ALN (200151)

1. Aritmètica Finita i Control d'Errors

1. (Èpsilon de màquina). Es defineix el concepte de "èpsilon de màquina" com el nombre positiu ϵ més petit que sumat a 1 dóna diferent de 1. És a dir:

$$\epsilon := \min\{\varepsilon > 0 : \mathrm{fl}(1+\varepsilon) > 1\}.$$

calculeu l'èpsilon de màquina tant en precisió simple (`float`) com en precisió doble (`double`).

Remarca

En `C/C++` podem conèixer directament l'èpsilon de la màquina amb les constants `FLT_EPSILON` (per a precisió simple) i `DBL_EPSILON` (per a precisió) doble. Totes dues definides a la llibreria `cfloat`:

```
...
#include<cfloat>
...
cout << "eps (single) = " << FLT_EPSILON << endl;
cout << "eps (double) = " << DBL_EPSILON << endl;
...
```

2. (Exercici 4 de la col·lecció: suma de la sèrie harmònica generalitzada). Useu aritmètica de 3 dígits amb eliminació per a calcular la suma

$$S_{15} = \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{n^2},$$

primer en ''l'ordre natural" (decreixent), i.e.,

$$S_{15} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{255},$$

i després en l'ordre "invers" (creixent), i.e.,

$$S_{15} = \frac{1}{255} + \frac{1}{196} + \cdots + \frac{1}{1}.$$

Decidiu quin és el mètode més exacte de tots dos. *Nota:* recordeu l'exercici 3.

3. (Potències del recíproc del nombre d'or). Sigui $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ el nombre d'or (o proporció, o raó àuria) i ϕ el seu recíproc (invers multiplicatiu), això és: $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Es comprova d'immediat que $-\Phi$ i ϕ són les dues arrels de l'equació de 2on. grau

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Basant-vos en això, justifiqueu els tres algorismes següents

A1:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^k = \phi \cdot \phi^{k-1}, \qquad \text{(per a } k = 2, 3, \dots)$$

A2:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^2 = 1 - \phi, \quad \phi^k = \phi^{k-2} \cdot (1 - \phi), \qquad \text{(per a } k = 3, 4, \dots)$$

A3:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^2 = 1 - \phi, \quad \phi^k = \phi^{k-2} - \phi^{k-1}, \qquad \text{(per a } k = 3, 4, \dots)$$

per a calcular les potències successives de ϕ. Escriviu un programa `C/C++` que compari tots tres algorismes.

4. (Exercici 9 de la col·lecció). Usant un mètode recurrent, calculeu el valor de les integrals,

$$J_k = \int_0^1 x^k \sin(\pi x) \mathrm{d}x,$$

$(j = 2, 4, \ldots, 20)$. En concret:

4.1 Demostreu que:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{2}{\pi}, \\ J_1 &= \frac{1}{\pi}, \\ J_k &= \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} J_{k-2}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

4.2 Fent servir la recurrència (1), calcueu J_k per a $k = 2, 4, 6 \ldots, 20$. És estable l'algorisme trobat? Per què? **Nota:** direm que un algorisme és *estable* si els errors en les aproximacions s'esmorteeixen al llarg de les iteracions. Si, pel contrari, s'amplifiquen, direm que és *inestable*.

4.3 Dissenyeu un algorisme alternatiu que eviti els problemes detectats al punt anterior. *Ajut:* considereu (1)

5. Feu un programa en `C/C++` que avaluï el polinomi de McLaurin $p_N(x)$ de grau N de la funció $f(x) = \mathrm{e}^x$ en un punt donat x. Empreu la *regla de Horner*.

6. (Suma d'una sèrie alternada) Volem comparar les aproximacions de e^{-2} amb tres mètodes diferents:
   6.1 Fent servir la funció `exp(x)` proporcionada a la llibreria `math.h` de `C`.
   6.2 Aproximant e^{-2} per $p_{10}(-2)$, programat al problema 5.
   6.3 Usant $q_{10}(-2) := 1/p_{10}(2)$.

   Aleshores:

   - Escriviu un programa en `C/C++` que calculi i tregui per pantalla (o bé escrigui a un fitxer) el valor de les tres aproximacions:

$$\texttt{exp(-2)}, \qquad p_{10}(-2), \qquad q_{10}(-2)$$

     i de les estimacions dels corresponents errors absoluts i relatius, donades respectivament per

$$\varepsilon_a\left(\texttt{exp(-2)}\right) \approx \bar{p}(-2) - \texttt{exp(-2)},$$
$$\varepsilon_r\left(\texttt{exp(-2)}\right) \approx \frac{\varepsilon_a\left(\texttt{exp(-2)}\right)}{\texttt{exp(-2)}},$$

     on $\bar{p} = p_{10},\ q_{10}$. Amb aquest resultats completeu la Taula 1. Feu-lo tant per precisió simple (`float`) com per doble (`double`).
   - Feu el mateix amb e^{-7}. Comenteu els resultats en ambdós casos.

`exp(-2)`		e_a	e_r
$p_{10}(-2)$			
$q_{10}(-2)$			

Taula 1: Comparació en el càlcul d'aproximacions de e^{-2}.