Álgebra matricial numérica. Unidad 1. Problemas del álgebra lineal, su importancia y dificultades numéricas

Dr. Javier de Jesús Cortés Aguirre.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Semestre: marzo - julio 2021.

1. Introducción a los problemas fundamentales del Álgebra Lineal y su importancia
   - Introducción
   - Álgebra matricial
   - Cálculo de determinantes
   - Solución de sistemas de ecuaciones lineales
   - Espacios vectoriales

2. Dificultades numéricas
   - Álgebra matricial y cálculo de determinantes
   - Solución de sistemas de ecuaciones lineales
   - Espacios vectoriales

1. Introducción a los problemas fundamentales del Álgebra Lineal y su importancia
   - Introducción
   - Álgebra matricial
   - Cálculo de determinantes
   - Solución de sistemas de ecuaciones lineales
   - Espacios vectoriales

2. Dificultades numéricas
   - Álgebra matricial y cálculo de determinantes
   - Solución de sistemas de ecuaciones lineales
   - Espacios vectoriales

Introducción

El Álgebra Lineal es una rama de las matemáticas que tiene una gran cantidad de aplicaciones, además de tener un gran soporte teórico.

Introducción

El Álgebra Lineal es una rama de las matemáticas que tiene una gran cantidad de aplicaciones, además de tener un gran soporte teórico.

En esta sección repasaremos algunos de los problemas fundamentales del Álgebra Lineal y su importancia.

Álgebra matricial

El Álgebra Lineal es principalmente el Álgebra de matrices, define desde lo que es una matriz hasta operaciones fundamentales con las mismas.

Álgebra matricial

El Álgebra Lineal es principalmente el Álgebra de matrices, define desde lo que es una matriz hasta operaciones fundamentales con las mismas.

Además de caracterizar algunas matrices especiales que pueden servir para diferentes procesos.

Definición

Matriz.

Definimos a una matriz como un arreglo de valores de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

- Matriz inversa (A^{-1}).

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

- Matriz inversa (A^{-1}).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

- Matriz inversa (A^{-1}).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Matriz transpuesta (A^t).

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

- Matriz inversa (A^{-1}).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Matriz transpuesta (A^t).
- Matriz adjunta.

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

- Matriz inversa (A^{-1}).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Matriz transpuesta (A^t).
- Matriz adjunta.
- Matriz ortogonal (Q).

Algunas matrices especiales son:

- Matrices triángulares y diagonales.
- Matriz identidad (I).

$$AI = IA = A$$

- Matriz inversa (A^{-1}).

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- Matriz transpuesta (A^t).
- Matriz adjunta.
- Matriz ortogonal (Q).

$$Q^{-1} = Q^t$$

Importancia

Las matrices pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Solución de sistemas de ecuaciones.

Importancia

Las matrices pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Solución de sistemas de ecuaciones.
- El uso de fotografías digitales.

Importancia

Las matrices pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Solución de sistemas de ecuaciones.
- El uso de fotografías digitales.
- La discretización de dominios para realizar simulaciones computacionales sobre los mismos.

Importancia

Las matrices pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Solución de sistemas de ecuaciones.
- El uso de fotografías digitales.
- La discretización de dominios para realizar simulaciones computacionales sobre los mismos.
- Buscadores de internet.

Cálculo de determinantes

Un determinante es un operador que podemos aplicar a una determinada matriz y obtener así un escalar. Su cálculo se realiza mediante cofactores.

Propiedades de los determinantes

- Si una matriz tiene un renglón o columna de ceros, su determinante es cero.

Propiedades de los determinantes

- Si una matriz tiene un renglón o columna de ceros, su determinante es cero.
- Si un renglón o columna de la matriz A se multiplica por una constante c entonces su determinantes es:

$$c \det(A)$$

Propiedades de los determinantes

- Si una matriz tiene un renglón o columna de ceros, su determinante es cero.
- Si un renglón o columna de la matriz A se multiplica por una constante c entonces su determinantes es:

$$c \det(A)$$

- Si se realizan un intercambio de renglones o columnas de en una matriz A su determinante cambia de signo

Propiedades de los determinantes

- Si se realizan operaciones fundamentales sobre los renglones de una matriz, el valor del determinante no cambia.

