Formulacija problema linearnog programiranja

zad. max $z = 3x_1 + 2x_2$

x_1, x_2 - varijable odlučivanja (količina proizvoda)

Uvjeti: $2x_1 + x_2 \leq 9$

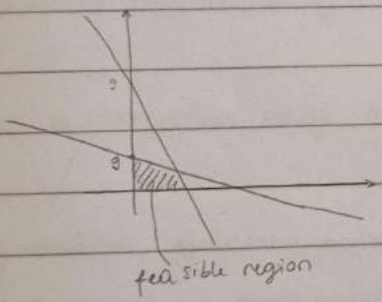
$x_1 + 2x_2 \leq 9$ (ograničenja)

$x_1, x_2 \geq 0$

$2x_1 + x_2 + s_1 = 9$

$x_1 + 2x_2 + s_2 = 9$

$s_1, s_2 \geq 0$ - slack varijable (pomoćne varijable)



$2x_1 + x_2 = 9$

$x_2 = -2x_1 + 9$

$x_1 + 2x_2 = 9$

$x_1 = -2x_2 + 9$

simpleks - skače po feasable region i traži optimum (maximum)

NBV - nebazične varijable

BV - bazične -||-

BFS - basic feasible solution

$2x_1 + x_2 + s_1 = 9$
$x_1 + 2x_2 + s_2 = 9$

$3x_1 + 2x_2$

	NBV	BV	BFS (x_1, x_2)	z
A	$x_1 = x_2 = 0$	$s_1 = 9$, $s_2 = 9$	y (0,0)	0
B	$x_1 = s_1 = 0$	$x_2 = 9$, $s_2 = -9$ — ne možemo to uzeti u obzir	N (0,9)	
C	$x_1 = s_2 = 0$	$x_2 = 4.5$ $s_1 = 4.5$	y (0, 4.5)	9
D	$x_2 = s_1 = 0$	$x_1 = 4.5$ $s_2 = 4.5$	y (4.5, 0)	13,5
E	$x_2 = s_2 = 0$	$x_1 = 9$ $s_1 = -9$	N (9,0)	
F	$s_1 = s_2 = 0$	$x_1 = 3$ $x_2 = 3$	y (3,3)	$\boxed{15}$ max

- izvedivo područje bilo kojeg linearnog problema je KONVEKSAN skup
- bilo koji linearni problem ima konačan broj BFS-a
- ako linearni problem ima optimalno rješenje, onda mora postojati optimalna ekstremna točka

Crtanje fje cilja:

$k = 3x_1 + 2x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}k$ - porodica paralelnih pravaca, nama je potreban samo 1, želimo dodir pravca z s mojim ekstremnim točkama

$\Downarrow$

optimalno rješenje

Moje bilješke:

linearni problem

- Svaki LP je : izvediv (feasible) => onda ima bazično rješenje
  ili
  neograničen (unbounded)
  ili
  neizvediv (infeasible)

- min z $\Leftrightarrow$ max $-z$, ograničenja se ne mijenjaju

- Dvofazna metoda

  Na kraju prve faze mamo 3 slučaja:
  1. $w > 0$ => neizvediv LP
  2. $w = 0$ i nema umjetnih var u bazi
  3. ima

- Beskonačno optimalnih rj (alternativni optimum)

  $\Updownarrow$

  U nultom retku postoji nebazična var s vrijednosti 0 => ∞ rj, ali ne mora

- Neograničeno rj

  Nemoguće je odabrati pivot redak (ili su ∞ ili negativni ratio-i)

- Degenerativno rj

  Jedno (ili više) bazično rj je 0

  To ne zaustavlja program

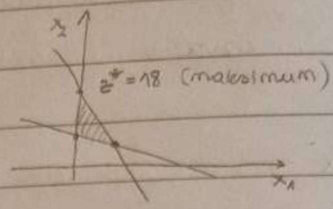
21.10.2022.

