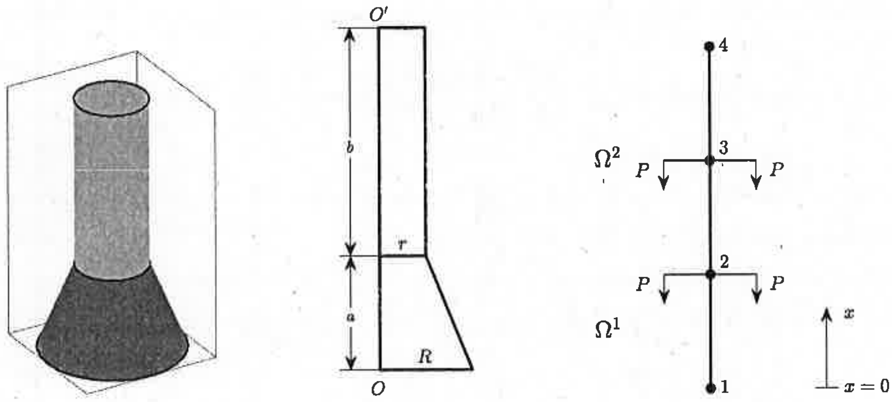
Name and surnames:

1. We consider a pillar made of two pieces (see Fig. (a)). In some normalized units, the upper part (shaded in light grey) is a cylinder of length $b = 4$ and radius $r = 1$, and the lower part (in dark grey) is a truncated cone of height $a = 1$ whose area is given as a function of the height x by $A(x) = \pi\,(x-2)^2$, with $0 \le x \le 1$. The pillar is generated by revolving the half-section shown on Fig. (b) about the edge $\overline{OO'}$.



(a) (b) (c)

At the junction of the two pieces, and at the middle point of the cylinder (nodes 2 and 3 on Fig. (c)), it is applied a force downwards of $2P$, with $P = 2$. Furthermore, the pillar is fixed at its top and at its basis (nodes 1 and 4 on Fig. (c)).

We study this problem as a FEM1D problem using a mesh of two elements (see Fig.(c)). A **linear** element, Ω^1, for the truncated cone, and a **quadratic** element, Ω^2, for the cylinder. The model for 1D elasticity problems is

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = 0,$$

where the Young modulus is taken $E = \dfrac{12}{\pi}$, in order to simplify the calculations.

(i) Give the two shape functions $\psi_1^1(x)$, $\psi_2^1(x)$ of element Ω^1.

(ii) Write the local stiffness matrices for both Ω^1 and Ω^2.

(iii) Write the assembled system.

(iv) Set up boundary conditions and compute the displacement of nodes 2 and 3.

(v) Finally, compute the reaction forces (Q_1 and Q_4).

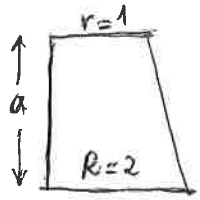
Results:	
$\psi_1^1(x)$ and $\psi_2^1(x)$:	$\psi_1^1(x) = 1 - x$, $\psi_2^1(x) = x$.
$[K^1]$ and $[K^2]$:	$[K^1] = 28\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $[K^2] = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.
Assembled system:	$\begin{pmatrix} 28 & -28 & 0 & 0 \\ -28 & 35 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{pmatrix}$
Displacement of nodes 2 and 3:	$\begin{pmatrix} 35 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Sol.: $\left\{ \begin{matrix} U_2 = -\dfrac{6}{31} \\ U_3 = -\dfrac{43}{124} \end{matrix} \right\}$. $U_2 = -0'193548$ $U_3 = -0'346774$
Reaction forces (Q's):	$Q_1 = \dfrac{168}{31}$, $Q_4 = \dfrac{80}{31}$. $Q_1 = 5'419\,355$, $Q_4 = 2'580\,645$

(Hint. U_2 is one of these numbers: $-\frac{6}{11}, -\frac{6}{13}, -\frac{6}{17}, -\frac{6}{19}, -\frac{6}{23}, -\frac{6}{29}, -\frac{6}{31}, -\frac{6}{37}, -\frac{6}{42}, -\frac{6}{43}$) (2 points)

Problema 1

$b=4,\ r=1,\ R=2,\ E=\frac{\pi}{12}.$ (I) $a=1$ (II) $a=2$

S.



$$r(x) = R - \frac{R-r}{a}x \rightarrow A(x) = \pi\left(R-\frac{R-r}{a}x\right)^2,\quad 0\le x\le a$$

(i) $\psi_1^1(x) = 1-\frac{x}{a},\ \psi_2^1(x) = \frac{x}{a}$ (I): $\psi_1^1(x) = 1-x,\ \psi_2^1(x) = x.$ (II): $\psi_1^1(x) = 1-\frac{x}{2},\ \psi_2^1(x) = \frac{x}{2}.$