Propiedades de los determinantes

- Si se realizan operaciones fundamentales sobre los renglones de una matriz, el valor del determinante no cambia.
- El determinante de una matriz triangular o diagonal es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.

Importancia

Los determinantes pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Cálculo de áreas y volúmenes.

Importancia

Los determinantes pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Cálculo de áreas y volúmenes.
- Cálculo de inversas.

Importancia

Los determinantes pueden utilizarse en muchas aplicaciones prácticas, algunos de ellas son:

- Cálculo de áreas y volúmenes.
- Cálculo de inversas.
- Regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones.

Tarea 1

Tarea

Demuestre una propiedad de los determinantes de su elección e ilustre un ejemplo de la misma.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Una aplicación muy importante del Álgebra lineal es la solución de sistemas de ecuaciones lineales ya que se utiliza en diversos problemas prácticos.

Un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$$Ax = b$$

Un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$$Ax = b$$

la idea es que si la matriz A del sistema es invertible (no singular):

Un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como:

$$Ax = b$$

la idea es que si la matriz A del sistema es invertible (no singular):

$$x = A^{-1}b$$

Algunos métodos para calcular esta solución son:

- Eliminación gaussiana.

Algunos métodos para calcular esta solución son:

- Eliminación gaussiana.
- Gauss-Jordan.

Algunos métodos para calcular esta solución son:

- Eliminación gaussiana.
- Gauss-Jordan.
- Regla de Cramer.

Importancia

La solución de sistemas de ecuaciones lineales se presenta en muchas aplicaciones como son:

- Problemas de ciencias e ingeniería.

Importancia

La solución de sistemas de ecuaciones lineales se presenta en muchas aplicaciones como son:

- Problemas de ciencias e ingeniería.
- Solución numérica de ecuaciones diferenciales.

Importancia

La solución de sistemas de ecuaciones lineales se presenta en muchas aplicaciones como son:

- Problemas de ciencias e ingeniería.
- Solución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Cálculo de valores y vectores propios

$$Ax = \lambda x$$

Importancia

La solución de sistemas de ecuaciones lineales se presenta en muchas aplicaciones como son:

- Problemas de ciencias e ingeniería.
- Solución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Cálculo de valores y vectores propios

$$Ax = \lambda x$$

- Sistemas de posicionamiento global (GPS).

Espacios vectoriales

Los espacios vectoriales constituyen una de las bases teóticas fundamentales del Álgebra lineal y, aunque no se ve a simple vista, tienen muchas aplicaciones.

Definición

Espacio vectorial.

Dado un conjunto V, *donde* x, y, z *son elementos de* V *y* α, β *son escalares, se llama espacio vectorial si cumple con las siguientes propiedades:*

- *Cerradura de la suma:* $x + y$ *pertenece a* V
- *Asociatividad de la suma:* $(x + y) + z = x + (y + z)$
- *Neutro aditivo: Existe el elemento* 0 *tal que* $x + 0 = x$
- *Inverso aditivo: Existe el elemento* $-x$ *tal que* $x + (-x) = 0$
- *Conmutatividad de la suma:* $x + y = y + x$

Definición

Espacio vectorial.

- *Cerradura de la multiplicación por un escalar:* αx *pertenece a* V
- *Primera ley distributiva:* $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- *Segunda ley distributiva:* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- *Asociatividad de la multiplicación por un escalar:* $\alpha(\beta x) = \alpha\beta x$
- *Neutro multiplicativo:* $1x = x$

Importancia.

Los espacios vectoriales se presentan en aplicaciones como son:

- Cálculo de bases del espacio vectorial.

Importancia.

Los espacios vectoriales se presentan en aplicaciones como son:

- Cálculo de bases del espacio vectorial.
- Bases ortonormales (método de Gram-Schmidt).

Importancia.

Los espacios vectoriales se presentan en aplicaciones como son:

- Cálculo de bases del espacio vectorial.
- Bases ortonormales (método de Gram-Schmidt).
- Problemas de mínimos cuadrados.

