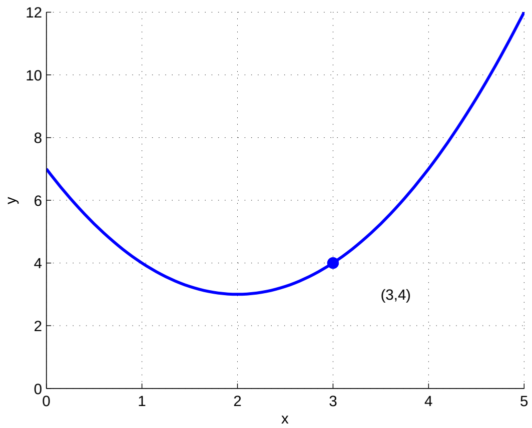
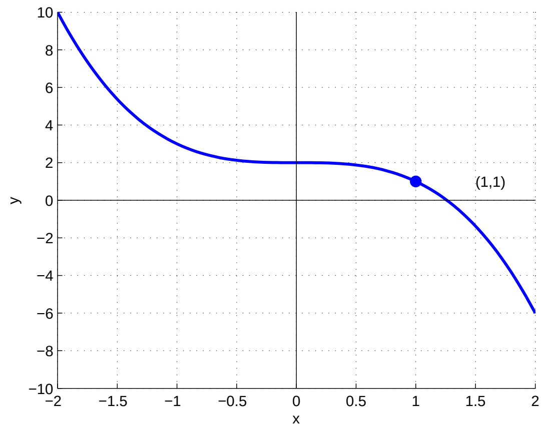
Práctica 5 -Derivadas-

1. En cada uno de los siguientes casos:

(I) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ y $a = 3$



(II) $f(x) = 2 - x^3$ y $a = 1$



(a) Calcular la **pendiente** de la recta secante que pasa por $(a, f(a))$ y $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$ para $\Delta x = 1, \frac{1}{2}, -1,$. Graficar las tres rectas secantes en el mismo gráfico que la función.

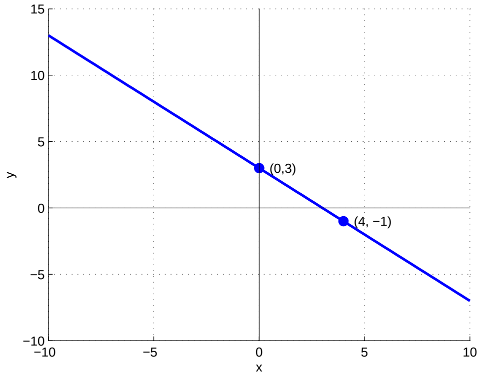
(b) Escribir una expresión (en función de h) de la **pendiente** de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$ (donde $h \neq 0$).

(c) Calcular la **pendiente** de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$ como límite de las pendientes de rectas secantes.

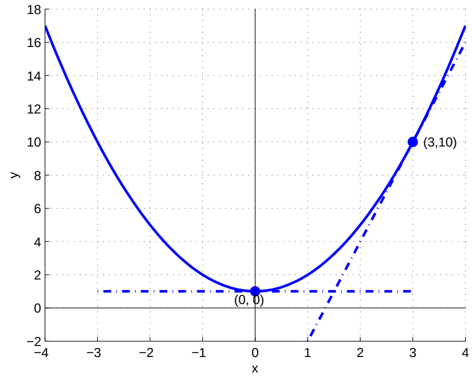
(d) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$.

