UNIVERSITÄT OSNABRÜCK
AG Theoretische Informatik

KCT als Multi-Commodity-Flow-Formulierung (MCF)

Finn Stutzenstein, Levin Nemesch, Joshua Sangmeister

January 18, 2021

Algorithm Engineering - Übung 4

Definitionen

- $V' := V \cup \{r\}$
- $A := \{(v,w),(w,v) \mid \{v,w\} \in E\}$
- $A_r := \{(r,v) \mid v \in V\}$
- $A' := A \cup A_r$
- gerichteter Graph $G' = (V', A')$
- Nachbarknoten von v: $N(v) := \{w \in V' \mid \{v,w\} \in E'\}$
- Flussvariable $f^u_{(v,w)}$ modelliert Fluss der Stärke y_u von r nach u über die Kante (v,w)

MCF ILP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T z & \\
\text{s.t.} \quad & z(A) = k & \\
& y(V) = k + 1 & \\
& z(A_r) = 1 & \\
& \sum_{w \in N(v)} f^u_{(w,v)} - \sum_{w \in N(v)} f^u_{(v,w)} = \begin{cases} y_u & v = u \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \forall u, v \in V \\
& 0 \le f^u_{(v,w)} \le z_{(v,w)} & \forall (v,w) \in A', u \in V \\
& z_a, y_v \in \{0,1\} & \forall a \in A, v \in V
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von MCF

- Analog zu DCut:
  - Extra Knoten r
  - Zusätzliche Kanten $\{r\} \times V$
  - Flüsse sind gerichtet
  - Wählt nur eine der Kanten von r
- Wählt k Kanten aus A und $k+1$ Knoten aus $V \Rightarrow$ Keine Kreise möglich
- Flussbedingungen stellen Graphzusammenhang her.

Flussbedingungen

- Existiert ein Fluss an einer Kante, muss die Kante gewählt werden
- Sei v gewählt ($y_v = 1$), dann existiert ein Pfad von r nach v mit dem Fluss 1.
  Flussbedingung für v:

$$\sum_{w \in N(v)} f^v_{(w,v)} - \sum_{w \in N(v)} f^v_{(v,w)} = 1$$

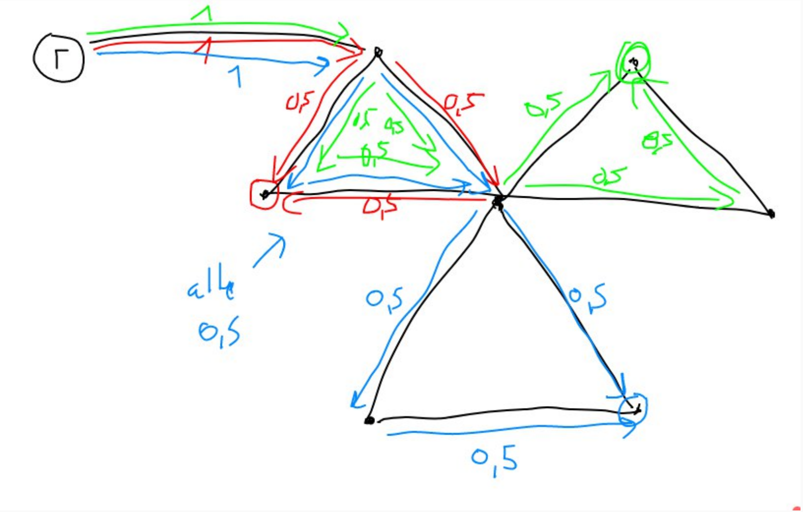
$$\Rightarrow \exists w \in N(v) : f^v_{(w,v)} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in N(w)} f^v_{(x,w)} - \sum_{x \in N(w)} f^v_{(w,x)} = 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in N(w) : f^v_{(x,w)} = 1 \text{ ... bis } r$$

- Sei (r, a) die von r gewählte Kante. Dann führen alle Pfade über a.
  Folgerung: Der Graph ist zusammenhängend.

MCF echt stärker als UCut: ∃-Teil



MCF echt stärker als UCut: $\forall$-Teil

Projektion einer zulässigen MCF Lösung $(z'_{(v,w)}, y'_v, f'^{u}_{(v,w)})$ auf eine UCut Lösung (x'_e, y'_v):

$$x_{\{v,w\}} = z'_{(v,w)} + z'_{(w,v)}$$

(Lasse f' fallen) Ist UCut Lösung zulässig?

- 0/1-Schranken: y'_v passt, x'_e: O.B.d.A. gilt $z_{(u,v)} + z_{(v,u)} \leq 1$. Passt
- $\boldsymbol{x}(E)$, $\boldsymbol{y}(V)$: Analoge Constraints. Passt
- $\boldsymbol{x}(\delta(W)) \geq y_v + y_w - 1$:
  Angenommen es existiert W, sodass v und w gewählt sind und $\boldsymbol{x}(\delta(W)) < 1$.
  Da beide Knoten gewählt sind existiert ein (ungerichteter) Fluss von v über r nach w mit einer Kapazität von 1. Nach dem max-flow-min-cut Theorem muss ein Schnitt mit mindestens 1 existieren. $\lightning$

MCF vs. DCut

	DCut	MCF
Größe Zfkt:	$2\|E\|$	$2\|E\|$
Anzahl Constraints	$1+1+\|V\|+\|V\|\cdot 2^{\|V\|-1}$	$1+1+1+\|V\|^2+\|V\|^2(2\|E\|+\|V\|)$
Anzahl binäre Variablen	$2\|E\|$	$2\|V\|+2\|E\|$
Anzahl reelle Variablen	0	$\|V\|^2(2\|E\|+\|V\|)$

MCF vs. DCut

> *The MCF formulation requires only a polynomial number of variables and constraints. However, the sheer number of variables becomes a practical drawback of this approach. In addition to the x and y variables, we require $|V| \cdot |A|$ variables to model the flow. As we know from similar problems [...], this leads to poor performance of MCFs in practice, compared to directed cut-based approaches, which allow efficient separation of their exponentially many constraints.*

— M. Chimani et al: Obtaining optimal k-cardinality trees fast. *ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 14 (2009)