Mathematical Modeling Mastery II: Tackling Daily Challenge

Gabriel Jonathan

Workshop 2 MMC 2024

March 2024

Outline

1. Translating Real World Problems to Math

2. AI in Mathematical Modeling

1. Translating Real World Problems to Math


detikcom

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Asumsi dan batasan:

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Asumsi dan batasan:

1. Jalan raya 1-D (1 arah)

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Asumsi dan batasan:

1. Jalan raya 1-D (1 arah)
2. Kendaraan : mobil, identik

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Asumsi dan batasan:

1. Jalan raya 1-D (1 arah)
2. Kendaraan : mobil, identik
3. Tidak ada salip menyalip antar mobil

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Asumsi dan batasan:

1. Jalan raya 1-D (1 arah)
2. Kendaraan : mobil, identik
3. Tidak ada salip menyalip antar mobil
4. Tidak ada persimpangan (mobil keluar masuk selain mengikuti jalan lurus)

Deskripsi Masalah

Buatlah model matematika untuk mendeskripsikan arus lalu lintas di jalan raya.

Apa yang Anda peroleh dari deskripsi diatas?

Asumsi dan batasan:

1. Jalan raya 1-D (1 arah)
2. Kendaraan : mobil, identik
3. Tidak ada salip menyalip antar mobil
4. Tidak ada persimpangan (mobil keluar masuk selain mengikuti jalan lurus)
5. Panjang jalan berhingga (L meter)

Sketsa

Apa saja informasi yang kita punya?

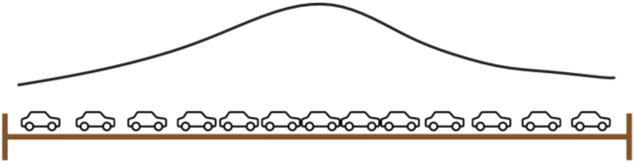
Sketsa

Apa saja informasi yang kita punya?

Sketsa

Apa saja informasi yang kita punya?

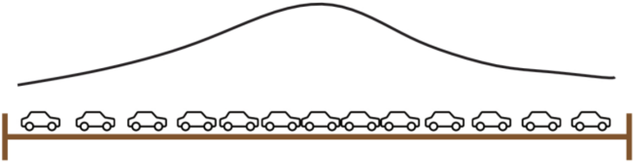
Informasi apa yang bisa kita modelkan?



Sketsa

Apa saja informasi yang kita punya?

Informasi apa yang bisa kita modelkan?

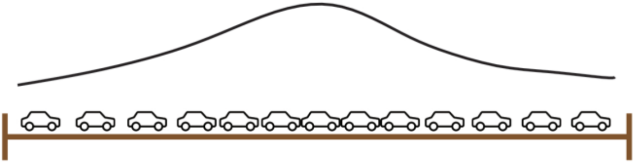


Konsentrasi/Densitynya!

Sketsa

Apa saja informasi yang kita punya?

Informasi apa yang bisa kita modelkan?



Konsentrasi/Densitynya! **Tujuan :** Memodelkan konsentrasi mobil pada suatu segmen jalan.

Variabel

Pada titik x dan waktu t, definisikan:

- $n(x,t)$: density/kepadatan mobil (mobil/km)
- $v(x,t)$: rerata kecepatan mobil (km/jam)
- $f(x,t)$: laju aliran mobil (mobil/jam)

Variabel

Pada titik x dan waktu t, definisikan:

- $n(x, t)$: density/kepadatan mobil (mobil/km)
- $v(x, t)$: rerata kecepatan mobil (km/jam)
- $f(x, t)$: laju aliran mobil (mobil/jam)

Apakah ada hubungan antar tiap fungsi diatas?

Variabel

Pada titik x dan waktu t, definisikan:

- $n(x, t)$: density/kepadatan mobil (mobil/km)
- $v(x, t)$: rerata kecepatan mobil (km/jam)
- $f(x, t)$: laju aliran mobil (mobil/jam)

Apakah ada hubungan antar tiap fungsi diatas? Ada, perhatikan bahwa $f = nv$.

