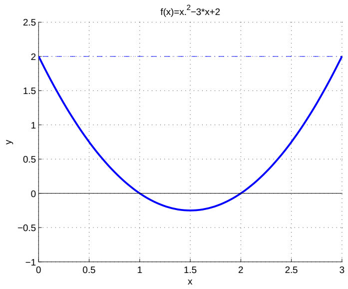
Práctica 6 -Aplicaciones de la Derivada-

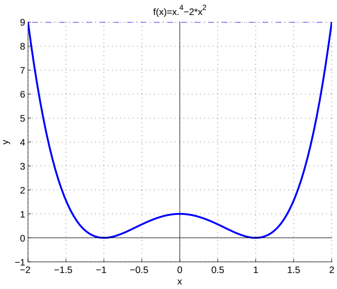
Teorema de Rolle - Teorema del Valor Medio

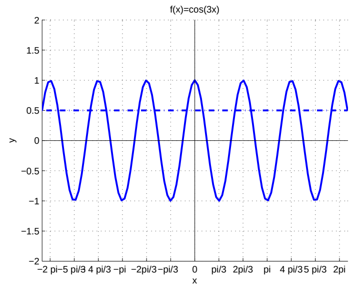
1. Mostrar que las siguientes funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfacen las condiciones del teorema de Rolle y marcar los puntos $c \in (a, b)$ tales que $f'(c) = 0$.

   (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (b) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (c) $f(x) = \cos(3x)$

   $[a, b] = [0, 3]$ $[a, b] = [-2, 2]$ $[a, b] = [-\frac{19}{9}\pi, \frac{19}{9}\pi]$



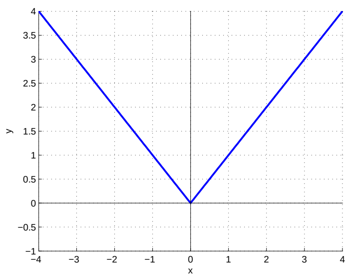


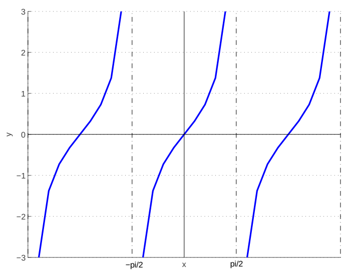


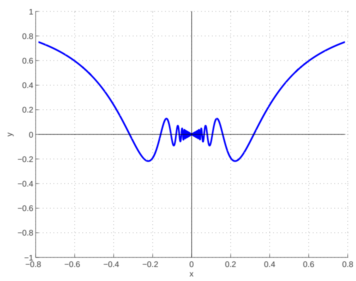
2. Explicar por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle aunque $f(a) = f(b)$.

   (a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ (c) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

   $[a, b] = [-1, 1]$ $[a, b] = [\pi, 2\pi]$ $[a, b] = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$







3. Decidir si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en los intervalos indicados en cada caso:

   (a) $f(x) = 16\,x^4 - 32\,x^3 + 24\,x^2 - 8\,x + 17$ en $[-1; 1]$, en $[0; 1]$.

   (b) $f(x) = (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0; 4]$.

   (c) $f(x) = x^2 - 2x$ en $[0, 2]$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ en $[-1; 1]$.

4. Dada la función $f(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ usar el teorema de Rolle para mostrar que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene exactamente tres soluciones reales distintas.

