

Überarbeitete Version d. Analysis Mitschriebes

Johnny Stauch

October 19, 2025

Contents

1 Grundlagen	1
1.1 Def.: Grundlegendes	1
1.2 Def.: Natürliche Zahlen	2
1.3 Satz: Vollständige Induktion	2
1.4 Satz: Gaußsche Summenformel	2
1.5 Def.: Funktion	2
2 Folgen	2
2.1 Def.: Folgen	2
2.2 Def.: Grenzwerte	3
2.3 Def.: Eigenschaften von Grenzwerten	3
2.4 Def.: Eigenschaften von Funktionen	3
2.5 Satz: Eindeutigkeit	4
2.6 Satz: Rechenregeln für GW	4
3 Beispiele	4
3.1 Grenzwertnachweise	4
3.2 Uneigentlichen Grenzwert nachweisen	5
3.3 Rechenregeln für Grenzwerte	5
3.4 diverse	5

1 Grundlagen

1.1 Def.: Grundlegendes

- a) Eine Definition führt einen neuen Begriff oder eine neue Schreibweise ein, und erklärt ihre Bedeutung unter Verwendung bereits bekannter Begriffe und Schreibweisen.
Der neue Begriff wird zur Verdeutlichung unterstrichen.
- b) Ein Satz formuliert eine wahre Aussage, z.b. als *wenn-dann-Aussage*.

- c) Ein Beweis zeigt die Richtigkeit eines Satzes, meist unter Verwendung bereits bewiesener Sätze.

1.2 Def.: Natürliche Zahlen

- a) Die Elemente der Menge \mathbb{N} heißen **natürliche Zahlen**.
 b) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup 0$

1.3 Satz: Vollständige Induktion

Gilt eine Aussage $A(n)$ für $n = 1$ (IA),
 und man beweist für $n = n + 1$ (IS),
 so gilt die Induktionshypothese (IH)
 mittels Vollständiger Induktion als bewiesen.

1.4 Satz: Gaußsche Summenformel

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n := \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Beweis durch vollst. Induktion:

$$\text{IA: } n = 1 : \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{IS: } n \rightarrow n+1 : \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{IH}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} \\ &= \frac{(n(n+1)) + (2n+2)}{2} = \frac{(n^2+n) + (2n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

1.5 Def.: Funktion

- a) Eine Funktion $f : D \rightarrow W$ ordnet jedem Wert $x \in D$ einen Wert $f(x) \in W$ zu.
 b) D heißt Definitionsmenge, W heißt Wertemenge der Funktion f .

2 Folgen

2.1 Def.: Folgen

- a) Eine Folge (a_n) ist eine Funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$,
 die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet.
 (Bezeichnung der Glieder: $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$)
 b) Spezielle Folgen:

- *arithmetische Folgen:*
 $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d$ für ein bel. aber festes $d \in \mathbb{R}$.
z.b.: $a_n = 2n, a_n = 5 - 3n$
- *geometrische Folgen:*
 $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n * q$ für ein bel. aber festes $q \in \mathbb{R}$.
z.b.: $a_n = 2^n, a_n = \frac{1}{3^n}$
- *alternierende Folgen:*
 $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1}a_n < 0$
- *(streng) monoton wachsende Folgen:*
 $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq (, >)a_n$
- *(streng) monoton fallende Folgen:*
 $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq (, <)a_n$
- *(nach oben/unten) beschränkte Folgen:*
 $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq (, \geq)c$ mit $c \in \mathbb{R}$

2.2 Def.: Grenzwerte

Eine Folge (a_n) besitzt den Grenzwert (GW) $a \in \mathbb{R}$, geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ bzw. } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) > 0 : |a_n - a| < \epsilon, \forall n > N(\epsilon)$

2.3 Def.: Eigenschaften von Grenzwerten

- konvergent $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$
- divergent $\Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{R}$
- Nullfolge $\Leftrightarrow a = 0$

2.4 Def.: Eigenschaften von Funktionen

- Eine Folge heißt bestimmt divergent oder uneigentlich konvergent, wenn sie als uneigentlichen GW $\left\{ \begin{matrix} \infty \\ -\infty \end{matrix} \right\}$ besitzt.

Geschrieben:

$$\left\{ \begin{matrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ oder } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{matrix} \right\}$$

$$\text{d.h. } \forall \left\{ \begin{matrix} A > 0 \\ A < 0 \end{matrix} \right\} \exists N(A) > 0 : \left\{ \begin{matrix} a_n > A \\ a_n < A \end{matrix} \right\} \forall n \geq N(A)$$

- Eine Folge heißt unbestimmt divergent, wenn sie weder konvergent, noch bestimmt divergent ist.
- Tree einfügen.

2.5 Satz: Eindeutigkeit

Wenn eine Folge einen GW besitzt, ist sie eindeutig.

