

definition remark

pdfauthor = Equip Docent ALN, pdftitle = Problemes Tema 1: Arimètica
Finita i Control d'Errors, pdfsubject = Problemes

Aritmètica finita i control d'errors

1. Calculeu $f(x) = 1 - \cos(x)$ amb aritmètica de coma flotant de 6 dígit, per a $|x| < 10^{-3}$. És fiable el resultat? Feu el mateix amb la representació de $f(x)$

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Trobeu una altra representació alternativa per a $f(x)$ que sigui vàlida per a $|x|$ petit.

2. Se sap que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ és divergent. No obstant això, si la intentem “sumar” en un ordinador usant precisió simple (per qüestions de temps) dona un valor concret. Trobeu aquest valor i expliqueu aquest fenomen.
3. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ en la representació i en les operacions aritmètiques, fiteu l'error comès en el càlcul de $\sum_{i=1}^n x_i$.
4. Useu aritmètica de 3 dígit amb tall per a calcular la suma $\sum_{i=1}^{15} 1/i^2$ primer en l'ordre natural, $1 + 1/4 + \dots + 1/225$, i després a l'inrevés, $1/225 + 1/196 + \dots + 1/4 + 1$. Decidiu quin és el mètode més exacte de tots dos.
5. Demostreu que en l'operació \sqrt{x} l'error relatiu és aproximadament la meitat de l'error relatiu en les dades. Direm que l'operació de fer \sqrt{x} és una operació *segura* respecte de l'error relatiu. Feu patent la “inseguretat” de l'operació $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ per a $x \simeq 1$. (Suposeu que tenim errors només en la representació de les dades).
6. Donat el sistema d'equacions lineals

$$3x + ay = 10$$

$$5x + by = 20$$

on $a = 2.100 \pm 5 \times 10^{-4}$ i $b = 3.300 \pm 5 \times 10^{-4}$; amb quina exactitud pot ser determinat $x + y$? (Suposant operacions exactes).

7. Treballant amb 5 xifres decimals, calculeu

$$\sqrt[k]{2.15283} - \sqrt[k]{2.15263}, \quad k = 2, 3, 4.$$

- (a) Directament.
 - (b) Usant fórmules millors des del punt de vista numèric. (Indicació: Feu la divisió de polinomis $(a^k - b^k)/(a - b)$).
 - (c) Compareu els resultats i comenteu-los.
8. Es vol calcular $f_n(x)$, on $f_n(x) = n! \left[e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right]$, per a $x = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- (a) Demostreu que se satisfà la següent llei de recurrència

$$f_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x) - x^{n+1},$$

- (b) Calculeu $f_n(1)$, $n = 1 \div 10$ amb aritmètica de coma flotant amb 5 dígit significatius. És fiable el resultat? Què es pot fer per a calcular $f_5(1)$?

9. Usant un mètode recurrent, calculeu el valor de les integrals

$$I_j = \int_0^1 x^j \sin(\pi x) dx,$$

-
11. Doneu una expressió equivalent per a cadascuna de les fórmules següents que sigui millor des del punt de vista numèric, quan ε és molt més petit que x .

(a) $\frac{1}{\sqrt{x-\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$

(b) $\sin(x+\varepsilon) - \sin(x).$

(c) $\cos(x+\varepsilon) - \cos(x).$

(d) $\int_x^{x+\varepsilon} \frac{dt}{t}.$

12. Amb quina exactitud s'ha de mesurar el radi d'una esfera i amb quants decimals cal donar el nombre π perquè el seu volum es conegui amb un error relatiu menor que el 0.01%? Considereu ambdós efectes per separat.