Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

IE0347 – Señales y Sistemas II

Quiz 1

Estudiante: Ruiz Sánchez Junior Alfonso B97026
Profesor: Helber Meneses Navarro

30 de Mayo del 2024

Universidad de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Eléctrica
IE0347 Señales y Sistemas II
Quiz, II-2023
Nombre: ______________________
Carné: ______________________
Grupo: ______________________
Grupo 01 (L,J), Grupo 02 (K,V)

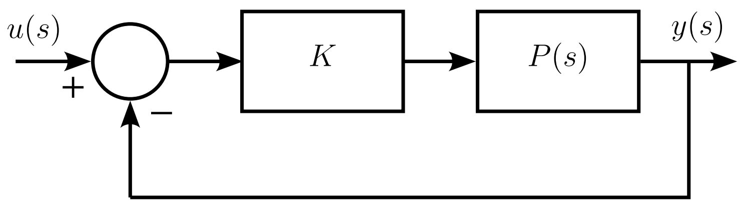
Pregunta	%	Nota
1	35	
2	35	
3	30	
Total:	100	

Instrucciones generales:

- Para la solución de cada problema, el razonamiento realizado debe ser explicado ampliamente. Una respuesta sin razonamiento o explicación del procedimiento no será calificada. Además, debe justificar cualquier suposición o elección de variables que realice.

Preguntas:

1. Considere el siguiente sistema:



donde:

$$P(s) = \frac{30}{(s+1)(s+3)(s+5)},$$

y K es una ganancia.

(a) (25 %) Encuentre el rango de K que hace que el sistema en lazo cerrado sea estable.

(b) (10 %) Encuentre una aproximación de primer orden de $P(s)$.

1. Solución 1

Primero se combina en cascada ambos bloques

$$K \cdot P(s) = \frac{K \cdot 30}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

Después se realiza la eliminación del lazo de realimentación

$$H(s) = \frac{\dfrac{K \cdot 30}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}}{1 + \dfrac{K \cdot 30}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}}$$

Simplificamos

$$H(s) = \frac{\dfrac{K \cdot 30}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}}{\dfrac{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15} + \dfrac{K \cdot 30}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}}$$

$$H(s) = \frac{\dfrac{K \cdot 30}{\cancel{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}}}{\dfrac{K \cdot 30 + s^3 + 9s^2 + 23s + 15}{\cancel{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}}} = \frac{K \cdot 30}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15 + K \cdot 30}$$

La primera condición del criterio de estabilidad absoluta de Routh-Hurwitz indica que los coeficientes del polinomio caracteristico deben ser todos del mismo signo, además la segunda condición indica que ningún coeficiente puede ser cero por lo que:

$$K \cdot 30 + 15 > 0$$

$$K \cdot 30 > -15$$

$$K > \frac{-1}{2}$$

Se obtuvo la cota inferior del rango de estabilidad, por lo que ahora se procede a aplicar el arreglo de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 23 \\ s^2 & 9 & (15+30K) \\ s^1 & a_{31} & a_{32} \\ s^0 & a_{41} & a_{42} \end{array}$$

$$a_{31} = \frac{207 - (15+30K)}{9} = \frac{64}{3} - \frac{10}{3}K$$

$$a_{32} = \frac{9 \cdot 0 - 1 \cdot 0}{9} = 0$$

$$a_{41} = \frac{(\frac{64}{3} - \frac{10}{3}K) \cdot (15+30K) - 9 \cdot 0}{\frac{64}{3} - \frac{10}{3}K} = (15+30K)$$

