

Máquina de múltiplas fitas

Com o objetivo de apresentar uma solução mais eficiente do que a MT1, introduzimos uma Máquina de Turing determinística com múltiplas fitas, denominada MT2.

A principal motivação para o uso de múltiplas fitas é permitir uma separação clara entre as etapas de leitura, contagem, comparação e decisão. Essa separação reduz a necessidade de varreduras repetidas sobre a fita de entrada, diminuindo significativamente o custo computacional total do algoritmo, sem comprometer a corretude da solução.

Assim como a MT1, a MT2 resolve o problema descrito no enunciado: determinar qual avenida deve receber o sinal verde em um cruzamento urbano, a partir da quantidade de veículos em cada via, respeitando a política de decisão e a ordem de desempate A > B > C.

Definição formal e organização em módulos

A MT2 é definida como uma Máquina de Turing determinística de múltiplas fitas, representada pela seguinte 7-upla:

$$\text{MT2} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{final}})$$

onde:

- Q é um conjunto finito de estados;
- $\Sigma = \{A, B, C\}$ é o alfabeto de entrada;
- $\Gamma = \{A, B, C, 1, \square\}$ é o alfabeto da fita, em que \square representa o símbolo vazio;
- δ é a função de transição determinística definida sobre múltiplas fitas;
- q_0 é o estado inicial;
- q_{final} é o estado final de aceitação.

A MT2 opera com quatro fitas: uma fita de entrada e três fitas auxiliares. A fita de entrada contém a palavra que representa a distribuição de veículos, enquanto as fitas auxiliares armazenam, em notação unária, as quantidades de veículos associadas a cada avenida.

A palavra de entrada segue o formato:

$$A^i B^j C^k$$

em que i, j e k representam, respectivamente, o número de veículos nas avenidas A, B e C.

O processamento da MT2 pode ser dividido nos seguintes módulos lógicos:

- leitura da entrada e contagem das ocorrências de cada símbolo;
- cálculo do número total de veículos;
- cálculo da metade do total;
- verificação de maioria absoluta;
- escolha da maior quantidade em caso de ausência de maioria;
- escrita da decisão final.

Essa organização modular facilita a compreensão do funcionamento da máquina e permite relacionar diretamente sua arquitetura com a análise de complexidade.

Representação das fitas

Durante a execução da MT2, cada fita possui uma função bem definida. A primeira fita contém a palavra de entrada e é utilizada apenas na etapa inicial de leitura. As três fitas auxiliares registram, em notação unária, o número de ocorrências dos símbolos A, B e C , respectivamente.

Após a fase de leitura, não é necessário retornar à fita de entrada, pois todas as informações relevantes para a decisão já se encontram armazenadas nas fitas auxiliares. Esse aspecto é fundamental para a obtenção de complexidade linear.

Funcionamento da máquina

Inicialmente, a MT2 percorre a fita de entrada da esquerda para a direita. Durante essa varredura, cada ocorrência dos símbolos A , B e C é registrada nas fitas auxiliares correspondentes, por meio da escrita de um símbolo 1 para cada ocorrência.

Concluída a contagem, a máquina constrói uma representação unária do número total de veículos no cruzamento, dada por:

$$i + j + k$$

Em seguida, a MT2 calcula a metade desse total. Para isso, dois símbolos 1 são removidos por vez da fita do total, e um símbolo 1 é escrito em uma fita auxiliar para cada par removido. Caso reste um símbolo sem par, este é descartado, obtendo-se assim a representação unária de:

$$\left\lceil \frac{i + j + k}{2} \right\rceil$$

Com o valor da metade calculado, a MT2 compara as quantidades de veículos de cada avenida com esse valor. As comparações são realizadas de forma sequencial, segundo a ordem A, B e C, o que garante automaticamente o critério de desempate.

Se alguma avenida possuir uma quantidade de veículos estritamente maior que a metade do total, o processamento é encerrado imediatamente, e essa avenida é selecionada como prioritária.

Caso nenhuma avenida apresente maioria absoluta, a MT2 realiza comparações diretas entre as quantidades das avenidas, selecionando aquela com maior número de veículos. Em situações de empate, a decisão segue a ordem de prioridade $A > B > C$, conforme definido no enunciado.

Ao final do processamento, a fita de saída é limpa e a máquina escreve um único símbolo pertencente a $\{A, B, C\}$, correspondente à avenida escolhida. A execução é encerrada ao alcançar o estado q_{final} .

Análise de complexidade

Seja $n = i + j + k$ o tamanho da palavra de entrada.

A leitura inicial da fita de entrada é realizada em tempo linear. As etapas de contagem, cálculo do total, cálculo da metade e comparação entre quantidades também realizam, no pior caso, um número linear de movimentos sobre as fitas.

Dessa forma, o tempo total de execução da MT2, no pior caso, pertence à classe:

$$O(n)$$

Além disso, o número de estados da máquina é constante e independe do tamanho da entrada, isto é:

$$|Q| = O(1)$$

Quando comparada à MT1, a MT2 apresenta uma melhora assintótica significativa, reduzindo o custo total de $\Theta(n^2)$ para $O(n)$, evidenciando o impacto do uso de múltiplas fitas na eficiência do processamento.

Exemplos passo a passo

Considere a entrada:

$$A^3B^2C^1$$

Inicialmente, a MT2 registra três símbolos 1 na fita de A, dois na fita de B e um na fita de C. O total de veículos é $3 + 2 + 1 = 6$, e a metade do total é igual a 3.

Como nenhuma avenida possui quantidade estritamente maior que 3, não há maioria absoluta. A máquina então compara as quantidades individuais, identificando que a avenida A possui o maior número de veículos. Assim, a MT2 seleciona a avenida A como prioritária.

Em entradas com distribuição uniforme, como $A^2B^2C^2$, nenhuma avenida possui maioria absoluta, e todas apresentam a mesma quantidade de veículos. Nesses casos, a decisão final é sempre determinada pela ordem de prioridade A > B > C.