(ii) 

$$K_{ij}^k = \int_{x_A^k}^{x_B^k} EA(x)\,\frac{d\psi_i^k}{dx}(x)\cdot\frac{d\psi_j^k}{dx}(x)\,dx :$$

$$K_{11}^1 = \frac{E\pi}{a^2}\int_0^a\left(R-\frac{R-r}{a}x\right)^2dx = \frac{E\pi}{a^2}\ \frac{-a}{R-r}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(R-\frac{R-r}{a}x\right)^3\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{E\pi}{3a}\,\frac{R^3-r^3}{R-r} = \frac{E\pi}{3a}\left(r^2+rR+R^2\right)$$

$$\underset{E=\frac{12}{\pi},\ r=1,\ R=2}{=\ \ldots\ =} \frac{28}{a}.$$ Hence: $K^1 = \frac{28}{a}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. On the other hand: $K^2 = \frac{E\pi r^2}{3b}\begin{pmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{pmatrix} \underset{b=4,\ r=1,\ E=\frac{12}{\pi}}{=} \begin{pmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{pmatrix}$

(I): $K^1 = 28\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\ K^2 = \begin{pmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{pmatrix}$ (II): $K^1 = 14\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix},\ K^2 = \begin{pmatrix}7&-8&1\\-8&16&-8\\1&-8&7\end{pmatrix}$

(iii) (I): $\begin{pmatrix}28&-28&0&0\\-28&35&-8&1\\0&-8&16&-8\\0&1&-8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{pmatrix}$, (II): $\begin{pmatrix}14&-14&0&0\\-14&14&-8&1\\0&-8&16&-8\\0&1&-8&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{pmatrix}$

(iv) (I): $\begin{pmatrix}35&-8\\-8&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_2\\U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2P=-4\\-2P=-4\end{pmatrix}$ $\Delta = 35\cdot16-64 = 560-64 = 496,$

$\Delta_{U_2} = \begin{vmatrix}-4&-8\\-4&16\end{vmatrix} = -64-32 = -96,\ \Delta_{U_3} = \begin{vmatrix}35&-4\\-8&-4\end{vmatrix} = -140-32 = -172$

$U_2 = -\frac{96}{496} = \boxed{-\frac{6}{31}},\ U_3 = -\frac{172}{496} = \boxed{-\frac{43}{124}},$

(II): $\begin{pmatrix}21&-8\\-8&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_2\\U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$, $\Delta = 21\cdot16-64 = 336-64 = 272.$

$\Delta_{U_2} = \begin{vmatrix}-4&-8\\-4&16\end{vmatrix} = -64-32 = -96,\ \Delta_{U_3} = \begin{vmatrix}21&-4\\-8&-4\end{vmatrix} = -84-32 = -116$

$U_2 = -\frac{96}{272} = -\frac{6}{17},\ U_3 = -\frac{116}{272} = -\frac{29}{68}.$

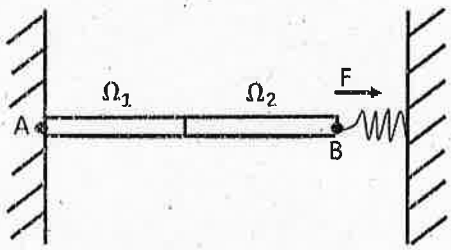
(V) (I): $Q_1 = -28\,U_2 = -28\cdot\left(-\frac{6}{31}\right) = \boxed{\frac{168}{31}},\ Q_4 = U_2-8U_3 = -\frac{6}{31}+\frac{86}{31} = \boxed{\frac{80}{31}}$

(II): $Q_1 = -14\cdot U_2 = -14\cdot\left(-\frac{6}{17}\right) = -\frac{84}{17},\ Q_4 = U_2-8U_3 = -\frac{6}{17}+\frac{58}{17} = \frac{52}{17}.$

MÈTODES NUMÈRICS: Ex-Parcial **(a) Q1-2018-19**

Name and surnames:

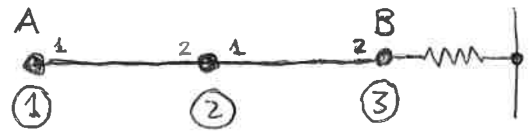
(1) We consider a piece of cross sectional area 3 cm^2 and length 20 cm clamped at x=0 (point A) and with a spring attached (initially at rest) at the other end, $x = 20$ cm (point B), as it is shown in the figure. The Young modulus of the material of the piece is given by $E(x) = 6x+10$ N/cm^2 and the constant of the spring is $k_s = 12$ N/cm.



Assuming that we apply a longitudinal force $F = 12$ N on point B, in the direction of increasing x, and using a mesh of two linear elements (each one of length 10 cm) to discretize the piece, compute:

$\psi_1^2(x) =$	$2 - \dfrac{x}{10}$
$[K^1]$ and $[K^2]$:	$[K^1] = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$, $[K^2] = \begin{pmatrix} 30 & -30 \\ -30 & 30 \end{pmatrix}$
Assembled system:	$\begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 \\ -12 & 42 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$
Boundary conditions:	$U_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = F - k_s U_3 = 12 - 12U_3$
Displacement of nodes 2 and 3:	$U_2 = 5/12$ cm, $U_3 = 7/12$ cm

◁ Solució.