Definisikan $N(a, b, t)$ sebagai **banyaknya mobil pada segmen** $[a, b]$ **di waktu** t.

$$N(a, b, t) = \int_a^b n(x, t)\, \mathrm{d}x$$

Definisikan $N(a, b, t)$ sebagai **banyaknya mobil pada segmen** $[a, b]$ **di waktu** t.

$$N(a, b, t) = \int_a^b n(x, t)\, \mathrm{d}x$$

Ambil suatu potongan segmen jalan pada rentang $[a, b]$.

Definisikan $N(a, b, t)$ sebagai **banyaknya mobil pada segmen** $[a, b]$ **di waktu** t.

$$N(a, b, t) = \int_a^b n(x, t)\, \mathrm{d}x$$

Ambil suatu potongan segmen jalan pada rentang $[a, b]$.

Pada waktu t, berlaku:

Perubahan jumlah mobil = Jumlah mobil masuk - Jumlah mobil keluar

Definisikan $N(a, b, t)$ sebagai **banyaknya mobil pada segmen** $[a, b]$ **di waktu** t.

$$N(a, b, t) = \int_a^b n(x, t)\, \mathrm{d}x$$

Ambil suatu potongan segmen jalan pada rentang $[a, b]$.

Pada waktu t, berlaku:

Perubahan jumlah mobil = Jumlah mobil masuk - Jumlah mobil keluar

$$\implies \frac{\partial N}{\partial t}(a, b, t) = f(a, t) - f(b, t)$$

Definisikan $N(a,b,t)$ sebagai **banyaknya mobil pada segmen** $[a,b]$ **di waktu** t.

$$N(a,b,t) = \int_a^b n(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Ambil suatu potongan segmen jalan pada rentang $[a,b]$.

Pada waktu t, berlaku:

Perubahan jumlah mobil = Jumlah mobil masuk - Jumlah mobil keluar

$$\implies \frac{\partial N}{\partial t}(a,b,t) = f(a,t) - f(b,t)$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^b n(x,t)\,\mathrm{d}x\right) = f(a,t) - f(b,t)$$

Karena integrasi hanya terhadap posisi (x), kita bisa tuliskan

$$\int_a^b \frac{\partial n}{\partial t}(x, t)\,\mathrm{d}x = f(a, t) - f(b, t)$$

Karena integrasi hanya terhadap posisi (x), kita bisa tuliskan

$$\int_a^b \frac{\partial n}{\partial t}(x, t)\, \mathrm{d}x = f(a, t) - f(b, t)$$

Perhatikan bahwa persamaan tersebut berlaku untuk setiap titik $[a, b]$ pada domain. Misalkan a suatu titik tetap dan x titik sebarang dengan $a \leq x$, maka berlaku

$$\int_a^x \frac{\partial n}{\partial t}(s, t)\, \mathrm{d}s = f(a, t) - f(x, t)$$

Karena integrasi hanya terhadap posisi (x), kita bisa tuliskan

$$\int_a^b \frac{\partial n}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x = f(a,t) - f(b,t)$$

Perhatikan bahwa persamaan tersebut berlaku untuk setiap titik $[a,b]$ pada domain. Misalkan a suatu titik tetap dan x titik sebarang dengan $a \leq x$, maka berlaku

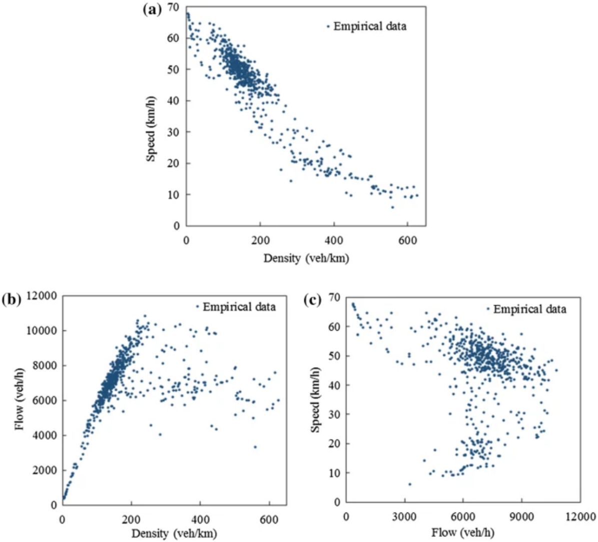
$$\int_a^x \frac{\partial n}{\partial t}(s,t)\,\mathrm{d}s = f(a,t) - f(x,t)$$