Tarea 3

Tarea

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de su elección visto en la materia de Álgebra lineal.

$$
\begin{aligned}
2x + y - 3z &= -5 \\
5x - 2y + z &= 4 \\
x + 3y - z &= 4
\end{aligned}
$$

Dificultades numéricas

Cada uno de los temas de Álgebra lineal que hemos revisado puede presentar ciertas dificultades numéricas al realizar su implementación computacional. A continuación mencionaremos algunas de ellas.

Álgebra matricial y cálculo de determinantes

La computadora, a diferencia de nosotros, trabaja con una aritmética llamada Aritmética de punto flotante, la cuál tiene las siguientes características:

Álgebra matricial y cálculo de determinantes

La computadora, a diferencia de nosotros, trabaja con una aritmética llamada Aritmética de punto flotante, la cuál tiene las siguientes características:

- Se maneja una precisión finita por ello al capturar valores que sobrepasen su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

Álgebra matricial y cálculo de determinantes

La computadora, a diferencia de nosotros, trabaja con una aritmética llamada Aritmética de punto flotante, la cuál tiene las siguientes características:

- Se maneja una precisión finita por ello al capturar valores que sobrepasen su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: supongamos que tenemos una computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión, y capturamos el valor de $\frac{1}{3}$. Como la computadora solo puede trabajar hasta 2 dígitos debemos redondear el valor de $\frac{1}{3}$ a 2 dígitos:

Álgebra matricial y cálculo de determinantes

La computadora, a diferencia de nosotros, trabaja con una aritmética llamada Aritmética de punto flotante, la cuál tiene las siguientes características:

- Se maneja una precisión finita por ello al capturar valores que sobrepasen su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: supongamos que tenemos una computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión, y capturamos el valor de $\frac{1}{3}$. Como la computadora solo puede trabajar hasta 2 dígitos debemos redondear el valor de $\frac{1}{3}$ a 2 dígitos:

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{R}$$

Álgebra matricial y cálculo de determinantes

La computadora, a diferencia de nosotros, trabaja con una aritmética llamada Aritmética de punto flotante, la cuál tiene las siguientes características:

- Se maneja una precisión finita por ello al capturar valores que sobrepasen su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: supongamos que tenemos una computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión, y capturamos el valor de $\frac{1}{3}$. Como la computadora solo puede trabajar hasta 2 dígitos debemos redondear el valor de $\frac{1}{3}$ a 2 dígitos:

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{R} 0.33$$

- Esto también aplica al realizar operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación o división), si el resultado de realizar alguna de ellas sobrepasa su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

- Esto también aplica al realizar operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación o división), si el resultado de realizar alguna de ellas sobrepasa su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: tomemos la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión y realicemos la siguiente suma:

- Esto también aplica al realizar operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación o división), si el resultado de realizar alguna de ellas sobrepasa su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: tomemos la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión y realicemos la siguiente suma:

$$1/3 + 10/3 \xrightarrow{R}$$

- Esto también aplica al realizar operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación o división), si el resultado de realizar alguna de ellas sobrepasa su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: tomemos la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión y realicemos la siguiente suma:

$$1/3 + 10/3 \xrightarrow{R} 0.33 + 3.3 = 3.63 \xrightarrow{R}$$

- Esto también aplica al realizar operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación o división), si el resultado de realizar alguna de ellas sobrepasa su precisión, realizará una aproximación mediante redondeo.

  Ejemplo: tomemos la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión y realicemos la siguiente suma:

$$1/3 + 10/3 \xrightarrow{R} 0.33 + 3.3 = 3.63 \xrightarrow{R} 3.6$$

- Al realizar una resta podemos tener el caso de restar dos valores reales distintos, pero que al redondearse sean el mismo. A este fenómeno se le conoce como cancelación numérica.

- Al realizar una resta podemos tener el caso de restar dos valores reales distintos, pero que al redondearse sean el mismo. A este fenómeno se le conoce como cancelación numérica.

