UNIVERSITÄT OSNABRÜCK

AG Theoretische Informatik

TSP Varianten

Finn Stutzenstein, Levin Nemesch, Joshua Sangmeister

14. Dezember 2020

Algorithm Engineering - Übung 3

TSP aus der Vorlesung

Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichtet, $w_e \geq 0$ Kantengewichte
Gesucht: Rundtour $E' \subseteq E$, sodass $\sum_{e \in E'} w_e$ minimal ist

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 & \forall v \in V \\
& \sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 2 & \forall \emptyset \neq W \subset V \\
& x_e \in \{0, 1\} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Asymmetrisches TSP (ATSP)[1]

Gegeben: $G = (V, A)$ gerichtet, $w_{ij} \geq 0$ Kantengewichte (i.A. $w_{uv} \neq w_{vu}$, keine Selfloops: $w_{ii} = +\infty$)
Gesucht: Gerichtete Rundtour $A' \subseteq A$, sodass $\sum_{(i,j) \in A'} w_{ij}$ minimal ist

ILP:

- Dantzig–Fulkerson–Johnson Formulierung
- $x_{ij} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ Kante (i, j) in der Lösung

[1] Dantzig G., Fulkerson D., Johnson S.: Solutions of a large-scale traveling-salesman problem. (1954) *Operation Research* 2(4):393–410

Asymmetrisches TSP (ATSP)

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_{ij} x_{ij} & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i \in V} x_{ij} = 1 & \forall j \in V \\
& \displaystyle\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 & \forall i \in V \\
& \displaystyle\sum_{i \in W} \sum_{j \in W} x_{ij} \leq |W| - 1 & \forall \emptyset \neq W \subset V \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in V
\end{array}
$$

Bottleneck TSP[2]

Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichtet, $w_e \geq 0$ Kantengewichte
Gesucht: Rundtour $E' \subseteq E$, sodass $\max\limits_{e \in E'}(w_e)$ minimal ist

ILP:

- $y \in \mathbb{Z}$ zum Messen der teuersten Kante: $y \geq w_e x_e \forall e \in E$

[2] R. S. Garfinkel und K. C. Gilbert. The Bottleneck Traveling Salesman Problem: Algorithms and Probabilistic Analysis. *Journal of the ACM (JACM)* 25.3 (1978), S. 435–448.

Bottleneck TSP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 && \forall v \in V \\
& \sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 2 && \forall \emptyset \neq W \subset V \\
& y - w_e x_e \geq 0 && \forall e \in E \\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall e \in E \\
& y \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Equitable TSP[3]

Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichtet, $w_e \geq 0$ Kantengewichte, n gerade.
Gesucht: Zwei perfekte Matchings $M_1, M_2 \subset E$, sodass

1. die Vereinigung beider Matchings einen Hamiltonkreis in G bilden und
2. $|c(M_1) - c(M_2)|$ mit $c(M) = \sum_{e \in M} w_e$ minimal ist.

ILP:

- $\mathcal{M}$: Menge aller perfekten Matchings von G
- $y^1_M = 1$ $(y^2_M = 1)$ $\quad \Leftrightarrow \quad$: Matching $M \in \mathcal{M}$ wird als erstes (zweites) Matching gewählt

[3] J. Kinable, B. Smeulders, E. Delcour und F. C. Spieksma. Exact algorithms for the equitable traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research* 261.2 (2017), S. 475 –485.

Equitable TSP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \left| \sum_{M \in \mathcal{M}} c(M) y_M^1 - \sum_{M \in \mathcal{M}} c(M) y_M^2 \right| & \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{M \in \mathcal{M}} y_M^1 = 1 & \\
& \sum_{M \in \mathcal{M}} y_M^2 = 1 & \\
& \sum_{M \in \mathcal{M} : e \in M} y_M^1 + \sum_{M \in \mathcal{M} : e \in M} y_M^2 \leq 1 & \forall e \in E \\
& \sum_{e \in \delta(W)} \left(\sum_{M \in \mathcal{M} : e \in M} y_M^1 + \sum_{M \in \mathcal{M} : e \in M} y_M^2 \right) \geq 2 & \forall W \subset V, |S| \geq 3 \\
& y_M^1 \in \{0, 1\} & \forall M \in \mathcal{M} \\
& y_M^2 \in \{0, 1\} & \forall M \in \mathcal{M}
\end{aligned}
$$

