Experimentos con las ecuaciones de aguas poco profundas (SWE)

Reto Reynal, Juan

Estructura de la materia 1 - Departamento de Física - FCEyN, UBA

Profesor: Fernando Minotti

1. Modelo matemático: Ecuaciones de aguas poco profundas

Las ecuaciones de aguas poco profundas en 2D, en inglés: *shallow water equations* (en adelante, SWE), son ecuaciones de conservación del volumen y del momento total en cada dirección, en particular de h, uh, vh respectivamente que, en forma de flujo, tienen las siguientes expresiones:

Ec. de Continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = h\left(fv - g\frac{\partial H}{\partial x}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2 h + gh^2/2)}{\partial y} = h\left(-fu - g\frac{\partial H}{\partial y}\right) \tag{3}$$

donde $\vec{u} = (u, v, 0)^t$ es el vector velocidad del viento, $\vec{\Omega} = (0, 0, f)^t$ es la velocidad angular de rotación de la tierra de donde se desprende que f es el parámetro de Coriolis y g es el módulo de la aceleración gravitatoria terrestre. El parámetro de Coriolis es modelado a partir de una variación lineal en la coordenada y del tipo: $f = f_0 + \beta(y - \overline{y})$. Entonces $f = f_0$ se encuentra en la mitad del dominio en la dirección de la coordenada y. El gradiente de presión fue puesto junto a las derivadas parciales espaciales del lado izquierdo (en adelante, LHS).

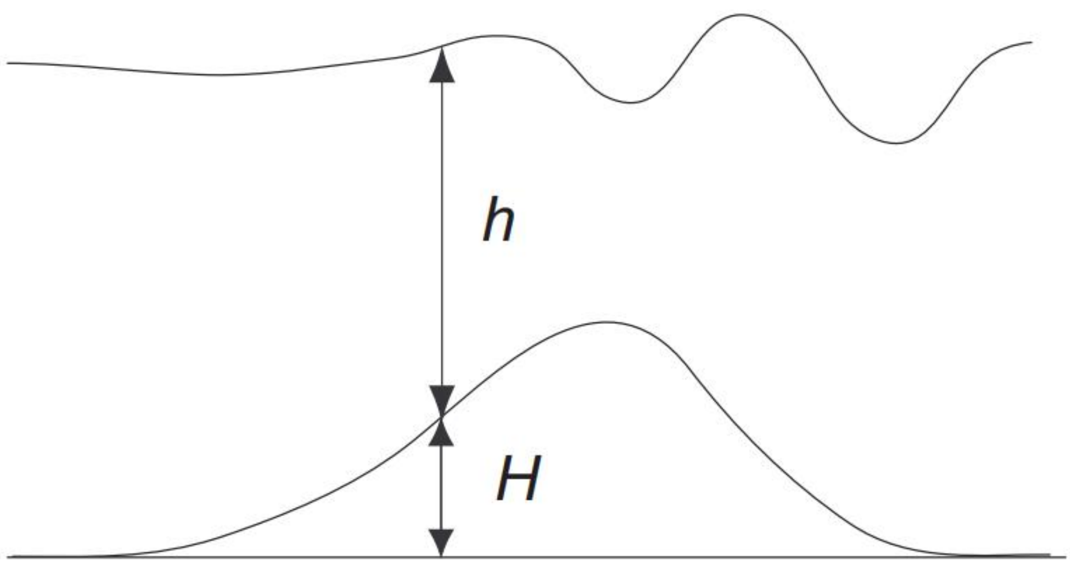

Fig. 1: Esquema del escenario modelado, donde h es la profundidad del fluido y H es la altura de la orografía.

2. Esquema numérico elegido: Lax-Wendroff

El esquema numérico elegido que va a ser integrado en el tiempo es el de Lax-Wendroff. Es un método de 2do orden tanto el tiempo como en el espacio pues el error de truncado es de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2)$. En este sentido y además por su estabilidad, es una propuesta superadora al esquema de Lax-Friedrichs que es un método de 1er orden de exactitud.

