Càlcul II (240022)
Tema 4. Equacions Diferencials Ordinàries (EDOs) de primer ordre

18 de desembre de 2025

EDOs Lineales

Definició 1

Siguin $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval de $\mathbb{R}$ i $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions contínues definides en I interval de $\mathbb{R}$. L'equació

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

és una equació diferencial ordinària (EDO) de 1^er ordre on a és el coeficient i b el terme independent.

Definició 2

Direm que una funció $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in \mathscr{C}^1(I)$, és una solució (o una solució *particular*) de l'EDO (1), si

$$\phi'(x) + a(x)\phi(x) = b(x)$$

per a cada $x \in I$.

Exemple 1

La funció $y(x) = x^2/3$ és una solució particular, definida a l'interval $I = (0, +\infty)$, de l'EDO lineal de 1^er ordre,

$$y' + y/x = x. \tag{2}$$

Definició 3

Direm que una família de funcions uniparamètrica

$$\mathscr{F} = \{y(\cdot, C) : I \longrightarrow \mathbb{R}, C \in \mathscr{A} \subseteq \mathbb{R}\},$$

$Y(\cdot, C) \in \mathscr{C}^1(I)$ per a cada $C \in \mathscr{A}$, és la **solució general** de l'EDO (1) si, per a tota solució ϕ_* de (1), existeix $C_* \in \mathscr{A}$ tal que $\phi_* = Y(\cdot, C_*)$.

Exemple 2

La família de funcions

$$\begin{aligned} Y(\cdot, C) : I = (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \in I &\longrightarrow y(x, C) = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3}, \end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$, és la solució general de l'EDO (2).

Remarca 1

Notem que la solució de l'EDO (2) donada a l'exemple 1 correspon al valor $C = 0$ del paràmetre.

Proposició 1 (Existència i unicitat de solució)

Donat el problema de valors inicials (PVI o de Cauchy) definit per l'EDO lineal de 1^{er} ordre (1) i la condició inicial $y(x_0) = y_0$, i.e.,

$$\left.\begin{array}{r} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

amb $x_0 \in \mathring{I}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ fixats, existeix una **única** funció $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) $\varphi \in C^1(I)$,

(ii) $\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x)$ per a tot $x \in I$,

(iii) $\varphi(x_0) = y_0$.

Direm que $\varphi(x)$ és la solució del PVI (3).

Definició 4

L'EDO lineal de 1^{er} ordre,

$$y' + a(x)y = 0, \tag{4}$$

s'anomena *EDO linal homogènia associada a l'EDO lineal de* 1^{er} *ordre* (1).

Remarca 2

Notem que l'EDO homogènia (4) s'obté com un cas particular de l'EDO lineal de primer ordre (1) agafant $b \equiv 0$.

Proposició 2

La solució general de l'EDO lineal homogènia de 1^er^ ordre (4) ve donada per la família de funcions

$$y_h(x, C) = C\mathrm{e}^{A(x)}, \tag{5}$$

$C \in \mathbb{R}$, on

$$\begin{aligned} A : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow A(x) = -\int a(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

és una primitiva *qualsevol* de la funció $-a(x)$. Per tant

$$A'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\int a(x)\mathrm{d}x\right) = -a(x)$$

per a cada $x \in I$. Sovint (5) s'escriu com

$$y_h(x, C) = C \exp\left(-\int a(x)\mathrm{d}x\right). \tag{6}$$

Proposició 3

La solució general de l'EDO lineal de 1^{er} ordre (1) ve donada per la suma

$$y(x,C) = y_h(x,C) + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

de

(a) $y_h(x,C)$, la solució general, (5) ó (6), de l'EDO lineal homogènia (4), associada a l'EDO lineal (1), i

(b) $y_p(x)$, *una* solució particular qualsevol de l'EDO (1)

Remarca 3

De fet,

(i) Fins ara només tenim fórmules explícites, (5) ó (6) que ens donen la solució general, $y_h(x,C)$, de l'EDO lineal homogènia (4) associada l'EDO lineal (1).

(ii) Per trobar una solució particular, $y_p(x)$, de l'EDO (1) i completar així la suma (7) es pot fer servir el *mètode de variació dels paràmetres* (o *mètode de variació de les constants*).