Multiples TSP[4]

Gegeben: $G = (V, A)$, $w_{ij} \geq 0$ Kantengewichte, Depot $d \in V$, m Verkäufer
Gesucht: m Touren mit jeweils mindestens 3 Knoten, die alle d beinhalten. Die Gesamtwegkosten müssen minimal sein. Jeder Knoten (außer d) muss in genau einer Tour sein.
Anmerkung: Single Depot-Variante; Ein Depot pro Verkäufer möglich (Multi Depot-Variante)
ILP:

- $x_{ij} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ Kante (i, j) in der Lösung
- u_i: Anzahl der besuchten Knoten vom Depot zu i für jeden Verkäufer (also Position von i in der Tour)
- $V' = V \setminus \{1\}$, Knoten 1 ist das Depot

[4] Bektas, T.: The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures. *Omega*, 34(3) (2006), pp. 209–219.

Multiples TSP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} w_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in V'} x_{1j} = \sum_{i\in V'} x_{i1} = m \\
& \sum_{i\in V'} x_{ij} = 1 && \forall j \in V' \\
& \sum_{j\in V'} x_{ij} = 1 && \forall i \in V' \\
& x_{1i} + x_{i1} \leq 1 && \forall i \in V' \\
& u_i - u_j + (n-m)x_{ij} \leq n - m - 1 && \forall i \neq j \in V' \\
& x_{ij} \in \{0,1\} && \forall i,j \in V
\end{aligned}
$$

Prizecollecting TSP[5]

Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichtet, $w_e \geq 0$ Kantengewichte, p_i Knotenprofite, P_{min} zu erreichenden Minimalprofit, $d \in V$ Depot
Gesucht: Rundtour $E' \subseteq E$ über Auswahl an Knoten $V' \subseteq V$, sodass $\sum_{e \in E'} w_e$ minimal ist und $\sum_{v \in V'} p_v \geq P_{min}$ gilt

ILP:

- Ordnungsvariablen $x_{ij} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ Nach Knoten i folgt Knoten j $(i \rightarrow j)$
- u_i: Position von Knoten i in der Tour
- $V' = V \setminus \{1\}$, Knoten 1 ist das Depot

[5] Vansteenwegen P., Gunawan A.: Orienteering Problems. *EURO Advanced Tutorials on Operational Research* (2019)

Prizecollecting TSP

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} w_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in V'} x_{1j} = \sum_{i \in V'} x_{i1} = 1 \\
& \sum_{i \in V} x_{ik} = \sum_{j \in V} x_{kj} \leq 1 & \forall k \in V' \\
& \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} p_i x_{ij} \geq P_{min} \\
& u_i - u_j + 1 \leq (n-1)(1 - x_{ij}) & \forall i, j \in V' \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \in V \qquad u_i \in \{2, \ldots, n\} \qquad \forall i \in V
\end{aligned}
$$

Multi-Objective TSP[6]

Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichtet, $d \geq 1$, $w_e \in \mathbb{N}^d$ Kantengewichte
Gesucht: Rundtouren $E_{\text{nd}} = \{E' \subseteq E\}$, sodass $\sum_{e \in E'} w_e$, $E' \in E_{\text{nd}}$ nicht-dominiert ist

ILP:

- Constraints wie normales TSP, Zielfunktion mehrkriteriell
  (Streng genommen kein ILP)

$$
\begin{aligned}
\min_{\preceq} \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \in \mathbb{N}^d \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 2 && \forall v \in V \\
& \sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 2 && \forall \emptyset \neq W \subset V \\
& x_e \in \{0, 1\} && \forall e \in E
\end{aligned}
$$

[6] T. Lust und J. Teghem. The Multiobjective Traveling Salesman Problem: A Survey and a New Approach. *Advances in Multi-Objective Nature Inspired Computing* (2010), S. 119–141.