Controle de Tráfego Urbano Inteligente

Trabalho Final do Curso de Teoria da Computação

Caio Mello - XXXX
João Roberto - 222217111
Jonas - ZZZZZZZZ
Leandro - ZZZZZZZZ
Vinicius - YYYYYYYYY

,

Período Letivo
2025.2

Índice

1. Introdução

1.1. Enunciado do problema

A Companhia Turing Traffic Systems está desenvolvendo um sistema de controle de tráfego urbano baseado em Máquinas de Turing para gerenciar os semáforos de uma cidade inteligente. O objetivo é determinar qual deve ser o próximo estado do semáforo principal de um cruzamento, considerando informações sobre o fluxo de veículos.

O cruzamento possui três avenidas que se encontram no mesmo ponto, e cada avenida possui sensores que contam o número de veículos aguardando em cada direção.

O sistema deve decidir a próxima cor do semáforo principal de acordo com a seguinte política:

***I** - Se uma avenida tiver mais da metade do total de veículos somados das três avenidas, ela terá prioridade, e o semáforo para essa avenida ficará verde, enquanto os outros ficarão vermelho.*

***II** Caso nenhuma avenida tenha mais da metade dos veículos, o sistema escolhe a avenida com maior número de veículos.*

***III** Em caso de empate, a avenida A tem prioridade sobre B, e B sobre C (ordem A > B > C).*

1.2. Contextualização e importância na área de cidades inteligentes.

lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero lero

1.3. Abstrações, notações específicas e corolários significativos

Como parte desse trabalho, temos a missão de modular Máquinas de Turing que solucionem o problema preposto. Para tal, teremos como entrada uma string representando a distribuição de carros dentre as avenidas A, B e C, seguindo o formato:

$$\text{Seja } w \text{ uma palavra e } n \in \mathbb{N}$$

$$w = \varphi_0 * ... * \varphi_{n-1} * \varphi_n$$

$$\varphi_k \in \{a, b, c\} \text{ tal que } 0 \leq k \leq n$$

Nesta representação, cada carro na avenida A será uma letra 'a', na avenida B, a letra 'b', e na C, 'c'.

Será útil também a definição de uma função para cálculo da cardinalidade de uma letra, construída segundo o descrito abaixo:

$$\text{Seja } w \text{ uma palavra e } x \text{ uma letra}$$

$$\gamma_x(w) : \{a, b, c\}^* \to \mathbb{N}$$

$$\gamma_x(w) = |\{i \in \{1, ..., |w|\} \land \varphi_i = x\}|$$

Onde γ é a função de cardinalidade.

De forma direta, $\gamma_x(w)$ nos retorna o número de ocorrências da letra x na palavra w.

A partir do enunciado da questão, abstraímos duas propriedades que nosso automômato deve computar, as chamaremos de A e B.

1. Determinar a avenida com quantidade de carros superior a metade do total de automóveis em todas avenidas.

   1.1 Ou seja, **determinar a letra x cuja cardinalidade é superior ao tamanho total da string w de entrada**:

   $$x \in \{a, b, c\} \mid \gamma_x(w) > \frac{|w|}{2}$$

   $$\text{dado que as únicas letras de } w \text{ são } \{a, b, c\}, \text{ segue que:}$$

   $$|w| = \gamma_a(w) + \gamma_b(w) + \gamma_c(w)$$

   $$\text{Portanto, } \ \gamma_x(w) > \frac{|w|}{2} \Leftrightarrow \gamma_x(w) > \frac{\gamma_a(w) + \gamma_b(w) + \gamma_c(w)}{2}$$

   1.2 Caso mais de uma avenida se qualifique, devemos respeitar a A sobre B, B sobre C e, por transitividade, A sobre C.

2. Determinar a avenida com a maior quantidade de carros.
   2.1 Ou seja, **determinar a letra $\boldsymbol{x}$ de maior cardinalidade na palavra $\boldsymbol{w}$**:

$$x, y, z \in \{a, b, c\} \land y \neq z \land z \neq x \land x \neq z$$
$$\gamma_x(w) > \gamma_y(w) \land \gamma_x(w) > \gamma_z(w)$$

   2.2 Em caso de empate, devemos respeitar a ordem de prioridade definida em 1.2.

Também é importante considerar que a computação da propriedade 2 só deve ser avaliada caso não haja parada por estado final na computação da condição 1.

Vamos considerar também algumas equivalências para facilitar a modelagem e validação do automômato.

