Álgebra matricial numérica. Unidad 4. Estabilidad de algoritmos y condicionamiento de problemas

Dr. Javier de Jesús Cortés Aguirre.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Semestre: septiembre 2021 - enero 2022.

Introducción

En esta unidad estudiaremos la estabilidad de algoritmos y condicionamiento de problemas.

Introducción

En esta unidad estudiaremos la estabilidad de algoritmos y condicionamiento de problemas.

En particular lo enfocaremos a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Número de condición de una matriz

En álgebra lineal, para resolver un sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

es necesario que la matriz A sea invertible (exista una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$)

Número de condición de una matriz

En álgebra lineal, para resolver un sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

es necesario que la matriz A sea invertible (exista una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$)

Comporbar en la computadora, que una matriz es invertible, no es un proceso sencillo. Debido a esto se utiliza el número de condición de la matriz del sistema.

La idea es medir que tan sensible es nuestro sistema de ecuaciones a cambios en las entradas de la matriz A, es decir:

La idea es medir que tan sensible es nuestro sistema de ecuaciones a cambios en las entradas de la matriz A, es decir:

- Si al mover un poco las entradas de las matriz A, la solución del sistema también cambia un poco, entonces no es muy sensible.

La idea es medir que tan sensible es nuestro sistema de ecuaciones a cambios en las entradas de la matriz A, es decir:

- Si al mover un poco las entradas de las matriz A, la solución del sistema también cambia un poco, entonces no es muy sensible.
- Si al mover un poco las entradas de las matriz A, la solución del sistema cambia bastante, entonces es muy sensible.

Necesitamos encontrar las matrices que sean muy sensibles a cambios en sus entradas (las llamaremos mal condicionadas), ya que estas matrices (debido a que son muy inestables) son las que pueden no tener inversa.

Necesitamos encontrar las matrices que sean muy sensibles a cambios en sus entradas (las llamaremos mal condicionadas), ya que estas matrices (debido a que son muy inestables) son las que pueden no tener inversa.

Para ello utilizaremos el número de condición de la matriz A, definido por

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

que puede calcularse con la instrucción de Matlab/Octave

$$cond(A)$$

Para poder deducir este número de condición es necesario realizar un análisis de sensibilidad. Y para poder estimar su valor debemos utilizar una descomposición en valores singulares de la matriz del sistema (SVD).

Para poder deducir este número de condición es necesario realizar un análisis de sensibilidad. Y para poder estimar su valor debemos utilizar una descomposición en valores singulares de la matriz del sistema (SVD).

Antes de ello, ilustraremos la relación entre el número de condición y el error obtenido al resolver un sistema de ecuaciones lineales con un ejemplo utilizando matrices de Hilbert.

Análisis de sensibilidad

En esta sección realizaremos un análisis de sensibilidad, con la idea de medir que tan sensible es un sistema de ecuaciones a pequeños cambios en sus entradas.

Sea el sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

Sea el sistema de ecuaciones

$$Ax = b$$

en el cual realizamos una pequeña perturbación en la matriz A llamada obteniendo así la matriz $\tilde{A}$; observemos que la solución también será perturbada quedando el vector $\tilde{x}$

Así nos queda

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

donde

$$\tilde{A} = A + \Delta A$$

$$\tilde{x} = x + \Delta x$$

Así nos queda

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

donde

$$\tilde{A} = A + \Delta A$$

$$\tilde{x} = x + \Delta x$$

con

$$||\Delta A|| << 1$$

$$||\Delta x|| << 1$$

Entonces al tomar el sistema de ecuaciones perturbado

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

podemos sustituir los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{x}$:

Entonces al tomar el sistema de ecuaciones perturbado

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

podemos sustituir los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{x}$:

$$\tilde{A}\tilde{x} \quad = \quad b$$

Entonces al tomar el sistema de ecuaciones perturbado

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

podemos sustituir los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &= b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b \end{aligned}$$