$x_1^1 = x_1 = 0$ $\quad x_2^1 = x_1^2 = x_2 = 10$ (cm) $\quad x_2^2 = x_3 = 20$ (cm)

$A = 3\,cm^2$

$E(x) = 6x + 10\,(N/cm^2)$

$K_s = 12\ N/cm$

$F = 12$

$h_k := x_{k+1} - x_k\ ,\ k = 1,2$

Funcions de forma:

$$\psi_1^k(x) = \frac{x - x_2^k}{x_1^k - x_2^k} = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} = -\frac{1}{h_k}(x - x_{k+1})$$

$$\psi_2^k(x) = \frac{x - x_1^k}{x_2^k - x_1^k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{h_k}(x - x_k)$$

Aleshores: $\frac{d\psi_1^k}{dx}(x) = -1/h_k$, $\quad \frac{d\psi_2^k(x)}{dx} = 1/h_k$, $\quad \frac{d\psi_i^k}{dx} = (-1)^i \frac{1}{h_k},\ i = 1,2.$

(i) Llavors, per a $k=2$: $\psi_1^2(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} = -\frac{1}{10}(x - 20) = 2 - x/10$

(ii) Per a calcular $[K^1]$ i $[K^2]$ podríem fer servir els resultats del problema 1 (com vam fer a la resolució del problema 10,(*) per exemple). Aquí però farem aquests càlculs explícitament:

$$K_{ij}^{k,1} = \int_{x_1^k}^{x_N^k} a_1(x) \frac{d\psi_i^k}{dx} \cdot \frac{d\psi_j^k}{dx}\, dx \underset{\substack{N=2 \\ x_1^k = x_k \\ x_2^k = x_{k+1} \\ a_1(x) = E(x)\cdot A}}{=} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (18x + 30) \underbrace{\frac{d\psi_i^k}{dx}}_{=\frac{(-1)^i}{h_k}} \cdot \underbrace{\frac{d\psi_j^k}{dx}}_{=\frac{(-1)^j}{h_k}}\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}}{h_k^2} \cdot \int_{x_k}^{x_{k+1}} (18x + 30)\, dx = \frac{(-1)^{i+j}}{h_k^2} (9x^2 + 30x) \Big|_{x = x_k}^{x = x_{k+1}}$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}}{h_k^2} \cdot \left[9(x_{k+1}^2 - x_k^2) + 30(x_{k+1} - x_k) \right] = \frac{(-1)^{i+j}}{h_k^2} \left[9(x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} + x_k) + 30(x_{k+1} - x_k) \right]$$

$$= \frac{(-1)^{i+j}}{h_k} \left[9(x_{k+1} + x_k) + 30 \right].$$

(*) i la fórmula per a $K^{1,1}$ quan $a_1(x) \equiv ctnt$, que tenim als pdf's de teoria.

* per a $k=1$:

$$K_{ij}^{1,1} = \frac{(-1)^{i+j}}{10}\left[9(10+0)+30\right] = (-1)^{i+j}12, \; (i,j=1,2); \text{ d'on: } K^{1,1} = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}.$$

$h_1 = x_2 - x_1 = 10$ $(x_2=10, x_1=0)$.

* per a $k=2$:

$$K_{ij}^{2,1} = \frac{(-1)^{i+j}}{10}\left[9(20+10)+30\right] = (-1)^{i+j}30, \; (i,j=1,2); \text{ d'on: } K^{2,1} = \begin{pmatrix} 30 & -30 \\ -30 & 30 \end{pmatrix}.$$

$h_2 = x_3 - x_2 = 10$ $(x_3=20, x_1=10)$.

D'altra banda: $K^{1,0}=0$, $K^{2,0}=0$. Notem que l'equació de l'elasticitat és $-\frac{d}{dx}\left(E(x)A(x)\frac{du}{dx}\right)=f(x)$ i l'equació 'model' és $-\frac{d}{dx}\left(a_1(x)\frac{du}{dx}\right)+a_0(x)u=f(x)$. Comparant: $a_1(x)=E(x)A(x)$, $a_0(x)\equiv 0$. Per tant, $K_{ij}^{k,0} = \int_{x_1^k}^{x_N^k} a_0(x)\,\psi_i^k(x)\,\psi_j^k(x)\,dx = 0 \;\forall i,j, \forall k$. En aquest cas, a més, $f(x)\equiv 0$. Aleshores, també: $F_i^k = \int_{x_1^k}^{x_N^k} f(x)\,\psi_i^k(x)\,dx = 0 \;\forall i, \forall k$.

D'aquesta manera: $K^1 = K^{1,1}+K^{1,0} = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$, $K^2 = K^{2,1}+K^{2,0} = \begin{pmatrix} 30 & -30 \\ -30 & 30 \end{pmatrix}$.

