

Máquina de múltiplas fitas

Com o objetivo de apresentar uma solução mais eficiente do que a MT1, introduzimos uma Máquina de Turing determinística de múltiplas fitas, denominada MT2.

A principal motivação para o uso de múltiplas fitas é permitir uma separação clara entre as etapas de leitura, contagem, comparação e decisão. Essa separação elimina a necessidade de rebobinamentos frequentes da fita de entrada, reduzindo significativamente o custo computacional total do algoritmo, sem comprometer a corretude da solução.

Assim como a MT1, a MT2 resolve o problema descrito no enunciado: determinar qual avenida deve receber o sinal verde em um cruzamento urbano, a partir da quantidade de veículos em cada via, respeitando a política de decisão e a ordem de desempate $A > B > C$.

Definição formal e organização em módulos

A MT2 é definida como uma Máquina de Turing determinística de múltiplas fitas, representada pela seguinte 7-upla:

$$MT2 = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{final}})$$

onde:

- Q é um conjunto finito de estados;
- $\Sigma = \{A, B, C\}$ é o alfabeto de entrada;
- $\Gamma = \{A, B, C, _ \}$ é o alfabeto da fita, em que $_$ representa o símbolo vazio;
- δ é a função de transição determinística da máquina;
- q_0 é o estado inicial;
- q_{final} é o estado final de aceitação.

A função de transição possui a forma:

$$\delta : Q \times \Gamma^4 \rightarrow Q \times \Gamma^4 \times \{E, D, N\}^4$$

atuando simultaneamente sobre quatro fitas: uma fita de entrada e três fitas auxiliares. Em cada transição, a máquina lê um símbolo de cada fita, escreve um símbolo em cada fita e move cada cabeçote de forma independente, garantindo determinismo durante todo o processamento.

A MT2 opera com quatro fitas: uma fita de entrada e três fitas auxiliares. A fita de entrada contém a palavra que representa a distribuição de veículos, enquanto as fitas auxiliares armazenam, em notação unária, as quantidades de veículos associadas a cada avenida.

A palavra de entrada segue o formato:

$$A^i B^j C^k$$

em que i , j e k representam, respectivamente, o número de veículos nas avenidas A, B e C.

Para adequar o enunciado original do problema ao modelo formal de Máquinas de Turing, as quantidades numéricas de veículos são representadas na fita de entrada por meio de codificação unária. Assim, cada ocorrência do símbolo A representa um veículo na avenida A, cada B representa um veículo na avenida B, e cada C representa um veículo na avenida C, resultando em uma correspondência direta entre os valores do enunciado e a palavra processada pela máquina.

O processamento da MT2 é organizado nos seguintes módulos lógicos:

- leitura da entrada e contagem das ocorrências de cada símbolo;
- cálculo do número total de veículos;

- cálculo da metade do total;
- verificação de maioria absoluta;
- comparação das quantidades em caso de ausência de maioria;
- escrita da decisão final.

Essa organização modular facilita a compreensão do funcionamento da máquina e permite uma análise de complexidade estruturada.

Representação das fitas

Durante a execução da MT2, cada fita possui uma função bem definida. A primeira fita contém a palavra de entrada e é utilizada exclusivamente na etapa inicial de leitura. As três fitas auxiliares armazenam, em notação unária, o número de ocorrências dos símbolos A , B e C , respectivamente.

Após a fase de leitura, não é necessário retornar à fita de entrada, pois todas as informações relevantes para a decisão já se encontram armazenadas nas fitas auxiliares. Esse aspecto é fundamental para a obtenção de complexidade linear.

Funcionamento da máquina

Inicialmente, a MT2 percorre a fita de entrada da esquerda para a direita. Durante essa varredura, cada ocorrência dos símbolos A , B e C é registrada na fita auxiliar correspondente, por meio da escrita de um símbolo 1 para cada ocorrência.

Concluída a leitura, a máquina constrói uma representação unária do número total de veículos no cruzamento sobrescrevendo a fita da entrada, contendo exatamente $i + j + k$ símbolos 1.

Em seguida, a MT2 calcula a metade desse total. Para isso, dois símbolos 1 são removidos por vez da fita do total, e um símbolo 1 é escrito em uma fita auxiliar para cada par removido. Caso reste um símbolo sem par, este é descartado, obtendo-se assim a representação unária de:

$$\left\lceil \frac{i + j + k}{2} \right\rceil$$

Com o valor da metade calculado, a MT2 compara as quantidades de veículos de cada avenida com esse valor. As comparações são realizadas de forma sequencial, seguindo a ordem A , B e C , o que garante automaticamente o critério de desempate.