A primeira é centrada na propriedade A, a qual nos dá que:

$$\gamma_x(w) > \frac{\gamma_a(w) + \gamma_b(w) + \gamma_c(w)}{2}$$

$$2 * \gamma_x(w) > \gamma_a(w) + \gamma_b(w) + \gamma_c(w)$$

Dado que $x \in \{a, b, c\}$,

$$\gamma_x(w) \in \{\gamma_a(w), \quad \gamma_b(w), \quad \gamma_c(w)\}$$

Generalizando,

$$\text{Sejam} \quad x, y, z \in \{a, b, c\} \mid x \neq y \land y \neq z$$

$$2 * \gamma_x(w) > \gamma_x(w) + \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$$

$$\gamma_x(w) > \gamma_y(w) + \gamma_z(w) \tag{Δ}$$

Ou seja,

$$\gamma_x(w) > \frac{\gamma_x(w) + \gamma_y(w) + \gamma_z(w)}{2} \Leftrightarrow \gamma_x(w) > \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$$

Portanto, basta que nosso automômato compute o corolário Δ:

$$\gamma_x(w) > \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$$

para que também seja verificada a condição 1 do enunciado e portanto determinada a avenida prioritária.

2. Máquinas de Turing

Com objetivo de tratar da complexidade do problema de maneira didática, facilitando nossa argumentação, além de simplificar o processo de desenvolvimento da máquina abstrata, vamos segmentar porções de MT's (Máquinas de Turing) em 'módulos'.

Dada a definição de uma MT:

$$\mathrm{MT} = (E, \Sigma, \Gamma, \delta, i, F)$$

E: Conjunto finito de estados
Σ: Alfabeto de entrada
Γ: Alfabeto da fita
δ: Funções de transição
i: Estado inicial
F: Conjunto de estados finais

Definimos um módulo $\mathbb{M}$ de MT como:

$$\mathbb{M} = \left(E_{\xi}, \Sigma, \Gamma, \delta_{\xi}, e_{\text{in}}, E_{\text{out}}\right)$$

Onde,
E_{ξ}: Subconjunto de estados em E.
δ_{ξ}: Subconjunto de transições em δ que atuem somente sobre os estados definidos em E_{ξ}.
e_{in}: Um estado eleito de E_{ξ}, deve denotar o ínicio do módulo. Vamos nos referir a ele como estado de entrada.
e_{out}: Um conjunto de estados finais pertencentes a E_{ξ}, representam o fim da computação do módulo. Chamaremos eles de estados de saída.

Importante notar que não necessariamente $e_{\text{out}} \subset F$. Ou seja, o fim da computação de $\mathbb{M}$ não é necessário e suficiente para parada da MT.

No decorrer desse texto também usaremos o termo "submódulo". Essa estrutura é análoga à um módulo e sua definição é construída em função de um módulo $\mathbb{M}$ ao invês da MT por inteiro. Essa outra abstração também tem finalidades puramente organizacionais.

2.1. Máquina de uma única fita (MT_1)

Nossa máquina de uma fita só, ou MT_1, é definida como:

$$\mathrm{MT}_1 = (E, \Sigma, \Gamma, \delta, i, F)$$

Tal que,
$\Sigma = \{a, b, c\}$
$\Gamma = \left\{x_y \mid \forall x, y \in \Sigma\right\} \cup \{\varepsilon, <\}$, ou seja $\{a, b, c, a_a, a_b, a_c, b_a, b_b, b_c, c_a, c_b, c_c, <, \varepsilon\}$
$F = \{F_a, F_b, F_c\}$

$<$ é o símbolo delimitador do início da fita. Tratamos a fita como infinita a direita.

ε representa o vazio que preenche os espaços à direita da palavra inserida.

Cada estado final representa a decisão de conceder prioridade a uma avenida no cruzamento, onde:

$$x \in \Sigma \mid F_x : \text{Sinaleira prioriza avenida x}$$

As transições δ, estados E, F e i serão definidos em representações gráficas mais a frente.