(iii) La matriu de connectivitat és, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, amb la qual cosa, acoplant les matrius de rigidesa locals K^1 i K^2 s'obté, per a la matriu de rigidesa global, K:

$$K = \begin{pmatrix} 12 & -12 & \\ -12 & 42 & -30 \\ & -30 & 30 \end{pmatrix}, \text{ i per al sistema acoplat: } \begin{pmatrix} 12 & -12 & \\ -12 & 42 & -30 \\ & -30 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 = Q_1^1 \\ Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1 \\ Q_3 = Q_2^2 \end{pmatrix}$$

(iv) Boundary conditions (B.C.)
- Essential (sobre les variables primàries, les U's): $U_1 = 0$
- Natural (" " " secundàries, les Q's): $Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1 = 0$, $Q_3 = Q_2^2 = F - K_s U_3$

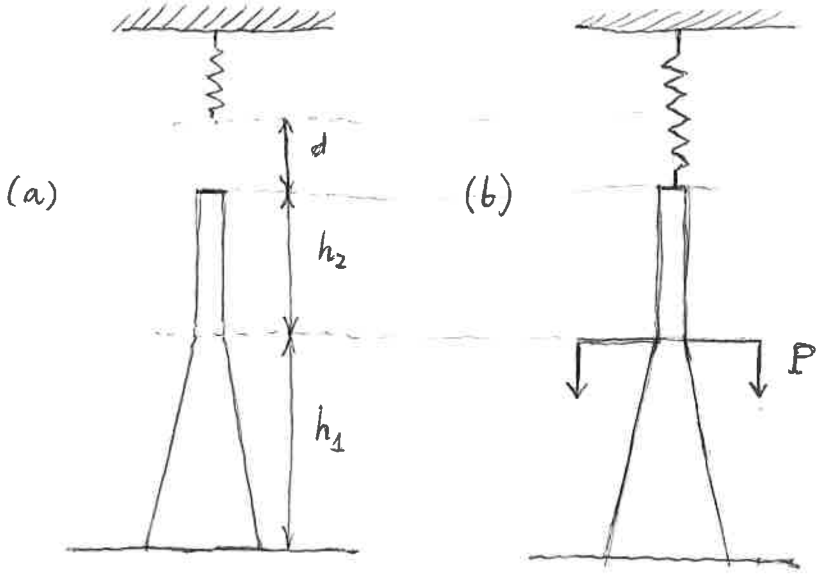
Remarca. Notem que —a diferència del problema 10— aquí la molla està 'initially at rest' (inicialment relaxada). Per tant, la força de reacció de la molla estarà dirigida cap a l'esquerra si $U_3>0$, o cap a la dreta si $U_3<0$. Aleshores, la força de recuperació de la molla actuant sobre el node (global) 3 s'escriurà com: $F_R = -KU_3$. Així, la força puntual total que actua sobre el node global 3 serà $Q_3 = F - K_s U_3$.

(v) Sistema reduït: $\begin{pmatrix} 42 & -30 \\ -30 & 30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12-12U_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 42U_2 - 30U_3 = 0 \\ -30U_2 + 30U_3 = 12 - 12U_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 7U_2 - 5U_3 = 0 \\ -5U_2 + 7U_3 = 2 \end{matrix}$

solució: $U_3 = \frac{7}{5}U_2$, $-5U_2 + \frac{49}{5}U_2 = \frac{24}{5}U_2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{U_2 = \frac{5}{12}}$, $\boxed{U_3 = \frac{7}{5}\cdot U_2 = \frac{7}{5}\cdot\frac{5}{12} = \frac{7}{12}}$. ▷

COL·LECCIÓ DE PROBLEMES. PROBLEMA 10.

10. Considerem la peça que es mostra a la figura (a) de l'esquerra, feta d'un material amb mòdul d'elasticitat $E=20\ N/mm^2$. Està encastada al terra i formada per dues parts: la inferior, de 20 mm de longitud amb secció que varia linealment de $4\ mm^2$ a $2\ mm^2$, i la superior, de 10 mm de longitud i secció constant $2\ mm^2$. Damunt seu, i a distància d (mm), hi ha una molla de constant $K=1\ N/mm$ fixada pel seu extrem superior.



La peça es deforma mitjançant les forces que s'hi apliquen quan enganxem la molla a la part superior i carreguem amb 2P N el punt on coincideixen les diferents parts (figura (b) de la dreta). Si suposem que discretitzem la peça amb dos elements finits lineals 1-dimensionals: Ω^1 per a la part inferior i Ω^2 per a la part de secció constant superior, i numerem els nodes de manera consecutiva des de la base inferior (on es pren l'origen $X=0$), es demana,

a) Les matrius de rigidesa elementals associades a cada element.

b) El sistema acoplat $[K]U=F+Q$.

c) La relació que hi ha d'haver entre P i d a fi que el desplaçament del node 2 sigui el doble que el del node 3.

(Nota: La força produïda per una molla és $-Ke$ on e és l'elongació a què està sotmesa.)

