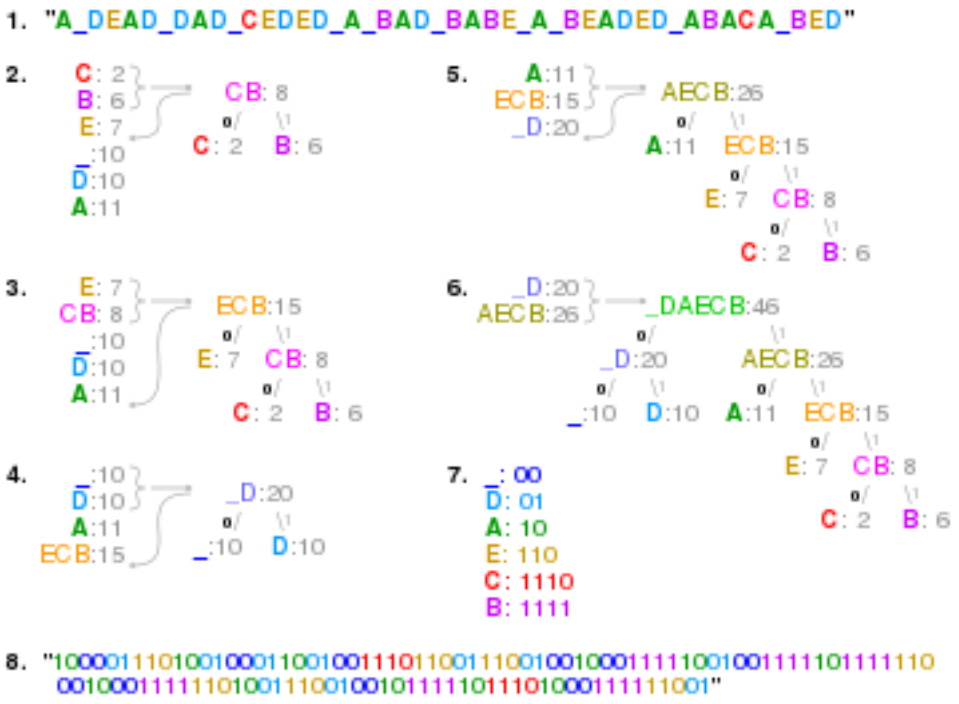
# GEOMETRÍA COMPUTACIONAL

## CÓDIGO HUFFMAN




LUCAS DE TORRE

# Índice

# 1. Introducción

Dadas las variables aleatorias $S_{English}$ = {a, b, c, ..., !, ?, 0, ..., 9} y $S_{Español}$ = {a, b, c, ..., ñ, ..., !, ?, 0,..., 9} y su distribución de probabilidad (la cual ha sido tomada de los archivos "auxiliar_enpract2.txt" y "auxiliar_es_pract2.txt", respectivamente), buscamos hallar el código Huffman binario de ambas variables, sus longitudes medias y comprobar que verifican el Primer Teorema de Shannon.

# 2. Material

Partimos de un código que, para cada variable aleatoria, guarda en un array el árbol de Huffman dado por la distribución de probabilidad de dicha variable. A partir de dichos árboles, creamos un diccionario por cada una de las dos variables que, dado un elemento de nuestra variable aleatoria, devuelva la codificación Huffman binaria de dicho elemento. Estos diccionarios los creamos recorriendo los árboles desde la raíz hasta las hojas, hallando así el código Huffman binario de cada elemento.

Después, calculamos la longitud media de nuestras variables $L(S)$. Para ello, simplemente multiplicamos la longitud de cada elemento por su probabilidad y sumamos los resultados.

Ahora, calculamos la entropía de nuestros sistemas: $H(S) = -\sum_{j=1}^{N} P_j log_2 P_j$, donde $N$ es el número de elementos del sistema y $P_j$ es la probabilidad asociada al elemento $j$-ésimo. Podemos verificar que se cumple el Primer Teorema de Shannon, según el cual, $H(S) \leq L(S) < H(S) + 1$.

Procedemos a codificar en ambas lenguas la palabra "fractal". Únicamente necesitamos hacer uso del diccionario anterior, que nos da, para cada letra de la palabra, su codificación. Una vez calculada la palabra, comparamos la eficiencia de esta codificación en comparación con la codificación binaria usual. Esto lo hacemos comparando el número de bits necesarios en cada caso.

