Analysis Übungsblatt 01

October 19, 2025

1 Aufgabe 01: Dreiecksungleichung

Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}$ die *Dreiecksungleichung*: $|x + y| \leq |x| + |y|$.
Zeigen sie mittels *vollständiger Induktion* folgende vereinfachte Gleichung:
$|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \forall n \in \mathbb{N}, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ (IH)
<u>Lösung</u>:
(IA) $n = 1 : |\sum\limits_{k=1}^{1} a_k| = |a_1| \leq |a_1| = \sum\limits_{k=1}^{1} |a_k|$
(IS) $n = n + 1 : |\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k| = |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}| \overset{trivial}{=} |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| + |a_{n+1}|$
$\overset{IH}{\leq} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum\limits_{k=1}^{n+1} |a_k|$

2 Aufgabe 02: Geometrische Summe

a) Beweisen sie mittel *vollständiger Induktion*:
   $n \in \mathbb{N}_0, q \neq 1 : \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (IH)
   (IA) $n = 0 : \sum\limits_{k=0}^{0} q^0 = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$
   (IS) $n = n + 1 : \sum\limits_{k=0}^{n+1} q^k = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{IH}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$
   $= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}}{1} = \frac{1(1-q^{n+1})}{1(1-q)} + \frac{(1-q)(q^{n+1})}{1(1-q)}$
   $= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}$

b) Die beschriebene Summe verhält sich für $a(1) = 1, a(2) = 2, a(3) = 4$ usw., d.h. es gilt folgende *geometrische* Folge: $a(n) = 2^{n-1}$
   Für die Lösung müssen wir lediglich folgende Formel ausrechnen:
   $\sum\limits_{k=1}^{64} 2^{k-1} \overset{Indexversch.}{=} \sum\limits_{k=0}^{63} 2^k \overset{geom.SF}{=} \frac{1-2^{63+1}}{1-2} = \frac{1-2^{64}}{-1} = \frac{1}{-1} - \frac{2^{64}}{-1} = -1 +$
   $\frac{2^{64}}{1} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$

Man bräuchte als genau 18446744073709551615 Reiskörner.

3 Aufgabe 03: Eigenschaften von Folgen

Geben sie die *nächsten 4 Glieder* an, das *Bildungsgesetz* und die *Eigenschaften* der Folgen.

a) $1, 3, 5, 7,$ *9,11,13,15*

$a(n) = (2n) - 1$ (arithmetische, streng monoton wachsend)

b) $1, -2, 4, -8,$ *16, -32, 64, -128*

$a(n) = (-1)^{n-1}2^{n-1}$ (geometrisch, alternierend)

c) $1, 1, 1, 1,$ *1,1,1,1*

$a(n) = 1$ (monoton wachsend und fallend,
nach oben und unten beschränkt für $c > 1$)

d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \frac{127}{128}, \frac{255}{256}$

$a(n) = \frac{2n-1}{2n}$ (nach oben beschränkt für $c < 1$)

e) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 15, 17, 19, 21$

$$a(n) = \left\{ \begin{matrix} n = 1 : 2 \\ n = 5, 6 : 2n + 1 \\ n = 7 : 2n + 3 \\ \text{ansonsten: } 2n - 1 \end{matrix} \right\}$$

f) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$

$$a(n) = \left\{ \begin{matrix} n = 0, 1 : 1 \\ \text{ansonsten} : a_{n-1} + a_{n-2} \end{matrix} \right\}$$

Fibbonachi-Folge ist streng monoton wachsend und arithmetisch.

g) $1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142,$

tba

4 Aufgabe 04: Folgen mit bestimmten Eigenschaften

Geben sie wenn möglich eine Beispielfolge an:

a) geometrisch, streng monoton wachsend:

tba

b) geometrisch, streng monoton fallend:

tba

c) arithmetisch, alternierend:

   tba

d) arithmetisch, nach oben beschränkt:

   tba

e) arithmetisch, beschränkt:

   tba