Turunkan kedua ruas terhadap x, maka diperoleh

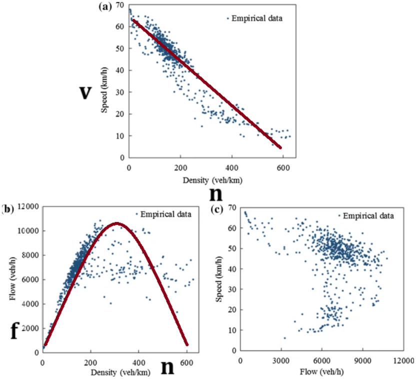
$$\begin{gathered}\frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \\ \implies n_t + (nv)_x = 0\end{gathered}$$

Kita peroleh bahwa $n_t + (nv)_x = 0$. Ada suku v yang perlu didefinisikan.

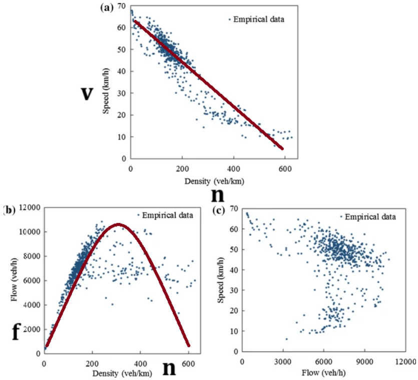
Kita peroleh bahwa $n_t + (nv)_x = 0$. Ada suku v yang perlu didefinisikan. Anda dapat memanfaatkan data dari paper atau studi yang pernah dilakukan.



Gambar: Data studi traffic flow. (Source)



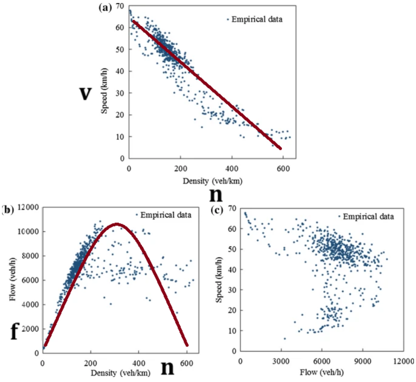
Kita dapat tuliskan $v(n) = pn + q$ dan $f(n) = nv = pn^2 + qn$ untuk suatu p, q.



Kita dapat tuliskan $v(n) = pn + q$ dan $f(n) = nv = pn^2 + qn$ untuk suatu p, q.

- Kecepatan $v(n)$ bernilai maksimal saat $n = 0$
- Kecepatan $v(n)$ bernilai nol saat n maksimal

Misal V_f : kecepatan *free flow* atau maksimal saat jalan kosong dan n_{max} adalah kepadatan maksimal mobil pada jalan.



Kita dapat tuliskan $v(n) = pn + q$ dan $f(n) = nv = pn^2 + qn$ untuk suatu p, q.

- Kecepatan $v(n)$ bernilai maksimal saat $n = 0$
- Kecepatan $v(n)$ bernilai nol saat n maksimal

Misal V_f : kecepatan *free flow* atau maksimal saat jalan kosong dan n_{max} adalah kepadatan maksimal mobil pada jalan. Didapatkan $p = -\dfrac{V_f}{n_{\max}}$ dan $q = V_f$ sehingga diperoleh

$$v(n) = V_f \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right)$$

Diperoleh model akhir untuk kepadatan lalu lintas jalan raya adalah

$$\frac{\partial n}{\partial t} + V_f \left(1 - \frac{2n}{n_{max}}\right) \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

pada domain $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ dengan syarat awal $n(x, 0) = n_0(x)$.
Apa langkah selanjutnya?