Solució: $E=20\ N/mm^2$

Ω^1: $h_1=20\ mm$.

$A_1(x)=4-\frac{x}{10}\ (mm^2)$

$E_1 \equiv E\ (ctnt)=20\ N/mm^2$

Ω^2: $h_2=10\ mm$.

$A_2=2\ mm^2$

$E_2 \equiv E\ (ctnt)=20\ N/mm^2$

(Veure figura 1)

Equació de l'elasticitat:

$$-\frac{d}{du}\left(E(x)A(x)\frac{du}{dx}\right)=f(x)$$

Equació model:

$$-\frac{d}{dx}\left(a_1(x)\frac{du}{dx}\right)+a_0(x)u=f(x)$$

$a_1(x)=E(x)\cdot A(x)=E\cdot A(x)$

$a_0(x)\equiv 0$

A més, en aquest cas $f(x)\equiv 0$ (no tenim en compta el pes del pilar).

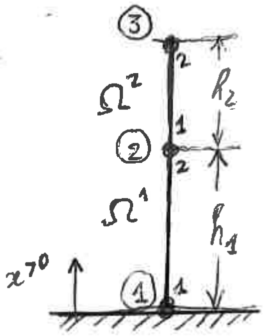


Figura 1

(a) Per a la matriu de rigidesa de Ω^1, $K^1 = K^{1,1}$ (òbviament $K^{1,0}=0$): podem fer servir el resultat del problema 1 i la fórmula per les matrius de rigidesa quan els coeficients són constants tal com les tenim als apunts de teoria. Així, per a $a_1(x) = \alpha x + \beta$ tindrem:

$$K^1 = \frac{\alpha}{h_1}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \frac{\beta}{h_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

On: $x_1 = 0$, $x_2 = 20$, $h_1 = x_2 - x_1 = 20 - 0 = 20$:

$a_1^1(x) = E_1 A_1(x) = 20\left(4 - \frac{x}{10}\right) = 80 - 2x$. Per tant $\alpha = -2$, $\beta = 80$

D'on:

$$K^1 = -\frac{2}{20}\left(\frac{0+20}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} + \frac{80}{20}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$$

Per $K^2 = K^{2,1}$ ($K^{2,2}=0$) utilitzem la fórmula per a les matrius de rigidesa quan els coeficients són constants: $a_1^2(x) = E_2 A_2 = 20\cdot 2 = 40$, $h_2 = x_3 - x_2 = 30 - 20 = 10$

$$K^2 = \frac{E_2\cdot A_2}{h_2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{40}{10}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

(b) La matriu de connectivitat és $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Aleshores el sistema acoplat resulta:

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & \\ -3 & 7 & -4\\ & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1 = Q_1^1\\ Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1\\ Q_3 = Q_2^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_1 = F_1^1\\ F_2 = F_2^1 + F_1^2\\ F_3 = F_2^2\end{pmatrix}$$

En aquest cas (com ja hem dit, no tenim en compte el pes de l'estructura), llavors $f(x) \equiv 0$, i $F_i^K = \int_{x_1^K}^{x_N^K} f(x)\,\psi_i^K(x)\,dx \underset{f(x)\equiv 0}{=} 0 \;\forall K, \forall i.$

(c) Boundary conditions

- Essential B.C. $U_1 = 0$ (el pilar està encastat al terra).
- Natural B.C. $Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1 = -2P$, $Q_3 = Q_2^2 = K(d - U_3) \overset{K=1\,N/mm}{=} d - U_3$ (*)

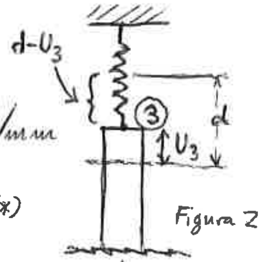


Figura 2

Sistema reduït: $\begin{pmatrix}7 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_2\\ U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2P\\ d-U_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 7U_2 - 4U_3 = -2P\\ -4U_2 + 4U_3 = d - U_3 \Leftrightarrow -4U_2 + 5U_3 = d\end{array}\right\}$ (&)

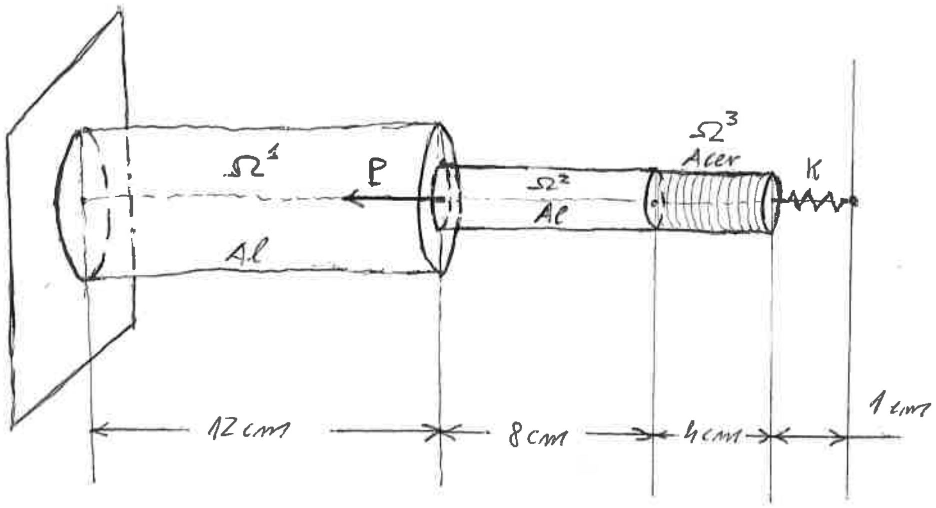
Si volem que el desplaçament del node 2 sigui el doble que el del node 3, imposem $U_2 = 2U_3$ a (&)