Metoda velikog M

max $z = 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1 + 2x_2 \geq 9$



① modificirati ograničenja t.d. desna strana (right hand side RHS) ≥ 0

② konverzija svega u kanonski oblik

$z - 3x_1 - 2x_2 = 0$

$2x_1 + x_2 + s_1 = 9$ slack varijabla s

$x_1 + 2x_2 - e_2 = 9$ excess varijabla e

③ za svako ograničenje tipa $\geq$ ili $=$ treba dodati umjetnu varijablu $a_i \geq 0$

$x_1 + 2x_2 - e_2 + a_2 = 9$

$z - 3x_1 - 2x_2 + M \cdot a_2 = 0$

to nam smeta i želimo ga se riješiti

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS		
1	-3	-2			M	0		Red 0
	2	1	1			9		Red 1
	1	2		-1	1	9	$/\cdot(-M)$	Red 2

① eliminirati umjetnu varijablu iz nultog retka

bazične varijable (tamo di je 0) u ostalim stupcima

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS	BV	ratio
1	$-3-M$	$-2-2M$	0	M	0	$-9M$	$z=-9M$	
0	2	1	1		0	9	$s_1=9$	$\frac{9}{1}$
0	1	2	0	-1	1	9	$a_2=9$	$\frac{9}{2}$ ← manji

sada on postaje pivot, mora postati 1 i ostali 0 u stupcu

u bazu

ulazna var: x_2

izlazna var: a_2 iz baze

najmanji broj ⇒ x_2 dodajemo u bazu

negativan, nebazičan

z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS	BV
1	-2	0	0	-1	$1+M$	9	$z=9$
0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$s_1=\frac{9}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$x_2=\frac{9}{2}$

... $z=15$

optimalna tablica

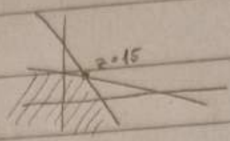
z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	RHS	BV
1	1	0	2	0	M	18	$z=18$
	3	0	2	1	-1	9	$e_2=9$
	2	1	1	0	0	9	$x_2=9$

Gotovo je jer nulti redak nema negativne vrijednosti

Nebazične var $=0$ tj $x_1=0$, $s_1=0$, $a_2=0$

Uspješno jer smo uspjeli se riješiti umjetne varijable

Pr.



max $z = 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1 + 2x_2 \leq 9$

Mogući slučajevi:

Nastavi

z	x_1	x_2^+	x_2^-	s_1	s_2	RHS	BV
1				4/3	1/3	15	$z=15$
	1			2/3	$-\frac{1}{3}$	3	$x_1=3$
		1	-1	$-\frac{1}{3}$	2/3	3	$x_2^+=3$

$x_2 = x_2^+ - x_2^- = 3 - 0 = 3$ $\Leftarrow$

jer nije bazičan ispao

ima koef 0

- ako imamo 1 ili više nebazičnih var. u redu 0 onda imamo ∞ rješenja
  ↳ INFEASIBLE SOLUTION

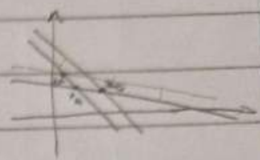
- NEIZVEDIVO RJ
  ako je barem 1 umjetna var pozitivna

- NEOGRANIČENO RJ
  ako ulazna var ima negativan koeficient u svim ograničenjima

- DEGENERIRANI LP
  ako postoji više istih ratio i onda odaberemo jedan od njih i on nam ne daje bolje rješenje (ne smanjuje z)

Sensitivity analysis

Tvornica	proizvod 1	proizvod 2	raspoloživi sati
stroj 1	2 h	1 h	8 h
stroj 2	1 h	2 h	8 h
profit	300 $	200 $	



$$\max z = 300x_1 + 200x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

Odg $z_A = \frac{4000}{3}$ $ - profit — taj broj se dobije kad riješimo simplex

Ako povećamo vrijeme rada na 9h za stroj 1

$$z_B = \frac{4400}{3}$$

Shadow price $= \frac{z_B - z_A}{9h - 8h} = \frac{400}{3}$

Svaki dodatni sat na prvom stroju profit se povećava za $\frac{400}{3}$ $

$z_C = \frac{4100}{3}$ $\quad SP(\underset{\text{stroj 2}}{M2}) = 33$ $ $\Rightarrow$ znači bolje je raditi dulje na prvom stroju

Jel se možda više isplati podići cijene?

