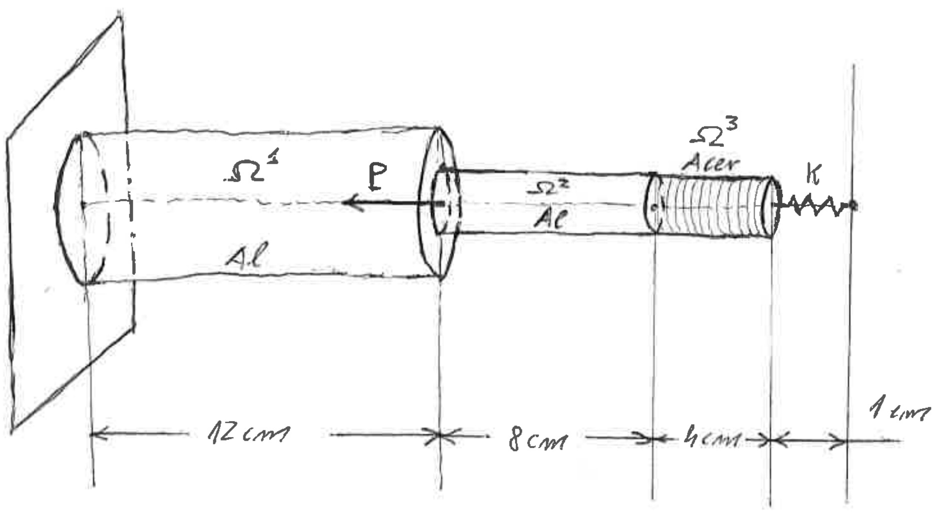
11. Considerem l'estructura consistent en dos cilindres i una molla.

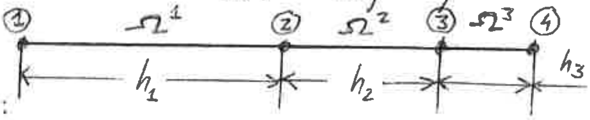


El cilindre de l'esquerra té longitud 12 cm i diàmetre 4 cm. El cilindre de la dreta té longitud 12 cm i diàmetre 2 cm. Els mòduls de Young són $E_a = 10^6\ N/cm^2$ per a l'alumini i $E_s = 3\times 10^6\ N/cm^2$ per a l'acer. A més, sabem que la constant de recuperació de la molla és $K = 10^9\ N/cm$. Suposem que l'extrem esquerre està fixat i que la condició de contorn que correspon a l'extrem de la malla és $EA\frac{du}{dx}+Ku=0$. Suposem que en l'extrem dret del cilindre de l'esquerra hi ha una força de 15 N, tal com es mostra a la figura:

(a) Trobeu les matrius de rigidesa elementals.
(b) Trobeu la matriu de rigidesa global i escriviu el sistema global.
(c) Indiqueu les condicions de contorn.
(d) Trobeu els desplaçaments U_1, U_2, U_3, U_4.

(Indicació: l'equació que modela el desplaçament lineal és $-\frac{d}{dx}\left(E\cdot A\,\frac{du}{dx}\right)=0$).

◁ Solució.



Ω_1:	Ω_2:	Ω_3:
$E_1 = E_a = 10^6\ N/cm^2$.	$E_2 = E_a = 10^6\ N/cm^2$.	$E_3 = E_s = 3\times 10^6\ N/cm^2$.
$A_1 = 4\pi\ cm^2$.	$A_2 = \pi\ cm^2$.	$A_3 = \pi\ cm^2$.
$h_1 = 12\ cm$.	$h_2 = 8\ cm$.	$h_3 = 4\ cm$.

(a) $K^{1,1} = \frac{E_1A_1}{h_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{\pi}{3}10^6\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $K^{2,1} = \frac{E_2A_2}{h_2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{\pi}{8}10^6\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$,

$$K^{3,1} = \frac{E_3A_3}{h_3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{3\pi}{4}10^6\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Òbviament $K^{1,0} = K^{2,0} = K^{3,0} = 0$.

Llavors(*): $K^1 = \frac{\pi}{24}10^6\begin{pmatrix}8 & -8\\ -8 & 8\end{pmatrix}$, $K^2 = \frac{\pi}{24}10^6\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$, $K^3 = \frac{\pi}{24}10^6\begin{pmatrix}18 & -18\\ -18 & 18\end{pmatrix}$

(*) Notem que m.c.m $(4,8,3) = 24$.

(b) Sistema global:

$$\frac{\pi}{24}10^6\cdot\begin{pmatrix} 8 & -8 & & \\ -8 & 11 & -3 & \\ & -3 & 21 & -18 \\ & & -18 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 = Q_1^1 \\ Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1 \\ Q_3 = Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_4 = Q_2^3 \end{pmatrix} \qquad (\&\&)$$

Remarca: la matriu de connectivitat és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i notem que $F_i^k = 0 \ \forall k, \ \forall i$; ja que a l'equació $f(x) \equiv 0$.

(c) Boundary Conditions (B.C.)

$u(x_2^3) = u(x_4) = U_4$

- Essential: $U_1 = 0$.
- Natural: $Q_2 = Q_2^1 + Q_1^2 = -P$, $\quad Q_3 = Q_2^2 + Q_1^3 = 0$, $\quad \underbrace{E_3 A_3 \frac{du}{dx}(x_2^3)}_{= Q_2^3} + k\,u(x_2^3) = 0$, d'on:

$x_2^3 = x_4$

$$Q_3 = Q_2^3 = -kU_4 = -10^9 U_4$$

El sistema (&&) s'escriu doncs com:

$$\frac{\pi}{24}10^6\cdot\begin{pmatrix} 8 & -8 & & \\ -8 & 11 & -3 & \\ & -3 & 21 & -18 \\ & & -18 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ -P \\ 0 \\ -10^9 U_4 \end{pmatrix}$$

, que podem escriure com $\hat{K}\cdot U = \begin{pmatrix} Q_1 \\ -P \\ 0 \\ -10^9 U_4 \end{pmatrix}$,

essent:

$$\hat{K} = \frac{\pi\cdot 10^6}{24}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -8 & & \\ -8 & 11 & -3 & \\ & -3 & 21 & -18 \\ & & -18 & 18 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} 0_{3\times3} & 0_{3\times1} \\ \hline 0_{1\times3} & 10^9 \end{array}\right)$$

(d) Sistema reduït:

$$\hat{K}_r\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{K}_r = \frac{\pi 10^6}{24}\begin{pmatrix} 11 & -3 & \\ -3 & 21 & -18 \\ & -18 & 18 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} 0_{2\times2} & 0_{2\times1} \\ \hline 0_{1\times2} & 10^9 \end{array}\right) \qquad (\&\&\&)$$

Solucionant el sistema reduït s'obté:

$$\boxed{\begin{array}{l} U_1 = 0. \ \text{(de les condicions de contorn essencials)} \\ U_2 = -1.08406\times10^{-5}\ \text{cm.} \\ U_3 = -1.55179\times10^{-6}\ \text{cm.} \\ U_4 = -3.64772\times10^{-9}\ \text{cm.} \end{array}}$$