$$a_{42} = \frac{a_{31} \cdot 0 - 9 \cdot 0}{a_{31}} = 0$$

Por lo que finalmente tenemos que para que no hayan cambios de signo

$$15 + 30K > 0 \quad \text{y} \quad \frac{64}{3} - \frac{10}{3}K > 0$$

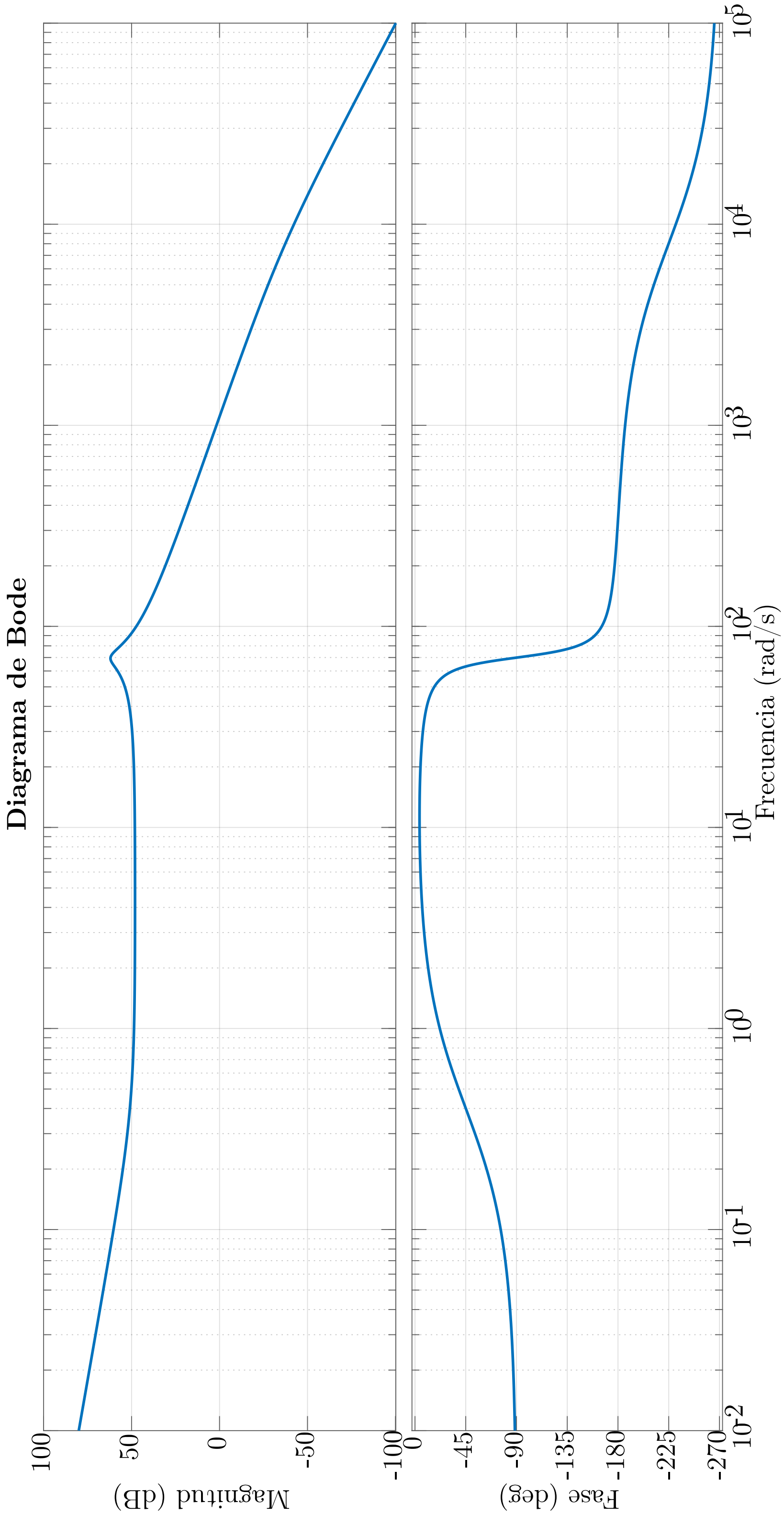
La primera condición ya fue analizada, por lo que procedemos a obtener el analisis de la segunda

$$\frac{64}{3} - \frac{10}{3}K > 0$$
$$-10K > -64$$
$$10K < 64$$
$$K < \frac{64}{10}$$

Por lo qué el rango de de K para que el sistema sea estable es:

$$\text{Rango: } \{K \in \mathbb{R} \mid -0.5 < K < 6.4\}$$

2. (35 %) Encuentre la función de transferencia a partir del siguiente diagrama de Bode:



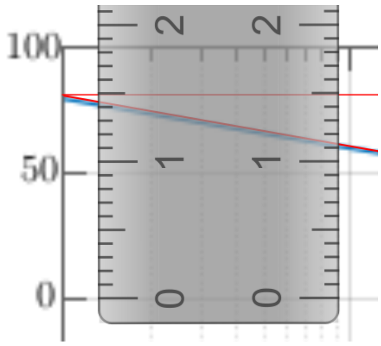


Figura 1: Medición de ganancia inicial del diagrama de bode

En la figura 1 se tienen las siguientes mediciones

Medición de referencia: $50\,dB = 0.9\,\mathrm{u}$
Medición de objetivo: $x\,dB = 1.5\,\mathrm{u}$

$$\frac{x}{1.5} = \frac{50}{0.9} \Longrightarrow x = \frac{50 \cdot 1.5}{0.9} = 83.33\,dB$$

