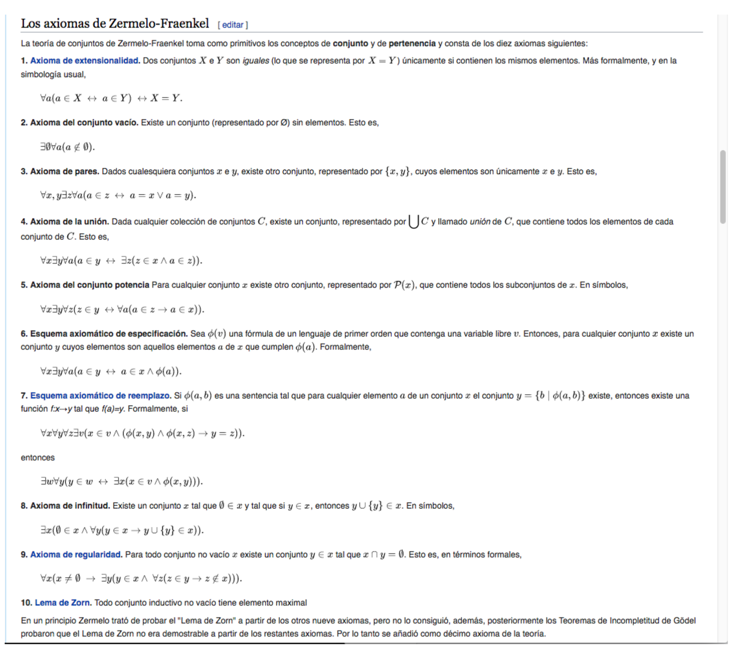
Explorador de igualdad, una simulación para teoría de conjuntos: "La paradoja del barbero"



Los axiomas de Zermelo-Fraenkel [editar]

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel toma como primitivos los conceptos de **conjunto** y de **pertenencia** y consta de los diez axiomas siguientes:

1. **Axioma de extensionalidad.** Dos conjuntos X e Y son *iguales* (lo que se representa por $X = Y$) únicamente si contienen los mismos elementos. Más formalmente, y en la simbología usual,

$\forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \leftrightarrow X = Y.$

2. **Axioma del conjunto vacío.** Existe un conjunto (representado por Ø) sin elementos. Esto es,

$\exists \emptyset \forall a(a \notin \emptyset).$

3. **Axioma de pares.** Dados cualesquiera conjuntos x e y, existe otro conjunto, representado por $\{x, y\}$, cuyos elementos son únicamente x e y. Esto es,

$\forall x, y \exists z \forall a(a \in z \leftrightarrow a = x \vee a = y).$

4. **Axioma de la unión.** Dada cualquier colección de conjuntos C, existe un conjunto, representado por $\bigcup C$ y llamado *unión* de C, que contiene todos los elementos de cada conjunto de C. Esto es,

$\forall x \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z)).$

5. **Axioma del conjunto potencia** Para cualquier conjunto x existe otro conjunto, representado por $\mathcal{P}(x)$, que contiene todos los subconjuntos de x. En símbolos,

$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall a(a \in z \rightarrow a \in x)).$

6. **Esquema axiomático de especificación.** Sea $\phi(v)$ una fórmula de un lenguaje de primer orden que contenga una variable libre v. Entonces, para cualquier conjunto x existe un conjunto y cuyos elementos son aquellos elementos a de x que cumplen $\phi(a)$. Formalmente,

$\forall x \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow a \in x \wedge \phi(a)).$

7. **Esquema axiomático de reemplazo.** Si $\phi(a, b)$ es una sentencia tal que para cualquier elemento a de un conjunto x el conjunto $y = \{b \mid \phi(a, b)\}$ existe, entonces existe una función $f:x \to y$ tal que $f(a)=y$. Formalmente, si

$\forall x \forall y \forall z \exists v(x \in v \wedge (\phi(x, y) \wedge \phi(x, z) \rightarrow y = z)).$

entonces

$\exists w \forall y(y \in w \leftrightarrow \exists x(x \in v \wedge \phi(x, y))).$

8. **Axioma de infinitud.** Existe un conjunto x tal que $\emptyset \in x$ y tal que si $y \in x$, entonces $y \cup \{y\} \in x$. En símbolos,

$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$

9. **Axioma de regularidad.** Para todo conjunto no vacío x existe un conjunto $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$. Esto es, en términos formales,

$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \notin x))).$

10. **Lema de Zorn.** Todo conjunto inductivo no vacío tiene elemento maximal

En un principio Zermelo trató de probar el "Lema de Zorn" a partir de los otros nueve axiomas, pero no lo consiguió, además, posteriormente los Teoremas de Incompletitud de Gödel probaron que el Lema de Zorn no era demostrable a partir de los restantes axiomas. Por lo tanto se añadió como décimo axioma de la teoría.

https://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel

En el contexto de "la paradoja del barbero", que es un libelo para engarzar dos cosmogonías: a) la primigenia de Conrad, b) ZF/ZFC la resultante.

