Práctica 10 -Ecuaciones Diferenciales Lineales de 1er Orden-

1. En cada caso, verificar que la expresión de la derecha corresponde a **una solución particular** y de la ecuación diferencial correspondiente:

   (a) $xy' - 3y = 0, \qquad y = cx^3$

   (b) $xy' - 3y = 3, \qquad y = cx^3 - 1$

   (c) $yy' = -x, \qquad x^2 + y^2 = c$

   (d) $yy' - x = 0, \qquad x^2 - y^2 = c$

   (e) $3y - \dfrac{3y'}{\cos x} = 0, \qquad 3y - ce^{\operatorname{sen} x} = 0$

   (f) $\operatorname{sen}(x)y = y' - \operatorname{sen} x, \qquad y = ke^{-\cos x} - 1$

2. Determinar la correspondencia de cada ecuación diferencial con una familia de soluciones. *Sugerencia*: derivar cada una de las familias dadas por y en (i)-(vi) para asociarla con una de las ecuaciones dadas en (a)-(f).

   (a) $y' = \mathrm{e}^x$

   (b) $y' = \mathrm{e}^{-x}$

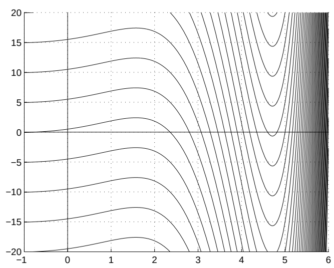
   (c) $y' = \mathrm{e}^x + 10 * \cos(x)$

   (d) $y' = 2 * x + \mathrm{e}^x$

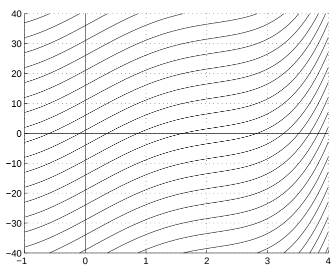
   (e) $y' = \cos(x)$

   (f) $y' = \cos(x). * \mathrm{e}^x$

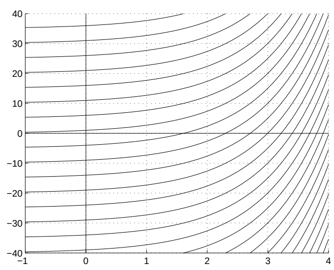
(i) $y = \mathrm{e}^x \frac{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}{2} + c$



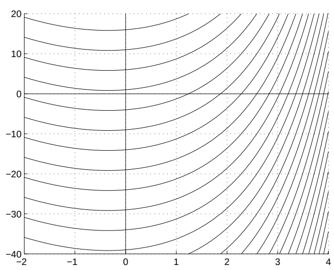
(iii) $y = \mathrm{e}^x + 10\operatorname{sen}(x) + c$



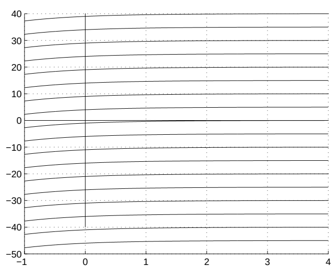
(v) $y = \mathrm{e}^x + c$



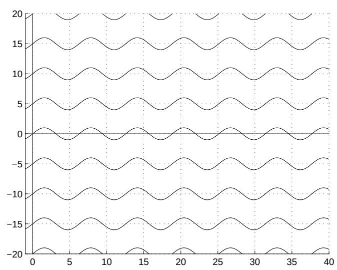
(ii) $y = \mathrm{e}^x + x^2 + c$



(iv) $y = -\mathrm{e}^{-x} + c$



(vi) $y = \operatorname{sen}(x) + c$



3. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' = ky$

   (b) $y' = y^2$

   (c) $y' - 2y + a = 0$

   (d) $(x + 2)y' = yx$

   (e) $(1 - \cos(x))\, dy = y \operatorname{sen}(x)\, dx$

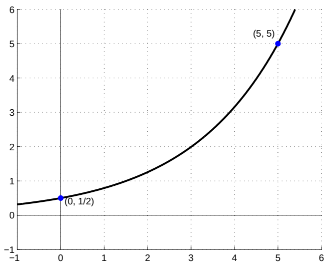
   (f) $y' = (1 + x)(1 + y^2)$

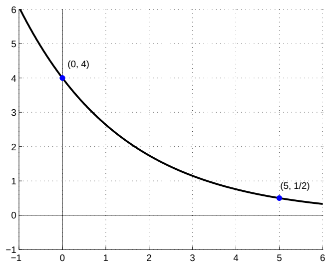
   (g) $y' + e^{2x}y^2 = 0$

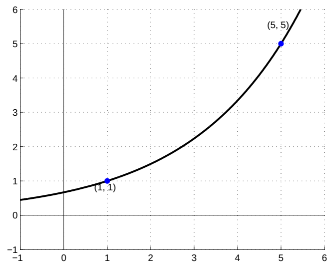
   (h) $x \log(x)\, dy = y\, dx \quad (x > 1)$