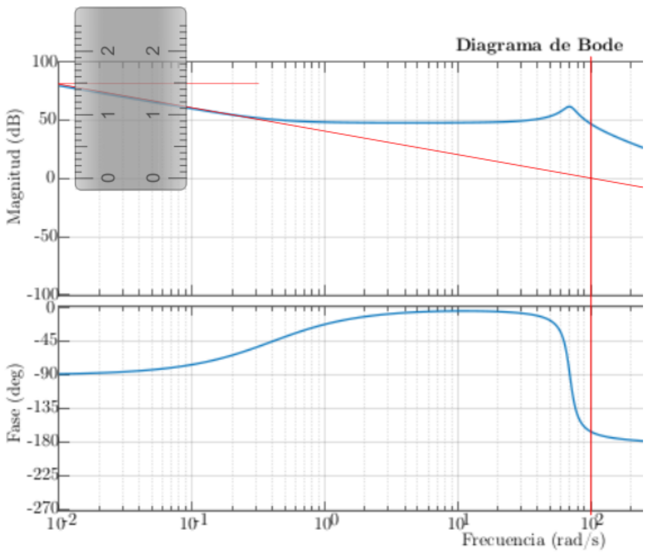


Figura 2: Medición de pendiente del diagrama de bode

Se puede notar que desde el inicio del diagrama de bode hasta que llega a 0 dB pasan 4 decadas por lo que se esa pendiente es de $-20.83\,dB$ por decada. Por lo que aproximaremos a decir que esta pendiente es $-20\,dB$ por decada.

Como la fase empieza en -90^{o} y la pendiente inicial es de $-20\,dB$ por decada por lo qué la función de transferencia tiene un polo s^{-1}

Una forma tentativa para la función de transferencia es la siguiente:

$$H(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{A(s)}{B(s)}$$

Puesto que debe tener minimo un cero, ya que la función tiene ganancia constante en un rango, por lo que debe en dicho rango cancelar el polo s^{-1}

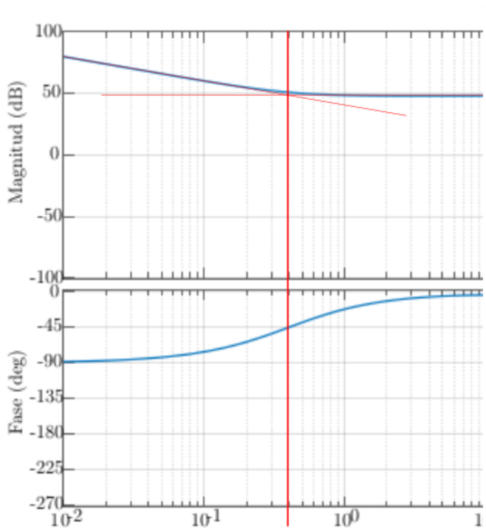


Figura 3: Medición de frecuencia de esquina de cero del diagrama de bode

Este cero empieza a partir de $4 \times 10^{-1} \frac{rad}{s}$
Actualizando la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\frac{s}{0.4} + 1}{B(s)}$$

Ahora faltan los polos, se puede notar que existe un pico de resonancia positivo, por lo que la función de transferencia tiene un polo cuadrático.

Dicho pico de resonancia está situado en $7 \times 10^{1} \frac{rad}{s}$

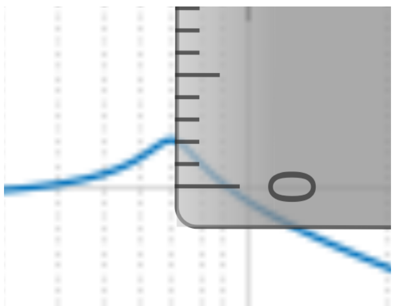


Figura 4: Medición del pico de sobre paso del diagrama de bode

Volvemos a usar la medición de referencia de la figura 1

Medición de referencia: $50\,dB = 0.9\,\mathrm{u}$
Medición de objetivo: $x\,dB = 0.2\,\mathrm{u}$

$$\frac{x}{0.2} = \frac{50}{0.9} \Longrightarrow x = \frac{50 \cdot 0.2}{0.9} \approx 11\,dB$$

Usando la ecuación que nos entrega la longitud del pico de resonancia, podemos obtener ξ

$$M_{p(dB)} = 20 \log_{10} \left(\left(2\xi \sqrt{1 - \xi^2} \right)^{-1} \right)$$

$$20\log_{10}\left(\left(2\xi\sqrt{1-\xi^2}\right)\right) = -1\cdot 11\,dB$$

$$\log_{10}\left(2\xi\sqrt{1-\xi^2}\right) = \frac{-11}{20}$$

$$2\xi\sqrt{1-\xi^2} = 10^{\frac{-11}{20}}$$

$$4\xi^2\left(1-\xi^2\right) = 10^{\frac{-22}{20}}$$

$$4\xi^2 - 4\xi^4 - 10^{\frac{-22}{20}} = 0$$

$$\xi_1 = 0.98981$$

$$\xi_2 = 0.14237$$

$$\xi_3 = -0.14237$$

$$\xi_4 = -0.98981$$

ξ debe ser un valor entre 0 y 0.707 para que la ecuación de M_p tenga validez, el unico resultado que cumple esta condición es $\xi = 0.14237$