2. Estimar la **pendiente** de la recta tangente a las siguiente curvas en los puntos indicados:

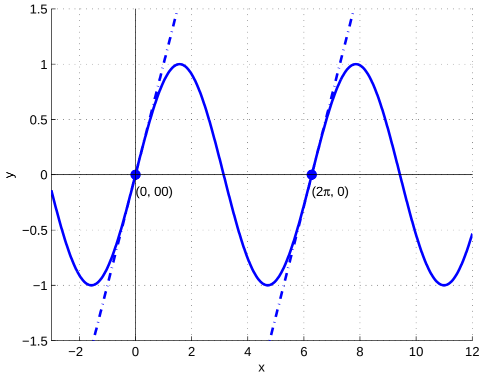
(a) $f(x) = 3 - x$



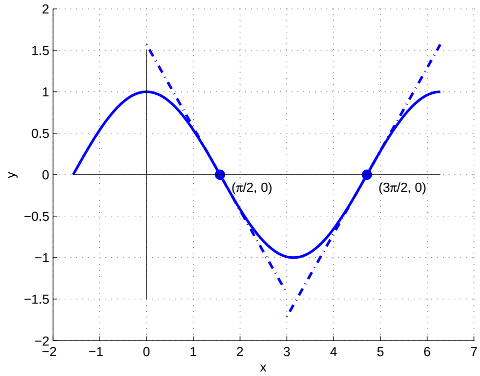
(b) $f(x) = x^2 + 1$



(c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$



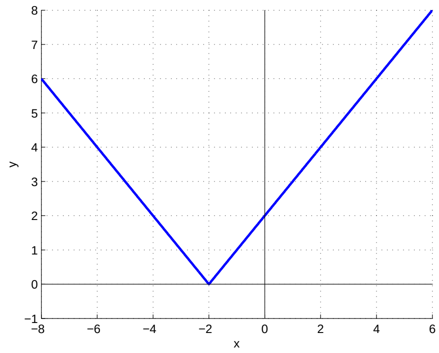
(d) $f(x) = \cos(x)$



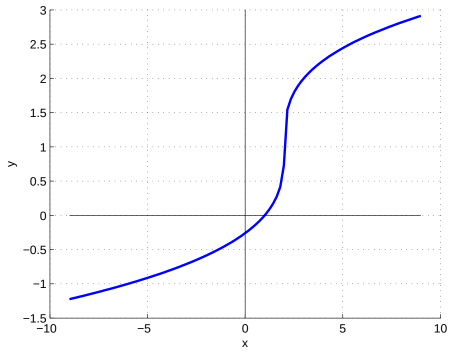
3. Para las funciones y los puntos dados en el ejercicio anterior,
   (a) calcular por definición las derivadas de f en esos puntos,
   (b) hallar una expresión de la recta tangente al gráfico de f en esos puntos.

4. Basándose en los gráficos, indicar los puntos donde no se puede definir la recta tangente al gráfico de las siguientes funciones:

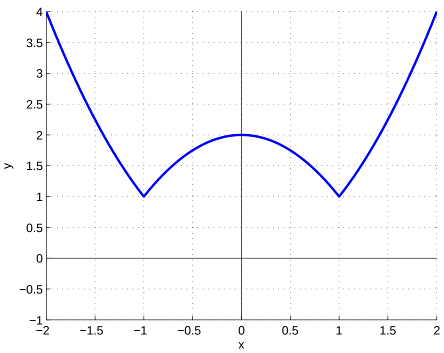
(a) $f(x) = |x+2|$



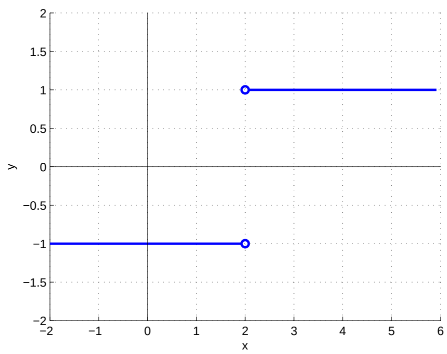
(c) $f(x) = (x-2)^{1/3} + 1$



(b) $f(x) = |x^2 - 1| + 1$

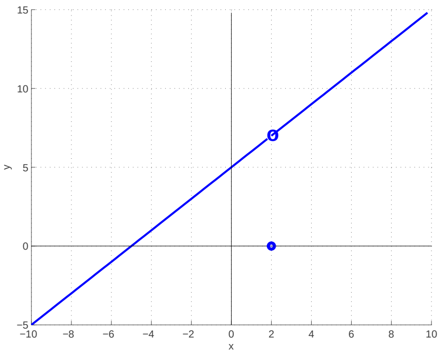


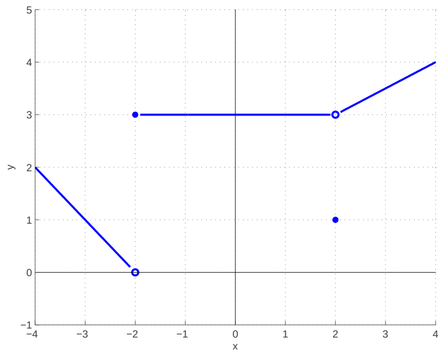
(d) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



(e) $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(f) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{x}{2}+2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$





5. Para cada una de las funciones del ejercicio anterior, usar la definición de derivada para verificar que no existe la recta tangente al gráfico en los puntos que fueron marcados en el gráfico.

6. Proponga el gráfico de dos funciones que sean continuas en $a = 4$, pero que, por causas diferentes, no sean derivables en ese punto.

