

Analysis Übungsblatt 01

October 19, 2025

1 Aufgabe 01: Dreiecksungleichung

Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}$ die *Dreiecksungleichung*: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Zeigen sie mittels *vollständiger Induktion* folgende vereinfachte Gleichung:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad (\text{IH})$$

Lösung:

$$(\text{IA}) \quad n = 1 : \left| \sum_{k=1}^1 a_k \right| = |a_1| \leq |a_1| = \sum_{k=1}^1 |a_k|$$

$$(\text{IS}) \quad n = n + 1 : \left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| \stackrel{\text{trivial}}{=} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}|$$

$$\stackrel{\text{IH}}{\leq} \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$$

2 Aufgabe 02: Geometrische Summe

a) Beweisen sie mittel *vollständiger Induktion*:

$$n \in \mathbb{N}_0, q \neq 1 : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (\text{IH})$$

$$(\text{IA}) \quad n = 0 : \sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$

$$\begin{aligned} (\text{IS}) \quad n = n + 1 : \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}}{1} = \frac{1(1-q^{n+1})}{1(1-q)} + \frac{(1-q)(q^{n+1})}{1(1-q)} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q} \end{aligned}$$

b) Die beschriebene Summe verhält sich für $a(1) = 1, a(2) = 2, a(3) = 4$ usw., d.h. es gilt folgende *geometrische* Folge: $a(n) = 2^{n-1}$

Für die Lösung müssen wir lediglich folgende Formel ausrechnen:

$$\sum_{k=1}^{64} 2^{k-1} \stackrel{\text{Indexversch.}}{=} \sum_{k=0}^{63} 2^k \stackrel{\text{geom.SF}}{=} \frac{1-2^{63+1}}{1-2} = \frac{1-2^{64}}{-1} = \frac{1}{-1} - \frac{2^{64}}{-1} = -1 + \frac{2^{64}}{1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

Man bräuchte als genau 18446744073709551615 Reiskörner.

3 Aufgabe 03: Eigenschaften von Folgen

Geben sie die *nächsten 4 Glieder* an, das *Bildungsgesetz* und die *Eigenschaften* der Folgen.

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

$a(n) = (2n) - 1$ (arithmetische, streng monoton wachsend)

b) 1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128

$a(n) = (-1)^{n-1} 2^{n-1}$ (geometrisch, alternierend)

c) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

$a(n) = 1$ (monoton wachsend und fallend,
nach oben und unten beschränkt für $c > 1$)

d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}, \frac{255}{256}$

$a(n) = \frac{2n-1}{2^n}$ (nach oben beschränkt für $c < 1$)

e) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31

$$a(n) = \begin{cases} n = 1 : 2 \\ n = 5, 6 : 2n + 1 \\ n = 7 : 2n + 3 \\ \text{ansonsten: } 2n - 1 \end{cases}$$

f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

$$a(n) = \begin{cases} n = 0, 1 : 1 \\ \text{ansonsten: } a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Fibonacci-Folge ist streng monoton wachsend und arithmetisch.

g) 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,

tba

4 Aufgabe 04: Folgen mit bestimmten Eigenschaften

a) tba

b) tba

c) tba

d) tba

e) tba