

1 El mètode de continuació del pseudo-arc

Volem trobar punts sobre la corba,

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : F(z) = 0\}$$

amb $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Suposem conegut $z^j \in \mathbb{R}^{n+1}$, un punt *regular* de la corba: $F(z^j) = 0$, $\text{rang } DF(z^j) = n$. Per a trobar el punt següent, $z^{j+1} \in \mathcal{C}$, implementarem el mètode del pseudo-arc (vegeu [1], cap. 10, sec. 2) en el dos passos següents

1. *Predicció*: agafarem $\hat{z}^{j+1} = z^j + h_j v^j$ com a aproximació del nou punt z^{j+1} , on $h_j \in \mathbb{R}$ és el pas i $v^j \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|v^j\| = 1$, és el vector tangent a la corba \mathcal{C} al punt z^j , el qual determinarem resolent el *sistema ampliat*,

$$\begin{aligned} DF(z^j)v &= 0, \\ \langle v^{j-1}, v \rangle &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

on $v^{j-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|v^{j-1}\| = 1$, és el vector tangent a la corba \mathcal{C} al punt z^{j-1} , tots dos (v^{j-1} i z^{j-1}) prèviament calculats. Com s'observa a [1]:

- (i) El sistema lineal (1) és no singular si \mathcal{C} és una corba regular (i.e., si $\text{rang } DF(z) = n$, $z \in \mathcal{C}$) i els punts z^{j-1} i z^j estan suficientment a prop.
- (ii) La solució $v^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfà la condició $\langle v^{j-1}, v^* \rangle = 1$, per tant es preserva la direcció al llarg de la corba.

Per últim, normalitzem per tenir $v^j = v^* / \|v^*\|$. *Nota*: a l'inici, quan $j = 0$, no podem escriure el sistema (1), sinó que resoldrem el sistema $n \times n$ que s'obté de seleccionar n columnes linealment independents (siguin les columnes $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n, n+1$) de $DF(z^j)$ a la primera equació de (1) i fixar $v_i = 1$. D'aquesta manera trobarem un vector $v^* \in \mathbb{R}^n$, $v_i^* = 1$, t.q. $DF(z^0)v^* = 0$. Llavors $v^0 = \pm v^* / \|v^*\|$, on la tria del signe determinarà la direcció en què es continua la corba.

2. *Correcció*. Per a “refinar” el valor aproximat $\hat{z}^{j+1} = z^j + h_j v^j$ del pas predictiu pel mètode de Newton i determinar el nou punt sobre la corba, $z^{j+1} \in \mathcal{C}$, s'ha d'afegir alguna equació addicional al sistema $F(z) = 0$. Al mètode del pseudo-arc, s'imposa que $z^{j+1} \in \hat{z}^{j+1} + \langle v^j \rangle^\perp$; això és, que el punt z^{j+1} pertanyi també al hiperplà perpendicular al vector v^j que conté \hat{z}^{j+1} . Usant el producte escalar aquesta condició geomètrica s'escriu com,

$$\langle z^{j+1} - \hat{z}^{j+1}, v^j \rangle = \langle z^{j+1} - z^j - h_j v^j, v^j \rangle = \langle z^{j+1} - z^j, v^j \rangle - h_j = 0$$

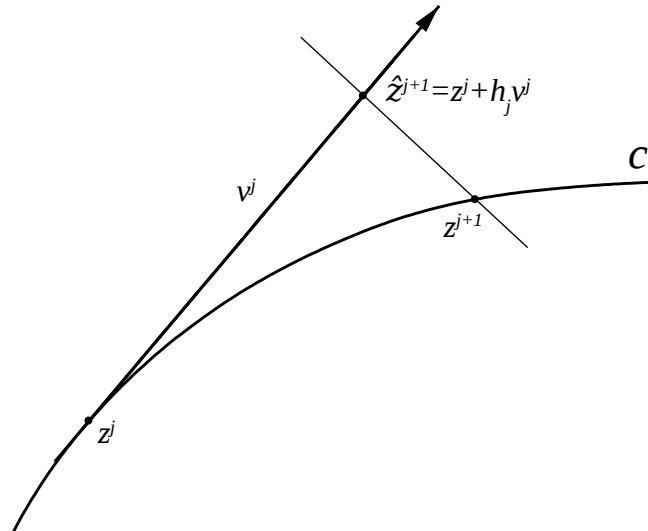


Figura 1

(vegeu la figura 1). Aleshores aplicarem el mètode de Newton al sistema no lineal

$$\begin{aligned} F(z) &= 0, \\ \langle z - z^j, v^j \rangle &= h_j, \end{aligned}$$

prenent $z^{(0)} = \hat{z}^{j+1}$ com a aproximació inicial.

2 Referències

- [1] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004. 1