

# 1 Aritmètica finita i control d'errors

1. Calculeu  $f(x) = 1 - \cos(x)$  amb aritmètica de coma flotant de 6 dígit, per a  $|x| < 10^{-3}$ . És fiable el resultat? Feu el mateix amb la representació de  $f(x)$

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}.$$

Trobeu una altra representació alternativa per a  $f(x)$  que sigui vàlida per a  $|x|$  petit.

2. Se sap que la sèrie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  és divergent. No obstant això, si la intentem “sumar” en un ordinador usant precisió simple (per qüestions de temps) dóna un valor concret. Trobeu aquest valor i expliqueu aquest fenomen.
3. Si usem un ordinador que comet errors relatius fitats per  $\epsilon$  en la representació i en les operacions aritmètiques, fiteu l'error comès en el càlcul de  $\sum_{i=1}^n x_i$ .
4. Useu aritmètica de 3 dígit amb tall per a calcular la suma  $\sum_{i=1}^{15} 1/i^2$  primer en l'ordre natural,  $1 + 1/4 + \dots + 1/225$ , i després a l'inrevés,  $1/225 + 1/196 + \dots + 1/4 + 1$ . Decidiu quin és el mètode més exacte de tots dos.
5. Demostreu que en l'operació  $\sqrt{x}$  l'error relatiu és aproximadament la meitat de l'error relatiu en les dades. Direm que l'operació de fer  $\sqrt{x}$  és una operació *segura* respecte de l'error relatiu. Feu patent la “inseguretat” de l'operació  $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$  per a  $x \simeq 1$ . (Suposeu que tenim errors només en la representació de les dades).
6. Donat el sistema d'equacions lineals

$$3x + ay = 10$$

$$5x + by = 20$$

on  $a = 2.100 \pm 5 \times 10^{-4}$  i  $b = 3.300 \pm 5 \times 10^{-4}$ ; amb quina exactitud pot ser determinat  $x + y$ ? (Suposant operacions exactes).

7. Treballant amb 5 xifres decimals, calculeu

$$\sqrt[k]{2.15283} - \sqrt[k]{2.15263}, \quad k = 2, 3, 4.$$

- (a) Directament.
- (b) Usant fórmules millors des del punt de vista numèric. (Indicació: Feu la divisió de polinomis  $(a^k - b^k)/(a - b)$ ).
- (c) Compareu els resultats i comenteu-los.
8. Es vol calcular  $f_n(x)$ , on  $f_n(x) = n! \left[ e^x - \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) \right]$ , per a  $x = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- (a) Demostreu que se satisfà la següent llei de recurrència

$$f_{n+1}(x) = (n+1)f_n(x) - x^{n+1},$$

- (b) Calculeu  $f_n(1)$ ,  $n = 1 \div 10$  amb aritmètica de coma flotant amb 5 dígit significatius. És fiable el resultat? Què es pot fer per a calcular  $f_5(1)$ ?
9. Usant un mètode recurrent, calculeu el valor de les integrals

$$I_j = \int_0^1 x^j \sin(\pi x) dx,$$

( $j = 2, 4, \dots, 20$ ). Estudieu l'estabilitat del mètode trobat. **Nota:** en general, direm que un mètode és *estable* si esmorteix els errors fets en les aproximacions. Quan, pel contrari, els amplifica, direm que el mètode és *inestable*.

10. Volem calcular  $a = (7 - 4\sqrt{3})^4$  emprant el valor aproximat 1.732 05 per a  $\sqrt{3}$ . Prenem dues fórmules per a calcular  $a$ :

(i)  $\frac{1}{(7 + 4\sqrt{3})^4}$ ,      (ii)  $\frac{1}{18\,817 + 10\,864\sqrt{3}}$ .

Quina és la més adequada des del punt de vista numèric (suposant que les operacions es fan sense errors)?

11. Doneu una expressió equivalent per a cadascuna de les fórmules següents que sigui millor des del punt de vista numèric, quan  $\varepsilon$  és molt més petit que  $x$ .

(a)  $\frac{1}{\sqrt{x - \varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

(b)  $\sin(x + \varepsilon) - \sin(x)$ .

(c)  $\cos(x + \varepsilon) - \cos(x)$ .

(d)  $\int_x^{x+\varepsilon} \frac{dt}{t}$ .

12. Amb quina exactitud s'ha de mesurar el radi d'una esfera i amb quants decimals cal donar el nombre  $\pi$  perquè el seu volum es conegui amb un error relatiu menor que el 0.01%? Considereu ambdós efectes per separat.