Überarbeitete Version d. Analysis Mitschriebes

October 19, 2025

Contents

1 Grundlagen

1.1 Def.: Grundlegendes

a) Eine <u>Definition</u> führt einen neuen Begriff oder eine neue Schreibweise ein, und erklärt ihre Bedeutung unter Verwendung bereits bekannter Begriffe und Schreibweisen.
Der neue Begriff wird zur Verdeutlichung unterstrichen.

b) Ein <u>Satz</u> formuliert eine wahre Aussage, z.b. als *wenn-dann-Aussage.*

c) Ein Beweis zeigt die Richtigkeit eines Satzes, meist unter Verwendung bereits bewiesener Sätze.

1.2 Def.: Natürliche Zahlen

a) Die Elemente der Menge $\mathbb{N}$ heißen **natürliche Zahlen**.

b) $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup 0$

1.3 Satz: Vollständige Induktion

Gilt eine Aussage $A(n)$ für $n = 1$ (IA),
und man beweißt für $n = n + 1$ (IS),
so gilt die Induktionshypothese (IH)
mittels Vollständiger Induktion als bewiesen.

1.4 Satz: Gaußsche Summenformel

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n := \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

Beweis durch vollst. Induktion:
IA: $n = 1 : \sum\limits_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$
IS: $n \to n + 1 : \sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \sum\limits_{k=1}^{n} k + (n + 1) \overset{IH}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$
$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2}$
$= \frac{(n(n+1))+(2n+2)}{2} = \frac{(n^2+n)+(2n+2)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2}$
$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

1.5 Def.: Funktion

a) Eine Funktion $f : D \to W$ ordnet jedem Wert $x \in D$ einen Wert $f(x) \in W$ zu.

b) D heißt Definitionsmenge, W heißt Wertemenge der Funktion f.

2 Folgen

2.1 Def.: Folgen

a) Eine Folge (a_n) ist eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuordnet.
(Bezeichnung der Glieder: $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$)

b) Spezielle Folgen:

- *arithmetische Folgen*:
  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d$ für ein bel. aber festes $d \in \mathbb{R}$.
  z.b.: $a_n = 2n$, $a_n = 5 - 3n$
- *geometrische Folgen*:
  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n * q$ für ein bel. aber festes $q \in \mathbb{R}$.
  z.b.: $a_n = 2^n$, $a_n = \frac{1}{3n}$
- *alternierende Folgen*:
  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1}a_n < 0$
- *(streng) monoton wachsende Folgen*:
  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq (,>)a_n$
- *(streng) monoton fallende Folgen*:
  $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \leq (,<)a_n$
- *(nach oben/unten) beschränkte Folgen*:
  $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq (,\geq)c$ mit $c \in \mathbb{R}$

2.2 Def.: Grenzwerte

Eine Folge (a_n) besitzt den Grenzwert (GW) $a \in \mathbb{R}$, geschrieben

$$\lim_{x\to\infty} a_n = a \text{ bzw. } a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

Wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) > 0 : |a_n - a| < \epsilon, \forall n > N(\epsilon)$

2.3 Def.: Eigenschaften von Grenzwerten

a) konvergent $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$

  - Nullfolge $\Leftrightarrow a = 0$

b) divergent $\Leftrightarrow \nexists a \in \mathbb{R}$

  - bestimmt divergent $\Leftrightarrow \exists a$ mit $a = \begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$
  - unbestimmt divergent $\Leftrightarrow \nexists a$

2.4 Def.: Uneigentlicher Grenzwert

Eine Folge heißt bestimmt divergent oder uneigentlich konvergent, wenn sie als uneigentlichen GW $\begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$ besitzt.
Geschrieben:

$$\begin{Bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ oder } a_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty \end{Bmatrix}$$

d.h. $\forall \begin{Bmatrix} A > 0 \\ A < 0 \end{Bmatrix} \exists N(A) > 0 : \begin{Bmatrix} a_n > A \\ a_n < A \end{Bmatrix} \forall n \geq N(A)$

2.5 Satz: Eindeutigkeit

Wenn eine Folge einen GW besitzt, ist sie eindeutig.

2.6 Satz: Rechenregeln für GW

Für konvergente Folgen $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ und $b_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ gilt:

a) $a_n + b_n \underset{n\to\infty}{\to} a + b$

b) $a_n - b_n \underset{n\to\infty}{\to} a - b$

c) $a_n b_n \underset{n\to\infty}{\to} ab$

d) $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{a}{b}$ wenn $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

e) $|a_n| \underset{n\to\infty}{\to} |a|$

f) $\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

3 Beispiele

3.1 Grenzwertnachweise

a) $a_n = \frac{2_n+1}{3n}$, Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$
Beweis: sei $\epsilon = 0$ bel. aber fest.
$|a_n - a| = |\frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3}| = |\frac{2n+1-2n}{3n}| = |\frac{1}{3n}| = \frac{1}{3n} \overset{!?}{<} \epsilon$
$\frac{1}{3} < \epsilon n \Leftrightarrow \frac{1}{3\epsilon} < n$
Wählen wir für $N(\epsilon) = \frac{1}{3\epsilon}$, gilt $\forall n > N(\epsilon) : |a_n + a| < \epsilon$

