Álgebra Matricial Numérica. Unidad 5. Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales: métodos directos.

Dr. Javier de Jesús Cortés Aguirre.
Facultad de Ciencias, UNAM.
Semestre: septiembre 2021 - enero 2022.

Métodos de solución

En esta sección estudiaremos los métodos numéricos utilizados para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Estos métodos se basan en escribir a la matriz del sistema como el producto de matrices mas sencillas y con ello reducir el sistema de ecuaciones original en dos sistemas de ecuaciones menos complicados.

Factorización LU

Dado un sistema de ecuaciones en su forma matricial

$$Ax = b$$

definiremos a una factorización LU de la matriz A.

Factorización LU

Dado un sistema de ecuaciones en su forma matricial

$$Ax = b$$

definiremos a una factorización LU de la matriz A.

Definición

(Factorización LU)
Dada una matriz A invertible, es posible escribirla como el producto de matrices

$$A = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior.

Algoritmo para la solución del sistema de ecuaciones

Al calcular la factorización LU de la matriz A del sistema de ecuaciones, podemos resolver el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

- Como $A = LU$, el sistema de ecuaciones nos queda como

$$LUx = b$$

Algoritmo para la solución del sistema de ecuaciones

Al calcular la factorización LU de la matriz A del sistema de ecuaciones, podemos resolver el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

- Como $A = LU$, el sistema de ecuaciones nos queda como
$$LUx = b$$
- Realizamos el cambio de variable $Ux = y$, con ello nos queda el sistema de ecuaciones triangular
$$Ly = b$$

Algoritmo para la solución del sistema de ecuaciones

Al calcular la factorización LU de la matriz A del sistema de ecuaciones, podemos resolver el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

- Como $A = LU$, el sistema de ecuaciones nos queda como
$$LUx = b$$
- Realizamos el cambio de variable $Ux = y$, con ello nos queda el sistema de ecuaciones triangular
$$Ly = b$$
- Calculamos la solución y de este sistema y resolvemos ahora el sistema triangular
$$Ux = y$$
del cual se obtiene la solución del sistema original

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones de la sección anterior

$$
\begin{aligned}
2x + 4y + 6z &= 18 \\
4x + 5y + 6z &= 24 \\
3x + y - 2z &= 4
\end{aligned}
$$

calcularemos su factorización LU. Para ello utilizaremos los pasos del método de eliminación gaussiana, pero aplicados ahora mediante el uso de matrices elementales.

La matriz del sistema está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

el primer paso consiste en hacer ceros debajo del elemento $A(1,1)$, para ello las operaciones elementales realizadas por el método de eliminación gaussiana pueden escribirse en términos del producto de la matriz A por una matriz elemental L_1, es decir:

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix}$$

Ahora, necesitamos hacer ceros debajo de la entrada (2,2), para ello realizamos el producto por una matriz elemental L_2, es decir

$$L_2 L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -5 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 L_1 A = U$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 L_1 A = U$$

entonces

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 L_1 A = U$$

entonces

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$$

y tomando $L = L_1^{-1} L_2^{-1}$, obtenemos

$$A = LU$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 L_1 A = U$$

entonces

$$A = L_1^{-1} L_2^{-1} U$$

y tomando $L = L_1^{-1} L_2^{-1}$, obtenemos

$$A = LU$$

donde

$$L = L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, podemos factorizar a la matriz A como el producto de 2 matrices triangulares L y U

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = LU$$

Demostración

Sea el vector

$$l_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -x_{i+1}/x_i \\ -x_{i+2}/x_i \\ . \\ . \\ . \\ -x_n/x_i \end{pmatrix}$$

Además observe que

$$
l_i e_i^t = \begin{pmatrix}
0 & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & -x_{i+1}/x_i & . & . & . & . \\
. & . & . & . & -x_{i+2}/x_i & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & -x_n/x_i & . & . & . & 0
\end{pmatrix}
$$

Entonces cada matriz L_i se puede escribir como

$$L_i = I + l_i e_i^t$$

Entonces cada matriz L_i se puede escribir como

$$L_i = I + l_i e_i^t$$

necesitamos demostrar que su inversa está dada por

$$L_i^{-1} = I - l_i e_i^t$$

Multiplicamos entonces

$$L_i L_i^{-1} = \left(I + l_i e_i^t\right)\left(I - l_i e_i^t\right)$$

Multiplicamos entonces

$$\begin{aligned} L_i L_i^{-1} &= \left(I + l_i e_i^t\right)\left(I - l_i e_i^t\right) \\ &= I - l_i e_i^t + l_i e_i^t - l_i e_i^t l_i e_i^t \end{aligned}$$