7. Dibuje el gráfico de una funcón que verifique las siguientes condiciones:
   - la recta tangente al gráfico de f en el punto $x_0 = -2$ es horizontal,
   - la recta tangente al gráfico de f en el punto $x_1 = 5$ es paralela a la recta $y = x$,
   - f no es derivable en $x_2 = 0$.

8. Dada $f(x) = \dfrac{x+1}{2x}$
   (a) Halle todos los puntos del gráfico de f donde la recta tangente es paralela a la recta $y = -2x + 1$.
   (b) Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en esos puntos.

9. Encuentre todos los puntos del gráfico de $f(x) = x^3 - x^2$ donde la recta tangente es horizontal.

10. En una experiencia cuantitativa, la medición $f(t)$ realizada después de t horas está expresada por $y = f(t) = t^2 + 5\,t + 100$, donde $0 < t < 24$. Si evaluamos esta magnitud cerca de $t_1 = 3$ para $\Delta t \neq 0$, determinar Δy (en función de f y Δt) y el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$. Calcular la velocidad instantánea de crecimiento de y en $t_1 = 3$, esto es $y'(3)$.

11. En cierta reacción química la cantidad de moles de moléculas de cierto compuesto (en función del tiempo) está dada por $y = g(t) = -t^2 + 10\,t - 3$, donde t es el tiempo transcurrido desde que se inició la reacción y $0 < t < 9$. Encontrar la velocidad instantánea de cambio de y respecto de t en $t_1 = 2$.

12. Un tanque cilíndrico de 2m de radio se está llenando a razón de 1m^3 cada 2 minutos. ¿Cuál es la velocidad con la que aumenta la altura del líquido en el tanque, si dicha altura se mide en metros y el tiempo en minutos?

13. Al ser lanzado verticalmente un cohete quema todo su combustible en los primeros 20 segundos. Durante ese tiempo la altura lograda queda determinada por medio de la fórmula $f(t) = t^3$, donde t es el tiempo transcurrido desde el despegue (en segundos) y $f(t)$ es la altura obtenida en ese tiempo (en kilómetros).

   (a) Determine la altura máxima obtenida.

   (b) ¿Cuántos kilómetros recorrió durante los últimos 10 segundos?

   (c) ¿Qué velocidad promedio llevó en ese lapso?

   (d) Determine una fórmula para calcular la velocidad promedio en el intervalo $[10; t]$ con $10 < t \leq 20$.

   (e) Con la ayuda la fórmula calculada en el inciso anterior, ¿es posible saber cuál es la velocidad a los 10 segundos?

14. Para cada una de las siguientes funciones, calcular (si existe) la derivada en los puntos indicados usando la definición.

   (a) $f(x) = x^2 + 1$, en $x = -2$ y $x = 1$.

   (b) $f(x) = x^3 + 2$, en $x = -2$ y $x = 1$.

   (c) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, en $x = \frac{1}{2}$ y $x = 5$

   (d) $f(x) = \ln x$, en $x = 1$ y $x = \mathrm{e}$

15. Calcular, usando la definición, la función derivada de las siguientes funciones. Para f y su derivada, determinar el dominio y graficarlas.

   (a) $f(x) = x^2 + 1$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \dfrac{3}{x+4}$

   (d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

   (e) $f(x) = \sqrt{x}$

   (f) $f(x) = \ln\ x$

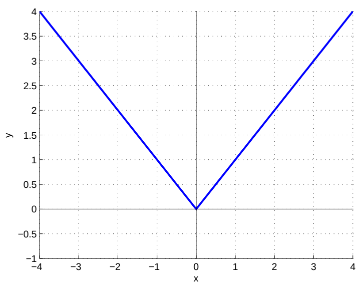
16. Determinar los puntos en los que $f(x) = x^3$ coincide con su derivada.

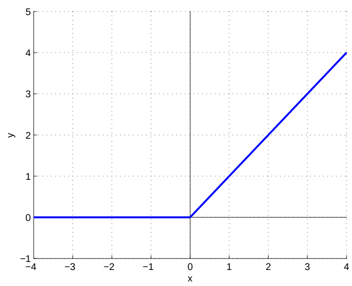
17. Dadas las siguientes funciones

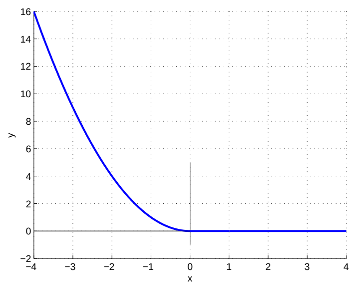
$f(x) = |x|$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$







   (a) Demostrar que las tres funciones son continuas en $x = 0$.

