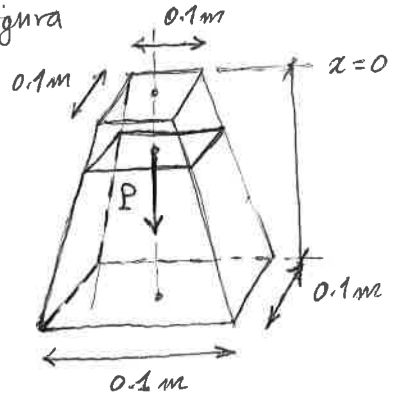
12. Considereu una columna de pi de base rectangular i parets anterior i posterior paral·leles. Preneu l'origen de coordenades $x=0$ en la "tapa" superior de la columna, és a dir, $x=1.2\,m$ correspon a la base, que està fixada a terra. Suposeu que a $x=0.4\,m$ hi ha una placa de ferro que exerceix una força, deguda al seu pes, que és $P=4.65\,N$ (es menysprea el seu gruix). Vegeu la figura



El mòdul de Young del pi és $E=9\cdot 10^9\,N/m^2$. L'àrea de la secció transversal corresponent al punt x és $A(x)=(1+x/2)A_0\ (m^2)$, on A_0 és l'àrea a $x=0$. La força $f(x)$ deguda al pes de la propi de la columna corresponent al punt x és $f(x)=53.9(1+x/2)\ N/m$. Recordeu que l'equació 1-dimensional que modela aquest fenomen és: $-\frac{d}{dx}\left(E\cdot A(x)\frac{du}{dx}\right)=f(x)$, essent $u=u(x)$ el desplaçament del punt x.

(a) Si es vol resoldre el problema usant elements finits lineals iguals, quin és el nombre mínim d'elements necessaris? Per què?

(b) Doneu les matrius de rigidesa elementals (o locals) per a la malla que heu decidit a l'apartat (a).

(c) Suposeu que el vector de càrregues globals és $F=(11.50, 25.87, F_3, 16.53)$. Calculeu F_3.

(d) Indiqueu les condicions de contorn i/o càrregues que cal imposar i trobeu el sistema global i el reduït després d'aplicar els termes de contorn.

(e) Calculeu una aproximació del desplaçament del punt $x=0.6\,m$.

Solució.

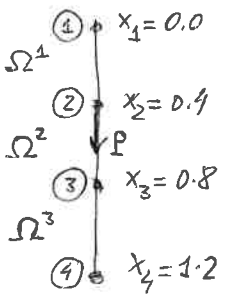


Figura 1

(a) 3 elements de longitud $h=0.4\,m$ perquè així la càrrega puntual P està aplicada al 2^{on} node (global) del mallat i $3\times h=1.2\,m=L$.

(b) Fent servir els resultats del problema 1 i les fórmules per a la matriu de rigidesa quan els coeficients són reals:

$$K^K=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\frac{EA_0/2}{h}\left(\frac{x_K+x_{K+1}}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\left[1+\frac{1}{4}(x_K+x_{K+1})\right]\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$K=1,\ \Omega^1:\ K^1=\frac{EA_0}{h}\left(1+\frac{1}{4}(0+0.4)\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.1&-1.1\\-1.1&1.1\end{pmatrix},$$

$$K=2,\ \Omega^2:\ K^2=\frac{EA_0}{h}\left(1+\frac{1}{4}(0.4+0.8)\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.3&-1.3\\-1.3&1.3\end{pmatrix},$$

$$K=3,\ \Omega^3:\ K^3=\frac{EA_0}{h}\left(1+\frac{1}{4}(0.8+1.2)\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.5&-1.5\\-1.5&1.5\end{pmatrix}$$

(c) $F_1=F_1^1=11.50,\ F_2=F_2^1+F_1^2=25.87,\ F_3=F_2^2+F_1^3,\ F_4=F_2^3=16.53$

Sabem que:

$$\psi_1^K(x)+\psi_2^K(x)=\frac{x-x_{K+1}}{x_K-x_{K+1}}+\frac{x-x_K}{x_{K+1}-x_K}=\frac{1}{h_K}\left(-x+x_{K+1}+x-x_K\right)=\frac{x_{K+1}-x_K}{h_K}=1.$$