Por último, decodificamos la cadena "000011101111111111111010". Comenzamos creando un diccionario que asocie a cada cadena de bits el carácter correspondiente (es el diccionario que teníamos pero intercambiando las claves por los valores). Después recorremos los bits a decodificar hasta encontrar una secuencia que coincida con una entrada de nuestro diccionario: por ejemplo, en este caso cogemos el primer 0 y vemos si coincide con una entrada de nuestro dicionario; si no, cogemos el siguiente elemento (0) y comprobamos si 00 tiene entrada en nuestro diccionario, y proseguimos hasta que así sea. Una vez encontrado, este será un carácter de la palabra decodificada, por lo que repetimos el proceso con el resto de la cadena hasta que esta sea vacía o ya no queden más elementos por mirar en la misma y tendremos la palabra buscada.

## 3. Resultados

Una vez hallado el diccionario, obtenemos fácilmente el código binario de cada letra. Por ejemplo, para $S_{English}$, tenemos que $a = 1011$ o que $u = 111111$. Las longitudes medias son:

- $L(S_{English}) = 4{,}342324939634357$ (que verifica el Primer Teorema de Shannon porque la entropía es $H(S_{English}) = 4{,}314512109681417 <= 4{,}342324939634357 < H(S_{English}) + 1$
- $L(S_{Español}) = 4{,}214307970337135$ (que verifica el Primer Teorema de Shannon porque la entropía es $H(S_{Español}) = 4{,}183534871433366 <= 4{,}214307970337135 < H(S_{Español}) + 1$.

Al codificar la palabra "fractal" con el diccionario creado a partit del árbol de Huffman obetenemos el código:

- $S_{English}$: 0110001001011100011110101111110, que tiene 31 bits.
- $S_{Español}$: 0110100011000111101111100000010, que tiene 30 bits.

En ambos casos vemos que este código es más eficiente que el binario usual, en el cual esta palabra necesita 42 bits.

Al decodificar en inglés la cadena "00001110111111111111010" obtenemos la palabra *henal*.

## 4. Conclusiones

Resulta interesante comprobar como las longitudes medias de las codificaciones Huffman de ambas variables son menores que las del binario usual (aproximadamente 4,34 vs. 6). Esto se debe a que en binario usual no tenemos en cuenta la probabilidad de aparición de cada elemento. Una palabra como "fractal" necesita 31 bits con la codificación Huffman y 42 bits con la binaria usual, es decir, el binario usual necesita 1,35 veces más bits, muy parecido a lo que obtenemos comparando sus longitudes medias (1,38).