A continuación se copia un cuadro con un resumen de las ecuaciones diferenciales del modelo a la izquierda (Ecs. de Continuidad, 2 y 3) y de las ecuaciones discretizadas con el esquema de Lax-Wendroff a la derecha (Ecs. 13, 14 y 15). Todas las derivaciones de las ecuaciones del cuadro se encuentran en los apéndices.

Ec. de Continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = h\left(fv - g\frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2 h + gh^2/2)}{\partial y} = h\left(-fu - g\frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n) - \frac{1}{2}\frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n)$$

$$u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n) - \frac{1}{2}\frac{c\Delta t}{\Delta y}(u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - c\Delta t\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right]$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - c\Delta t\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right] + S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}\Delta t$$

Fig. 2: Resumen de las ecuaciones diferenciales del modelo a la izquierda y de las ecuaciones discretizadas con el esquema de Lax-Wendroff a la derecha.

Si ahora hacemos los siguientes reemplazos para reexpresar convenientemente las ecuaciones diferenciales:

$UH = uh$

$VH = vh$

$UX = hu^2 + gh^2/2$

$UY = uvh$, en la ecuación del momento de u

$VX = uvh$, en la ecuación del momento de v

$VY = hv^2 + \frac{1}{2}gh^2$

$SX = hfv - gh\frac{\partial H}{\partial x}$

$SY = -hfu - gh\frac{\partial H}{\partial y}$

De esta manera las SWE quedan de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{\partial UH}{\partial t} + \frac{\partial UX}{\partial x} + \frac{\partial UY}{\partial y} = SX} \tag{4}$$

$$\boxed{\frac{\partial VH}{\partial t} + \frac{\partial VX}{\partial x} + \frac{\partial VY}{\partial y} = SY} \tag{5}$$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0} \tag{6}$$

Finalmente, lo que hay que hacer es ahora discretizar estas ecuaciones con el esquema de Lax-Wendroff que tenemos ya resuelto para este tipo de ecuaciones. Por un lado, las de convección en 2D con un término fuente/sumidero, discretización dada por la Ec. 16, como es el caso de 4, 5 y por otro lado, la de 2D de convección común 6 cuya discretización viene dada por la Ec. 15.

A modo de ejemplo se muestra como queda discretizada con el esquema de Lax-Wendroff la solución para h:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(UH_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - UH_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(VH_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - VH_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

3. Experimentos

3.1.

4. Apéndice A: Derivaciones de las ecuaciones

4.1. Ecuación de Continuidad

La ecuación de continuidad si la densidad ρ es constante implica que la divergencia del campo de velocidades debe ser nula:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

Sea $\vec{u} = (u, v, w)^t$, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

En este modelo se considera únicamente el flujo en 2 dimensiones. Sin embargo, existe una 3era dimensión que es la altura/profundidad del fluido h. Se asume que el movimiento vertical es el mismo a través de toda la profundidad del fluido por lo que se puede integrar la ecuación de continuidad en la coordenada z entre H y $h + H$:

$$\int_{H}^{h+H} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{H}^{h+H} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{H}^{h+H} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \tag{7}$$

Para los primeros dos términos se aplica una técnica llamada en inglés *differentiation under the integral sign* (Regla integral de Leibniz):

$$\int_{H}^{H+h(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{H}^{H+h(x,y)} u dz \right) - u(x,y) \frac{\partial h}{\partial x}$$

Al evaluar la 3era integral de 7, queda $w(h+H) - w(H)$ y como $w(H) = 0$, esto es igual a la derivada total de h respecto del tiempo, $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y}$. Entonces se recupera la ecuación de continuidad que es resuelta en el modelo de las SWE:

Ec. de Continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0$$

4.2. Ecuación para la presión

Se asume que el fluido está en condiciones de un balance hidrostático:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

con ρ constante.

La ecuación hidrostática con densidad constante implica que podemos describir la presión en función de la altura z:

$$P(z) = -\rho g(z - H) + P_s(x, y, t)$$

donde H es la altura de la orografía, es decir la altura de la superficie sólida sobre la que se apoya el fluido como por ejemplo las montañas. Imponiendo la condición de contorno $P(z = h + H) = 0$ se determina P_s:

$$P(z) = -\rho g(z - (H + h)) \tag{8}$$

4.2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en 2D

Las ecuaciones de Navier-Stokes en 2D son las ecuaciones no conservativas del momento en el plano x-y:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{10}$$

Se observa que las Ecs. 9 y 10 contienen varios términos no lineales, que no pueden ser discretizados fácilmente con algún esquema numérico.

