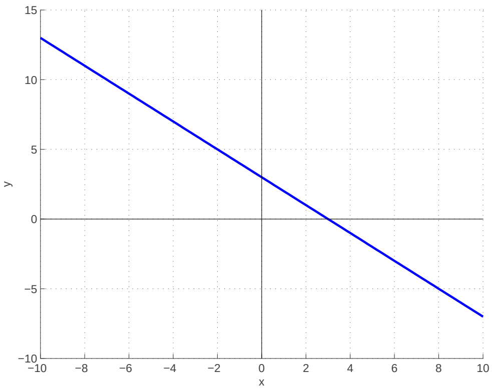
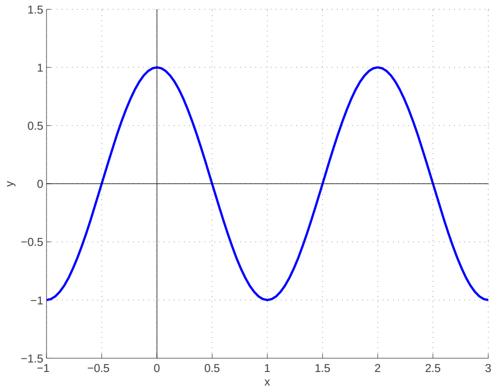
Práctica 3 -Límites-

1. Si existe, determinar el límite partir del gráfico. Si no existe el límite, explicar por qué.

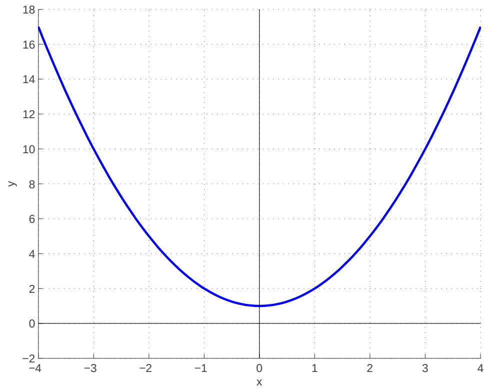
a) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)$



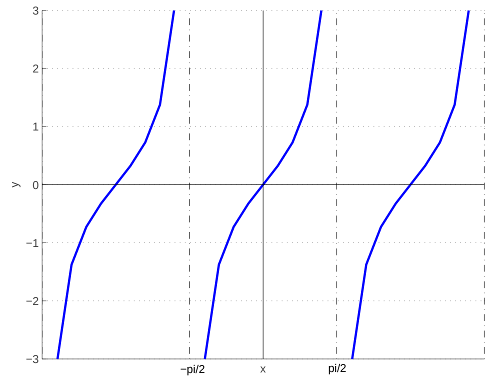
d) $\lim\limits_{x\to 1} \cos(\pi x)$



b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)$

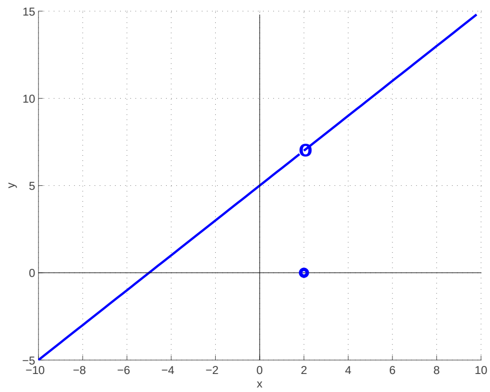


e) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \operatorname{tg}(x)$



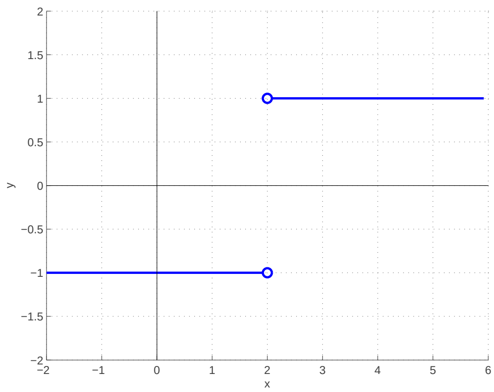
c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$



f) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

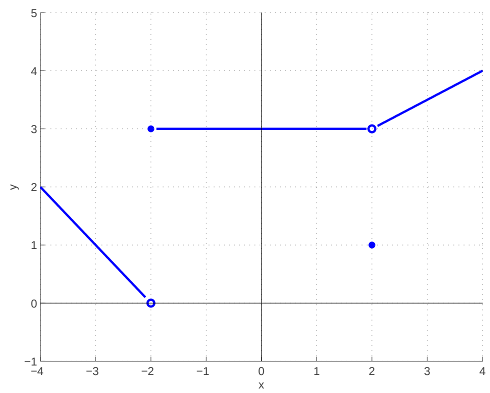
$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$$

