1 Aritmètica finita i control d'errors

1. Calculeu $f(x) = 1 - \cos(x)$ amb aritmètica de coma flotant de 6 dígits, per a $|x| < 10^{-3}$. És fiable el resultat? Feu el mateix amb la representació de $f(x)$
$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}.$$
Trobeu una altra representació alternativa per a $f(x)$ que sigui vàlida per a $|x|$ petit.

2. Se sap que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ és divergent. No obstant això, si la intentem "sumar" en un ordinador usant precisió simple (per qüestions de temps) dóna un valor concret. Trobeu aquest valor i expliqueu aquest fenomen.

3. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per ϵ en la representació i en les operacions aritmètiques, fiteu l'error comès en el càlcul de $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

4. Useu aritmètica de 3 dígits amb tall per a calcular la suma $\sum_{i=1}^{15} 1/i^2$ primer en l'ordre natural, $1 + 1/4 + \cdots + 1/225$, i després a l'inrevés, $1/225 + 1/196 + \cdots + 1/4 + 1$. Decidiu quin és el mètode més exacte de tots dos.

5. Demostreu que en l'operació $\sqrt{x}$ l'error relatiu és aproximadament la meitat de l'error relatiu en les dades. Direm que l'operació de fer $\sqrt{x}$ és una operació *segura* respecte de l'error relatiu. Feu patent la "inseguretat" de l'operació $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ per a $x \simeq 1$. (Suposeu que tenim errors només en la representació de les dades).

6. Donat el sistema d'equacions lineals
$$\begin{aligned} 3\,x + a\,y &= 10 \\ 5\,x + b\,y &= 20 \end{aligned}$$
on $a = 2.100 \pm 5 \times 10^{-4}$ i $b = 3.300 \pm 5 \times 10^{-4}$; amb quina exactitud pot ser determinat $x + y$? (Suposant operacions exactes).

7. Treballant amb 5 xifres decimals, calculeu
$$\sqrt[k]{2.152\,83} - \sqrt[k]{2.152\,63}, \qquad k = 2, 3, 4.$$
   (a) Directament.
   (b) Usant fórmules millors des del punt de vista numèric. (Indicació: Feu la divisió de polinomis $(a^k - b^k)/(a - b)$).
   (c) Compareu els resultats i comenteu-los.

8. Es vol calcular $f_n(x)$, on $f_n(x) = n!\left[\mathrm{e}^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right]$, per a $x = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
   (a) Demostreu que se satisfà la següent llei de recurrència
$$f_{n+1}(x) = (n+1) f_n(x) - x^{n+1},$$
   (b) Calculeu $f_n(1)$, $n = 1 \div 10$ amb aritmètica de coma flotant amb 5 dígits significatius. És fiable el resultat? Què es pot fer per a calcular $f_5(1)$?

9. Usant un mètode recurrent, calculeu el valor de les integrals
$$I_j = \int_0^1 x^j \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x,$$
($j = 2, 4, \ldots, 20$). Estudieu l'estabilitat del mètode trobat. **Nota:** en general, direm que un mètode és *estable* si esmorteeix els errors fets en les aproximacions. Quan, pel contrari, els amplifica, direm que el mètode és *inestable*.

10. Volem calcular $a = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^4$ emprant el valor aproximat $1.732\,05$ per a $\sqrt{3}$. Prenem dues fórmules per a calcular a:

    (i) $\dfrac{1}{\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^4}$, (ii) $\dfrac{1}{18\,817 + 10\,864\sqrt{3}}$.

    Quina és la més adequada des del punt de vista numèric (suposant que les operacions es fan sense errors)?

11. Doneu una expressió equivalent per a cadascuna de les fórmules següents que sigui millor des del punt de vista numèric, quan ε és molt més petit que x.

    (a) $\dfrac{1}{\sqrt{x-\varepsilon}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

    (b) $\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)$.

    (c) $\cos(x+\varepsilon) - \cos(x)$.

    (d) $\displaystyle\int_x^{x+\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

12. Amb quina exactitud s'ha de mesurar el radi d'una esfera i amb quants decimals cal donar el nombre π perquè el seu volum es conegui amb un error relatiu menor que el 0.01%? Considereu ambdós efectes per separat.