problema_3.pdf

3. Suposem que un problema, que volem estudiar pel mètode dels elements finits, té per equació,

$$-\frac{d}{dx}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\frac{dy}{dx}\right)+u=x\,,\quad x\in(-1,1).$$

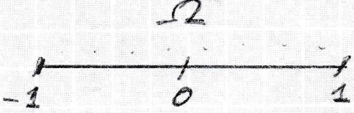
Si considerem un únic element finit quadràtic, Ω^1, definit a $[-1,1]$ es demana:

(a) Les funcions de forma locals, ψ_i^1, associades a l'element.

(b) Els valors $K_{33}^{1,1}$ i $K_{33}^{1,0}$.

(c) El valor de F_2^1.

◁ Solució.



(a) $$\psi_1^1(x)=\frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{1}{2}x(x-1)=\frac{1}{2}(x^2-x),\qquad x_1=x_1^1=-1\,,\ x_2=x_2^1=0,\ x_3=x_3^1=1.$$

$$\psi_2^1(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=1-x^2,$$

$$\psi_3^1(x)=\frac{x(x+1)}{(1-0)(1+1)}=\frac{1}{2}x(x+1)=\frac{1}{2}(x^2+x),$$

(b) $$K_{33}^{1,1}=\int_{x_1^1}^{x_3^1}a_1(x)\,\frac{d\psi_1^1}{dx}(x)\cdot\frac{d\psi_1^1}{dx}(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^4dx=\frac{1}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^5\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)=\boxed{\frac{61}{40}}$$

$K_{33}^{1,0}$: $a_0(x)\equiv 1$ constant, $h_1=2$, tenim: $K^{1,0}=\frac{1\cdot 2}{30}\begin{pmatrix}4&2&-1\\2&16&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$.
[Vegeu el problema 4 ó la pàgina 57 de T2-MN-FEM2D.pdf], per tant

$$\boxed{K_{33}^{1,0}=\frac{4}{15}}.$$

(c) $$F_2^1=\int_{-1}^{1}f(x)\,\psi_2^1(x)\,dx=\int_{-1}^{1}x\left(1-x^2\right)dx=\boxed{0}$$ (funció senar integrada a $[-1,1]$). ▷

Notebloc