5. Considere las siguientes funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en los intervalos correspondientes

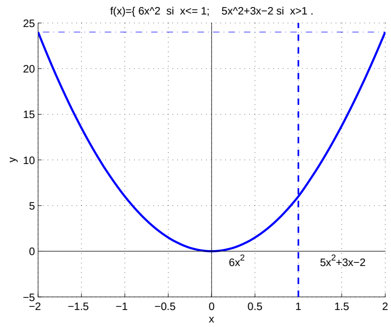
$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 5x^2 + 3x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

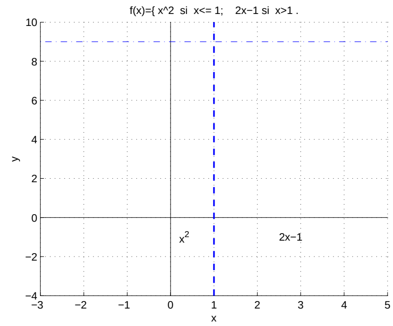
$[a, b] = [-2; 2]$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$[a, b] = [-3; 5]$.

Completar el gráfico:





(a) Verificar gráfica y analíticamente que $f(x)$ es continua y que $f(a) = f(b)$.

(b) Comprobar que $\nexists f'(1)$ por lo que no se puede aplicar el teorema de Rolle.

(c) Verificar que sin embargo $f'(0) = 0$, es decir que $\exists\, c \in (a, b)/f'(c) = 0$.

(d) ¿Contradice este ejemplo el Teorema de Rolle?

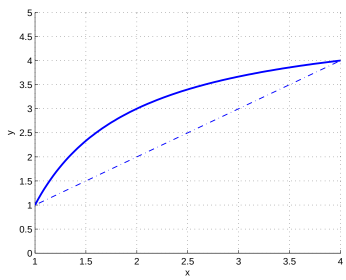
6. Si $T(t) = 30 + 4t - t^2$ modela la temperatura (en $^\circ$ C) de un pequeño animal sometido a un proceso infeccioso varía en un lapso de 4 hs., donde T es la temperatura y t el tiempo (en horas). Usar el teorema de Rolle para mostrar que en algún instante $t_0 \in [0; 4]$ la velocidad de variación de T fue nula.

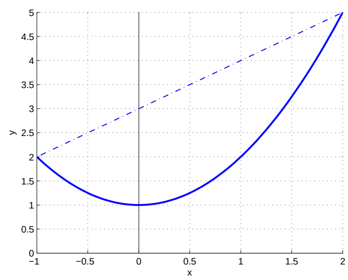
7. Mostrar que las siguientes funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfacen las condiciones del teorema del valor medio (Lagrange) y marcar los puntos $c \in (a, b)$ tales que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

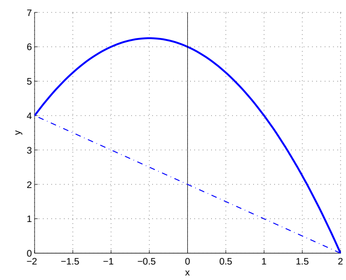
(a) $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$
$[a, b] = [1, 4]$

(b) $f(x) = x^2 + 1$
$[a, b] = [-1, 2]$

(c) $f(x) = -x^2 - x + 6$
$[a, b] = [-\frac{19}{9}\pi, \frac{19}{9}\pi]$







8. Decidir si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Lagrange en los intervalos indicados. En caso afirmativo hallar $c \in (a, b)/f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x$ en $[-2;2]$.

(b) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ en $[0;5]$.

(c) $f(x) = (x-1)^2$ en $[0;3]$.

(d) $f(x) = (x-1)^2$ en $[3;5]$.

Regla de L'Hospital

---

9. Calcular los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hospital, siempre que sea posible:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos\ x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen}\ x}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{x - \text{sen}\ x}$

(e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

(f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^5}$

(g) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^2\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\ (x)}{x^4}$

(j) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln \dfrac{1}{x}$

(k) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\ x}{e^x}$

(l) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln\ x} \right)$

(m) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

(n) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

10. ¿Es aplicable la regla de L'Hospital para calcular el siguiente límite?

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \,\text{sen}\ \left(\frac{1}{x}\right)}{\text{sen}\ x}$$

Si la repuesta es afirmativa, aplicar la regla y calcular el límite. Si la respuesta es negativa, explicar por qué no se puede aplicar la regla y calcular el límite de otra manera.

11. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \begin{cases} 3\dfrac{\mathrm{e}^{x-4}}{(x-4)^2} & \text{si } x \leq 4 \\ \dfrac{20\,\text{sen}\,(x-4)\ \ln(\frac{3}{4}x - 2)}{x-4} + 12 & \text{si} x > 4 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x \left(\dfrac{1}{3x^2 + 2x} \right)^{\text{sen}\,(x)} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

12. Calcular (si existe) $f'(0)$ para las siguientes funciones

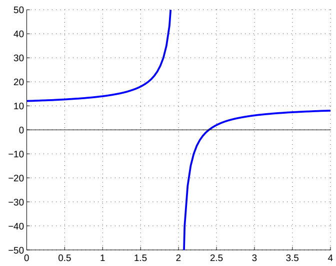
(a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (\cos\,(x))^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^{\text{sen}^2(x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

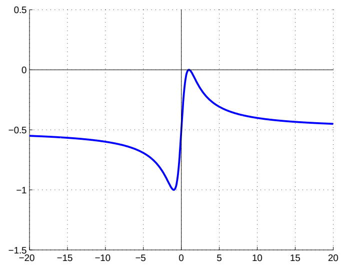
Asíntotas

13. Para cada una de las siguientes funciones, marcar las as íntotas en el gráfico y hallar mediante el cálculo de límites una ecuación para cada una de ellas y verificarlas a partir de gráfico.

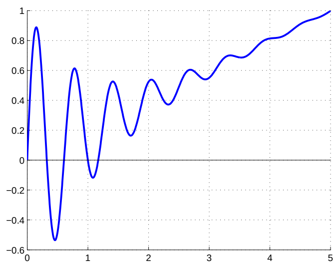
(a) $f(x) = 10 - \frac{4}{x-2}$



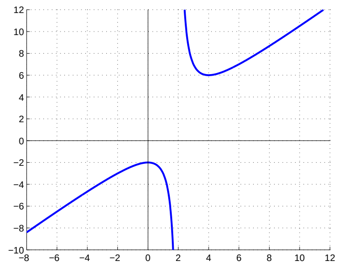
(c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}$



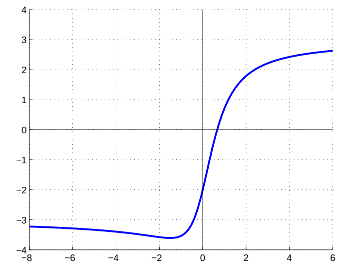
(e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{sen}\,(10x) + \frac{x}{5}$



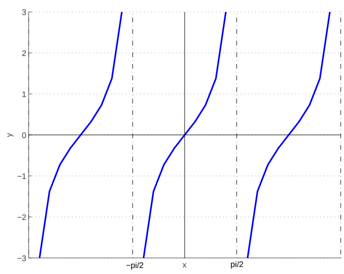
(b) $f(x) = \frac{-x^2+4x-4}{x-2}$



(d) $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+1}}$



(f) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

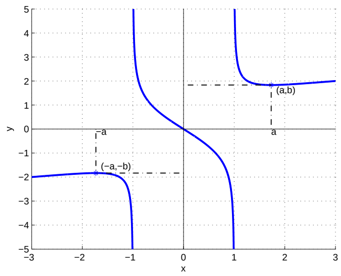


Extremos locales o relativos

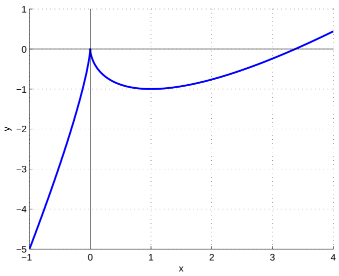
14. Identificar los extremos locales en los gráficos del ejercicio anterior.