4. Dada la ecuación $y' = ky$ hallar el valor de k y la condición inicial del PVI que tiene la solución $y = C\mathrm{e}^{kt}$ que pasa por los puntos correspondientes a cada caso

(i) $(0, 1/2), (5, 5)$ (ii) $(0, 4), (5, 1/2)$ (iii) $(1, 1), (5, 5)$







Ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden

---

5. Encontrar las soluciones generales de las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $y' - y = 3$

(b) $y' + 2xy = 0$

(c) $y' + 2xy = x$

(d) $y' + 2y = 6e^x$

(e) $xy' = y + (x+1)^2, \ \ x > 0$

(f) $xy' + y = x + x^3, \ \ x > 0$

(g) $y' + ky = e^{-kx}$

(h) $y' + y = \operatorname{sen}(x)$

(i) $y'\operatorname{tg}(x) = y - 1$

(j) $(1 - x^2)y' + xy = x, \ \ 0 < x < 1$

(k) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$

(l) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

(m) $(2y - x^3)\, dx = x\, dy, \ \ x > 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales con condición inicial:

(a) $\begin{cases} y' - \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen} x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (x+1)y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y' = y\operatorname{tg}(2x)y \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y' - 2y = \cos(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} xy' - 3y = x^4 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2xy' = 3y \\ y(1) = 4 \end{cases}$

7. (a) Hallar $p(x)$ para que la función $y = \cos(x)$ sea solución de $y' + p(x) \cdot y = 0$ ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?

   (b) Hallar la solución general de $y' + p(x) \cdot y = e^x \cos^2(x)$ donde $p(x)$ es la función calculada en (a).

8. Considerar la ecuación diferencial $y' - \operatorname{cotg}(x) \cdot y = f(x)$. Hallar $f(x)$ de manera que $y(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot [(x-1) \cdot e^x + 1]$ sea solución de la ecuación dada. Para la f hallada, buscar **todas** las soluciones de la ecuación diferencial original.

9. Hallar una solución de la ecuación diferencial $y' = 2y$ de manera que la recta tangente a su gráfico en el punto $(0, y(0))$ sea paralela a la recta $y = 3x$. ¿Es única?

Método de Euler

Dada la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$ y una discretización uniforme con paso h, $x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_N < ...$ de la variable independiente $x \in \mathbb{R}$, se pueden obtener valores aproximados y_{k+1} de $y(x_{k+1})$ de la siguiente manera:

$$x_{k+1} = x_k + h, \qquad y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k) \qquad k \geq 1, \quad h \in (0,1) \text{ chico}$$

10. Usar el método de Euler para obtener una solución aproximada de los siguientes problemas de valor inicial. Hacer una tabla de valores comparando con los de la solución exacta.
    (a) $y' = 1 - y$, $\quad y(0) = 2$, $\quad n = 5$, $\quad$ para $h = 0.2$ y para $h = 0.1$.
    (b) $y' = y \quad y(0) = 3$, $\quad n = 5$, $\quad$ para $h = 0.2$ y para $h = 0.1$.

Aplicación: Modelos matemáticos

11. (Población salvaje) La velocidad de cambio del número de coyotes $N(t)$ en una población es directamente proporcional a $650 - N(t)$, donde t es el tiempo en años. Cuando $t = 0$, la población es 300, y cuando $t = 2$, la población se incrementó a 500. Encontrar $N(3)$.

12. Una comisión estatal libera 40 alces en una zona de refugio. Después de 5 años, la población de alces es de 104. La comisión cree que la zona no puede soportar más de 4000 alces. La tasa de crecimiento de la población de alces $p = p(t)$ verifica

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{4000}\right), \qquad 40 \leq p \leq 4000$$

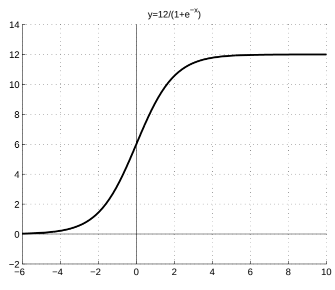
donde t es el número de años.