## 5. Anexo A: Código

```
"""
Pr ctica 2
"""

#import os
import numpy as np
import pandas as pd
import math
from itertools import accumulate as acc
import matplotlib.pyplot as plt
from collections import Counter

#### Carpeta donde se encuentran los archivos ####
#ubica = "C:/Users/Python"

#### Vamos al directorio de trabajo####
#os.getcwd()
#os.chdir(ubica)
#files = os.listdir(ubica)

with open('auxiliar_en_pract2.txt', 'r') as file:
      en = file.read()

with open('auxiliar_es_pract2.txt', 'r') as file:
      es = file.read()

#### Pasamos todas las letras a min sculas
en = en.lower()
es = es.lower()

#### Contamos cuantas letras hay en cada texto
from collections import Counter
tab_en = Counter(en)
tab_es = Counter(es)

##### Transformamos en formato array de los car cteres (states) y su
    frecuencia
##### Finalmente realizamos un DataFrame con Pandas y ordenamos con 'sort'
tab_en_states = np.array(list(tab_en))
tab_en_weights = np.array(list(tab_en.values()))
tab_en_probab = tab_en_weights/float(np.sum(tab_en_weights))
distr_en = pd.DataFrame({'states': tab_en_states, 'probab': tab_en_probab})
distr_en = distr_en.sort_values(by='probab', ascending=True)
distr_en.index=np.arange(0,len(tab_en_states))

tab_es_states = np.array(list(tab_es))
tab_es_weights = np.array(list(tab_es.values()))
tab_es_probab = tab_es_weights/float(np.sum(tab_es_weights))
distr_es = pd.DataFrame({'states': tab_es_states, 'probab': tab_es_probab
    })
distr_es = distr_es.sort_values(by='probab', ascending=True)
```

```
distr_es.index=np.arange(0,len(tab_es_states))

##### Para obtener una rama, fusionamos los dos states con menor frecuencia
distr = distr_en
''.join(distr['states'][[0,1]])

### Es decir:
states = np.array(distr['states'])
probab = np.array(distr['probab'])
state_new = np.array(['',join(states[[0,1]])])   #Ojo con: state_new.ndim
probab_new = np.array([np.sum(probab[[0,1]])])   #Ojo con: probab_new.ndim
codigo = np.array([{states[0]: 0, states[1]: 1}])
states =  np.concatenate((states[np.arange(2,len(states))], state_new),
    axis=0)
probab =  np.concatenate((probab[np.arange(2,len(probab))], probab_new),
    axis=0)
distr = pd.DataFrame({'states': states, 'probab': probab, })
distr = distr.sort_values(by='probab', ascending=True)
distr.index=np.arange(0,len(states))

#Creamos un diccionario
branch = {'distr':distr, 'codigo':codigo}

## Ahora definimos una funci n que haga ex ctamente lo mismo
def huffman_branch(distr):
    states = np.array(distr['states'])
    probab = np.array(distr['probab'])
    state_new = np.array(['',join(states[[0,1]])])
    probab_new = np.array([np.sum(probab[[0,1]])])
    codigo = np.array([{states[0]: 0, states[1]: 1}])
    states =  np.concatenate((states[np.arange(2,len(states))], state_new),
     axis=0)
    probab =  np.concatenate((probab[np.arange(2,len(probab))], probab_new)
    , axis=0)
    distr = pd.DataFrame({'states': states, 'probab': probab, })
    distr = distr.sort_values(by='probab', ascending=True)
    distr.index=np.arange(0,len(states))
    branch = {'distr':distr, 'codigo':codigo}
    return(branch)

def huffman_tree(distr):
    tree = np.array([])
    while len(distr) > 1:
        branch = huffman_branch(distr)
        distr = branch['distr']
        code = np.array([branch['codigo']])
        tree = np.concatenate((tree, code), axis=None)
    return(tree)

distr = distr_en
tree = huffman_tree(distr)
tree[0].items()
tree[0].values()
```

```
99
100 #Buscar cada estado dentro de cada uno de los dos items
101 list(tree[0].items())[0][0] ## Esto proporciona un '0'
102 list(tree[0].items())[1][0] ## Esto proporciona un '1'
103
104 """
105 A partir de aqu , c odigo escrito por:
106 - Jorge Sainero Valle
107 - Lucas de Torre Barrio
108 """
109
110 #Extrae el c digo binario de Huffman de cada car cter y lo devuelve en un
        diccionario {car cter : c digo}
111 def extract_code():
112     global tree
113     d = dict()
114     #Empezamos por el final porque es donde est  la ra z
115     for i in range(tree.size-1,-1,-1):
116         elem=tree[i]
117         h1=list(elem.keys())[0]
118         h2=list(elem.keys())[1]
119
120         for c in h1:
121             if c in d:
122                 d[c]+='0'
123             else:
124                 d[c]='0'
125
126         for c in h2:
127             if c in d:
128                 d[c]+='1'
129             else:
130                 d[c]='1'
131     return d
132
133 #Calcula la longitud del c digo binario de Huffman
134 def longitudMedia(d):
135     ac=0
136     for i,k in distr.iterrows():
137         ac+=len(d[k['states']])*k['probab']