Entonces al tomar el sistema de ecuaciones perturbado

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

podemos sustituir los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &= b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b \\ Ax + A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= b \end{aligned}$$

Entonces al tomar el sistema de ecuaciones perturbado

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

podemos sustituir los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &= b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b \\ Ax + A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= b \end{aligned}$$

como $Ax = b$, entonces $Ax - b = 0$ y nos queda

Entonces al tomar el sistema de ecuaciones perturbado

$$\tilde{A}\tilde{x} = b$$

podemos sustituir los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{x}$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{x} &= b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) &= b \\ Ax + A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= b \end{aligned}$$

como $Ax = b$, entonces $Ax - b = 0$ y nos queda

$$A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x = 0$$

Trataremos de obtener alguna relación que involucre el error en la solución, es decir, el error entre x y $\tilde{x}$, para ello observemos que el error abosulto está dado por:

$$||\Delta x|| = ||x - \tilde{x}||$$

Trataremos de obtener alguna relación que involucre el error en la solución, es decir, el error entre x y $\tilde{x}$, para ello observemos que el error abosulto está dado por:

$$||\Delta x|| = ||x - \tilde{x}||$$

y el relativo por

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} = \frac{||x - \tilde{x}||}{||x||}$$

Entonces debemos despejar a Δx y obtener su norma, así nos queda:

$$A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x \quad = \quad 0$$

Entonces debemos despejar a Δx y obtener su norma, así nos queda:

$$\begin{aligned} A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= 0 \\ A\Delta x &= -\Delta A x - \Delta A \Delta x \end{aligned}$$

Entonces debemos despejar a Δx y obtener su norma, así nos queda:

$$\begin{aligned} A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= 0 \\ A\Delta x &= -\Delta A x - \Delta A \Delta x \end{aligned}$$

Como el sistema tiene solución, A es invertible y entonces:

Entonces debemos despejar a Δx y obtener su norma, así nos queda:

$$\begin{aligned} A\Delta x + \Delta A x + \Delta A \Delta x &= 0 \\ A\Delta x &= -\Delta A x - \Delta A \Delta x \end{aligned}$$

Como el sistema tiene solución, A es invertible y entonces:

$$\Delta x = -A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x$$

Aplicando norma a ambos lados nos queda

$$||\Delta x|| = || - A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

Aplicando norma a ambos lados nos queda

$$||\Delta x|| = || - A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

usando desigualdad del triángulo

Aplicando norma a ambos lados nos queda

$$||\Delta x|| = ||-A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

usando desigualdad del triángulo

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}\Delta A x|| + ||A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

Aplicando norma a ambos lados nos queda

$$||\Delta x|| = || - A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

usando desigualdad del triángulo

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}\Delta A x|| + ||A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

y por regla de consistencia

Aplicando norma a ambos lados nos queda

$$||\Delta x|| = || - A^{-1}\Delta A x - A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

usando desigualdad del triángulo

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}\Delta A x|| + ||A^{-1}\Delta A \Delta x||$$

y por regla de consistencia

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||||\Delta A||||x|| + ||A^{-1}||||\Delta A||||\Delta x||$$

Como $||\Delta A|| << 1$ y $||\Delta x|| << 1$, podemos despreciar al último término, así obtenemos

Como $||\Delta A|| << 1$ y $||\Delta x|| << 1$, podemos despreciar al último término, así obtenemos

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||||\Delta A||||x||$$

Como $||\Delta A|| << 1$ y $||\Delta x|| << 1$, podemos despreciar al último término, así obtenemos

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||||\Delta A||||x||$$

multiplicamos al lado derecho por $\frac{||A||}{||A||}$

Como $||\Delta A|| << 1$ y $||\Delta x|| << 1$, podemos despreciar al último término, así obtenemos

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||||\Delta A||||x||$$

multiplicamos al lado derecho por $\frac{||A||}{||A||}$

$$||\Delta x|| \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\Delta A||}{||A||}||x||$$