15. Para cada caso determinar, analítica y gráficamente, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los puntos críticos,

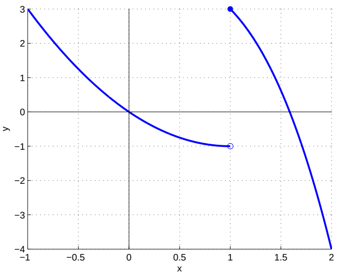
(a) $f(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$



(b) $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$



(c) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x^3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

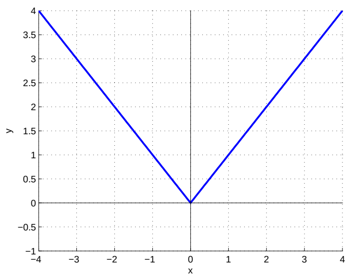


16. La concentración en sangre de una droga t horas después de haber inyectado una determinada dosis se puede modelar como $f(t) = \dfrac{t}{20t^2 + 50t + 80}$, $t \geq 0$. Analizar las variaciones de dicha concentración con el paso del tiempo, indicando los intervalos de tiempo en los cuales la concentración aumenta y aquellos en los cuales disminuye.

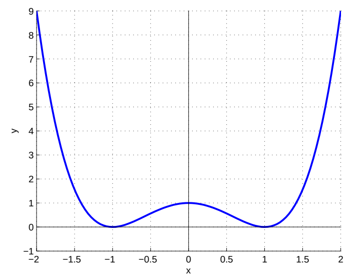
17. La densidad del agua a 0°C es de 1g/cm^3 pero varía levemente al variar la temperatura de acuerdo con la expresión $S(t) = 1 + 5,3 \cdot 10^{-5}t - 6,53 \cdot 10^{-6}t^2 + 1,4 \cdot 10^{-8}t^3$ donde $0 \leq t < 100$ mide la temperatura en grados centígrados, y $S(t)$ es la densidad o peso específico del agua a la temperatura t. En base a dicha expresión, analizar el crecimiento y decrecimiento de la densidad en función de la temperatura del agua.

18. Sobre los siguientes gráficos marcar un círculo en los puntos donde la recta tangente es horizontal y una cruz en los extremos locales. Explicar por qué hay puntos con las dos marcas y otros tienen solamente una.

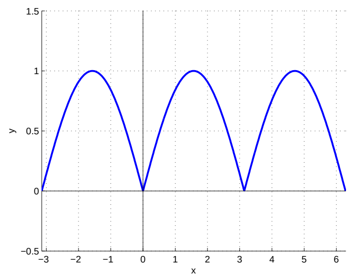
(a) $f(x) = |x|$



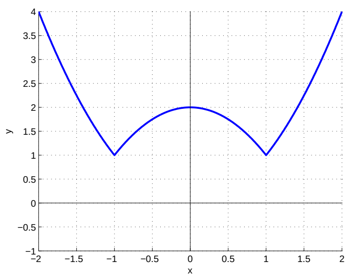
(c) $f(x) = x^4 - 2x^2$



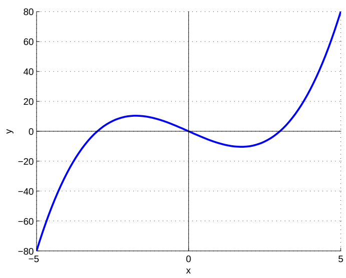
(e) $f(x) = |\text{sen}\,(x)|$



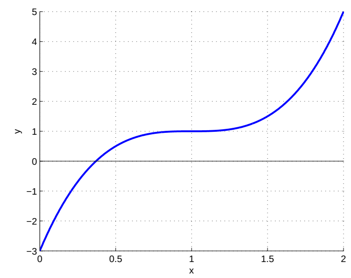
(b) $f(x) = |x^2 - 1| + 1$



(d) $f(x) = x^3 - 9 * x$



(f) $f(x) = 4(x-1)^3 + 1$



19. Determinar todos los extremos relativos de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$

(b) $f(x) = x\ln(x)$ $(x > 0)$

(c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1 - x)$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad (x \neq 0)$