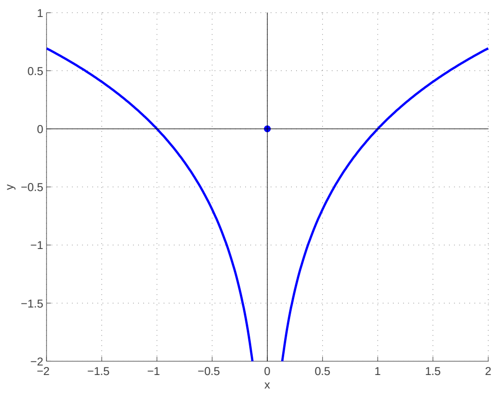


2. Utilizar los gráficos del ejercicio anterior para obtener, si existe, el valor en cada caso. En caso de no existir el valor buscado, explicar por qué.

   a) $f(2)$ *b*) $f(1)$ *c*) $f(1)$ *d*) $f(1)$ *e*) $f(\pi/2)$ *f*) $f(2)$

3. En cada caso, utilizar el gráfico para determinar el conjunto $A = \{c \in \mathbb{R} / \ \nexists \lim\limits_{x \to c} f(x)\}$





4. En cada caso indicar el las propiedades usadas para calcular el límite:

   a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 2)\sqrt{3x+1}$

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x+1)$

   c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} - 2}$

   d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{x+4}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

   e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-5x^2 + 9x + 2}{x^2 - 4}$

   f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x} - 1}$

   g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

   h) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(t+h)^2 - t^2}{h}$ con $t \in \mathbb{R}$, t fijo

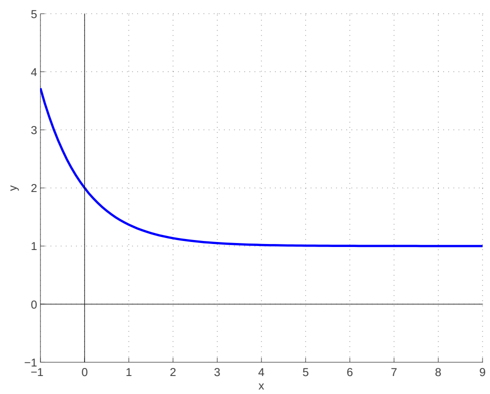
5. Si existen, determinar los límites a partir del gráfico. Si no existe el límite, explicar por qué.

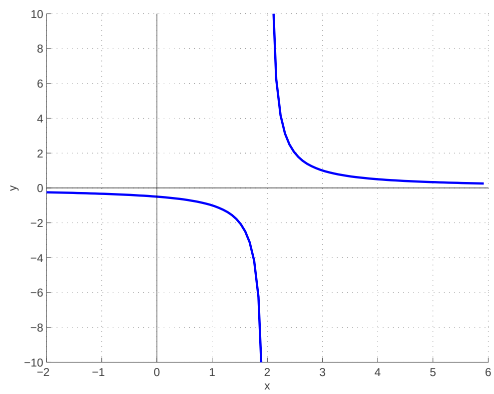
   a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

   $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$

   b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

   $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$





6. Calcular los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4 - x^3 + 2}{3x^4 - 3x^2 + 1}$

$b)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3 + 2x^2}{3x^2 - 2x + 2}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^7 - 10x^3 + 3)$

$d)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 3x + 1}{2x^4 + 2x^2 + 1}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{-7x^2 + 3x + \sqrt{x}}$

$f)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^6 + x^5 + \sqrt{x})$

$g)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+1} - x}{x + 5}$

$h)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln\ x - 2\ln(x+1))$

$i)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$

7. Repetir el ejercicio anterior para $x \to -\infty$ en los casos que sea posible.

8. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad de Einstein, un cuerpo que en reposo tiene masa m_0, cuando se mueve a velocidad v su masa cambia según la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v}{c}}}$, donde c es la velocidad de la luz y m_0 es la masa inicial. ¿Qué sucede cuando $v \to c$?