b) $a_n = \frac{2n+1}{3n+4}$, Beh.: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$
Beweis: sei $\epsilon > 0$ bel. aber fest
$|a_n - a| = |\frac{2n+1}{3n+4} - \frac{2}{3}| = |\frac{3(2n+1)}{3(3n+4)} - \frac{2(3n+4)}{3(3n+4)}| = |\frac{3(2n+1)-2(3n+4)}{3(3n+4)}| = |\frac{6n+3-6n-8}{9n+12}| = |\frac{-5}{9n+12}| = \frac{5}{9n+12} \overset{!?}{<} \epsilon$
$\Leftrightarrow 5 < \epsilon(9n+12) \Leftrightarrow \frac{5}{\epsilon} < 9n + 12 \Leftrightarrow \frac{5}{\epsilon} - 12 < 9n \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{\epsilon}-12}{9} < n \Leftrightarrow n > \frac{\frac{5}{\epsilon}-12}{9}$
Deshalb wählen wir für $N(\epsilon) = \frac{\frac{5}{\epsilon}-12}{9}$, sodass gilt:
$\forall n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$
Alternativ: $|a_n - a| = ... = \frac{5}{9n+12} < \frac{5}{9n} < \frac{1}{n} \overset{!?}{<} \epsilon$
d.h. $n > \frac{1}{\epsilon}$, wähle daher $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$

c) $a_n = \frac{2n+1}{3n-4}$, Beh.: $a_n \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3}$
Beweis: sei $\epsilon > 0$ bel. aber fest

$|a_n - a| = |\frac{2n+1}{3n-4} - \frac{2}{3}| = |\frac{3(2n+1)}{3(3n-4)} - \frac{2(3n-4)}{3(3n-4)}| = |\frac{(3(2n+1))-(2(3n-4))}{3(3n-4)}| =$
$|\frac{6n+3-(6n-8)}{9n-12}| = |\frac{11}{9n-12}|$
$\overset{\forall n\geq 2}{=} \frac{11}{9n-12} = \frac{11}{8n+n-12} \overset{\forall n\geq 12}{<} \frac{11}{8n} < \frac{2}{n} \overset{!?}{<} \epsilon$ wenn $n > \frac{2}{\epsilon}$
Deshalb wählen wir $N(\epsilon) = max(\frac{2}{\epsilon}, 12)$, sodass gilt:
$n > N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

3.2 Uneigentlichen Grenzwert nachweisen

$a_n = \frac{2n^2+1}{3n+4}$, Beh.: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
Beweis: sei $A > 0$ bel. aber fest.
$a_n = \frac{2n^2+1}{3n+4} > \frac{2n^2}{3n+4} = \frac{2n^2}{2n^2}4n - (n-4) \overset{\forall n>4}{>} \frac{2n^2}{4n} = \frac{n}{2} \overset{!?}{>} A$, wenn $n > 2A$
Wähle daher $N(A) = max(2A, 4) : n \geq N(A) : a_n > A$

3.3 Rechenregeln für Grenzwerte

$a_n = \frac{2n+1}{3n-4} = \frac{2n(2+\frac{1}{n})}{n(3-\frac{4}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{4}{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{2.7}{\to}} \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

3.4 diverse

a) $a_n = \frac{3n^3-4n^2+7n-1}{-5n^3+2n^2-8n} = \frac{n^9(3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^3(-5+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3})}$
$= \frac{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{-5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^2}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{3-0+0+0}{-5+0-0} = -\frac{3}{5}$

b) $a_n = \frac{2n+1}{3n-4}$, Beh.: $a_n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{7}{3}$
Beweis: sei ϵ bel. aber fest.
Vorüberlegung zur Wahl von $N(\epsilon)$:
$|a_n - a| = |\frac{2n+1}{3n-4} - \frac{1}{3}| = |\frac{3(2n+1)-2(3n-4)}{3(3n-4)}| = |\frac{6n+3-6n+8}{9n-12}| = |\frac{11}{9n-12}| \overset{n=2}{=}$
$\frac{11}{9n-12} = \frac{11}{8n+(n-12)} \leq \frac{11}{8n} < \frac{2}{n} \overset{!?}{<} \epsilon$, für $n > \frac{2}{\epsilon}$
Wähle daher $N(\epsilon) = max(\frac{2}{\epsilon}, 12)$. Dann gilt für $n < N(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon$

c) $a_n = \frac{3n^3-4n^2+7n-1}{-5n^4+2n^2-8n} = \frac{n^3(3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3})}{n^4(-5+\frac{2}{n^2}-\frac{8}{n^3})}$
$= \frac{1}{n}\frac{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{-5+\frac{2}{n^2}-\frac{8}{n^3}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{3-0+0-0}{-5+0-0} = 0$

d) $a_n = \frac{3n^4-4n^2+7n-1}{-5n^3+2n^2-8n} = \frac{n^4(3-\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3}-\frac{1}{n^4})}{n^3(-5+\frac{2}{n}-\frac{8}{n^4})} = \frac{3n-\frac{4}{n^2}+\frac{7}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{-5+\frac{7}{n}-\frac{8}{n^2}}$
$\underset{n\to\infty}{\to} \frac{\infty*3-0+0-0}{-5+0-0} = \infty\frac{3}{-5} = -\infty$