Diperoleh model akhir untuk kepadatan lalu lintas jalan raya adalah

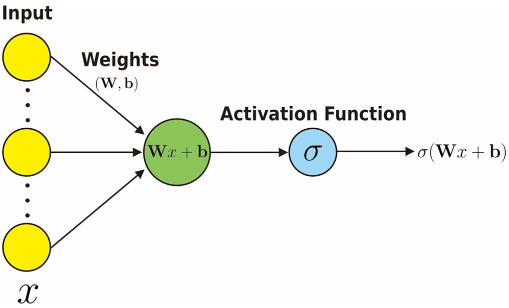
$$\frac{\partial n}{\partial t} + V_f \left(1 - \frac{2n}{n_{max}}\right) \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

pada domain $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ dengan syarat awal $n(x, 0) = n_0(x)$.
Apa langkah selanjutnya?
Anda perlu memberikan argumen bahwa model tersebut sudah tepat, melalui:

- Uji performa model
- Simulasi
- dan lain - lain

2. AI in Mathematical Modeling

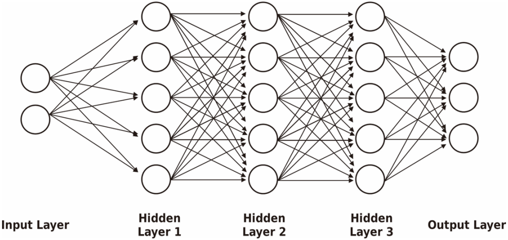
Perceptron



Perceptron adalah suatu fungsi yang dibuat mengikuti jaringan syaraf manusia. Dapat kita pandang sebagai suatu fungsi $N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dengan

- x : input $\in \mathbb{R}^m$
- W : weight $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
- b : bias $\in \mathbb{R}^n$
- σ : activation function

Neural Networks



Gambar: Contoh Neural Networks

Neural network diatas dapat dipandang sebagai suatu fungsi $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

- $x \mapsto \sigma_1(W_1 x + b_1)$ **(1st layer)**
- $x \mapsto \sigma_2(W_2(\sigma_1(W_1 x + b_1)) + b_2)$ **(1st-2nd layer)**
- $x \mapsto \sigma_3(W_3(\sigma_2(W_2(\sigma_1(W_1 x + b_1)) + b_2)) + b_3)$ **(1st-3rd layer)**

Neural Network as Universal Approximator

Prinsipnya, neural network dapat digunakan untuk mengaproksimasi sebarang fungsi

Neural Network as Universal Approximator

Prinsipnya, neural network dapat digunakan untuk mengaproksimasi sebarang fungsi

Kita dapat membangun suatu neural network untuk menghampiri suatu solusi bagi persamaan diferensial (biasa maupun parsial) dengan cara:

- Lakukan fitting untuk output dari neural network tersebut terhadap titik yang sudah kita ketahui memenuhi persamaan diferensial (biasanya dari syarat batas atau kondisi awal)
- Bangun **loss function** sedemikian rupa sehingga output dari neural network memenuhi persamaan diferensial (memanfaatkan **automatic differentiation**)

Menemukan Solusi PDP

Umumnya untuk memperoleh solusi suatu persamaan diferensial parsial, Anda dapat:

- Menghitung solusi analitik

Menemukan Solusi PDP

Umumnya untuk memperoleh solusi suatu persamaan diferensial parsial, Anda dapat:

- Menghitung solusi analitik $\Longrightarrow$ Sulit karena sebagian besar solusi analitiknya belum ditemukan

Menemukan Solusi PDP

Umumnya untuk memperoleh solusi suatu persamaan diferensial parsial, Anda dapat:

- Menghitung solusi analitik $\Longrightarrow$ Sulit karena sebagian besar solusi analitiknya belum ditemukan
- Menghitung solusi numerik

Menemukan Solusi PDP

Umumnya untuk memperoleh solusi suatu persamaan diferensial parsial, Anda dapat:

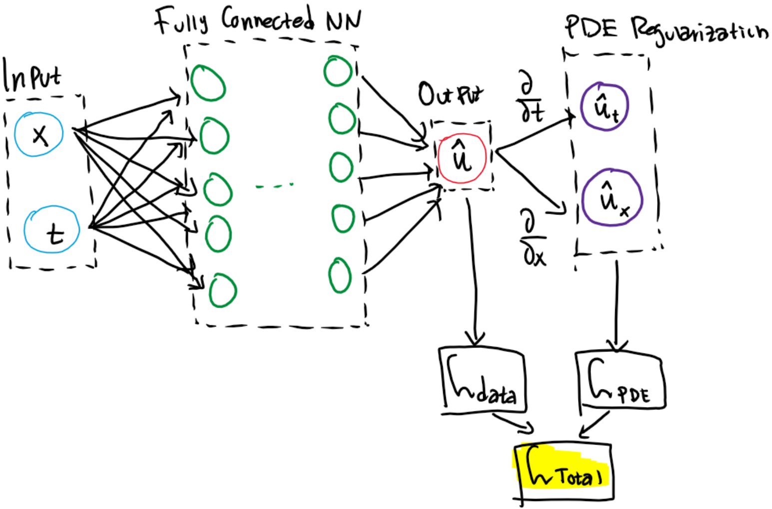
- Menghitung solusi analitik $\implies$ Sulit karena sebagian besar solusi analitiknya belum ditemukan
- Menghitung solusi numerik $\implies$ Computationally Heavy dan sulit karena perlu menurunkan skema numerik

Menemukan Solusi PDP

Umumnya untuk memperoleh solusi suatu persamaan diferensial parsial, Anda dapat:

- Menghitung solusi analitik $\implies$ Sulit karena sebagian besar solusi analitiknya belum ditemukan
- Menghitung solusi numerik $\implies$ Computationally Heavy dan sulit karena perlu menurunkan skema numerik
- Menggunakan Neural Network (PINN)

Arsitektur



Fully Connected NN
PDE Regularization
Input
x
t
Output
$\hat{u}$
$\frac{\partial}{\partial t}$
$\frac{\partial}{\partial x}$
$\hat{u}_t$
$\hat{u}_x$
L_{data}
L_{PDE}
L_{Total}

Loss Function Formulation

Pandang persamaan Burgers berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

1. Loss Function Syarat Awal
   Definisikan
   $$\mathcal{L}_a = \frac{1}{N_a}\sum_{i=1}^{N_a} |\hat{u}(x_i^a, 0) - f(x_i^a)|^2$$
2. Loss Function PDP
   Dengan $g(x,t) = u_t + uu_x$, definisikan:
   $$\mathcal{L}_p = \frac{1}{N_p}\sum_{i=1}^{N_p} |g(x_i^p, t_i^p)|^2$$

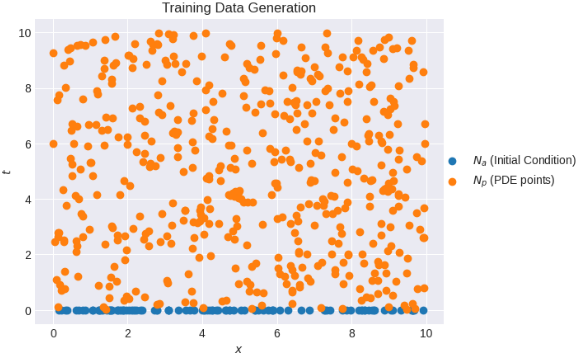
$$\mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_p + \mathcal{L}_a$$

Loss Function Formulation

Pandang persamaan Burgers berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

pada domain $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$ dengan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$.



Gambar: Ilustrasi sampling

Demonstrasi

Link menuju Google Colab : URL
atau `bit.ly/WorkshopMMC2024`

Referensi

SR Pudjaprasetya
Transport Phenomena, Equations and Numerical Methods. 2018

Raissi, Maziar and Perdikaris, Paris and Karniadakis, George E
Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. 2019