$$\left.\begin{array}{l} 10U_3 = -2P \Leftrightarrow 5U_3 = -P\\ -8U_3 + 5U_3 = d \Leftrightarrow 3U_3 = -d\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P}{d} = \frac{5}{3};$$

i la relació buscada resulta: $\boxed{P = \frac{5}{3}d}$. ▷

(*) Veure figura 2, on es suposa $U_3 > 0$.

11. Considerem l'estructura consistent en dos cilindres i una molla.

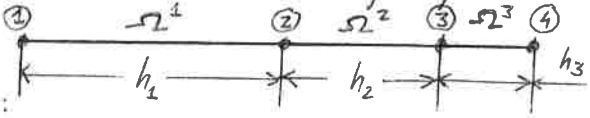


El cilindre de l'esquerra té longitud 12 cm i diàmetre 4 cm. El cilindre de la dreta té longitud 12 cm i diàmetre 2 cm. Els mòduls de Young són $E_a = 10^6\ N/cm^2$ per a l'alumini i $E_s = 3\times10^6\ N/cm^2$ per a l'acer. A més, sabem que la constant de recuperació de la molla és $K = 10^9\ N/cm$. Suposem que l'extrem esquerre està fixat i que la condició de contorn que correspon a l'extrem de **la malla** és $EA\frac{du}{dx} + Ku = 0$. Suposem que en l'extrem dret del cilindre de l'esquerra hi ha una força de 15 N, tal com es mostra a la figura:

(a) Trobeu les matrius de rigidesa elementals.
(b) Trobeu la matriu de rigidesa global i escriviu el sistema global.
(c) Indiqueu les condicions de contorn.
(d) Trobeu els desplaçaments U_1, U_2, U_3, U_4.

(Indicació: l'equació que modela el desplaçament lineal és $-\frac{d}{dx}\left(E\cdot A\,\frac{du}{dx}\right) = 0$).

◁ Solució.



Ω_1:	Ω_2:	Ω_3:
$E_1 = E_a = 10^6\ N/cm^2$.	$E_2 = E_a = 10^6\ N/cm^2$.	$E_3 = E_s = 3\times10^6\ N/cm^2$.
$A_1 = 4\pi\ cm^2$.	$A_2 = \pi\ cm^2$.	$A_3 = \pi\ cm^2$.
$h_1 = 12\ cm$.	$h_2 = 8\ cm$.	$h_3 = 4\ cm$.

(a) $$K^{1,1} = \frac{E_1A_1}{h_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{\pi}{3}10^6\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad K^{2,1} = \frac{E_2A_2}{h_2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{\pi}{8}10^6\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$K^{3,1} = \frac{E_3A_3}{h_3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \frac{3\pi}{4}10^6\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Òbviament $K^{1,0} = K^{2,0} = K^{3,0} = 0$.

Llavors[(&)]: $$K^1 = \frac{\pi}{24}10^6\begin{pmatrix}8 & -8\\ -8 & 8\end{pmatrix},\quad K^2 = \frac{\pi}{24}10^6\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix},\quad K^3 = \frac{\pi}{24}10^6\begin{pmatrix}18 & -18\\ -18 & 18\end{pmatrix}$$

(&) Notem que m.c.m $(4,8,3) = 24$.

(b) Sistema global:

$$\frac{\pi}{24}10^6\cdot\begin{pmatrix} 8 & -8 & & \\ -8 & 11 & -3 & \\ & -3 & 21 & -18 \\ & & -18 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 = Q_1^1 \\ Q_2 = Q_1^2 + Q_2^1 \\ Q_3 = Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_4 = Q_2^3 \end{pmatrix} \qquad (\&\&)$$

Remarca: la matriu de connectivitat és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ i notem que $F_i^k = 0\ \forall k,\ \forall i$; ja que a l'equació $f(x) \equiv 0$.

(c) Boundary Conditions (B.C.)

