Assignatura: Física computacional Departament de Física de la Matèria Condensada

---

Nom: ....

Els processos epidèmics, ja siguin en poblacions d'animals o humanes o en sistemes de computadores connectades, es donen quan un individu infectat es posa en contacte amb un de sa i, amb una certa probabilitat, l'infecta. D'altra banda, els individus infectats es recuperen espontàniament i tornen a esdevenir susceptibles de ser infectats de nou. El balanç entre la probabilitat d'infecció i el ritme de curació determina l'estat final de l'epidèmia. Per sobre d'un llindar crític de la probabilitat d'infecció, l'epidèmia esdevé endèmica, assolint un estat estacionari ben definit. Per sota del llindar crític, les epidèmies no són capaces de sobreviure.

Aquest procés es pot modelar fàcilment de la següent forma. Tenim un conjunt d'individus N que poden estar en dos estats: $n_i(t) = 1$ si l'individu i-èsim està infectat a temps t i $n_i(t) = 0$ si es tracta d'un individu sa. El nombre total d'individus infectats a temps t és $n_{tot}(t) = \sum_{i=1}^{N} n_i(t)$. La fracció d'individus infectats, $\rho(t) = n_{tot}(t)/N$, s'anomena prevalença.

1. En cada pas de la simulació triem uniformement a l'atzar un individu infectat[1] que realitza només una de les accions descrites en els punts 2 i 3
2. Amb probabilitat p el curem i, per tant, el nombre total d'infectats disminueix en una unitat. Després d'això, saltem al punt número 4
3. Amb probabilitat complementària $1 - p$ l'individu triat inicialment tria a l'atzar un individu d'entre els N de la població. Si l'individu triat en aquest segon pas estava sa, l'infectem i augmentem en una unitat el nombre total d'infectats. Si ja estava infectat, continua infectat i el sistema queda exactament com abans.
4. En qualsevol cas, després dels passos 2 o 3, el temps avança com

$$t \to t + \frac{p}{n_{tot}(t)}$$

   i tornem al punt número 1

En aquest examen farem servir $N = \{10^4, 10^5\}$ individus amb la condició inicial $\{n_i(t = 0) = 1,\ \forall i = 1, \cdots, N\}$.

1. **(6 punts)** Escriu un programa que implementi la dinàmica estocàstica descrita a l'enunciat. Executa el programa fins a un temps $t_{max} = 40$ i escriu en un fitxer l'evolució temporal de la prevalença a intervals de temps 0.01 per valors de $p = \{\frac{2}{3}, \frac{1}{2},$ i $\frac{2}{5}\}$ i per les dues mides demanades.

---

[1] La manera més senzilla (però no més eficient) consisteix en triar un individu a l'atzar entre els N de la població però només acceptar-lo si està infectat. Si no ho està, tornem a triar un altre individu fins que en trobem un d'infectat.

2. **(4 punts)** En el límit de poblacions grans, la prevalença $\rho(t)$ satisfà l'equació diferencial

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\rho(t) + \frac{1-p}{p}\rho(t)[1-\rho(t)]$$

Implementa un mètode Runge-Kutta de quart ordre (pots adaptar l'emprat a la pràctica 8) per resoldre l'equació diferencial amb els mateixos paràmetres i condició inicial que les simulacions de l'apartat anterior. Superposa en una gràfica les simulacions i les solucions numèriques en escala logarítmica.