Ahora para obtener ω_n:

$$7\times 10^1\,\frac{rad}{s} = \omega_n\sqrt{1-2(0.14237)^2}$$

por lo que ω_n:

$$\omega_n = \frac{70}{\sqrt{1-2(0.14237)^2}} = 71.46$$

por lo que la expresión de esta función cuadrática deberá ser:

$$\frac{s^2}{71.46^2} + 2\cdot 0.14237\cdot\frac{s}{71.46} + 1$$

Actualizando la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{K}{s}\cdot\frac{\frac{s}{0.4}+1}{\left(\frac{s^2}{71.46^2} + 2\cdot 0.14237\cdot\frac{s}{71.46} + 1\right)\cdot C(s)}$$

Se sabe que hace falta un polo
Debido a que el diagrama de fase empieza en -90° y termina en -270°.

- polo s^{-1} aporta -90°
- polo cuadrático aporta -180°
- cero $(\frac{s}{0.4}+1)$ aporta 90°

Por lo que faltan -90° para llegar a -270° en el diagrama de fase, siendo esta la razón por la que se concluyó que hacia falta un polo.

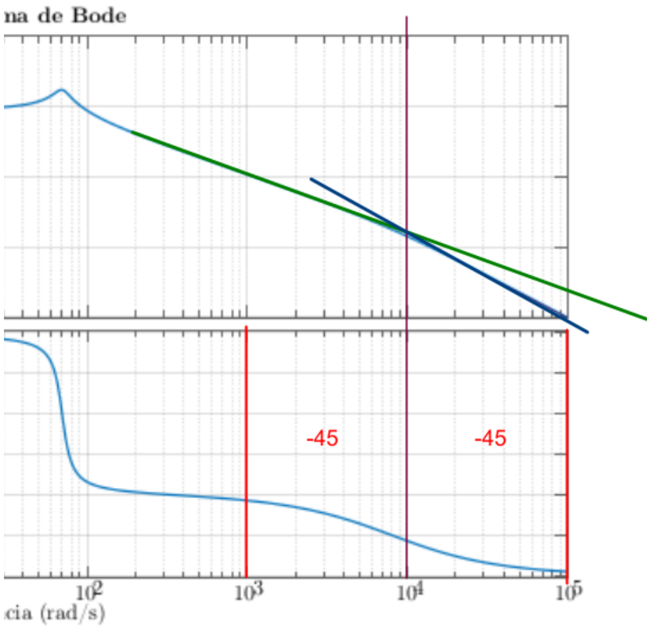


Figura 5: Medición para encontrar último polo

Tanto el diagrama de fase como el diagrama de ganancia indican que la frecuencia de esquina es $10^4\ \frac{rad}{s}$

Actualizando la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{K}{s} \cdot \frac{\frac{s}{0.4}+1}{\left(\frac{s^2}{71.46^2} + 2 \cdot 0.14237 \cdot \frac{s}{71.46} + 1\right) \cdot (\frac{s}{10^4}+1)}$$

Ahora debemos proceder a obtener K:

Se sabe que la ganancia en 1 $\frac{rad}{s}$ es de 50 dB

Pasamos el aporte de los ceros y polos en $1\frac{rad}{s}$ a dB

$$20\log_{10}(K)$$

$$20\log_{10}\sqrt{1+(\frac{1}{0.4})^2} = 8.60\ _{dB}$$

$$-20\log_{10}\left(\frac{1}{1}\right) = 0$$

$$-20\log_{10}\sqrt{1+(\frac{1}{10^4})^2} = -4.34\times 10^{-8}\ _{dB}$$

$$-20\log_{10}\sqrt{\left(1-(\frac{1}{71.46})^2\right)^2 + \left(2\cdot 0.14237 \cdot \frac{1}{71.46}\right)^2} = 1.6321\times 10^{-3}\ _{dB}$$

Igualamos la ganancia 50 con las ganancias obtenidas

$$50 = 20\log_{10}(K) + 8.60 + 0 - 4.34\times 10^{-8} + 1.6321\times 10^{-3}$$

$$41.4 = 20\log_{10}(K)$$

Por lo que K es:

$$K = 10^{\frac{41.4}{20}} \approx 117.5$$

Finalmente la función de transferencia es:

$$H(s) = \frac{117.5}{s} \cdot \frac{\frac{s}{0.4}+1}{\left(\frac{s^2}{71.46^2} + 2 \cdot 0.14237 \cdot \frac{s}{71.46} + 1\right) \cdot (\frac{s}{10^4}+1)}$$

3. (30 %) Considere la siguiente curva de reacción obtenida mediante una prueba experimental. Encuentre un modelo que represente de forma adecuada la dinámica del sistema. Justifique la elección del modelo y del método de identificación seleccionado.