Se alguma avenida possuir uma quantidade de veículos estritamente maior que a metade do total, o processamento é encerrado imediatamente, e essa avenida é selecionada como prioritária.

Caso nenhuma avenida apresente maioria absoluta, a MT2 realiza comparações diretas entre as quantidades individuais armazenadas nas fitas auxiliares, selecionando aquela com maior número de veículos. Em situações de empate, a decisão final segue a ordem de prioridade $A > B > C$.

Ao final do processamento, a fita de saída é limpa e a máquina escreve um único símbolo pertencente a $\{A, B, C\}$, correspondente à avenida escolhida. A execução é encerrada ao alcançar o estado q_{final} .

Análise formal de complexidade

Seja $w = A^i B^j C^k$ a palavra de entrada fornecida à MT2 e seja

$$n = |w| = i + j + k$$

o tamanho da entrada.

Leitura da entrada e contagem

A MT2 percorre a fita de entrada uma única vez, da esquerda para a direita, até encontrar o símbolo branco $_$.

Durante essa varredura:

- cada um dos n símbolos da entrada é lido exatamente uma vez;
- para cada símbolo lido, é realizada exatamente uma escrita de um símbolo 1 em uma das fitas auxiliares;
- não há rebobinamentos da fita de entrada.

Portanto:

$$T_1(n) = n$$

e

$$T_1(n) \in O(n)$$

.

Construção da fita do total de veículos

A construção da fita do total escreve exatamente n símbolos 1, logo:

$$T_2(n) = n$$

e

$$T_2(n) \in O(n)$$

.

Cálculo da metade do total

Para calcular a metade do total de veículos, a máquina remove dois símbolos 1 por iteração da fita do total e escreve um símbolo 1 na mesma fita, agora representando a metade.

No pior caso:

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

iterações são realizadas. Assim:

$$T_3(n) \in O(n)$$

.

Verificação de maioria absoluta e comparações

A verificação de maioria absoluta é realizada comparando, de forma sequencial, as quantidades de veículos de cada avenida com o valor da metade do total, seguindo a ordem A, B e C.

Cada comparação é feita de maneira não destrutiva. Para comparar a fita de uma avenida $X \in \{A, B, C\}$ com a fita da metade, a MT2 posiciona simultaneamente os cabeçotes no início das duas fitas e realiza uma varredura síncrona da esquerda para a direita, avançando um símbolo por passo, sem realizar escritas.

A comparação é encerrada assim que um dos cabeçotes encontra o símbolo branco $_$. Se a fita da metade atingir o símbolo $_$ primeiro, conclui-se que a avenida X possui uma quantidade de veículos

estritamente maior que a metade do total. Caso a fita da avenida X atinja o símbolo _ antes (ou simultaneamente), conclui-se que não há maioria absoluta para essa avenida.

O número de passos executados em cada comparação é igual ao comprimento da menor fita entre a avenida considerada e a fita da metade. Assim, o custo de uma comparação envolvendo a avenida X é dado por:

$$T_X = \min\left(|X|, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

No pior caso, nenhuma avenida possui maioria absoluta, e as três comparações são realizadas. Portanto, o custo total dessa etapa é:

$$T_4(n) = \sum_{X \in \{A, B, C\}} \min\left(|X|, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

Como $|A| + |B| + |C| = n$, segue que:

$$T_4(n) \leq n$$

e, consequentemente:

$$T_4(n) \in O(n)$$

.

Escrita da saída e encerramento

Essa etapa é constante:

$$T_5(n) \in O(1)$$

.

Custo total no pior caso

$$T(n) = n + n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3n + O(1)$$

Portanto:

$$T(n) \in O(n)$$

.

Complexidade em número de estados

O conjunto de estados é fixo:

$$|Q| = O(1)$$

.

Exemplos passo a passo

Para a entrada:

$$A^3 B^2 C^1$$

o total é 6, a metade é 3 e a decisão é A.

Em entradas como:

$$A^2 B^2 C^2$$

o desempate segue a ordem $A > B > C$.

Comparação com a MT1

Enquanto a MT1 apresenta custo $\Theta(n^2)$, a MT2 executa em tempo linear, demonstrando o ganho assintótico do modelo multifitas.