6.2 DETERMINAÇÃO DOS VALORES PRÓPRIOS E DOS VETORES PRÓPRIOS

1) Determinação dos valores próprios

Seja o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

isto é, $A = [T]$.

Se v e λ são, respectivamente, vetor próprio e o correspondente valor próprio do operador T, tem-se:

$A \,.\, v = \lambda v$ (v é matriz-coluna 3×1)

ou:

$$Av - \lambda v = 0$$

Tendo em vista que $v = Iv$ (I é a matriz-identidade), pode-se escrever:

$$Av - \lambda Iv = 0$$

ou:

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{6.2a}$$

Para que esse sistema homogêneo admita soluções não-nulas, isto é:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

deve-se ter:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ou:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

ou, ainda:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (6.2b)$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é denominada *equação característica* do operador T ou da matriz A, e suas raízes são os valores próprios do operador T ou da matriz A. O determinante $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado *polinômio característico*.

2) Determinação dos vetores próprios.

A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo de equações lineares 6.2a permite determinar os vetores próprios associados.

6.2.1 Problemas Resolvidos

1) Determinar os valores próprios e os vetores próprios do operador linear

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z)$

Solução

I) A matriz canônica do operador T é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$