$u(x_2^3) = u(x_4) = U_4$

- Essential: $U_1 = 0$.
- Natural: $Q_2 = Q_2^1 + Q_1^2 = -P$, $\quad Q_3 = Q_2^2 + Q_1^3 = 0$, $\underbrace{E_3 A_3 \frac{du}{dx}(x_2^3)}_{= Q_2^3} + k\,u(x_2^3) = 0$, d'on:

$$Q_3 = Q_2^3 = -k U_4 = -10^9 U_4$$

El sistema (&&) s'escriu doncs com:

$$\frac{\pi}{24}10^6\cdot\begin{pmatrix} 8 & -8 & & \\ -8 & 11 & -3 & \\ & -3 & 21 & -18 \\ & & -18 & 18 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ -P \\ 0 \\ -10^9 U_4 \end{pmatrix}, \text{ que podem escriure com } \hat{K}\cdot U = \begin{pmatrix} Q_1 \\ -P \\ 0 \\ -10^9 U_4 \end{pmatrix},$$

essent:

$$\hat{K} = \frac{\pi\cdot 10^6}{24}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -8 & & \\ -8 & 11 & -3 & \\ & -3 & 21 & -18 \\ & & -18 & 18 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} O_{3\times 3} & O_{3\times 1} \\ \hline O_{1\times 3} & 10^9 \end{array}\right)$$

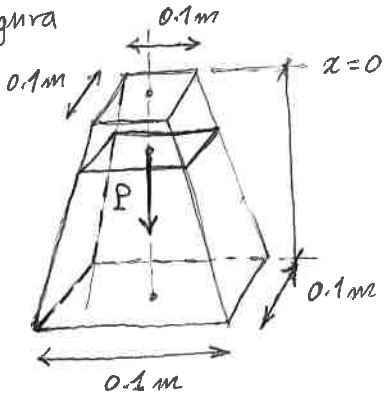
(d) Sistema reduit:

$$\hat{K}_r \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{K}_r = \frac{\pi 10^6}{24}\begin{pmatrix} 11 & -3 & \\ -3 & 21 & -18 \\ & -18 & 18 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|c} O_{2\times 2} & O_{2\times 1} \\ \hline O_{1\times 2} & 10^9 \end{array}\right) \qquad (\&\&\&)$$

Solucionant el sistema reduit s'obté:

$$\boxed{\begin{array}{l} U_1 = 0. \text{ (de les condicions de contorn essencials)} \\ U_2 = -1.08406\times 10^{-5} \text{ cm.} \\ U_3 = -1.55179\times 10^{-6} \text{ cm.} \\ U_4 = -3.64772\times 10^{-9} \text{ cm.} \end{array}}$$

12. Considereu una columna de pi de base rectangular i parets anterior i posterior paral·leles. Preneu l'origen de coordenades $x=0$ en la "tapa" superior de la columna, és a dir, $x=1.2\,m$ correspon a la base, que està fixada a terra. Suposeu que a $x=0.4\,m$ hi ha una placa de ferro que exerceix una força, deguda al seu pes, que és $P=4.65\,N$ (es menysprea el seu gruix). Vegeu la figura



El mòdul de Young del pi és $E=9\cdot10^9\,N/m^2$. L'àrea de la secció transversal corresponent al punt x és $A(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)A_0\ (m^2)$, on A_0 és l'àrea a $x=0$. La força $f(x)$ deguda al pes de la propi de la columna corresponent al punt x és $f(x)=53.9\left(1+\frac{x}{2}\right)\,N/m$.
Recordeu que l'equació 1-dimensional que modela aquest fenomen és: $-\frac{d}{dx}\left(E\cdot A(x)\frac{du}{dx}\right)=f(x)$, essent $u=u(x)$ el desplaçament del punt x.

(a) Si es vol resoldre el problema usant elements finits lineals iguals, quin és el nombre mínim d'elements necessaris? Per què?

(b) Doneu les matrius de rigidesa elementals (o locals) per a la malla que heu decidit a l'apartat (a).

(c) Suposeu que el vector de càrregues globals és $F=(11.50, 25.87, F_3, 16.53)$. Calculeu F_3.

(d) Indiqueu les condicions de contorn i/o càrregues que cal imposar i trobeu el sistema global i el reduït després d'aplicar els termes de contorn.

(e) Calculeu una aproximació del desplaçament del punt $x=0.6\,m$.

Solució.

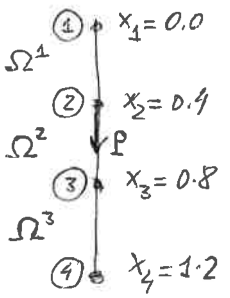


Figura 1

(a) 3 elements de longitud $h=0.4\,m$ perquè així la càrrega puntual P està aplicada al 2^{on} node (global) del mallat i $3\times h=1.2\,m=L$.