(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$ $\quad (x \neq 1)$

(f) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{1-x}$ $\quad (0 \neq x \neq 1)$

20. Hallar y clasificar los extremos locales de las siguientes funciones. Graficar.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Extremos globales o absolutos

21. Determinar los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = 3x + 1$ en $[-1; 3]$

    (b) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ en $[0; \pi]$

    (c) $f(x) = |x - 2|$ en $[-1; 1]$

    (d) $f(x) = tg(x)$ en $[-\pi/4; \pi/4]$

22. Si hacemos girar en el espacio un tri'angulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, genera, en su rotación, un cono circular recto. ¿Cuál será el mayor volumen V de un cono generado de esta manera por un triángulo cuya hipotenusa mide 6cm?

    (Volumen del cono: $\frac{1}{3}\cdot$(sup. de la base)$\cdot$(altura).)

23. Dada la recta de ecuación $y = 3x + 7$ determinar cuál de sus puntos está más próximo al origen de coordenadas.

24. Se realizaron 10 mediciones de una magnitud física y se obtuvieron los valores

    $$2 \qquad 1,9 \qquad 2,2 \qquad 2,3 \qquad 2 \qquad 1,8 \qquad 1,9 \qquad 2,1 \qquad 2 \qquad 1,8.$$

    Para cada valor x atribuido a dicha magnitud llamamos $S(x)$ a la suma de los cuadrados de los errores cometidos por dichas mediciones, es decir:

    $$S(x) = (x-2)^2 + (x-1,9)^2 + (x-2,2)^2 + \cdots$$

    Verificar que $S(x)$ es mínima cuando x es el promedio de las mediciones obtenidas.

25. En la producción y comercialización de un producto la función de demanda y la función de costo dependen de la cantidad x (con $0 \leq x \leq 15$) respectivamente por:

    $$f(x) = 70 - \frac{3x}{2} - \frac{x^2}{15}\ ; \qquad C(x) = 50x + 5$$

    Si la función de ganancias de la operación está dada por $G(x) = xf(x) - C(x)$ determinar el valor de x para el cual se obtiene la mayor ganancia.

Estudio completo de función

26. Para cada una de las siguientes funciones estudiar el dominio natural, las posibles asíntotas. Determinar los máximos y mínimos locales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Analizar el sentido de la curvatura y los puntos de inflexión. Sobre la base de todos estos datos, hacer un gráfico aproximado de f.

    (a) $f(x) = 12x^2(x+1)$

    (b) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x}$

    (c) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2}$

    (d) $f(x) = x - \ln\ x$

    (e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

    (f) $f(x) = x\ln(x)$

    (g) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x}$

    (h) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$

    (i) $f(x) = \mathrm{e}^{x}\,(x^2+2)$

    (j) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$

    (k) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

    (l) $f(x) = \dfrac{x+2}{\ln(x+2)}$

Más ejercicios para seguir practicando

27. Decidir si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Rolle en los intervalos indicados en cada caso:

    (a) $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$ en $[-1;1]$.

    (b) $f(x) = \dfrac{6x}{\pi} - 4\,\mathrm{sen}^2(x)$ en $[0, \frac{\pi}{6}]$.

28. Mostrar que valen las siguientes desigualdades aplicando el teorema de Lagrange.

    (a) $\mathrm{sen}\, x \leq x, \quad \forall x \geq 0.$

    (b) $\ln(1+x) < x, \quad \forall x > 0.$

    (c) $|\mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, y| \leq |x-y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

29. Calcular los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hospital, siempre que sea posible:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{3x^2+2x-5}$

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\ x - \mathrm{sen}\ x}{x - \mathrm{sen}\ x}$

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\mathrm{sen}\ (x))}{\pi - 2x}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\mathrm{sen}\ (x))}{\pi - 2x}$

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}\ (x)}{\mathrm{tg}\ 5x}$

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x - \mathrm{sen}\ x) \ln\ x$