Mediante unos bastones y unos pocos hilos, con ZFC tenemos un laboratorio para estudiar, por ejemplo, la igualdad.

Ser sí mismo. Uno mismo con uno mismo, quizás, es el principio de identidad, de mónada, la idea de unidad discreta, cogito que se concreta en la res extensa, etcétera.

En cualquier caso, presos de una mirada TIC, dejamos la paradoja atrás y tomamos como primitivos los conceptos de **conjunto** y de **pertenencia** y nos apuntamos (junto a las tablas de Moises) los diez axiomas siguientes: https://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel,

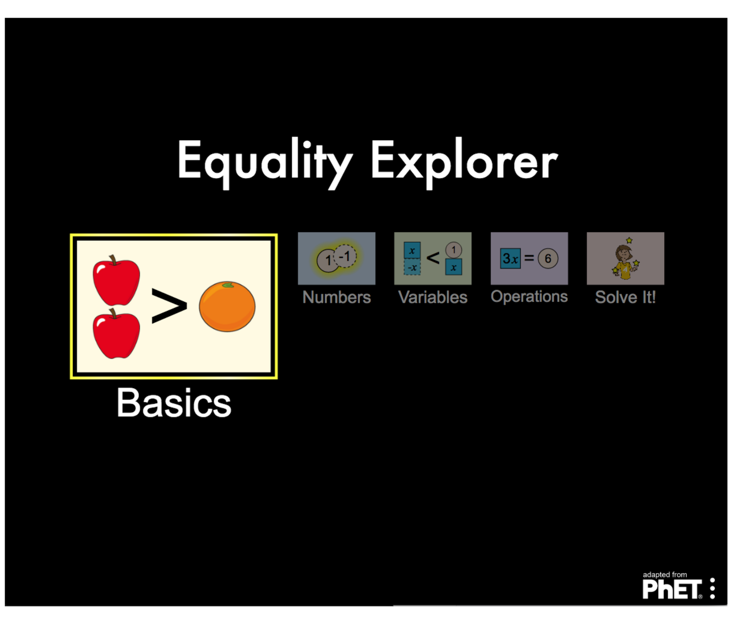
… y, nuevamente, por cuarta vez ya en esta serie de simulaciones, presentamos otro de los ejemplos que PhET tiene listo en su respositorio para que descarguemos vía el:

> *https://github.com/jsanchezamai/simulator-lab/blob/master/download-sample.sh*

…, y eso que ya vimos, antes, instalar dependencias. Si vienes siguiendo nuestra aventura, vemos que solo nos falta el twixt…

> *aleph@oxs-Mac-mini:~/Desktop/DISK/DESK/simulator$ sh download-sample.sh twixt*
>
> *$ sh download-sample.sh equality-explorer*

¡Y listo!, tenemos 4 salas en nuestra simulación sobre la igualdad.



https://phet.colorado.edu/en/simulation/equality-explorer

¿Quieres probar?

