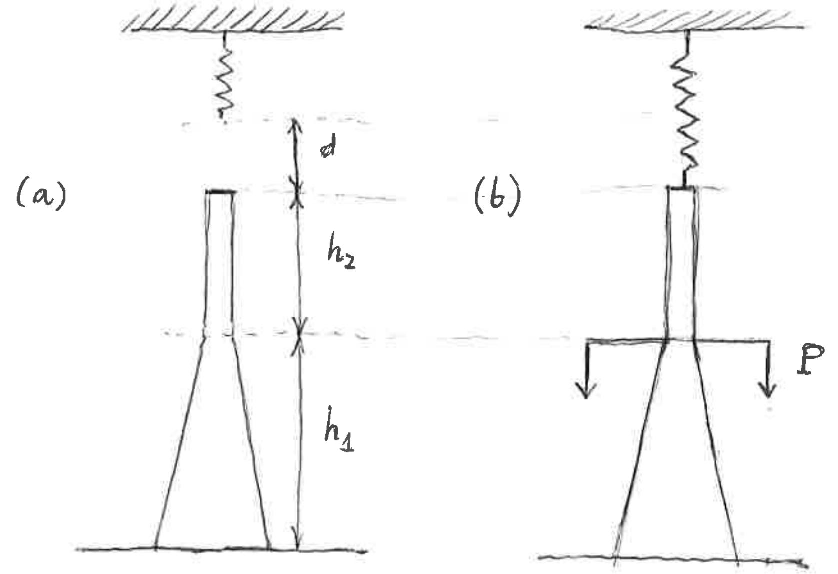
COL·LECCIÓ DE PROBLEMES. PROBLEMA 10.

10. Considerem la peça que es mostra a la figura (a) de l'esquerra, feta d'un material amb mòdul d'elasticitat $E=20\ N/mm^2$. Està encastada al terra i formada per dues parts: la inferior, de 20 mm de longitud amb secció que varia linealment de $4\ mm^2$ a $2\ mm^2$; i la superior, de 10 mm de longitud i secció constant $2\ mm^2$. Damunt seu, i a distància d (mm), hi ha una molla de constant $k=1\ N/mm$ fixada pel seu extrem superior.



La peça es deforma mitjançant les forces que s'hi apliquen quan enganxem la molla a la part superior i carreguem amb 2P N el punt on coincideixen les diferents parts (figura (b) de la dreta). Si suposem que discretitzem la peça amb dos elements finits lineals 1-dimensionals: Ω^1 per a la part inferior i Ω^2 per a la part de secció constant superior, i numerem els nodes de manera consecutiva des de la base inferior (on es pren l'origen $x=0$), es demana,

a) Les matrius de rigidesa elementals associades a cada element.
b) El sistema acoplat $[K]U=F+Q$.
c) La relació que hi ha d'haver entre P i d a fi que el desplaçament del node 2 sigui el doble que el del node 3.

(Nota: La força produïda per una molla és $-ke$ on e és l'elongació a què està sotmesa.)

◁ Solució: $E=20\ N/mm^2$

Ω^1: $h_1=20\ mm$.
$A_1(x)=4-\frac{x}{10}\ (mm^2)$
$E_1\equiv E\ (\text{ctnt})=20\ N/mm^2$

Ω^2: $h_2=10\ mm$.
$A_2=2\ mm^2$
$E_2\equiv E\ (\text{ctnt})=20\ N/mm^2$

(Veure figura 1)

Equació de l'elasticitat:

$$-\frac{d}{du}\left(E(x)A(x)\frac{du}{dx}\right)=f(x)$$

Equació model:

$$-\frac{d}{dx}\left(a_1(x)\frac{du}{dx}\right)+a_0(x)u=f(x)$$

$a_1(x)=E(x)\cdot A(x)=E\cdot A(x)$

$a_0(x)\equiv 0$

A més, en aquest cas $f(x)\equiv 0$ (no tenim en compta el pes del pilar).

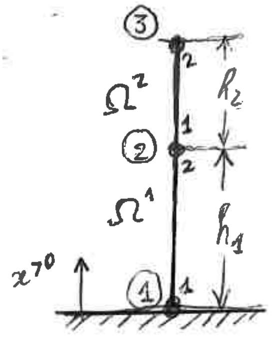


Figura 1

(a) Per a la matriu de rigidesa de Ω^1, $K^1 = K^{1,1}$ (òbviament $K^{1,0}=0$): podem fer servir el resultat del problema 1 i la fórmula per les matrius de rigidesa quan els coeficients són constants tal com les tenim als apunts de teoria. Així, per a $a_1(x) = \alpha x+\beta$ tindrem:

$$K^1 = \frac{\alpha}{h_1}\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \frac{\beta}{h_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

On: $x_1 = 0,\ x_2 = 20,\ h_1 = x_2 - x_1 = 20-0 = 20$:

$a_1^1(x) = E_1 A_1(x) = 20\left(4-\frac{x}{10}\right) = 80-2x$. Per tant $\alpha = -2, \beta = 80$

D'on:

$$K^1 = -\frac{2}{20}\left(\frac{0+20}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \frac{80}{20}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$$

Per $K^2 = K^{2,1}$ ($K^{2,2}=0$) utilitzem la fórmula per a les matrius de rigidesa quan els coeficients són constants: $a_1^2(x) = E_2 A_2 = 20\cdot 2 = 40$, $h_2 = x_3 - x_2 = 30-20 = 10$

$$K^2 = \frac{E_2\cdot A_2}{h_2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{40}{10}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

(b) La matriu de connectivitat és $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Aleshores el sistema acoplat resulta:

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & \\ -3 & 7 & -4\\ & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1 = Q_1^1\\ Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1\\ Q_3 = Q_2^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_1 = F_1^1\\ F_2 = F_2^1 + F_1^2\\ F_3 = F_2^2\end{pmatrix}$$

En aquest cas (com ja hem dit, no tenim en compte el pes de l'estructura), llavors $f(x)\equiv 0$, i $F_i^K = \int_{x_1^K}^{x_N^K} f(x)\,\psi_i^K(x)\,dx \underset{f(x)\equiv 0}{=} 0\ \forall K, \forall i.$

(c) Boundary conditions

- Essential B.C. $U_1 = 0$ (el pilar està encastat al terra).
- Natural B.C. $Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1 = -2P$, $Q_3 = Q_2^2 = k(d-U_3) \overset{(*)}{=} d - U_3$

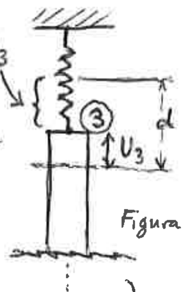


Figura 2

Sistema reduït: $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_2\\ U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2P\\ d-U_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}7U_2 - 4U_3 &= -2P\\ -4U_2 + 4U_3 &= d - U_3 \Leftrightarrow -4U_2 + 5U_3 = d\end{aligned}\right\}(\&)$

Si volem que el desplaçament del node 2 sigui el doble que el del node 3, imposem $U_2 = 2U_3$ a (&)

$$\left.\begin{aligned}10U_3 = -2P &\Leftrightarrow 5U_3 = -P\\ -8U_3 + 5U_3 = d &\Leftrightarrow 3U_3 = -d\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{P}{d} = \frac{5}{3};$$

i la relació buscada resulta: $\boxed{P = \frac{5}{3}d}$. ▷

(*) Veure figura 2, on es suposa $U_3 > 0$.