138     return ac
139
140 #Calcula la entrop a de una variable aleatoria con la distribuci n de
       probabilidades distr['probab']
141 def entropia():
142     h=0
143     for p in distr['probab']:
144         h-=p*math.log(p,2)
145     return h
146
147
148
149 def apartado1():
```

```
150     print("APARTADO UNO:\n")
151     global tree
152     global distr
153     distr = distr_en
154     tree = huffman_tree(distr)
155     d=extract_code()
156     print("Una peque a muestra del diccionario con la codificaci n de
        Senglish:",dict(Counter(d).most_common(7)),'\n')
157     print ("La longitud media de Senglish es: "+str(longitudMedia(d)))
158     h_en=entropia()
159     print("La entrop a de Senglish es: ",h_en)
160     print("Vemos que se cumple el Teorema de Shannon ya que",h_en,"<=",str(
        longitudMedia(d)),"<",h_en+1,"\n")
161
162
163     distr = distr_es
164     tree = huffman_tree(distr)
165     d=extract_code()
166     print("Una peque a muestra del diccionario con la codificaci n de
        Sspanish:",dict(Counter(d).most_common(7)),'\n')
167     print ("La longitud media de Sspanish es: "+str(longitudMedia(d)))
168     h_es=entropia()
169     print("La entrop a de Sspanish es: ",h_es)
170     print("Vemos que se cumple el Teorema de Shannon ya que",h_es,"<=",str(
        longitudMedia(d)),"<",h_es+1,"\n\n")
171
172 #Codifica la palabra pal seg n el diccionario d
173 def codificar(pal, d):
174     binario=""
175     for l in pal:
176         binario += d[l]
177     return binario
178
179 def apartado2():
180     print("APARTADO DOS:\n")
181     global tree
182     global distr
183     distr = distr_en
184     tree = huffman_tree(distr)
185     d_en=extract_code()
186     palabra = "fractal"
187     pal_bin =codificar(palabra,d_en)
188     print("El codigo binario de la palabra fractal en lengua inglesa es:",
        pal_bin,"y su longitud es:",len(pal_bin))
189     #La longitud en binario usual es ceil(log2(cantidadDeCracteres)) por
        cada letra
190     print("En binario usual ser a de longitud:", len(palabra)*math.ceil(
        math.log(len(d_en),2)),"\n\n")
191     distr = distr_es
192     tree = huffman_tree(distr)
193     d_es=extract_code()
194     pal_bin =codificar(palabra,d_es)
```

```
195     print("El codigo binario de la palabra fractal en lengua espa ola es:"
        ,pal_bin,"y su longitud es:",len(pal_bin))
196     #La longitud en binario usual es ceil(log2(cantidadDeCracteres)) por
        cada letra
197     print("En binario usual ser a de longitud:", len(palabra)*math.ceil(
        math.log(len(d_es),2)),"\n\n")
198
199 #Decodifica la palabra pal seg n el diccionario d
200 def decodificar(pal,d):
201     aux=''
202     decode=''
203     for i in pal:
204         aux+=i
205         if aux in d:
206             decode+=d[aux]
207             aux=''
208     return decode
209
210 def apartado3():
211     print("APARTADO TRES:\n")
212     global tree
213     global distr
214     distr = distr_en
215     tree = huffman_tree(distr)
216     d_en=extract_code()
217     #Invertimos el diccionario para poder decodificar
218     d_en_inv=dict(zip(list(d_en.values()),list(d_en.keys())))
219     pal_bin='10101000011110111111100'
220     palabra=decodificar(pal_bin,d_en_inv)
221     print("La palabra cuyo c digo binario es:",pal_bin,"en ingl s es:",
        palabra,end='\n\n\n')
222
223 #Calcula el  ndice  de Gini de una variable aleatoria con la distribuci n
        de probabilidades distr['probab']
224 def gini():
225     aux=0
226     #ya est  ordenado as  que no hace falta ordenarlo
227     accu=list(acc(distr['probab']))
228     plt.plot(np.linspace(0,1,len(accu)),accu)
229     plt.plot(np.linspace(0,1,len(accu)),np.linspace(0,1,len(accu)))
230     plt.show()
231     for i in range(1,len(accu)):
232         aux+=(accu[i]+accu[i-1])/len(accu)
233     return 1-aux
234
235 #Calcula la diversidad 2D de Hill de una variable aleatoria con la
        distribuci n de probabilidades distr['probab']
236 def diver2hill():
237     aux=0
238     for p in distr['probab']:
239         aux+=p*p
240     return 1/aux
241
```

```
242
243 def apartado4():
244     print("APARTADO CUATRO:\n")
245     global distr
246     distr = distr_en
247     print("El  ndice  de Gini de Senglish es: ",gini())
248     print("La diversidad 2D de Hill de Senglish es: ",diver2hill())
249     distr = distr_es
250     print("El  ndice  de Gini de Sspanish es: ",gini())
251     print("La diversidad 2D de Hill de Sspanish es: ",diver2hill())
252
253 apartado1()
254 apartado2()
255 apartado3()
256 apartado4()
```