   (b) Realizar los gráficos de estas funciones.

   (c) Demostrar que f y g no son derivables en $x = 0$.

   (d) Estudiar la derivabilidad de $h(x)$ en $x = 0$.

18. (a) Dada la función $f(x) = |x| + x$, calcular $f'(1)$ y $f'(-2)$. ¿Existe $f'(0)$?
   (b) Dada la función $g(x) = x \cdot |x|$, calcular $g'(1)$ y $g'(-2)$. ¿Existe $g'(0)$?
   (c) Determinar $g'(x)$.

19. Calcular $\dfrac{df}{dx}$ para cada una de las siguientes funciones, utilizando las reglas generales de derivación.

   (a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$
   (b) $f(x) = (3x+1)(2+5x^2)$
   (c) $f(x) = 7\cos(x) + 5\,\mathrm{sen}\,(x) + x\,\mathrm{e}^x$
   (d) $f(x) = 2\,x\,\mathrm{sen}\,(x) - (x^2-2)\,\mathrm{e}^x$
   (e) $f(x) = \mathrm{e}^x\cos(x) + \ln 3$
   (f) $f(x) = x^2\ln(x) - \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{e}^x$
   (g) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
   (h) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$
   (i) $f(x) = \dfrac{2+\cos(x)}{3+\mathrm{sen}\,(x)}$
   (j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2+1}$
   (k) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}\,(x)+\cos(x)}{x\ln(x)}$
   (l) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} - \mathrm{sen}\,(x)$
   (m) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\ln(x) - \dfrac{\ln(x)}{x}$
   (n) $f(x) = \dfrac{x+\mathrm{e}^x}{5-x} + \mathrm{tg}(x)$
   (o) $f(x) = (\ln(x)\log_a(x)) - (\ln a \log_a(x))$

Regla de la Cadena

---

20. Usar la regla de la cadena para calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones.

   (a) $f(x) = (1+x)^{129}$
   (b) $f(x) = \cos(3x)$
   (c) $f(x) = \ln(\mathrm{sen}\,x)$
   (d) $f(x) = \mathrm{tg}(5\,x^5)$
   (e) $f(x) = \ln(x^5)$
   (f) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}^4 x$
   (g) $f(x) = \ln^5(x)$
   (h) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x}$
   (i) $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{sen}\,(5x))$
   (j) $f(x) = 2^{\mathrm{sen}\,(x)}$
   (k) $f(x) = 3^{\cos(x)} + \mathrm{sen}^2(x)$
   (l) $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sen}\,(x)} - 3\pi\mathrm{e}^{\mathrm{tg}(x)}$
   (m) $f(x) = (a+bx^4)^{\frac{1}{3}}$
   (n) $f(x) = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$
   (o) $f(x) = (3\cos^3(x))^{-1} - (\mathrm{sen}\,(\ln(x)))^{-1}$
   (p) $f(x) = 3\mathrm{sen}^5(x^3) + \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$

21. Dada la función $h(x) = \ln(a\,x^4 + \frac{1}{4}) + b$, determine los valores de a y b para los cuales la recta de ecuación $y = 3x+1$ es tangente al gráfico de h en $(1; h(1))$.

22. Calcule, si es posible, la ecuación de la recta tangente al gráfico de $h(x) = (f \circ g)(x)$ en $(0; h(0))$ sabiendo que la recta tangente al gráfico de f en $(1; f(1))$ es $y = -x+5$ y la recta tangente al gráfico de g en $(0; g(0))$ es $y = 3x+1$.

23. Halle la ecuación de la recta tangente al gráfico de $h(x) = \ln(f(2x+2))$ en $(2; h(2))$, sabiendo que la recta tangente al gráfico de f en $(6; f(6))$ es $y = 3x - 13$.

24. Calcule la recta tangente al gráfico de g en el punto $(-1; g(-1))$ sabiendo que $g(-1) = 3$, la recta tangente al gráfico de $h(x) = (f \circ g)(x)$ en $(-1; h(-1))$ es $y = 3x + 2$ y la recta normal al gráfico de f en $(3; f(3))$ es paralela a la recta de ecuación $y = -2x + 5$.