Multiplicamos entonces

$$\begin{aligned} L_i L_i^{-1} &= \left(I + l_i e_i^t\right)\left(I - l_i e_i^t\right) \\ &= I - l_i e_i^t + l_i e_i^t - l_i e_i^t l_i e_i^t \\ &= I - l_i (e_i^t l_i) e_i^t \end{aligned}$$

Donde

$$e_i^t l_i = [0, ...0, 1, 0, ..., 0] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -x_{i+1}/x_i \\ -x_{i+2}/x_i \\ . \\ . \\ . \\ -x_n/x_i \end{pmatrix} =$$

Donde

$$e_i^t l_i = [0, ...0, 1, 0, ..., 0] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ -x_{i+1}/x_i \\ -x_{i+2}/x_i \\ . \\ . \\ . \\ -x_n/x_i \end{pmatrix} = 0$$

Así

$$L_i L_i^{-1} = I$$

Así
$$L_i L_i^{-1} = I$$
y entonces
$$L_i^{-1} = I - l_i e_i^t$$
es la inversa de la matriz L_i

Tarea 1

Actividad

Dada la factorización LU de la matriz del sistema del ejemplo anterior, aplique los pasos del algoritmo visto para calcular la solución del sistema de ecuaciones.

Factorización LU con pivoteo

Dado un sistema de ecuaciones en su forma matricial

$$Ax = b$$

definiremos a una factorización LU con pivoteo de la matriz A.

Factorización LU con pivoteo

Dado un sistema de ecuaciones en su forma matricial

$$Ax = b$$

definiremos a una factorización LU con pivoteo de la matriz A.

Definición

(Factorización LU con pivoteo)
Dada una matriz A invertible, es posible escribirla como el producto de matrices

$$PA = LU$$

donde L es una matriz triangular inferior, U es una matriz triangular superior y P es una matriz de permutaciones.

Algoritmo para la solución del sistema de ecuaciones

Al calcular la factorización LU con pivoteo de la matriz A del sistema de ecuaciones, podemos resolver el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

- Multiplicamos al sistema de ecuaciones $Ax = b$ por la matriz P y nos queda como

$$PAx = Pb$$

Algoritmo para la solución del sistema de ecuaciones

Al calcular la factorización LU con pivoteo de la matriz A del sistema de ecuaciones, podemos resolver el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

- Multiplicamos al sistema de ecuaciones $Ax = b$ por la matriz P y nos queda como

$$PAx = Pb$$

- Aplicando entonces la factorización $PA = LU$ obtenemos

$$LUx = Pb$$

- Realizamos el cambio de variable $Ux = y$, con ello nos queda el sistema de ecuaciones triangular

$$Ly = Pb$$

- Realizamos el cambio de variable $Ux = y$, con ello nos queda el sistema de ecuaciones triangular

$$Ly = Pb$$

- Calculamos la solución y de este sistema y resolvemos ahora el sistema triangular

$$Ux = y$$

del cual se obtiene la solución del sistema original

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones de la sección anterior

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 3x + y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

calcularemos su factorización LU con pivoteo. Para ello utilizaremos los pasos vistos de la factorización LU pero aplicando en cada paso una matriz de permutaciones para realizar el intercambio de renglones.

La matriz del sistema está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

el primer paso consiste en tomar la primera columna y colocar el elemento más grande (en valor absoluto) en la posición $A(1,1)$, para ello multiplicamos por una matriz de permutación P_1 que realizará el intercambio de los renglones 1 y 2

$$P_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego, el siguiente paso consiste en hacer ceros debajo del elemento $A(1,1)$, para ello, de manera similar a lo realizado en la factorización LU, multiplicamos por una matriz elemental L_1, es decir:

$$L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & -11/4 & -13/2 \end{pmatrix}$$

Como no sabemos si en el paso siguiente quedará un cero o un número muy pequeño en la diagonal principal, necesitamos hacer en cada paso el intercambio de renglones. Multiplicamos ahora por una matriz de permutación P_2 para intercambiar los renglones 2 y 3 de nuestra matriz:

$P_2 L_1 P_1 A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3/2 & 3 \\ 0 & -11/4 & -13/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -11/4 & -13/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, necesitamos hacer ceros debajo de la entrada (2,2), para ello realizamos el producto por una matriz elemental L_2:

$L_2 P_2 L_1 P_1 A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6/11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -11/4 & -13/2 \\ 0 & 3/2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -11/4 & -13/2 \\ 0 & 0 & -6/11 \end{pmatrix}$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$

entonces

$$L_2 P_2 L_1 I P_1 A = U$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$

entonces

$$L_2 P_2 L_1 I P_1 A = U$$

$$L_2 P_2 L_1 (P_2^{-1} P_2) P_1 A = U$$

A esta última matriz le llamaremos U, de forma que

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = U$$

entonces

$$L_2 P_2 L_1 I P_1 A = U$$

$$L_2 P_2 L_1 (P_2^{-1} P_2) P_1 A = U$$

$$L_2 (P_2 L_1 P_2^{-1})(P_2 P_1) A = U$$

Tomando

$$L_2' = L_2 \quad L_1' = P_2 L_1 P_2^{-1} \quad P = P_2 P_1$$

Tomando

$$L_2' = L_2 \quad L_1' = P_2 L_1 P_2^{-1} \quad P = P_2 P_1$$

obtenemos

$$L_2' L_1' P A = U$$

Tomando

$$L_2' = L_2 \quad L_1' = P_2 L_1 P_2^{-1} \quad P = P_2 P_1$$

obtenemos

$$L_2' L_1' PA = U$$

asi

$$PA = (L_1')^{-1}(L_2')^{-1} U$$

y tomando $L = (L_1')^{-1}(L_2')^{-1}$, nos queda

$$PA = LU$$

Donde

$L = (L_1')^{-1}(L_2')^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6/11 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -6/11 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tarea 2

Actividad

Dada la factorización LU con pivoteo de la matriz del sistema del ejemplo anterior, aplique los pasos del algoritmo visto para calcular la solución del sistema de ecuaciones.

Facultad de Ciencias UNAM

Casos especiales de la factorización LU

Dado el sistema de ecuaciones $Ax = b$, en algunos casos, la factorización LU de la matriz A puede reducirse aun más.

- A es simétrica ($A = A^t$)
- A es simétrica y positiva definida (su forma cuadrática asociada es positiva)

A es simétrica

Si la matriz A del sistema es simétrica, la factorización LU puede reducirse a una factorización de la forma:

$$A = LDL^t$$

donde D es una matriz diagonal que tiene los valores de la diagonal principal de la matriz U

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

al calcular su factorización LU se obtiene:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{pmatrix}$$

Entonces tomamos

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{pmatrix}$$

Y podemos comprobar que $A = LDL^t$

$$LD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2.25 \end{pmatrix}$$

$$LDL^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A es simétrica y positiva definida

Como A es simétrica, entonces tiene factorización $A = LDL^t$, y además, como es positiva definida, las entradas de la matriz diagonal D son positivas.

Entonces
$$A = LDL^t = L(D^{1/2}D^{1/2})L^t$$
donde la matriz $D^{1/2}$ se obtiene al calcular la raíz cuadrada de cada elemento de la diagonal de D. Además si tomamos el cambio de variable $G = LD^{1/2}$ obtenemos

Entonces

$$A = LDL^t = L(D^{1/2}D^{1/2})L^t$$

donde la matriz $D^{1/2}$ se obtiene al calcular la raíz cuadrada de cada elemento de la diagonal de D. Además si tomamos el cambio de variable $G = LD^{1/2}$ obtenemos

$$A = LDL^t = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^t) = GG^t$$

a esta factorización se le llama la factorización de Cholesky de la matriz A

Ejemplo

Sea la matriz del ejemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

al calcular su factorización LDL^t obtuvimos:

$$LDL^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$G = LD^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2.25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0.5\sqrt{8} & \sqrt{4} & 0 \\ 0.25\sqrt{8} & -0.25\sqrt{4} & \sqrt{2.25} \end{pmatrix}$$

Estos dos casos especiales son muy importantes ya que realizamos una menor cantidad de cálculos en la computadora y, en el caso de la factorización de Cholesky, solo necesitamos calcular una sola matriz.

Tarea 3

Actividad

Utilice las rutinas de la factorización de Cholesky para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
8x + 4y + 2z &= 14 \\
4x + 6y &= 10 \\
2x + 3z &= 5
\end{aligned}
$$