Como $||\Delta A|| << 1$ y $||\Delta x|| << 1$, podemos despreciar al último término, así obtenemos

$$||\Delta x|| \leq ||A^{-1}|| \, ||\Delta A|| \, ||x||$$

multiplicamos al lado derecho por $\frac{||A||}{||A||}$

$$||\Delta x|| \leq ||A|| \, ||A^{-1}|| \frac{||\Delta A||}{||A||} ||x||$$

y dividimos por $||x||$ a ambos lados

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A|| \, ||A^{-1}|| \frac{||\Delta A||}{||A||}$$

Analicemos esta última relación

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\Delta A||}{||A||}$$

Analicemos esta última relación

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\Delta A||}{||A||}$$

El error relativo en la solución está acotado por el error relativo en las perturbaciones de la matriz A y por $\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$.

Analicemos esta última relación

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\Delta A||}{||A||}$$

El error relativo en la solución está acotado por el error relativo en las perturbaciones de la matriz A y por $\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$.

Por tanto si $\kappa(A)$ crece, el error en la solución también crece.

Definición

Número de condición de una matriz.
Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define al número de condición de A como

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

donde tal valor puede usarse para medir la sensibilidad de la matriz a perturbaciones en sus entradas y por tanto, su singularidad numérica.

Tarea 1

Tarea

Utilizando las desigualdades entre normas matriciales del ejercicio 4 del proyecto 2, indica que tanto podría diferir el valor del número de condición al calcularlo con diferentes normas matriciales.

Descomposición en valores singulares (SVD)

La descomposición en valores singulares es una factorización matricial de mucha utilidad en Álgebra matricial numérica.

Puede utilizarse para la solución de problemas de ajuste, cálculo de valores y vectores propios y la estimación del número de condición de una matriz.

Definición

Descomposición en valores singulares.
Sea una matriz A invertible, es posible escribirla como el producto de matrices

$$A = U\Sigma V^t$$

donde U y V son matrices unitarias y Σ es una matriz diagonal.

A los valores en la diagonal de la matriz Σ se les llama valores singulares de la matriz A y cumplen con:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \leq \sigma_3 \geq ... \geq \sigma_n > 0$$

Sabemos que el número de condición de una matriz A está dado por

$$\kappa(A) = ||A|| ||A^{-1}||$$

Sabemos que el número de condición de una matriz A está dado por

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

pero si A tiene SVD, entonces:

Sabemos que el número de condición de una matriz A está dado por

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

pero si A tiene SVD, entonces:

$$||A|| \;\; = \;\; ||U\Sigma V^t||$$

Sabemos que el número de condición de una matriz A está dado por

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

pero si A tiene SVD, entonces:

$$\begin{aligned} ||A|| &= ||U\Sigma V^t|| \\ &= ||U||||\Sigma||||V^t|| \end{aligned}$$

Sabemos que el número de condición de una matriz A está dado por

$$\kappa(A) = ||A|| ||A^{-1}||$$

pero si A tiene SVD, entonces:

$$\begin{aligned} ||A|| &= ||U \Sigma V^t|| \\ &= ||U|| ||\Sigma|| ||V^t|| \\ &= ||\Sigma|| \end{aligned}$$

Sabemos que el número de condición de una matriz A está dado por

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}||$$

pero si A tiene SVD, entonces:

$$\begin{aligned} ||A|| &= ||U\Sigma V^t|| \\ &= ||U||||\Sigma||||V^t|| \\ &= ||\Sigma|| \\ &= \sigma_1 \end{aligned}$$

De manera similar

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sigma_n}$$

De manera similar

$$||A^{-1}|| = \frac{1}{\sigma_n}$$

Por tanto el número de condición puede estimarse utilizando el cociente de valores singulares:

$$\kappa(A) = ||A||||A^{-1}|| = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$