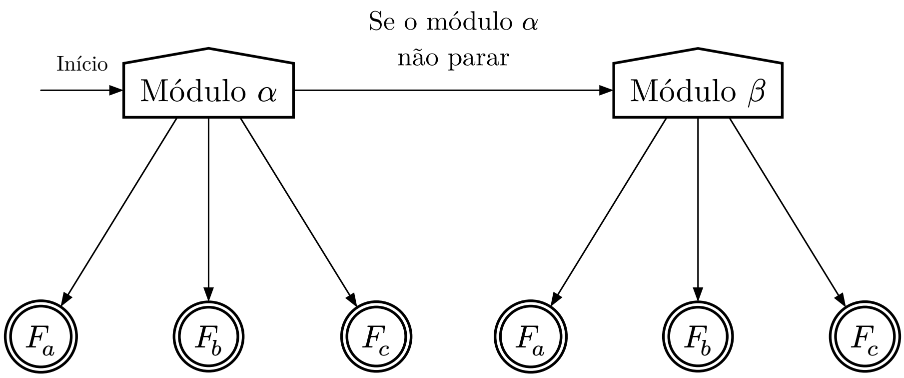
MT_1 tem dois módulos principais: α e β os quais serão estabelecidos e destrinchados a seguir.

2.1.1. Módulos e submódulos

O módulo α será responsável por verificar se a condição 1 do enunciado vale para alguma letra de Σ através do corolário Δ.

Caso nenhum estado final seja alcançado dentro de α, o automômato recorrerá ao módulo β, onde avaliará a regra de desempate definida na condição 2 do problema. Verificando qual símbolo tem a maior cardinalidade na entrada.

A macroarquitetura da máquina tem o formato:



Fluxograma 1: Arquitetura do automômato

2.1.2. Módulo α

O módulo α irá analisar se o corolário Δ vale para alguma letra em $\{a, b, c\}$. Caso verifique validade de tal propriedade para a letra-alvo, é eleito o estado final apropriado representativo da decisão apropriada e a computação cessa.

Visto que o automômato encerra processamento assim que é validado Δ para um elemento, extraímos uma capacidade de "curto-circuito", a qual em conjunto a um processamento ordenado dos elementos de Σ permite zelar pela regra de desempate definida em 1.2

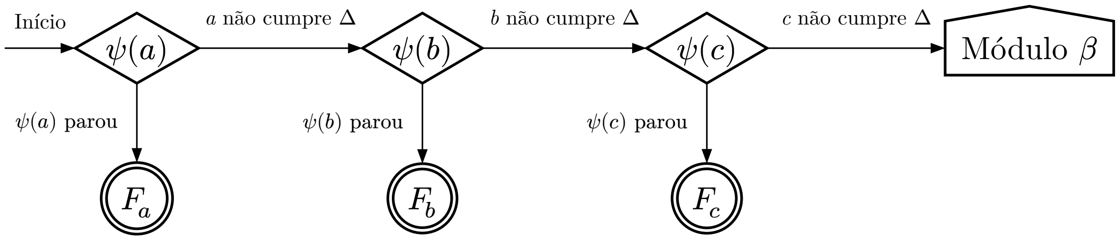
Portanto, efetuamos essa avaliação para as letra na ordem "a", "b" e, então, "c", implicitamente zelando pela ordem de desempate.

Caso nenhuma letra do alfabeto cumpra com a propriedade alvo de α, a computação é encaminhada para o módulo β.

Quebramos cada avaliação de uma letra em um submódulo ψ, tal que:

$\psi(x)$: Verifica se x cumpre a propriedade Δ, caso positivo, o automômato pára em F_x.

Dando ao interior de α o formato:



Fluxograma 2: Formato do Módulo α

2.1.3. Submódulo ψ

Como já definimos, ψ deve verificar se vale para algum x:

$$\gamma_x(w) > \gamma_y(w) + \gamma_z(w) \text{ onde } x, y, z \in \{a, b, c\} \text{ e } x \neq y \neq z$$

Para tal, devemos comparar a **cardinalidade** de x com a de y e z.

Com esse objetivo, nosso automato irá, efetivamente, **mapear** cada ocorrência de x com uma de y e de z.

A natureza dessa correspondência caracteriza diretamente a relação entre as cardinalidades envolvidas.

Considere X_w como o conjunto de aparições de x em w, e Y_w e Z_w como conjuntos análogos para demais letras. Formalizando:

$$\text{w é palavra, } |w| = n, \text{ e } w = (a_1, ..., a_n) \text{ onde } a_i \in \Sigma = \{a, b, c\}$$

$$X_w = \{i \mid a_i = x\}, Y_w = \{i \mid a_i = y\}, Z_w = \{i \mid a_i = z\}$$

Teremos que a computação de Δ é, essencialmente, a contagem dos conjuntos X_w e $Y_w \cup Z_w$ – chamaremos essa união de YZ_w

Com esse fim, $\psi(x)$ buscará formar pares únicos de x com y's e z's, de maneira que não sejam repetidos os elementos envolvidos em cada par já formado. De maneira formal:

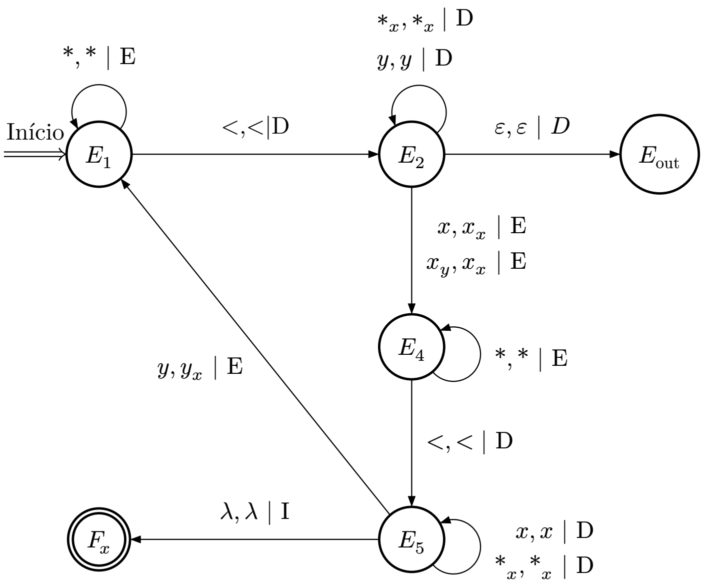
$$\psi(x) : X_w \to \text{YZ}_w$$

$$\forall i, j \in X_w,\ \psi(i) = \psi(j) \Rightarrow i = j$$

Assim, de acordo ao definido pela teoria dos Conjuntos, caso verifiquemos:
1. bijeção, intuimos que $\gamma_x(w) = \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$;
2. injeção, mas não sobrejeção, $\gamma_x(w) < \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$;
3. sobrejeção, mas não injeção, $\gamma_x(w) > \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$

Portanto, basta que nossa MT compute essa função de pareamento para que seja verificada a validade de Δ.

Fixo que $x, y \in \Sigma$ onde $x \neq y$, o submódulo $\psi(x)$ terá o formato:



Submódulo 1: Função ψ

Onde F_x simboliza a parada total da MT1 na decisão de priorizar a avenida x.

Enquanto E_{out} será:

- E_{in} do submódulo ψ seguinte, caso $x \neq c$,;
- o estado de entrada do módulo β, caso $x = c$,;

Ou seja, $\psi(x)$ deve

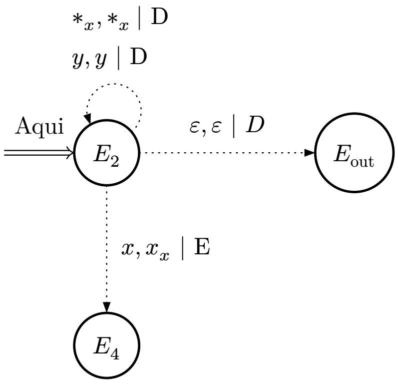
$$\text{Parar em } F_x \Leftrightarrow \gamma_x(w) > \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$$

$$\text{Sair por } E_{\text{out}} \Leftrightarrow \gamma_x(w) \leq \gamma_y(w) + \gamma_z(w)$$

Vamos então destrinchar cada estado da máquina e suas transições associadas para verificar a computação dessas propriedades e também calcular a complexidade assintótica apresentada.

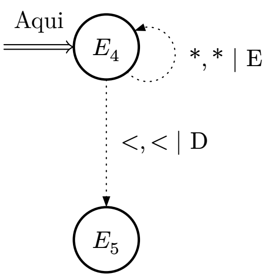
Passo 1 - Rebobina ao início da fita.

Passo 2 - Avança pela fita passando por todos y e x_x – que são os x's já pareados – até encontrar um x ou o fim da fita.

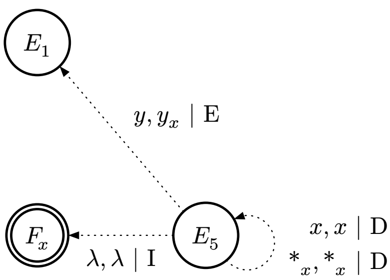


a) Caso ache um x ou x_y, o sobreescreveremos por x_x e seguimos para o passo 3.
b) Caso não ache um x, escapamos para E_{out}.

Passo 3 - Rebobina pro início da fita;



Passo 4 - Avança pela fita buscando um y tal que $y \notin \{x, x_x\}$;



a) Caso não encontre, sabemos que x cumpre com a a propriedade C, pára no estado final F_x e cessamos computação.
b) Caso encontre, sobreescreveremos o y na fita com y_x e retornamos ao passo 1.

