é $(5z, -2z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Logo:

$$N(T) = \{(5z, -2z, z)/z \in \mathbb{R}\} = \{z(5, -2, 1)/z \in \mathbb{R}\} = [(5, -2, 1)]$$

b) $Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (a, b, c)\}$, isto é, $(a, b, c) \in Im(T)$ se existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (a, b, c)$$