  Ejemplo: tomando la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión realizamos la siguiente resta:

- Al realizar una resta podemos tener el caso de restar dos valores reales distintos, pero que al redondearse sean el mismo. A este fenómeno se le conoce como cancelación numérica.

  Ejemplo: tomando la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión realizamos la siguiente resta:

$$1/3 - 0.33 \xrightarrow{R}$$

- Al realizar una resta podemos tener el caso de restar dos valores reales distintos, pero que al redondearse sean el mismo. A este fenómeno se le conoce como cancelación numérica.

  Ejemplo: tomando la misma computadora que trabaja con 2 dígitos de precisión realizamos la siguiente resta:

$$1/3 - 0.33 \xrightarrow{R} 0.33 - 0.33 = 0$$

Note que estas características están involucradas al realizar las diversas operaciones matriciales en la compiutadora y también en el cálculo de determinantes ya que están basados en realizar una serie de operaciones aritméticas, por lo cual es una dificultad numérica que debemos tomar en cuenta.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Al resolver sistemas de ecuaciones lineales en la computadora es necesario analizar cual de los métodos teóricos puede aplicarse mejor en la computadora.

Eliminación gaussiana y Gauss-Jordan

Para estos dos métodos pueden generarse algoritmos muy eficientes para la solución de sistemas de ecuaciones.

Eliminación gaussiana y Gauss-Jordan

Para estos dos métodos pueden generarse algoritmos muy eficientes para la solución de sistemas de ecuaciones.

Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b$$

la idea de estos algoritmos consiste en calcular una factorización matricial de la matriz A (llamada factorización LU)

Así nos queda que:

$$A = LU$$

donde

Así nos queda que:

$$A = LU$$

donde

L es una matriz triangular inferior.
U es una matriz triangular superior.

Regla de Cramer

La Regla de Cramer no suele aplicarse muy constantemente para resolver sistemas de ecuaciones de forma computacional.

Regla de Cramer

La Regla de Cramer no suele aplicarse muy constantemente para resolver sistemas de ecuaciones de forma computacional.

Esto debido a que, para ciertos casos, el algoritmo puede tornarse inestable.

Métodos iterativos

En muchas aplicaciones se utilizan métodos iterativos ya que, la cantidad de información es muy grande y por ende, las matrices de los sistemas de ecuaciones a resolver.

Métodos iterativos

En muchas aplicaciones se utilizan métodos iterativos ya que, la cantidad de información es muy grande y por ende, las matrices de los sistemas de ecuaciones a resolver.

La idea de estos métodos consiste en elegir una aproximación inicial a la solución y calcular pasos iterativos hasta llegar a una buena aproximación de la misma.

Invertibilidad de la matriz del sistema

Otro punto importante es que, para resolver un sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

necesitamos que la matriz A sea invertible.

Invertibilidad de la matriz del sistema

Otro punto importante es que, para resolver un sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

necesitamos que la matriz A sea invertible.

Verificar esta invertibilidad es uno de los principales problemas en Álgebra matricial numérica, para hacerlo se realiza un análisis de sensibilidad utilizando normas vectoriales y matriciales.

Espacios vectoriales

Una de las aplicaciones más importantes de los espacios vectoriales es el cálculo de bases ortonormales mediante el método de Gram-Schmidt.

Definición

Método de Gram-Schmidt.

Dada una base v_1, v_2, ... v_n de un espacio vectorial, buscamos una base q_1, q_2, ... q_n ortonormal del espacio.

$$(q_i)^t q_j = 0, \quad i \neq j$$

$$||q_i|| = 1$$

Debido a la aritmética de punto flotante, en algunos casos hay pérdida de ortogonalidad al calcular los vectores q_i con el método de Gram-Schmidt.

Debido a la aritmética de punto flotante, en algunos casos hay pérdida de ortogonalidad al calcular los vectores q_i con el método de Gram-Schmidt.

Por ello suele modificarse el algoritmo de Gram-Schmidt o usar otros métodos como reflexiones de Householder, rotaciones de Givens, descomposición en valores singulares (SVD).

Tarea 5

Tarea

Investigue a grandes rasgos como se define el número de condición de una matriz.