

Nos problemas 14 a 21 são apresentadas transformações lineares. Para cada uma delas:

- a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão.  $T$  é injetora? Justificar.
- b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão.  $T$  é sobrejetora? Justificar.

14)  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$

15)  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$

16)  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$

17)  $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

18)  $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$

19)  $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x - 3y, x - z, z - x)$

20)  $T: P_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(at + b) = (a, 2a, a - b)$

21)  $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b, a + b)$

22) Seja a transformação linear  $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$  e  $T(1, -2) = (0, -1, 0)$ .

a) Determinar  $T(x, y)$ .

b) Determinar  $N(T)$  e  $\text{Im}(T)$ .

c)  $T$  é injetora? É sobrejetora?

23) Seja  $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear tal que  $T(e_1) = (1, -2, 1)$ ,  $T(e_2) = (-1, 0, -1)$ ,  $T(e_3) = (0, -1, 2)$  e  $T(e_4) = (1, -3, 1)$ , sendo  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^4$ .

a) Determinar o núcleo e a imagem de  $T$ .

b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem.

c) Verificar o Teorema da Dimensão.

**Respostas:**

14) a)  $N(T) = \{ (x, 3x)/x \in \mathbb{R} \}$ ;  $\dim N(T) = 1$

T não é injetora, porque  $N(T) \neq \{(0, 0)\}$ .

b)  $\text{Im}(T) = \{ (-y, y)/y \in \mathbb{R} \}$ ;  $\dim \text{Im}(T) = 1$

T não é sobrejetora, porque  $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$ .

15) a)  $N(T) = \{(0, 0)\}$ ;  $\dim N(T) = 0$ .

T é injetora, porque  $N(T) = \{0\}$ .

b)  $\text{Im}(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 2y - z = 0 \}$

$\dim \text{Im}(T) = 2$ . T não é sobrejetora, porque  $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$ .

16) a)  $N(T) = \{(0, 0)\}$ ;  $\dim N(T) = 0$

T é injetora.

b)  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ ;  $\dim \text{Im}(T) = 2$ ; T é sobrejetora.

17) a)  $N(T) = \{ (x, -3x, -5x)/x \in \mathbb{R} \}$

b)  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

19) a)  $N(T) = \{ (3x, x, 3x)/x \in \mathbb{R} \}$

b)  $\text{Im}(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = -z \}$

18) a)  $N(T) = \{ (3z, z, z)/z \in \mathbb{R} \}$

b)  $\text{Im}(T) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0 \}$

20) a)  $N(T) = \{0\}$

b)  $\text{Im}(T) = \{ (a, 2a, c)/a, c \in \mathbb{R} \}$

21) a)  $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} / c, d \in \mathbb{R} \right\}$

b)  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

22) a)  $T(x, y) = (2x + y, 3x + 2y, -2x - y)$  23) a)  $N(T) = \{ (3y, y, 0, -2y)/y \in \mathbb{R} \}$

b)  $N(T) = \{(0, 0)\}$

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$

$\text{Im}(T) = \{ (x, y, -x)/x, y \in \mathbb{R} \}$

b) e c) a cargo do leitor.

c) T é injetora, mas não sobrejetora.