Facultad de Ciencias UNAM

Álgebra matricial numérica. Unidad 2. Conceptos básicos del álgebra matricial

Dr. Javier de Jesús Cortés Aguirre.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Semestre: septiembre 2021 - enero 2022.

Introducción

En cursos previos de la carrera se ha realizado el estudio de las normas vectoriales y sus propiedades.

Introducción

En cursos previos de la carrera se ha realizado el estudio de las normas vectoriales y sus propiedades.

En esta unidad estudiaremos la definición de una norma matricial, los diferentes tipos de normas y sus propiedades.

Definición

Norma matricial.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, definimos a su norma matricial como:*

$$||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Definición

Norma matricial.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*, definimos a su norma matricial como:*

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Esta definición puede escribirse también en términos de vectores unitarios:

Definición

Norma matricial.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$*, definimos a su norma matricial como:*

$$||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}$$

Esta definición puede escribirse también en términos de vectores unitarios:

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$$

La idea principal de la definición anterior es medir, en términos de una norma determinada, que tanto afecta la matriz A al conjunto de vectores x no nulos.

La idea principal de la definición anterior es medir, en términos de una norma determinada, que tanto afecta la matriz A al conjunto de vectores x no nulos.

A continuación lo ilustraremos con algunos ejemplos.

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$.

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$.

Para resolver este ejemplo utilizaremos la definición

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$$

evaluando algunos vectores unitarios

Tomemos los vectores unitarios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tomemos los vectores unitarios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$||v_i||_1 = 1, \quad i = 1, ..., 4$$

Tomemos los vectores unitarios:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$||v_i||_1 = 1, \quad i = 1, ..., 4$$

Veamos que pasa al multiplicarlos por la matriz A.

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

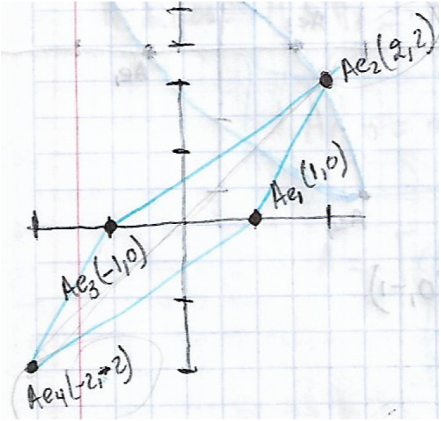
$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Si realizaramos el mapeo de todos los vectores unitarios obtendríamos algo de la forma:

Si realizaramos el mapeo de todos los vectores unitarios obtendríamos algo de la forma:



Por tanto el maximo de todas las normas debe estar en las esquinas del paralelogramo, así nos queda que:

Por tanto el maximo de todas las normas debe estar en las esquinas del paralelogramo, así nos queda que:

$$||A||_1 = \sup_{||x||_1=1} ||Ax||_1 =$$

Por tanto el maximo de todas las normas debe estar en las esquinas del paralelogramo, así nos queda que:

$$||A||_1 = \sup_{||x||_1=1} ||Ax||_1 = 4$$

Tarea 1

Tarea

Para el ejemplo anterior calcule $||A||_\infty$

Las normas matriciales que estudiamos en la sección anterior pueden escribirse en una forma más compacta, la cual es más fácil de utilizar numericamente.

Las normas matriciales que estudiamos en la sección anterior pueden escribirse en una forma más compacta, la cual es más fácil de utilizar numericamente.

A continuación veremos algunas de ellas.

Definición

Formas compactas de las normas 1 y ∞.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ podemos definir a sus normas 1 y ∞ de la siguiente forma:

$$||A||_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$ y $||A||_\infty$.

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$ y $||A||_\infty$.

$$||A||_1 \quad = \quad \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$ y $||A||_\infty$.

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \\ &= \max\{1, 4\} \end{aligned}$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$ y $||A||_\infty$.

$$\begin{aligned} ||A||_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \\ &= \max\{1, 4\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$||A||_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\begin{aligned} ||A||_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ &= \max\{3, 2\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
||A||_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\
&= \max\{3, 2\} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Definición

Norma de Frobenius.

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *definimos a su norma de Frobenius de la siguientes forma:*

$$||A||_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_F$.

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_F$.

$$||A||_F = \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_F$.

$$\begin{aligned} ||A||_F &= \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left((1)^2 + (2)^2 + (0)^2 + (2)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_F$.

$$\begin{aligned} ||A||_F &= \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left((1)^2 + (2)^2 + (0)^2 + (2)^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{9} \end{aligned}$$

Ejemplos

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_F$.

$$\begin{aligned} ||A||_F &= \left(\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left((1)^2 + (2)^2 + (0)^2 + (2)^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Tarea 2

Tarea

Para la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule $||A||_1$, $||A||_\infty$ *y* $||A||_F$

Algunas propiedades de las normas matriciales

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las normas matriciales que serán de gran importancia en las unidades siguientes.

Definición

Desigualdad del triángulo y propiedad de consistencia.

Dadas dos matrices A y B se cumplen las siguientes propiedades:

- $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$ *(desigualdad de triangulo)*
- $||AB|| \leq ||A|| ||B||$ *(propiedad de consistencia)*

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

verifique las propiedades anteriores utilizando la norma 1.

