Demostración de Estimadores en Datos Panel

Ricardo Hernandez, Andres Serrano y Laura Rodriguez creditos a: J.MarceloOchoa (2009)

2025-03-28

title: "Demostración: Equivalencia entre Efectos Fijos y Primeras Diferencias para T=2" output: pdf_document —

Demostración

Considere el modelo de datos panel para $T = 2$:

$$y_{it} = x_{it}\beta + \alpha_i + \epsilon_{it}, \quad t = 1, 2$$

donde α_i es el efecto individual no observable.

---

1. Estimador de Primeras Diferencias (DE)

Se calcula la diferencia entre $t = 2$ y $t = 1$ para eliminar α_i:

$$\Delta y_i = y_{i2} - y_{i1} = (x_{i2} - x_{i1})\beta + (\epsilon_{i2} - \epsilon_{i1})$$

$$\Delta y_i = \Delta x_i \beta + \Delta \epsilon_i$$

El estimador DE se obtiene mediante MCO:

$$\hat{\beta}_{DE} = \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i' \Delta x_i\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i' \Delta y_i$$

---

2. Estimador de Efectos Fijos (FE)

Se elimina α_i restando las medias temporales:

$$y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)\beta + (\epsilon_{it} - \bar{\epsilon}_i),$$

donde $\bar{y}_i = \frac{y_{i1}+y_{i2}}{2}$, $\bar{x}_i = \frac{x_{i1}+x_{i2}}{2}$, y $\bar{\epsilon}_i = \frac{\epsilon_{i1}+\epsilon_{i2}}{2}$.

El estimador FE es:

$$\hat{\beta}_{FE} = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{2} (x_{it} - \bar{x}_i)'(x_{it} - \bar{x}_i)\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{2} (x_{it} - \bar{x}_i)'(y_{it} - \bar{y}_i)$$

---

3. Expandimos cada componente y simplificamos

Paso 1: Simplificar las sumatorias en FE

Para $T = 2$, las variables centradas son:

$$x_{i1} - \bar{x}_i = \frac{x_{i1} - x_{i2}}{2}, \quad x_{i2} - \bar{x}_i = \frac{x_{i2} - x_{i1}}{2}$$

La suma de cuadrados en FE es:

$$\sum_{t=1}^{2}(x_{it} - \bar{x}_i)'(x_{it} - \bar{x}_i) = \frac{(\Delta x_i)'(\Delta x_i)}{2}$$

La suma cruzada es:

$$\sum_{t=1}^{2}(x_{it} - \bar{x}_i)'(y_{it} - \bar{y}_i) = \frac{(\Delta x_i)'(\Delta y_i)}{2}$$

Paso 2: Sustituir en $\hat{\beta}_{FE}$

$$\hat{\beta}_{FE} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta x_i' \Delta x_i}{2}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta x_i' \Delta y_i}{2}$$

Factorizando $\frac{1}{2}$:

$$\hat{\beta}_{FE} = \left[\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i' \Delta x_i\right]^{-1} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i' \Delta y_i = \hat{\beta}_{DE}$$

Conclusión

Para $T = 2$, los estimadores de **efectos fijos** y **primeras diferencias** son idénticos:

$$\boxed{\hat{\beta}_{FE} = \hat{\beta}_{DE}}$$