Si se utiliza la Ec. 8 se obtiene que el RHS de las Ecs. 9 y 10 puede ser reemplazado por:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -g\frac{\partial(h + H)}{\partial x}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -g\frac{\partial(h + H)}{\partial y}$$

Para obtener las Ecs. 2 y 3, utilizamos las ecuaciones no conservativas del momento horizontal 9 y 10 junto a la ecuación de continuidad para derivar las ecuaciones conservativas del momento horizontal.

En primer lugar se multiplica por h a las Ecs. 9 y 10:

$$h\frac{\partial u}{\partial t} + hu\frac{\partial u}{\partial x} + hv\frac{\partial u}{\partial y} = fhv - hg\frac{\partial(h + H)}{\partial x} \tag{11}$$

$$h\frac{\partial v}{\partial t} + hu\frac{\partial v}{\partial x} + hv\frac{\partial v}{\partial y} = -fhu - hg\frac{\partial(h + H)}{\partial y} \tag{12}$$

Luego se suma el producto de u y la ecuación de continuidad a la Ec. 11 por un lado y por el otro lado se suma el producto de v y la ecuación de continuidad a la Ec. 12. Para el caso de u esto resulta:

$$h\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial (hu)}{\partial x} + u\frac{\partial (hv)}{\partial y} + hu\frac{\partial u}{\partial x} + hv\frac{\partial u}{\partial y} = fhv - hg\frac{\partial (h+H)}{\partial x}$$

Usando la regla de la derivada del producto se obtienen las ecuaciones de conservación del momento de las SWE, Ecs. 2 y 3:

$$\boxed{\frac{\partial uh}{\partial t} + \frac{\partial (u^2h + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial (uvh)}{\partial y} = h\left(fv - g\frac{\partial H}{\partial x}\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial vh}{\partial t} + \frac{\partial (uvh)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2h + gh^2/2)}{\partial y} = h\left(-fu - g\frac{\partial H}{\partial y}\right)}$$

5. Apéndice B: Derivación del esquema numérico de Lax-Wendroff

Consideremos la ecuación 1D de convección:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

La receta para obtener el esquema de Lax-Wendroff es:

1. Expansión de Taylor en el tiempo alrededor de u_i^n y nos quedamos hasta $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.
2. Se deriva respecto del tiempo la ecuación 1D de convección $u_t + cu_x$, resultando $u_{tt} = -c(u_t)_x$. En esta última expresión se reemplaza la ecuación 1D de convección obteniéndose $u_{tt} = c^2 u_{xx} \rightarrow$ se lo reemplaza en la expansión de Taylor del paso 1.
3. Se discretizan las derivadas espaciales utilizando diferencias centradas.

De esta forma se obtiene el esquema de Lax-Wendroff:

$$u(x_i, t_{n+1}) = u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{c^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

El error de truncado es de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$ por lo que se dice que el método tiene una exactitud de 2do orden.

Al mismo tiempo, este método puede ser modificado a uno de dos pasos en donde cada paso individual está centrado tanto en el tiempo como en el espacio:

Paso 1 - Lax-Friedrichs

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} = -c\left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right)$$

Paso 2 - Leapfrog

$$\frac{u_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i-1}^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} = -c\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right)$$

En el segundo paso, u_i^{n+1} sale de computar:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c\left(\frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right)$$

El stencil del esquema se muestra en la Fig. 3.