$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2$

$c_2x_2 = -c_1x_1 + z$

$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{z}{c_2}$

nagib pravca

Iz prijašnjeg zadatka : $2x_1 + x_2 = 8$

$x_1 + 2x_2 = 8$

$-2 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq 8$

$\frac{1}{2} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{350}{250} \leq 2$ ✓ → znači možemo podići cijenu na 350 i 250

→ koliko mi raspoloživi resursi daju range cijena

Granica intervala u kojemu analiza vrijedi
(Lower i Upper range)

PRIMAL $\Rightarrow$ DUAL

max $z = 3x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 \leq 9$

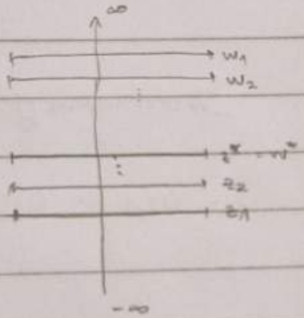
$x_1 + 2x_2 \leq 9$

$x_{1,2} \geq 0$

min $w = 9u_1 + 9u_2$

$2u_1 + 2u_2 \geq 3$

$2u_1 + 2u_2 \geq 2$



Slabi teorem dualnosti

Bilokakvo rješenje z je manje ili jednako dualnom rješenju w. $z \leq w$

Jaki teorem dualnosti

$z^* = w^*$

npr. neki stranac želi kupiti resurse od nekog gazde u tvornici optimal z   optimalni w

$z^* = w^*$

PRIMAL $\max \; z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

DUAL $\min \; w = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$

$\sum a_{ij} x_j \le b_i \Rightarrow$

$\sum a_{ij} x_j + s_i = b_i$

$x_j \ge 0 \quad j=1,\dots,n$

$i=1,\dots,m$

$\sum a_{ji} u_i \ge c_j \Rightarrow$

$\sum a_{ji} u_i - e_j = c_j$

$u_i \ge 0 \quad i=1,\dots,n$

$x = [x_1 \; \dots \; x_n] \Rightarrow$ optimalna rj

$u = [u_1 \; \dots \; u_n]$

complimentary slackness

$s_i u_i = 0 \quad i=1,\dots,m$

$e_j x_j = 0 \quad j=1,\dots,n$

! Pr. $\max \; z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

Ograničenja: $8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 49$

$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20$

$2x_1 + 15x_2 + 0.5x_3 \le 8$

Dual: $\min \; w = 49u_1 + 20u_2 + 8u_3$

$8u_1 + 4u_2 + 2u_3 \ge 60$

$6u_1 + 2u_2 + 15u_3 \ge 30$

$1u_1 + 1.5u_2 + 0.5u_3 \ge 20$

Rješenje duala $u_1 = 0$ $e_1 = 0$ $w^* = 280$

$u_2 = 10$ $e_2 = 5$

$u_3 = 10$ $e_3 = 0$

Onda je rješenje primala:

$z^* = 280$

$e_1 x_1 = 0$

$e_2 x_2 = 0 \Rightarrow 5 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$e_3 x_3 = 0$

$s_1 \cdot u_1 = 0$

$s_2 \cdot u_2 = 0 \Rightarrow s_2 \cdot 10 = 0 \Rightarrow s_2 = 0$

$s_3 \cdot u_3 = 0 \Rightarrow s_3 \cdot 10 = 0 \Rightarrow s_3 = 0$

Sad se vratimo u primal i uvrstimo $z^* = 280$, $x_2 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$

Konačno rj $x_1 = 2$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $s_1 = 2$ $s_2 = 0$ $s_3 = 0$

