Analysis Übungsblatt 01

October 19, 2025

1 Aufgabe 01: Dreiecksungleichung

Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}$ die *Dreiecksungleichung*: $|x+y| \leq |x| + |y|$.
Zeigen sie mittels *vollständiger Induktion* folgende vereinfachte Gleichung:
$|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \forall n \in \mathbb{N}, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ (IH)
<u>Lösung</u>:
(IA) $n = 1 : |\sum\limits_{k=1}^{1} a_k| = |a_1| \leq |a_1| = \sum\limits_{k=1}^{1} |a_k|$
(IS) $n = n+1 : |\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}| \overset{trivial}{=} |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| + |a_{n+1}|$
$\overset{IH}{\leq} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum\limits_{k=1}^{n+1} |a_k|$

2 Aufgabe 02: Geometrische Summe

a) Beweisen sie mittel *vollständiger Induktion*:
   $n \in \mathbb{N}_0, q \neq 1 : \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (IH)
   (IA) $n = 0 : \sum\limits_{k=0}^{0} q^0 = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$
   (IS) $n = n+1 : \sum\limits_{k=0}^{n+1} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{IH}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$
   $= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}}{1} = \frac{1(1-q^{n+1})}{1(1-q)} + \frac{(1-q)(q^{n+1})}{1(1-q)}$
   $= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$

b) Die beschriebene Summe verhält sich für $a(1) = 1, a(2) = 2, a(3) = 4$ usw., d.h. es gilt folgende *geometrische* Folge: $a(n) = 2^{n-1}$
   Für die Lösung müssen wir lediglich folgende Formel ausrechnen:
   $\sum\limits_{k=1}^{64} 2^{k-1} \overset{Indexversch.}{=} \sum\limits_{k=0}^{63} 2^k \overset{geom.SF}{=} \frac{1-2^{63+1}}{1-2} = \frac{1-2^{64}}{-1} = \frac{1}{-1} - \frac{2^{64}}{-1} = -1 + \frac{2^{64}}{1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$

Man bräuchte als genau 18446744073709551615 Reiskörner.

3 Aufgabe 03: Eigenschaften von Folgen

4 Aufgabe 04: Folgen mit bestimmten Eigenschaften