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

verifique las propiedades anteriores utilizando la norma 1.

Observemos primero que:

$$||A||_1 =$$

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

verifique las propiedades anteriores utilizando la norma 1.

Observemos primero que:

$$||A||_1 = 4$$

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

verifique las propiedades anteriores utilizando la norma 1.

Observemos primero que:

$$||A||_1 = 4$$

$$||B||_1 =$$

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

verifique las propiedades anteriores utilizando la norma 1.

Observemos primero que:

$$||A||_1 = 4$$

$$||B||_1 = 8$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B =$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||A + B||_1 =$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||A + B||_1 = 7$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||A + B||_1 = 7$$

por tanto como

$$||A||_1 + ||B||_1 =$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||A + B||_1 = 7$$

por tanto como

$$||A||_1 + ||B||_1 = 12$$

Verifiquemos primero la desigualdad del triángulo:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||A + B||_1 = 7$$

por tanto como

$$||A||_1 + ||B||_1 = 12$$

se cumple que:

$$||A + B||_1 \leq ||A||_1 + ||B||_1$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB =$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||AB||_1 =$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||AB||_1 = 17$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||AB||_1 = 17$$

por tanto como

$$||A||_1 ||B||_1 =$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||AB||_1 = 17$$

por tanto como

$$||A||_1||B||_1 = (4)(8) = 32$$

Verifiquemos ahora la propiedad de consistencia:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$||AB||_1 = 17$$

por tanto como

$$||A||_1||B||_1 = (4)(8) = 32$$

se cumple que:

$$||AB||_1 \leq ||A||_1||B||_1$$

Propiedad de invarianza

Teorema

Para cualquier matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *y una matriz ortogonal* $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$*, tenemos que:*

$$||QA||_2 = ||A||_2, \quad ||QA||_F = ||A||_F$$

Realicemos la demostración para la norma 2.

Realicemos la demostración para la norma 2.

De nuestros cursos previos de álgebra lineal, sabemos que para un vector cualesquiera x

$$||x||_2 =$$

Realicemos la demostración para la norma 2.

De nuestros cursos previos de álgebra lineal, sabemos que para un vector cualesquiera x

$$||x||_2 = (x^t x)^{1/2}$$

Realicemos la demostración para la norma 2.

De nuestros cursos previos de álgebra lineal, sabemos que para un vector cualesquiera x

$$||x||_2 = (x^t x)^{1/2}$$

entonces

$$||Qx||_2 \quad =$$

Realicemos la demostración para la norma 2.

De nuestros cursos previos de álgebra lineal, sabemos que para un vector cualesquiera x

$$||x||_2 = (x^t x)^{1/2}$$

entonces

$$||Qx||_2 \quad = \quad ((Qx)^t (Qx))^{1/2}$$

Realicemos la demostración para la norma 2.

De nuestros cursos previos de álgebra lineal, sabemos que para un vector cualesquiera x

$$||x||_2 = (x^t x)^{1/2}$$

entonces

$$\begin{aligned} ||Qx||_2 &= ((Qx)^t (Qx))^{1/2} \\ &= (x^t Q^t Qx)^{1/2} \end{aligned}$$

Pero como Q es ortogonal y cuadrada, entonces $Q^t Q = I$, asi nos queda que:

Pero como Q es ortogonal y cuadrada, entonces $Q^tQ = I$, asi nos queda que:

$$||Qx||_2 = (x^tx)^{1/2}$$

Pero como Q es ortogonal y cuadrada, entonces $Q^tQ = I$, asi nos queda que:

$$\begin{aligned} ||Qx||_2 &= (x^tx)^{1/2} \\ &= ||x||_2 \end{aligned}$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

pero como

$$||Qx||_2 = ||x||_2$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

pero como

$$||Qx||_2 = ||x||_2$$

entonces

$$||QAx||_2 =$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

pero como

$$||Qx||_2 = ||x||_2$$

entonces

$$||QAx||_2 = ||Ax||_2$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

pero como

$$||Qx||_2 = ||x||_2$$

entonces

$$||QAx||_2 = ||Ax||_2$$

Por tanto

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

pero como

$$||Qx||_2 = ||x||_2$$

entonces

$$||QAx||_2 = ||Ax||_2$$

Por tanto

$$\begin{aligned} ||QA||_2 &= \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2 \\ &= \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2 \end{aligned}$$

Ahora, por la definición de norma matricial, sabemos que:

$$||QA||_2 = \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2$$

pero como

$$||Qx||_2 = ||x||_2$$

entonces

$$||QAx||_2 = ||Ax||_2$$

Por tanto

$$\begin{aligned} ||QA||_2 &= \sup_{||x||_2=1} ||QAx||_2 \\ &= \sup_{||x||_2=1} ||Ax||_2 \\ &= ||A||_2 \end{aligned}$$

Tarea 3

Tarea

Sea la matriz

$$Q = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

1. *Verifique que es ortogonal* ($Q^{-1} = Q^t$)
2. *Verifique que satisface la propiedad de invarianza para la norma 2 y la norma de Frobenuis utilizando una matriz A de su elección (puede utilizar el comando norm de Matlab/Octave).*