Dualni simpleks

- ako imam previše ograničenja onda koristim dualni simpleks

DUALNI PROBLEM

Pr. $\min \quad w = u_1 + 2u_2$

$u_1 - 2u_2 + u_3 \geq 4$

$2u_1 + u_2 - u_3 \geq 6$

Priprema za $\overset{\text{dualni}}{\vee}$ simpleks: $v = -w = -u_1 - 2u_2$

$v + u_1 + 2u_2 = 0$

$u_1 - 2u_2 + u_3 - e_1 = 4 \quad / \cdot (-1)$

$2u_1 - u_2 - u_3 - e_2 = 6 \quad / \cdot (-1)$

ROW 0 $\quad R_0$: $v + u_1 + 2u_2 = 0$

1 $\quad R_1$: $-u_1 + 2u_2 - u_3 + e_1 = -4$

2 $\quad R_2$: $-2u_1 + u_2 + u_3 + e_2 = -6$

$$\text{ratio} = \frac{\text{koef NBV u } R_0}{\text{koef NBV u pivot row}}$$

za ratio gledam nebazične var s negativnim k

v	u_1	u_2	u_3	e_1	e_2	RHS	BV	
1	1	2	0	0	0	0	$u=0$	
0	-1	2	-1	1	0	-4	$e_1=-4$	
0	-2	$\boxed{-1}$	1	0	1	-6	$e_2=-6$	$\rightarrow$ najmanje $\rightarrow e_2$ je izlazna var
	$\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{-1}=-2$						
	manji apsolutno							
1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-3	$v=3$	
0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	-1	$e_1=-1$	$\rightarrow e_1$ je izlazna var
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3	$u_1=3$	
			$\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}$		$\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1$			
1	0	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$v=-\frac{10}{3}$	
0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$u_3=\frac{2}{3}$	gotovi smo jer
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	$u_1=-\frac{1}{3}$	ova 2 nisu negativna

$v=-\frac{10}{3} \Rightarrow w=\frac{10}{3}$

$u_3=\frac{2}{3} \quad u_1=-\frac{1}{3} \quad u_2=0$

$e_1=0 \quad e_2=0$

Branch & round algorithm

$\max \ z = 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4$

$x_1 + 5x_3 \leq 10$

$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$

$6x_1 - 5x_2 \leq 0$

$-x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3$

$x_i \geq 0$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ (integeri) — LP relaxation: zanemarimo taj uvjet

$\Downarrow$

① $z^* = -\infty$ (to tek mijenjamo kad su nam $x_1\ x_2\ x_3$ integeri) dobijemo rezultat: $x_1 = 1.25$ $x_3 = 1.75$

$x_2 = 1.5$ $x_4 = 0$

Odaberi redak x_i koji nije došao kao integer kad smo zadatak riješili uz LP relaxation

opet rješavam simplex

$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor \Rightarrow x_1 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 1$ $x_3 = 1.8$ $z = 14.5$

$x_2 = 1.2$ $x_4 = 0$

$x_j \geq \lceil x_j^* \rceil \Rightarrow x_1 \geq 2 \Rightarrow$ infeasible

Sada (uz $x_1 \leq 1$) dodajemo i ograničenje

- $x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 0.83$ $x_3 = 1.83$ $z = 14.?$
  $x_2 = 1$ $x_4 = 0$
- $x_2 \geq 2$

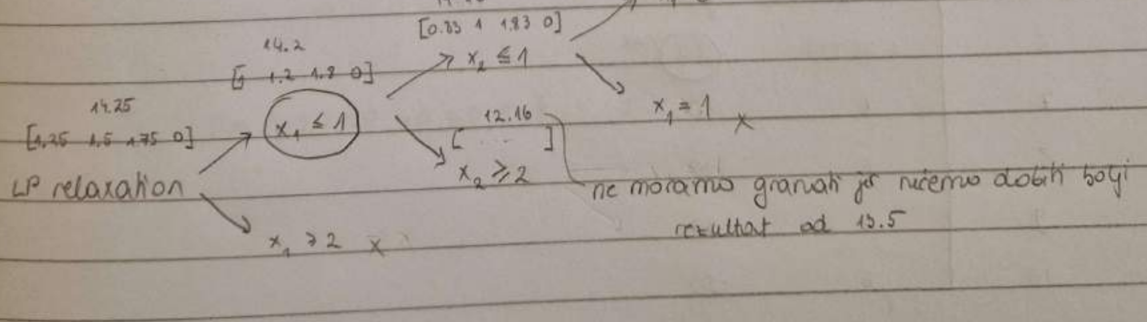
Sada za x_1 ili x_3 ajmo za x_1.