Mètode de variació dels paràmetres (Lagrange)

(O mètode de variació de les constants). Ens dóna un "procediment" per construir solucions particulars de l'EDO lineal de 1^{er} ordre (1), el qual consisteix en buscar solucions de la forma,

$$y_p(x) = h(x)\mathrm{e}^{A(x)}, \tag{8}$$

on $h(x)$ és una funció que fixarem substituint (8) a (1):

$$\begin{aligned} y_p'(x) + a(x)y_p(x) &= h'(x)\mathrm{e}^{A(x)} + A'(x)h(x)\mathrm{e}^{A(x)} + a(x)h(x)\mathrm{e}^{A(x)} \\ &= h'(x)\mathrm{e}^{h(x)} - \cancel{a(x)h(x)\mathrm{e}^{A(x)}} + \cancel{a(x)h(x)\mathrm{e}^{A(x)}} = h'(x)\mathrm{e}^{A(x)} = b(x) \\ &\iff h'(x) = b(x)\mathrm{e}^{-A(x)} \iff h(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

i.e. (8) és solució de (1) sii $h(x)$ és una primitiva de la funció $b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$. Aleshores,

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{A(x)} \int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\mathrm{d}x$$

i, aplicant (7)

$$y(x,C) = y_h(x,C) + y_p(x) = C\mathrm{e}^{A(x)} + \mathrm{e}^{A(x)} \int b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\mathrm{d}x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple (problema 2 de la col·lecció)

2. (EDOs lineals). Resoleu les equacions següents

(a) $(x^2+9)y' + xy = 0$

◁ Solució. És una edo lineal homogènia de 1er ordre, per tant és separable. Integrant s'obté directament la família de solucions: $y(x) = \dfrac{C}{\sqrt{x^2+9}}$. ▷

(b) $y' + 2y = x$.

◁ Solució.

- Solució general de l'EDO homogènia: $y_h(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Solució particular de l'EDO lineal : $y_p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Solució general de l'EDO lineal: $y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. ▷

(c) $2xy' - y = 3x^2$, per $x > 0$

◁ Solució.

- Solució general de l'EDO homogènia: $y_h(x) = C\sqrt{x}$, $x>0$, $C \in \mathbb{R}$.
- Solució particular de l'EDO lineal: $y_p(x) = x^2$

Solució general de l'EDO lineal: $y(x) = C\sqrt{x} + 3x^2$

(d) $y' + y\cos x = \sin x \cos x$. Indicació: integreu per parts.

- Solució general de l'EDO homogènia: $y_h(x) = Ce^{-\sin x}$
- Solució particular de l'EDO lineal: mètode de variació de paràmetres

$y_p(x) = \alpha(x)e^{-\sin x}$:

$$\alpha'(x)e^{-\sin x} \cancel{- \alpha(x)\cos x\, e^{-\sin x}} \cancel{+ \alpha(x)\cos x\, e^{-\sin x}} = \sin x \cos x$$

d'on: $\alpha'(x) = \sin x \cos x\, e^{\sin x}$. Integrant: $\alpha(x) = e^{\sin x}(\sin x - 1)$, i llavors $y_p(x) = \sin$

Solució general de l'EDO lineal: $y(x) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$. ▷

(e) $(x^2+2x-1)y' - (x+1)y = x-1$

◁ Solució.

- Solució general de l'EDO homogènia: $y_h(x) = C|x^2+2x-1|^{\frac{1}{2}}$; $C \in \mathbb{R}$
- Solució particular de l'EDO lineal: $y_p(x) = x$

Solució general de l'EDO lineal $y(x) = C|x^2+2x-1|^{1/2} + x$, $C \in \mathbb{R}$. ▷

(f) $(1-x^2)y' + xy = 1$, per $x \in (-1,1)$. Indicació: feu el canvi $x = \sin u$

◁ Solució.

- Solució general de l'EDO homogènia: $y_h(x) = C_1\sqrt{1-x^2}$, $-1<x<1$, $C \in \mathbb{R}$
- Solució particular de l'EDO lineal: $y_p(x) = x$

Solució: $y(x) = C_1\sqrt{1-x^2} + x$, $x \in (-1,1)$, $C_1 \in \mathbb{R}$. ▷

(g) $y' - \dfrac{ny}{x+1} = e^x(1+x)^n$ amb $n \in \mathbb{N}$.

◁ Solució.

- Solució general de l'EDO homogènia: $y_h(x) = C_1|x+1|^n$, $C \in \mathbb{R}$
- Solució particular de l'EDO lineal: $y_p(x) = \alpha(x)(x+1)^n$ i busquem $\alpha(x)$ derivant i substituint a l'EDO,

$$\alpha'(x)(1+x)^n - n\alpha(x)(x+1)^{n-1} - n\alpha(x)(x+1)^{n-1} = e^x(x+1)^n \Longleftrightarrow \alpha'(x) = e^x,$$

i podem agafar $\alpha(x) = e^x$. Per tant tenim la solució particular és $y_p(x) = e^x(x+1)^n$.
Així, la solució general de l'EDO lineal s'escriu:

$$y(x) = C_1|x+1|^n + e^x(x+1)^n, \quad C_1 \in \mathbb{R}. ▷$$