1 Arc step contuation method

Our goal is to find points on the curve $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{n+1}$, defined implicitely by the n equtions,

$$F(z) = 0,$$

with $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a smooth funciton. Let us assume that $z^j \in \mathbb{R}^{n+1}$, are a *regular* point of the curve and an unitary vector tangent to the curve at that point respectively. Hence, on the one hand

$$F\left(z^j\right) = 0 \quad (z^j \in \mathcal{C}), \text{ and } \mathrm{rank} DF\left(z^j\right) = n \quad (z^j \text{ is a regular point of the curve } \mathcal{C})$$

and, on the other hand

$$\|v^j\| = 1 \quad (v^j \text{ is unitary}), \text{ and } DF\left(v^j\right) v^j = 0 \quad (v^j \text{ is tangent to the curve } \mathcal{C} \text{ at } z^j).$$

To find a next point on the curve, $z^{j+1} \in \mathcal{C}$, we shall implement the so called *pseudo-arc step* method (vegeu [1], cap. 10, sec. 2), that can be summarised in the following two stages:

1. *Prediciton:* we shall take $\hat{z}^{j+1} = z^j + h_j v^j$ as an approximation of the new point of z^{j+1}, where $h_j \in \mathbb{R}$ is the *pseudo-arc* step (the *arc* in what follows), and $v^j \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|v^j\| = 1$, is the tangent vector to the $\mathcal{C}$ at point z^j, that will be find as the solution of és el vector tangent a la corba $\mathcal{C}$ al punt z^j, el qual determinarem resolent el *sistema ampliat*,

$$\begin{aligned} DF\left(z^j\right) v &= 0, \\ \left\langle v^{j-1}, v \right\rangle &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

on $v^{j-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|v^{j-1}\| = 1$, és el vector tangent a la corba $\mathcal{C}$ al punt z^{j-1}, tots dos (v^{j-1} i z^{j-1}) prèviament calculats. Com s'observa a [1]:

(i) El sistema lineal (1) és no singular si $\mathcal{C}$ és una corba regular (i.e., si rang $DF(z) = n$, $z \in \mathcal{C}$) i els punts z^{j-1} i z^j estan suficientment a prop.

(ii) La solució $v^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfà la condició $\langle v^{j-1}, v^* \rangle = 1$, per tant es preserva la direcció al llarg de la corba.

Per últim, normalitzem per tenir $v^j = v^* / \|v^*\|$. *Nota:* a l'inici, quan $j = 0$, no podrem escriure el sistema (1), sinó que resoldrem el sistema $n \times n$ que s'obté de seleccionar n columnes linealment independents (siguin les columnes $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, n+1$) de $DF(z^j)$ a la primera equació de (1) i fixar $v_i = 1$. D'aquesta manera trobarem un vector $v^* \in \mathbb{R}^n$, $v_i^* = 1$, t.q. $DF(z^0)v^* = 0$. Llavors $v^0 = \pm v^* / \|v^*\|$, on la tria del signe determinarà la direcció en què es continua la corba.

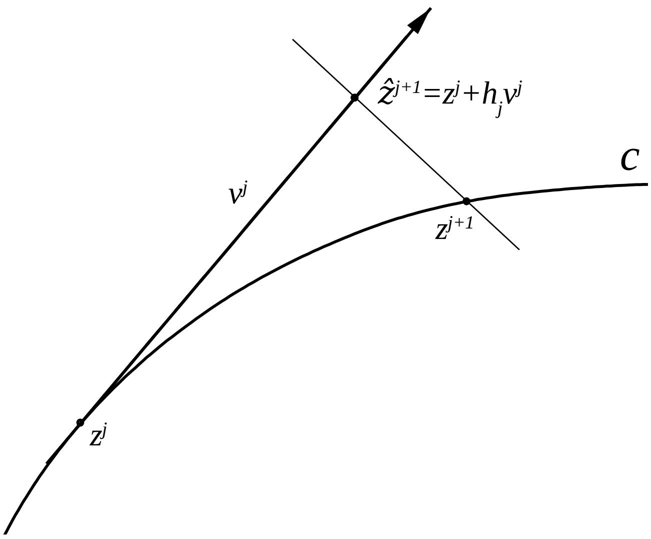

Figure 1

2. *Correcció*. Per a "refinar" el valor aproximat $\hat{z}^{j+1} = z^j + h_j v^j$ del pas predictiu pel mètode de Newton i determinar el nou punt sobre la corba, $z^{j+1} \in \mathcal{C}$, s'ha d'afegir alguna equació addicional al sistema $F(z) = 0$. Al mètode del pesudo-arc, s'imposa que $z^{j+1} \in \hat{z}^{j+1} + \langle v^j \rangle^{\perp}$; això és, que el punt z^{j+1} pertanyi també al hiperplà perpendicular al vector v^j que conté $\hat{z}^{j+1}$. Usant el producte escalar aquesta condició geomètrica s'escriu com,

$$\left\langle z^{j+1} - \hat{z}^{j+1}, v^j \right\rangle = \left\langle z^{j+1} - z^j - h_j v^j, v^j \right\rangle = \left\langle z^{j+1} - z^j, v^j \right\rangle - h_j = 0$$

(vegeu la figura 1). Aleshores aplicarem el mètode de Newton al sistema no lineal

$$\begin{aligned} F(z) &= 0, \\ \left\langle z - z^j, v^j \right\rangle &= h_j, \end{aligned}$$

prenent $z^{(0)} = \hat{z}^{j+1}$ com a aproximació inicial.

2 References

[1] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004. 1