2.6 Satz: Rechenregeln für GW

Für konvergente Folgen $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ und $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ gilt:

- a) $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$
- b) $a_n - b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a - b$
- c) $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$
- d) $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$ wenn $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$
- e) $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$
- f) $\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

3 Beispiele

3.1 Grenzwertnachweise

- a) $a_n = \frac{2n+1}{3n}$, Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

Beweis: sei $\epsilon = 0$ bel. aber fest.

$$|a_n - a| = \left| \frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n+1-2n}{3n} \right| = \left| \frac{1}{3n} \right| = \frac{1}{3n} \stackrel{!}{<} \epsilon$$

$$\frac{1}{3} < \epsilon n \Leftrightarrow \frac{1}{3\epsilon} < n$$

Wählen wir für $N(\epsilon) = \frac{1}{3\epsilon}$, gilt $\forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

- b) $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$, Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$

Beweis: sei $\epsilon > 0$ bel. aber fest

$$|a_n - a| = \left| \frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3(2n+1) - 2(3n+4)}{3(3n+4)} \right| = \left| \frac{3(2n+1) - 2(3n+4)}{3(3n+4)} \right| =$$

$$\left| \frac{6n+3-6n-8}{9n+12} \right| = \left| \frac{-5}{9n+12} \right| = \frac{5}{9n+12} \stackrel{!}{<} \epsilon$$

$$\Leftrightarrow 5 < \epsilon(9n+12) \Leftrightarrow \frac{5}{\epsilon} < 9n+12 \Leftrightarrow \frac{5}{\epsilon} - 12 < 9n \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{\epsilon} - 12}{9} < n \Leftrightarrow n > \frac{\frac{5}{\epsilon} - 12}{9}$$

Deshalb wählen wir für $N(\epsilon) = \frac{\frac{5}{\epsilon} - 12}{9}$, sodass gilt:

$$\forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$$

$$\text{Alternativ: } |a_n - a| = \dots = \frac{5}{9n+12} < \frac{5}{9n} < \frac{1}{n} \stackrel{!}{<} \epsilon$$

d.h. $n > \frac{1}{\epsilon}$, wähle daher $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$

- c) $a_n = \frac{2n+1}{3n-4}$, Beh.: $a_n \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$

Beweis: sei $\epsilon > 0$ bel. aber fest

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left| \frac{2n+1}{3n-4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3(2n+1)}{3(3n-4)} - \frac{2(3n-4)}{3(3n-4)} \right| = \left| \frac{(3(2n+1)) - (2(3n-4))}{3(3n-4)} \right| = \\
&= \left| \frac{6n+3-(6n-8)}{9n-12} \right| = \left| \frac{11}{9n-12} \right| \\
&\stackrel{\forall n \geq 2}{=} \frac{11}{9n-12} = \frac{11}{8n+n-12} \stackrel{\forall n \geq 12}{<} \frac{11}{8n} < \frac{2}{n} \stackrel{!}{<} \epsilon \text{ wenn } n > \frac{2}{\epsilon} \\
&\text{Deshalb wählen wir } N(\epsilon) = \max\left(\frac{2}{\epsilon}, 12\right), \text{ sodass gilt:} \\
&n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon
\end{aligned}$$

3.2 Uneigentlichen Grenzwert nachweisen

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3n+4}, \text{ Beh.: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Beweis: sei $A > 0$ bel. aber fest.

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3n+4} > \frac{2n^2}{3n+4} = \frac{2n^2}{2n^2} 4n - (n-4) \stackrel{\forall n > 4}{>} \frac{2n^2}{4n} = \frac{n}{2} \stackrel{!}{>} A, \text{ wenn } n > 2A$$

Wahle daher $N(A) = \max(2A, 4) : n \geq N(A) : a_n > A$

3.3 Rechenregeln für Grenzwerte

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-4} = \frac{2n(2+\frac{1}{n})}{n(3-\frac{4}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{4}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

3.4 diverse

$$\begin{aligned}
\text{a) } a_n &= \frac{3n^3-4n^2+7n-1}{-5n^3+2n^2-8n} = \frac{n^3(3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^3(-5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^3})} \\
&= \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{-5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3-0+0+0}{-5+0-0} = -\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{2n+1}{3n-4}, \text{ Beh.: } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{7}{3}$$

Beweis: sei ϵ bel. aber fest.

Vorüberlegung zur Wahl von $N(\epsilon)$:

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left| \frac{2n+1}{3n-4} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3(2n+1)-2(3n-4)}{3(3n-4)} \right| = \left| \frac{6n+3-6n+8}{9n-12} \right| = \left| \frac{11}{9n-12} \right| \stackrel{n=2}{=} \\
&\frac{11}{9n-12} = \frac{11}{8n+(n-12)} \leq \frac{11}{8n} < \frac{2}{n} \stackrel{!}{<} \epsilon, \text{ für } n > \frac{2}{\epsilon}
\end{aligned}$$

Wahle daher $N(\epsilon) = \max(\frac{2}{\epsilon}, 12)$. Dann gilt für $n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

$$\begin{aligned}
\text{c) } a_n &= \frac{3n^3-4n^2+7n-1}{-5n^4+2n^2-8n} = \frac{n^3(3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^4(-5+\frac{2}{n^2}-\frac{8}{n^3})} \\
&= \frac{1}{n} \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{-5+\frac{2}{n^2}-\frac{8}{n^3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3-0+0-0}{-5+0-0} = 0 \\
\text{d) } a_n &= \frac{3n^4-4n^2+7n-1}{-5n^3+2n^2-8n} = \frac{n^4(3-\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3}-\frac{1}{n^4})}{n^3(-5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^4})} = \frac{3n-\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{-5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^4}} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\infty-0+0-0}{-5+0-0} = \infty \frac{3}{-5} = -\infty
\end{aligned}$$