Finalno rj dobijemo tek kad nema više grananja

$z = 13.5$

(pogledati najdove)

Problem naprtnjače



Problem prodavača novina

Moguća potražnja $S = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ - states-of-the-world stanja

(koliko može prodati) svako stanje je jednako vjerojatno (uniformna distr.) $p_j = \frac{1}{5}$, $\forall j \in S$

Moguće akcije $A = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

(koliko ih je nabavio)

reward

$r_{ij} = 25j - 20i$, $i \leq j$

$= 5i$

$25 \cdot 6 - 20 \cdot 6$

	ordered \ demand	S: 6	7	8	9	10	6	7	8	9	10
A	6	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
	7	30 - 20	35	35	35	35	10	35	35	35	35
	8	$25 \cdot 6 - 20 \cdot 8$ → 30 - 40	35 - 20	40	40	40	-10	15	40	40	40
	9	30 - 60	35 - 40	40 - 20	45	45	-30	5	20	45	45
	10	30 - 80	35 - 60	40 - 40	45 - 20	50	-50	-25	0	25	50

1. STRATEGIJA : max i min

min u svakom retku

ordered	S_j	r_{ij} (min)
6	6, 7, 8, 9, 10	30 MAX
7	6	10
8	6	-10
9	6	-30
10	6	-50

u kojem stupcu je min

2. STRATEGIJA : max i max

ordered	S_j	r_{ij} (max)
6	6 – 10	30
7	7 - 10	35
8	8 - 10	40
9	9, 10	45
10	10	50

3. STRATEGIJA : min i max regret

1. za $\forall S_j$ naći akciju koja maksimizira r_{ij} – gledamo stupce
2. Izračunati lost opportunity (regret)
3. Nad regret-ovima raditi minimax

max u retku

ordered	6 regret	7	8	9	10
6	30 - 30 = 0	35 - 30 = 5	40 - 30 = 10	15	20
7	30 - 10 = 20	35 - 35 = 0	40 - 35 = 5	10	15
8	30 - (-10) = 40	35 - 15 = 20	40 - 40 = 0	5	10
9	30 - (-30) = 60	35 - 5 = 30	40 - 20 = 20	0	5
10	30 - (-50) = 80	35 - (-25) = 60	40 - 0 = 40	20	0

max vrijednost u stupcu

Min {20, 20, 40, 60, 80} = 20

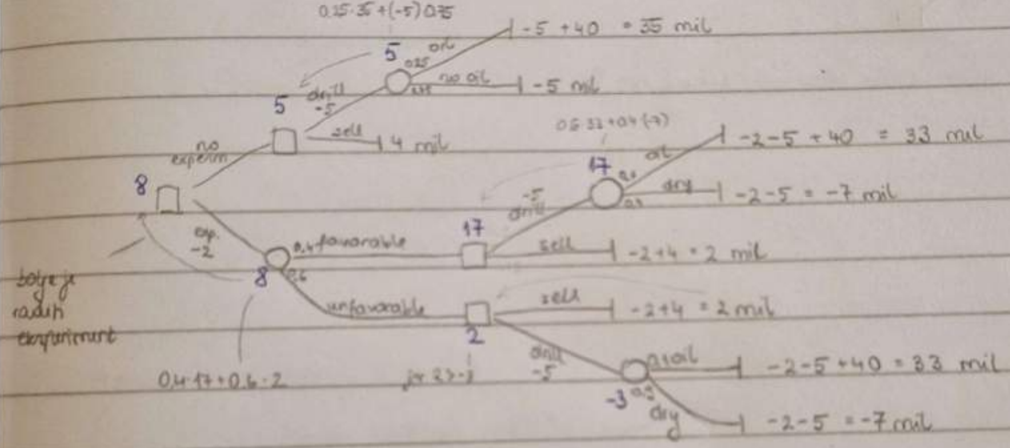
4. STRATEGIJA : Expected value criterion