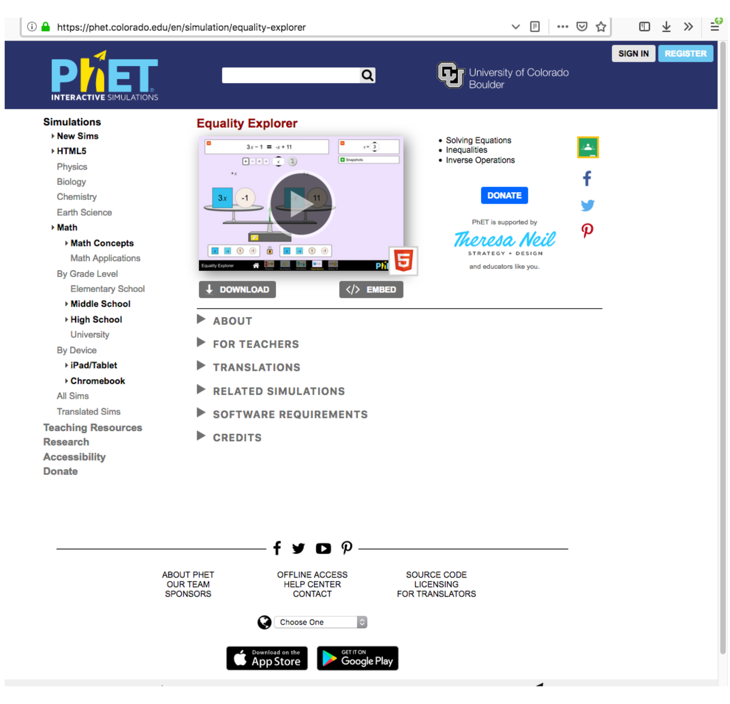
https://jsanchezamai.github.io/simulator-lab/equality-explorer/spa/adapted-from-phet/equality-explorer_en_adapted-from-phet.html

¿Quieres ver el código antes de ejecutar?

Se trata de una webapp html5:

https://github.com/jsanchezamai/simulator-lab/tree/master/equality-explorer

¿Quieres visitar las fuentes?



https://phet.colorado.edu/en/simulation/equality-explorer

Recuerdo una vez, cuando yo era un niño en educación general básica, que desafiante cuestioné a mi maestra de matemáticas el por qué debía yo aprenderme la tabla de multiplicar. Diez columnas en mi libreta cada una con sus tantas operaciones resueltas.

Ella, sentándose junto a mí, comenzó a golpear con los nudillos en la mesa. Pronto, en unos segundos, varios empollones y empollonas se sumaron al soniquete y pronto tenían un ritmo listo para que cantáramos encima.

Arranca en solitario mi maestra, al compás: "uno por uno es uno, uno por dos es dos…", gira la cabeza al séquito sesudo indicando que se sumen y, así, la orquesta arranca su andadura… Al principio, por lo menos hasta llegar a la columna del cinco, *piano piano*, luego subirá *allegreto* por el seis y hará fuga en el 10. La maestra, *solo*: "uno por tres es"… el coro: "¡TRES!". La maestra: "uno por cuatro es…", el coro: "¡CUATRO!".

En esta anécdota que estoy contando mi maestra de matemáticas, ayudándose del entusiasmo de su banda de sabiondos y alumnos aplicados, está respondiendo a la fundamental pregunta que le hace un nesciente al respecto de por qué debería interesarse por la tabla de multiplicar, esto que es extrapolable al interés que cualquier persona podría tener por los 10 axiomas ZFC, donde **C stands for Choice**, trepa así hasta la columna del tres.

La mayor parte de los alumnos, somos cuarenta, yo incluído, llevamos rato repicando con los nudillos en la mesa sumados al coro. Embriagados del son y de su fuerza progresiva. El resto de la clase, al unísono, a modo de un conjunto exacto y uniforme, por la columna del ocho, ya es un hecho, visible y tangible, un hecho. La maestra abandona el *solo* gesticulando con los brazos… todos cantamos la siguiente, en conjunto: "ocho por seis cuarenta y ocho, ocho por siete cincuenta y seis…"

Cuando hemos acabado de cantar y hemos pasado a otra cosa, al rato, escucho en mi percepción interior una cancioncilla que no para de repetirse. Tú sabes… "cuatro por cuatro: dieciséis"… Asumo que o bien me estoy volviendo loco y he empezado a oir voces o bien me estoy volviendo sabio y he empezado a convivir con el conocimiento.

Una vez has cantado "cinco por uno es cinco" ya no puedes evitar seguir con "cinco por dos es diez". Y da igual el punto en el que inicies la canción, no pierdes pie para engancharte al flujo. Automáticamente, por inducción, sabes cómo seguir. La parte dura es almacenar el resultado de cada operación en ese lugar que somos nosotros y que es nuestra memoria. "Siete por cinco…"

¡Treinta y cinco!

Entre unos infinitos potenciales y otros actuales de un lado, y de un conjunto universal, del otro, existe un espacio de realidad. Sapiens, biosférica, inteligente.

Nueve por nueve ochenta y uno, nueve por diez, noventa…

junio 1, 2019 Encargado del contenido online de la nonata editorial e-Artesanía Editar

← *Thinkers vs Artificers*