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\mathrm{cotg} x}$

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\mathrm{sen}\ x}$

    (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos\ x}{\mathrm{sen}\ x}\right)$

    (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\ x}{\mathrm{cotg} x}$

    (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\mathrm{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$

    (l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \ln\ x}{x \ln\ x}$

30. Para cada una de las siguientes funciones estudiar el dominio natural, las posibles asíntotas. Determinar los máximos y mínimos locales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Analizar el sentido de la curvatura y los puntos de inflexión. Sobre la base de todos estos datos, hacer un gráfico aproximado de f.

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2$

    (b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(1-x)$ en $[-1;1]$

    (c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

    (d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3}$

    (e) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3}$

    (f) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}$

    (g) $f(x) = x^2 + |x|$

31. Mostrar que se verifican las siguientes desigualdades entre las funciones dadas.

    (a) $\mathrm{sen}\, x \geq x \quad \forall x \leq 0.$

    (b) $\mathrm{e}^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

    (c) $\ln x \leq 2(\sqrt{x} - 1) \quad \forall x > 1.$

    (d) $1 - \cos\, x \leq \dfrac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

    (e) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x} \quad \forall x > 0.$

32. (a) Mostrar que una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (con $a \neq 0$) puede tener a lo sumo dos extremos relativos.
    (b) Dar un ejemplo de una tal función con dos extremos relativos.
    (c) Dar un ejemplo de una tal función sin extremos relativos.
    (d) ¿Puede una tal función tener un único extremo relativo? ¿Por qué?

33. Expresar el número 16 como suma de dos números cuyo producto sea máximo.

34. Un rectángulo está inscripto en un semicírculo de radio 10 (es decir que sus cuatro vértices están en el perímetro del semicírculo). Calcular las dimensiones del rectángulo que hacen máxima su área.

35. Entre todos los rectángulos de área A determinar:
    (a) el que tiene perímetro mínimo.
    (b) el que tiene la diagonal más corta.

36. La siguiente función describe (en millones de habitantes) la población de un país como función del tiempo t medido en años $(1950 \leq t \leq 2000)$.

$$P(t) = \frac{80}{1 + 3e^{-\frac{t-1950}{10}}}$$

    (a) Determinar la tasa instantánea de crecimiento de P en el año t.
    (b) ¿En qué momento P tuvo la máxima tasa instantánea de crecimiento?

37. De una pieza rectangular de cartón de 25cm de largo y 10cm de ancho se recortan cuatro cuadrados de lado x en sus esquinas para hacer una caja con el remanente. Considerando los posibles valores de x, ¿cuál es el valor que hace máximo el volumen o capacidad de la caja (construida sin tapa)?

38. Determinar todos los máximos y mínimos locales de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto y que además cumple las siguientes condiciones. Justifique sus afirmaciones y graficar
    (i) $f'(-1) = f'(-\frac{1}{2}) = f'(0) = f'(\frac{3}{2}) = 0$.
    (ii) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} = (-\infty; -1) \cup (0; \frac{3}{2})$.
    (iii) $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) < 0\} = (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$

39. Se desea construir una caja de base cuadrada con tapa, y que tenga 1dm^3 de capacidad. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones de dicha caja para que la cantidad de material utilizado en su confección sea mínima?

40. ¿Cuándo es mínima la suma de un número x y el cuadrado de su recíproco (es decir, su inverso multiplicativo)?

41. Un laboratorio vende una droga hasta 100 gramos por comprador, pero con un mínimo de 40 gramos por compra. El precio (por gramo) será de \$15 si vende precisamente 40 gramos, pero se ofrece bajar el precio individual en \$0,10 por cada gramo que exceda los 40. ¿Cuántos gramos de la droga debe vender para que el ingreso total del laboratorio, por cliente, sea máximo? (Notar que si vende 50 gramos a un mismo cliente, cada gramo cuesta \$14.)