ordered	expected reward
6	$\frac{1}{5}\cdot 30+\frac{1}{5}\cdot 30+\frac{1}{5}\cdot 30+\frac{1}{5}\cdot 30+\frac{1}{5}\cdot 30 = 30$
7	$\frac{1}{5}(10+35\cdot 4) = 30$
8	$\frac{1}{5}(-10+15+40\cdot 3) = 25$
9	$\frac{1}{5}(-30+5+20+45\cdot 2) = 15$
10	$\frac{1}{5}(-50-25+0+25+50) = 0$

Decision trees

- 25% oil (bez eksperimenta)
- seismic experiment : \$ 2 mil — favorable : 40% → oil 60% ; unfavorable : 60% → oil 10%
- drill \$ 5 mil : zarada \$ 40 mil
- sell : \$ 4 mil

□ decision ○ event



EVSI (expected value of sample information)

(expect. val. with original information)

EVSI = EVWSI - EVWOI

(exp. val. with sample inf.)

EVWOI - max value bez eksperimenta   EVWOI = 5

EVWSI - expected value bez troškova eksperimenta   EVWSI = 8 + 2 = 10

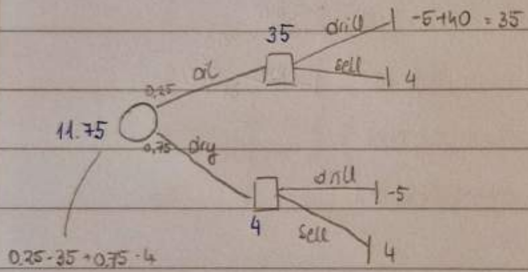
→ EVSI = 10 - 5 = 5   5 > 2 ✓ isplati se

ako je EVSI > troškovi testiranja (2) :

isplati se provesti eksperiment

EVPI (expected value of perfect information)

$$EVPI = EVWPI - EVWOI = 11.75 - 5 = 6.75$$



uvijek : $EVSI \leq EVPI$

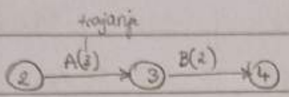
⇓

$EVWPI = 11.75$

Projektna mreža

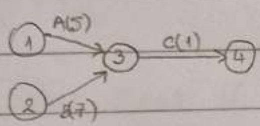
○ čvor = event (npr kraj jedne ili više aktivnosti)

→ strelica = activity (trajanje aktivnosti)

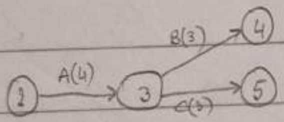


⇒ aktivnost B ne može početi dok ne završi A

⇒ B je sljedbenik aktivnosti A



⇒ aktivnost C ne može početi dok ne završe A i B

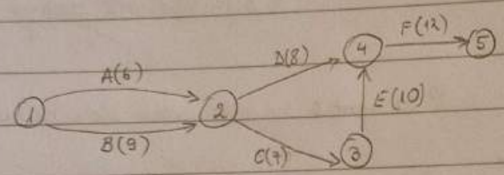


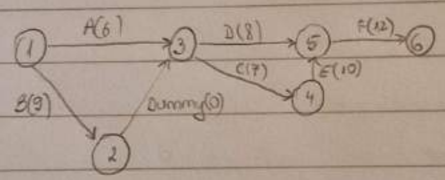
Pravila:

1. Početni čvor (1)
2. Mora postojati završni čvor
3. Broj završnog čvora neke aktivnosti mora biti veći nego broj početnog čvora te aktivnosti npr →(2)→(5)
4. Jedna aktivnost = jedna strelica
5. Dva čvora su povezana s najviše 1 strelicom

Pr.