(b) Fent servir els resultats del problema 1 i les fórmules per a la matriu de rigidesa quan els coeficients són reals:

$$K^k=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\frac{EA_0/2}{h}\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\left[1+\frac{1}{4}(x_k+x_{k+1})\right]\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$k=1,\ \Omega^1:\ K^1=\frac{EA_0}{h}\left(1+\frac{1}{4}(0+0.4)\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.1&-1.1\\-1.1&1.1\end{pmatrix},$$

$$k=2,\ \Omega^2:\ K^2=\frac{EA_0}{h}\left(1+\frac{1}{4}(0.4+0.8)\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.3&-1.3\\-1.3&1.3\end{pmatrix},$$

$$k=3,\ \Omega^3:\ K^3=\frac{EA_0}{h}\left(1+\frac{1}{4}(0.8+1.2)\right)\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.5&-1.5\\-1.5&1.5\end{pmatrix}$$

(c) $F_1=F_1^1=11.50,\ F_2=F_2^1+F_1^2=25.87,\ F_3=F_2^2+F_1^3,\ F_4=F_2^3=16.53$

Sabem que:

$$\psi_1^k(x)+\psi_2^k(x)=\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}=\frac{1}{h_k}\left(-x+x_{k+1}+x-x_k\right)=\frac{x_{k+1}-x_k}{h_k}=1.$$

$h_k=x_{k+1}-x_k$ $\qquad k=1,2,3.$

Per tant:

$$F_1^k + F_2^k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\psi_1^k(x)\,dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\psi_2^k(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cdot\left(\psi_1^k(x)+\psi_2^k(x)\right)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx, \quad k=1,2,3$$

i aleshores:

$$F_1+F_2+F_3+F_4 = F_1^1 + F_2^1 + F_1^2 + F_2^2 + F_1^3 + F_2^3$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)\,dx = \int_{x_1=0}^{x_4=1.2} f(x)\,dx = 53.9\int_0^{1.2}\left(1+\tfrac{x}{2}\right)dx$$

$$= 53.9\left(x+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{x=0}^{x=1.2} = 53.9\left(1.2+\frac{1.2^2}{4}\right) = 53.9\,(1.2+0.36) = 53.9\times 1.56,$$

d'on: $F_3 = 53.9\int_0^{1.2}\left(1+\tfrac{x}{2}\right)dx - F_1 - F_2 - F_3 = 53.9\times 1.56 - 11.50 - 25.87 - 16.53$

$$= 53.9\times 1.56 - 53.9 = 53.9\,(1.56-1) = 53.9\times 0.56 = \boxed{30.184\ \text{N}}$$

$$\begin{array}{r} 11.50\\ 25.87\\ 16.53\\ \hline 53.90 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53.9\\ 0.56\\ \hline 3234\\ 2695\\ \hline 30.184 \end{array}$$

(d) B.C.

- Essencials: $U_4 = 0$ (la columna està fixada a terra)
- Naturals: $Q_1 = Q_1^1 = 0$, $Q_2 = Q_2^1 + Q_1^2 = P = 4.65$ N, $Q_3 = Q_2^2 + Q_1^3 = 0$

Sistema global: notem que la matriu de connectivitat és $B = \begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$; per tant:

$$\frac{EA_0}{h}\begin{pmatrix}1.1 & -1.1 & & \\ -1.1 & 2.4 & -1.3 & \\ & -1.3 & 2.8 & -1.5\\ & & -1.5 & 1.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\\U_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q_1 = Q_1^1 = 0\\ Q_2 = Q_2^1+Q_1^2 = P\\ Q_3 = Q_2^2 + Q_1^3 = 0\\ Q_4 = Q_2^3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}F_1 = F_1^1 = 11.50\\ F_2 = F_2^1 + F_1^2 = 25.87\\ F_3 = F_2^2 + F_1^3 = 30.184\\ F_4 = F_2^3 = 16.53\end{pmatrix}$$

$$\frac{EA_0}{h} = \frac{9\times 10^9 \times 10^{-2}}{0.4} = \frac{9\times 10^8}{4} = \boxed{2.25\times 10^8}$$

Sistema reduït: $2.25\times 10^8 \times \begin{pmatrix}1.1 & -1.1 & \\ -1.1 & 2.4 & -1.3\\ & -1.3 & 2.8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4.65\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}11.50\\25.87\\30.184\end{pmatrix}$

Solució: $U_1 = 4.04061\times 10^{-7}$ m,
$U_2 = 3.57596\times 10^{-7}$ m,
$U_3 = 2.13938\times 10^{-7}$ m,
$U_4 = 0$ m (de les condicions de contorn essencials)

Finalment, calculem l'aproximació del desplaçament del punt $x=0.6$ m. ($x = 0.6 \in \Omega^2$):

$$u(0.6) \approx \hat{U} = U_1^2\psi_1^2(0.6) + U_2^2\psi_2^2(0.6) = U_2\,\psi_1^2(0.6) + U_3\,\psi_2^2(0.6)$$

$$= U_2\,\frac{0.6-0.8}{0.4-0.8} + U_3\,\frac{0.6-0.4}{0.8-0.4} = \frac{1}{2}(U_2+U_3) = \frac{5.71534}{2}\times 10^{-7} = \boxed{2.85767\times 10^{-7}\ \text{m}}$$