Um aspecto relevante é que esse módulo é um *loop* com duas interrupções possíveis: as etapas 2.b) e 4.a) do passo-a-passo.

Agora faremos uma breve verificação formal de que o algoritmo abstraído na máquina constrói as propriedades almejadas.

Dado que,

$$n, i \in N$$

$$x, k_n \in \{a, b, c\}$$

$$w = k_0 * ... * k_n$$

Os passos 2.a) e 4.b) marcam os elementos de forma x_x e y_x, respectivamente, construindo os conjuntos:

$$X_w = \{j \mid \forall j \in N \text{ tal que } 0 \leq j \leq n \ \text{ e } k_j = x\}$$

$$\overline{X}_w = \{j \mid \forall j \in N \text{ tal que } 0 \leq j \leq n \ \text{ e } k_j \neq x\}$$

Como é feita uma substituição de elemento por vez, os conjuntos são proceduralmente compostos em paralelo. Dessa forma, independente da iteração do loop, em 2.a), $|X_w| = |\overline{X}_w| + 1$. Até que em 4.b), é encontrado mais um y e $|X_w| = |\overline{X}_w|$.

Somente em uma das interrupções, 2.b) ou 4.a), ocorre um disruptura dessas igualdades.

Em 2.b), não encontramos mais x e escapamos para E_{out}, como interrompemos o processamento do módulo, não verificamos se existem mais y, mas temos certeza da cardinalidade de x. Obtendo $|\overline{X}_w| = |X_w|$ e, portanto, $\gamma(x)_w = \gamma(y)_w + \gamma(z)_w$, entretanto, como não não buscamos mais y, podemos afirmar de maneira mais forte que $\gamma(x)_w \leq \gamma(y)_w + \gamma(z)_w$.

Já na parada em 4.a), temos do passo 2.a) que $|X_w| = |\overline{X}_w| + 1$ e interrompemos o processamento em F_x. Neste caso, $\gamma(x)_w \geq \gamma(y)_w + \gamma(z)_w + 1$, o que equivale a $\gamma(x)_w > \gamma(y)_w + \gamma(z)_w$. Neste caso, computamos com sucesso que vale a propriedade Δ no momento da parada em F_x.

TODO PROVA DA CORRETUDE DA CORRESPONDENCIA ENTRE A MAQUINA E O ARGUMETNO DESEJADO

FAZER PROVAS DAS CORRESPONDENCIAS ENTRE OS ESTADOS DE PARADA/SAIDA E AS PROPRIEDADES DESEJADAS.

2.B) SIGNIFICA NÃO CUMPRIMENTO DE DELTA

SERIA ALGO COMO

- TEMOS DOIS CASOS, UM ONDE JÁ MARCAMOS ALGUM X E OUTRO ONDE NÃO MARCAMOS NENHUM
- CASO JA TENHAMOS MARCADO NUMA ITERAÇÂO ANTERIOR DO LOOP, JÁ MARCAMOS UM DIFERENTE DE X, ENTÃO PELO MENOS YZ = X, JÁ QUE NÃO TEMOS MAIS X
- CASO SEJA A PRIMEIRA ITERAÇÃO, NÃO TEM X NA PALAVRA, ENTÃO, POR OBVIO, YZ >= X

4.A) SIGNIFICA CUMPRIMENTO DE DELTA

Vamos para a análise da complexidade temporal, obtida a partir das transições relevantes a cada passo.

Por convenção, vamos assumir o pior caso, para tal, temos de primeiro determinar qual o formato da pior entrada possível.

Para uma entrada computável, $\psi(x)$ tem dois possíveis cenários, o de parada ao alcançar o estado F_x e fuga para E_{out}, escapando para outro ψ ou ao módulo β.

Caso 1 - Parada em F_x

Conforme estabelecemos previamente, F_x significa

No passo 1, a máquina irá avançar até encontrar um x, como a busca pelo símbolo é linear, o custo dessa etapa escala conforme a distância do x do início da palavra. Dessa forma, o pior caso é do x estando mais ao fim possível na fita.

Caso 1 - Escape para E_{out}

pipipopo

2.2. Máquina na íntegra

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis

2.3. Análise de complexidade

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis

2.4. Exemplos

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis

3. Máquina de múltiplas fitas

3.1. Módulos

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis

3.2. Máquina na íntegra

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis

3.3. Análise de complexidade

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis

3.4. Exemplos

ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis ipsi literis