prethodnici	aktivnost	trajanje
—	A	6
—	B	9
A, B	C	7
A, B	D	8
C	E	10
D, E	F	12



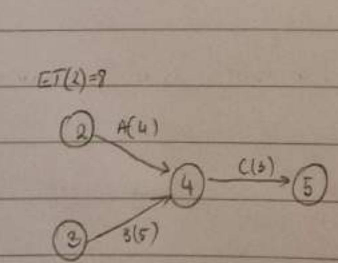


ET(i) - early event time čvora i

- najranije vrijeme kad se čvor može dogoditi

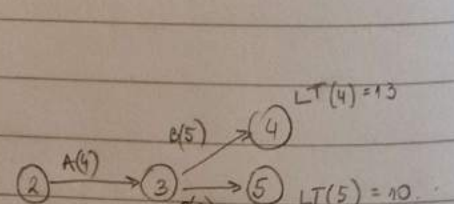
LT(i) - late event time čvora i

Pr.



$ET(4) = \max(8+4, 6+5) = 12$

Pr.



$LT(3) = \min(13-5, 10-3) = 7$

$LT(2) =$

$\rightarrow$ $ET(1) = 0$ $\qquad$ $ET(4) = 9 + 7 = 16$

$ET(2) = 9$ $\qquad$ $ET(5) = 9 + 8 = 26$

$ET(3) = 6$ $\qquad$ $ET(6) = 17 + 12 = 38$

$LT(6) = 38$ $\qquad$ $LT(3) = 9 = \min(26-8,\ 16-7) = 9$

$LT(5) = 38 - 12 = 26$ $\qquad$ $LT(2) = 9$

$LT(4) = 26 - 10 = 16$ $\qquad$ $LT(1) = 0 = \min(9-6,\ 9-9) = 0$

TF - total float of activities, max čekanje prije nego krene aktivnost

$$TF(i,j) = LT(j) - ET(i) - t_{ij}$$

$\overset{B}{TF(1,2)} = LT(2) - ET(1) - 9 = 0$

$TF(2,3) = LT(3) - ET(2) - 6 = 0$

$TF(1,3) = 3$

$TF(3,4) = 0$ $\qquad$ $TF(3,5) = 9$

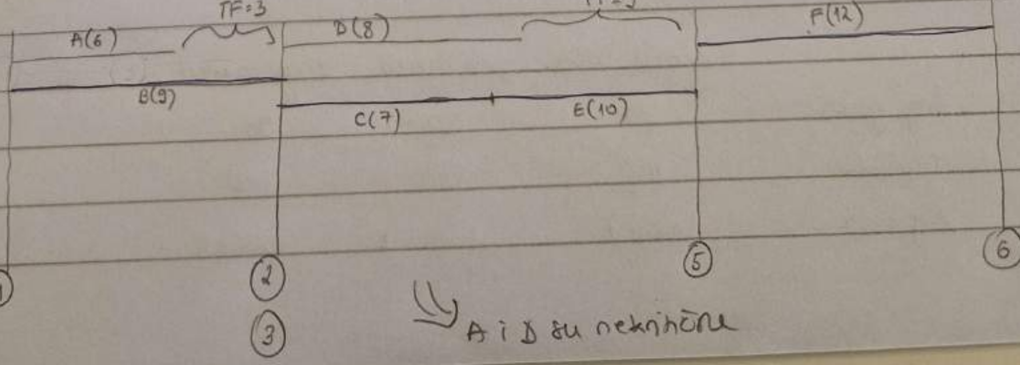
$TF(4,5) = 0$

$TF(5,6) = 0$

ako $TF = 0$ $\Rightarrow$ KRITIČNA AKTIVNOST

KRITIČNI PUT - od 1. do zadnjeg čvora biramo samo kritične aktivnosti

Kritični put ovog projekta su aktivnosti B, C, E, F



A i D su nekritične

x_i vrijeme čvora i => pretvaramo projektnu mrežu u simpleks

Želim minimizirati vrijeme $x_6 - x_1$

Uvjeti: $x_j \geq x_i + t_{ij}$

$x_j \geq 0$

Lab 1

MI : 3 teme: 1. simplex (2-3 zad) (1 easy, 1 teži) - dualni, sensitivity analysis

2. Decision tree

3. Projektna mreža