Derivación logarítmica

---

25. Usar el método de derivación logarítmica para calcular las derivadas de cada una de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = x^{3x}$
    (b) $f(x) = (\sqrt{x+1})^x$
    (c) $f(x) = (\ln(x))^x$
    (d) $f(x) = (\ln(x))^{\ln x}$
    (e) $f(x) = (\cos(x))^{e^x}$
    (f) $f(x) = \sqrt[x]{x}$
    (g) $f(x) = (\operatorname{sen}(x))^{x^2}$
    (h) $f(x) = (\operatorname{sen}^3(x))^{\ln(x)}$
    (i) $f(x) = x^{(x^x)}$

Derivadas de orden superior

---

26. Dos móviles se desplazan con trayectoria rectil'inea con las siguientes leyes del movimiento (donde t representa el tiempo):

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 6t^2 + 10 \qquad\qquad g(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + 2$$

    (a) Determinar el instante t_0 en el cual ambos móviles tienen la misma velocidad.
    (b) Calcular la aceleración de cada uno de los móviles en función del tiempo.

27. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $34,3$m/s se desplaza siguiendo la ley de movimiento $s(t) = 34,3t - 4,9t^2$.

    (a) Calcular la velocidad y la aceleración en los instantes $t_1 = 3$ y $t_2 = 4$.
    (b) Determinar el instante t_3 en el que la piedra alcanza la altura máxima. (Pista: la velocidad en el instante t_3 debe ser 0.)

28. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal al gráfico de cada una de las siguientes funciones, en los puntos cuyas abscisas se indican en cada caso :

    (a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $a = 1$, $a = 0$
    (b) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $a = \frac{\pi}{2}$
    (c) $f(x) = \ln(x)$ en $a = 1$
    (d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$ en $a = 2$
    (e) $f(x) = \ln(x^2+1)$ en $a = 0$
    (f) $f(x) = (\sqrt{x} + x)^2$ en $a = 4$

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ en $a = 0$, $a = 1$ (h) $f(x) = \mathrm{e}^x(x+\ln(x))$ en $a = 1$

29. Consideremos las funciones $f(x) = x^3 + 2$, $g(x) = 2x^2 + 2$.

    (a) Probar que los gráficos de ambas funciones se cortan en dos puntos.

    (b) Verificar que en uno de esos puntos de intersección ambas curvas tienen la misma recta tangente. ¿Qué pasa en el otro punto de intersección?

30. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. El gráfico de la función $A(x) = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ se conoce como 'curva de Agnesi'. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto de abscisa $x_0 = 2a$.

31. Determinar en qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la recta L que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$.

32. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra función de la que sólo sabemos que $g'(2) = 4$. Calcular la derivada de $(g \circ f)$ en el punto $x_0 = 1$.

33. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(g(x^2 + x)) + 3g(x) = 3\mathrm{tg}(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y donde g cumple, además, que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 2$.

    (a) Calcular $f'(0)$.

    (b) Hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $x = 0$.

34. El 'Teorema del coseno' permite expresar la longitud del lado a del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ a partir de los otros dos lados y el ángulo opuesto A por la fórmula:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

    Si mantenemos b y c constantes, a resulta ser función del ángulo A. En estas condiciones, demuestre que $\dfrac{da}{dA} = h_a$ es precisamente la altura del triángulo correspondiente a la base a.

35. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{si } x \leq 2 \\ \cos(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

    (a) Analice la continuidad de f en $x = 2$.

    (b) Mediante el estudio de cocientes incrementales estudie la derivabilidad de f en $x_1 = 1$ y en $x_2 = 2$.

36. Estudie la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

    (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 3x & \text{si } x > 3 \end{cases}$

    (c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

    (d) $f(x) = |(x-1).(x+1)|$

    (e) $f(x) \begin{cases} (x+1)^2 & x \leq -1 \\ \dfrac{\cos(x\pi)}{\pi} & x > -1 \end{cases}$

    (f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (h) $f(x) = \sqrt{|x|}\,\operatorname{sen}(4|x|)$

37. Hallar todos los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que existe $f'(1)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \geq 1 \\ a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

38. Calcular las derivadas segunda y tercera de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 3x^3 + 5x - 1$ (c) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ (e) $f(x) = \operatorname{sen}(4x)$

(b) $f(x) = \ln(7x)$ (d) $f(x) = (x^2+1)^5$ (f) $f(x) = \cos(2x^3)$

39. (a) Calcular las derivadas séptima y octava de $f(x) = x^7 - 5x^4 + 8x$.
   (b) Calcular las derivadas de orden n y $n+1$ de un polinomio de grado n.
   (c) Calcular la derivada octava de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. ¿Qué conclusiones obtiene? ¿Cómo calcularía la derivada de orden 25 de $f(x)$?
   (d) Lo mismo que en el item (c) pero para $g(x) = \cos(x)$.