$h_K=x_{K+1}-x_K \qquad K=1,2,3.$

Per tant:

$$F_1^K + F_2^K = \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)\,\psi_1^K(x)\,dx + \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)\,\psi_2^K(x)\,dx = \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)\cdot\left(\psi_1^K(x)+\psi_2^K(x)\right)dx = \int_{x_K}^{x_{K+1}} f(x)\,dx, \quad K=1,2,3$$

i aleshores:

$$F_1+F_2+F_3+F_4 = F_1^1+F_2^1+F_1^2+F_2^2+F_1^3+F_2^3$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\,dx = \int_{x_1=0}^{x_4=1.2} f(x)\,dx = 53.9\int_0^{1.2}\left(1+\tfrac{x}{2}\right)dx$$

$$= 53.9\left(x+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1.2} = 53.9\left(1.2+\frac{1.2^2}{4}\right) = 53.9\,(1.2+0.36) = 53.9\times 1.56,$$

$$\text{d'on: } F_3 = 53.9\int_0^{1.2}\left(1+\tfrac{x}{2}\right)dx - F_1 - F_2 - F_3 = 53.9\times1.56 - 11.50 - 25.87 - 16.53$$

$$= 53.9\times1.56 - 53.9 = 53.9\,(1.56-1) = 53.9\times0.56 = \boxed{30.184\ N}$$

$$\begin{array}{r} 11.50 \\ 25.87 \\ 16.53 \\ \hline 53.90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53.9 \\ 0.56 \\ \hline 3234 \\ 2695\ \ \\ \hline 30.184 \end{array}$$

(d) B.C.

- Essencials: $U_4=0$ (la columna està fixada a terra)
- Naturals: $Q_1=Q_1^1=0$, $Q_2=Q_2^1+Q_1^2=P=4.65\ N$, $Q_3=Q_2^2+Q_1^3=0$

Sistema global: notem que la matriu de connectivitat és $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$; per tant:

$$\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.1 & -1.1 & & \\ -1.1 & 2.4 & -1.3 & \\ & -1.3 & 2.8 & -1.5 \\ & & -1.5 & 1.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1=Q_1^1=0\\ Q_2=Q_2^1+Q_1^2=P\\ Q_3=Q_2^2+Q_1^3=0\\ Q_4=Q_2^3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_1=F_1^1=11.50\\ F_2=F_2^1+F_1^2=25.87\\ F_3=F_2^2+F_1^3=30.184\\ F_4=F_2^3=16.53\end{pmatrix}$$

$$\frac{EA_0}{h} = \frac{9\times10^9\times10^{-2}}{0.4} = \frac{9\times10^8}{4} = \boxed{2.25\times10^8}$$

Sistema reduït: $2.25\times10^8\times\begin{pmatrix}1.1 & -1.1 & \\ -1.1 & 2.4 & -1.3\\ & -1.3 & 2.8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4.65\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11.50\\25.87\\30.184\end{pmatrix}$

Solució: $U_1 = 4.04061\times10^{-7}$ m,
$U_2 = 3.57596\times10^{-7}$ m,
$U_3 = 2.13938\times10^{-7}$ m,
$U_4 = 0$ m (de les condicions de contorn essencials)

Finalment, calculem l'aproximació del desplaçament del punt $x=0.6$ m. $(x=0.6\in\Omega^2)$:

$$u(0.6)\simeq \hat{U} = U_1^2\psi_1^2(0.6)+U_2^2\psi_2^2(0.6) = U_2\psi_1^2(0.6)+U_3\psi_2^2(0.6)$$

$$= U_2\,\frac{0.6-0.8}{0.4-0.8} + U_3\,\frac{0.6-0.4}{0.8-0.4} = \frac{1}{2}(U_2+U_3) = \frac{5.71534}{2}\times10^{-7} = \boxed{2.85767\times10^{-7}\ m}$$