   (a) Hallar una fórmula para $p(t)$.
   (b) Estimar la población de alces después de 15 años.
   (c) Encontrar $\lim_{t \to +\infty} p(t)$.

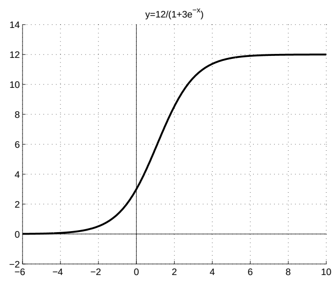
13. Resolver la ecuación diferencial logística $y' = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$ para $k, L \in \mathbb{R}$.

14. Hallar para cada caso el valor de los parámetros k, L de la ecuación logística $y' = ky(1 - p/L)$.

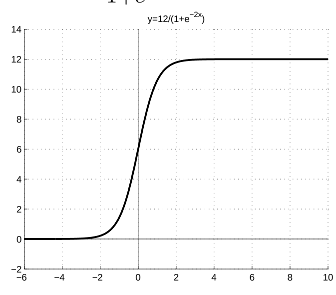
(i) $y = \frac{12}{1+e^{-x}}$



(ii) $y = \frac{12}{1+3e^{-x}}$



(iv) $y = \frac{12}{1+e^{-2x}}$



15. En el tiempo $t = 0$, un cultivo bacteriano pesa 1 gramo. Dos horas después, el cultivo pesa 2 gramos. El peso máximo del cultivo es de 10 gramos.

   (a) Escribir la ecuación logística que modele la razón de crecimiento del peso del cultivo.

   (b) Encontrar el peso del cultivo después de 5 horas.

   (c) Aproximar el peso después de 5 horas usando el método de Euler con un tamaño de paso de $h = 1$. Comparar la aproximación con el resultado exacto.

   (d) ¿Cuándo el peso del cultivo será de 8 gramos?

   (e) ¿En qué tiempo se incrementará el peso más rápidamente? Explicar.

Adicionales

---

16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' = \dfrac{2\sqrt{y-1}}{x} \quad (x < 0)$

   (b) $\operatorname{sen}(2x)\, dy = y \cos(2x)\, dx$

   (c) $xy' + ay = 0 \quad (x > 0)$

   (d) $yy' = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(ax)$

   (e) $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \operatorname{cotg}(x)\, dx$

   (f) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^x$

17. Sea $y(t)$ una solución del PVI $y' + 3by = e^{2t}$, $y(0) = 1$, que satisface que la recta tangente a la curva solución en $(x_0, y_0) = (0,\, 1)$ es horizontal. Hallar el valor de b y la solución.

18. Considerar la ecuación diferencial $y' + \dfrac{1}{x \ln x} y = f(x)$.

   (a) Hallar la solución general de la ecuación homogénea asociada.

   (b) Hallar f de manera tal que $y(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$ sea solución de la ecuación original.

   (c) Para la f hallada en el item anterior, hallar la solución general de la ecuación diferencial y la solución particular que satisface $y(2) = 1$.

19. Considerar la ecuación diferencial para circuitos eléctricos dada por $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E(t)$, donde L denota la inductancia, I la corriente eléctrica, R la resistencia y E el votaje producido por la potencia.

   (a) Resolver la ecuación diferencial dado un voltaje constante E_0.

   (b) Usar el resultado obtenido en (a) para encontrar la ecuación para la corriente si $I(0) = 0$, $E_0 = 120$ volts, $R = 600$ ohms y $L = 4$ henrys. ¿Cuándo alcanzará la corriente el 90% de su valor limitante?

20. Sea f una función derivable tal que para todo x real se satisface

$$e^{2x} f(x) = (x+1)^2 + 4 \int_0^x e^{2t} f(t) dt.$$

   Calcular $f(0)$ y encontrar $f(x)$.

21. El decrecimiento radiactivo se mide en términos de la semivida o *vida media*, que es el número de años requeridos para reducir la muestra radiactiva a la mitad. La vida media del Plutonio (Pu-239) es 24100 años. Se sabe además que la tasa de desintegración es proporcional a la cantidad, es decir $\frac{dy}{dt} = ky$. Si 10 gramos del isótopo Pu-239 se liberaron en el accidente nuclear de Crenobyl. ¿Cuánto tiempo tomará a los 10 gramos disminuir 1 gramo?