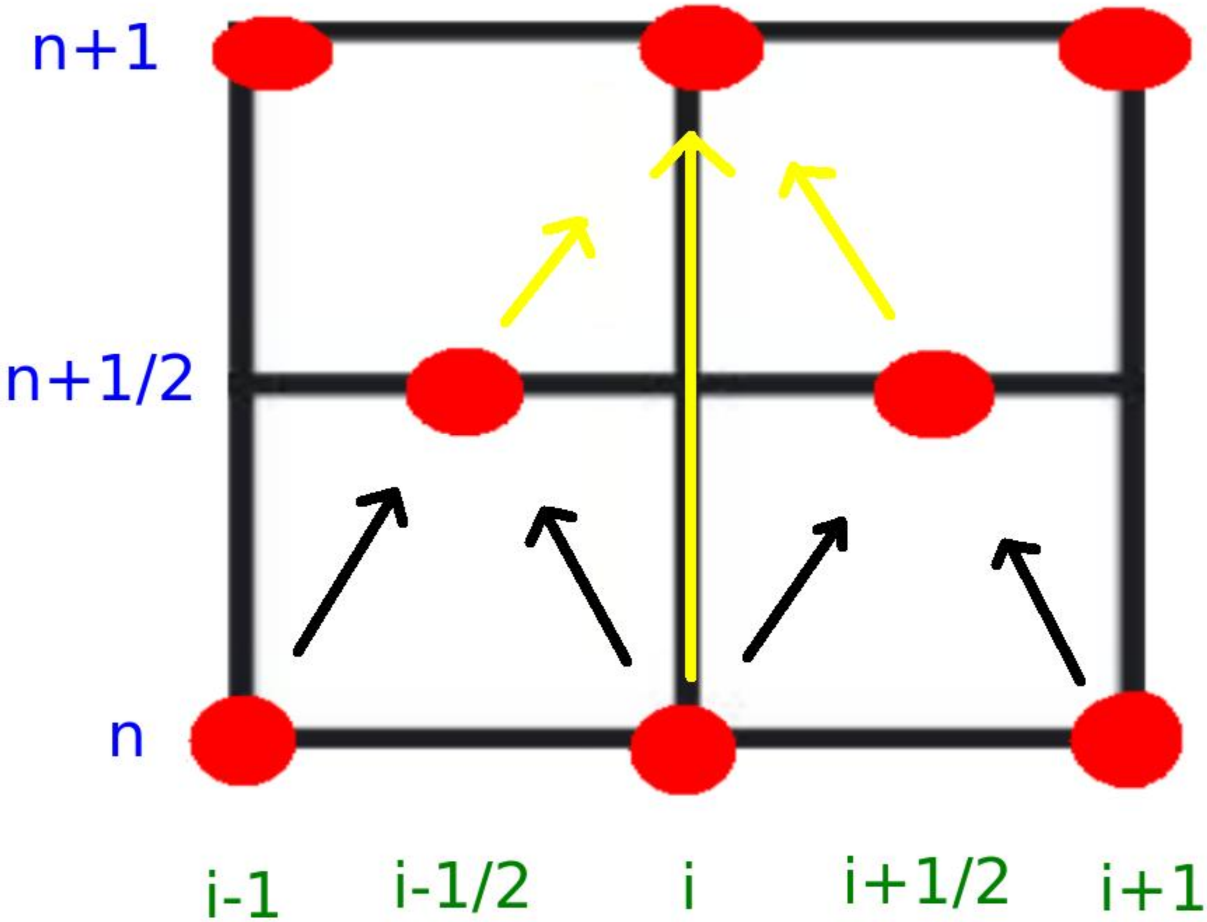

Fig. 3: Esquema numérico de Lax-Wendroff.

Si se extiende el esquema de dos pasos a 2D, para la ecuación de convección en 2D, se obtiene:

$$\boxed{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}^{n} + u_{i,j}^{n}) - \frac{1}{2}\frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1,j}^{n} - u_{i,j}^{n})} \tag{13}$$

$$\boxed{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i,j+1}^{n} + u_{i,j}^{n}) - \frac{1}{2}\frac{c\Delta t}{\Delta y}(u_{i,j+1}^{n} - u_{i,j}^{n})} \tag{14}$$

$$\boxed{u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - c\Delta t\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y}\right]} \tag{15}$$

Si tenemos un término fuente / sumidero, sólo tiene que ser agregado en el RHS de la Ec. 15:

$$\boxed{u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n} - c\Delta t \left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] + S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t} \tag{16}$$