9. Un problema cuantitativo importante de la ciencia pesquera consiste en evaluar el número de peces hembra que desovan en los ríos y emplear esta información para extrapolar el número de peces maduros (llamados 'reclutas') que volverán a los ríos durante el siguiente período de reproducción. Si R es el número de reclutas y H el número de peces hembra del período anterior, las investigaciones cuantitativas de Beverton & Holt (1957) afirman que $R = R(H) = \dfrac{H}{\alpha H + \beta}$ donde α y β son constantes positivas. Mostrar que, de acuerdo con esta función, para un número H de hembras suficientemente grande el reclutamiento será aproximadamente constante.

10. Cierta población biológica comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{c}{1 + ke^{-at}}$$

donde c, k y a son parámetros (constantes) que no dependen del tiempo t y $a > 0$.

$a)$ ¿Cuál es la población inicial en este modelo?

$b)$ ¿Cuál es la población límite? (Calcular el límite de $f(t)$ cuando $t \to +\infty$.)

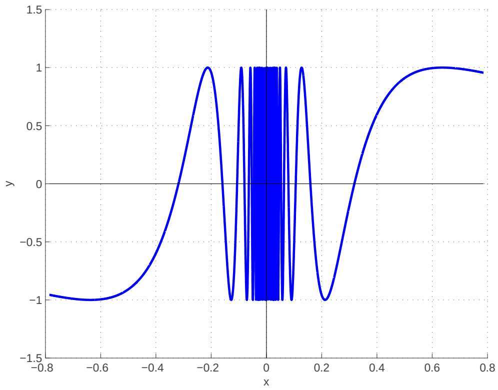
$c)$ Si c y k fueran números grandes (respecto de los valores de t) la función $f(t)$ es próxima a la función exponencial $g(t) = \dfrac{c}{1+k}\ e^{at}$. Supongamos que una población de moscas tiene los parámetros :

$$c = 10 \qquad k = 999 \qquad a = 0,02$$

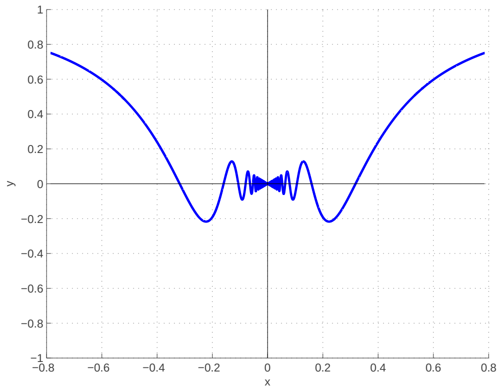
Verificar mediante una tabla de valores que la logística y la exponencial son muy similares para $t < 100$. Ambas funciones seguirán siendo próximas si vale $t \in (100, 200)$ ¿Qué ocurre para $t > 200$?

11. Determinar a partir del gráfico, si existe, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Si no existe el límite, explicar por qué.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$



b) $f(x) = x\operatorname{sen}(1/x)$



12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\ x\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\ \dfrac{x^2}{2}\ \cos\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\ (x^2 - 4)\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\ \operatorname{sen}(x)\,.\cos\left[\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\ \sqrt{x}.e^{\cos(1/x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\ x\ \operatorname{sen}\ (h(x)),\ \ h(x)$ cualquiera

13. *a)* Comprobar gráficamente que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty\ \ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$

b) ¿Qué puede decir de $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}$ y de $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n}$ para n par?

c) La misma pregunta para n impar.

14. Consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1-x^3}$

a) Determinar el dominio de f.

b) ¿Se puede calcular directamente $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? ¿Por qué?

c) Determinar la función g definida por $g(x) = f(1+x)$.

d) Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$. Deducir $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

e) ¿Admite $f(x)$ asíntotas verticales u horizontales? Justificar la respuesta.

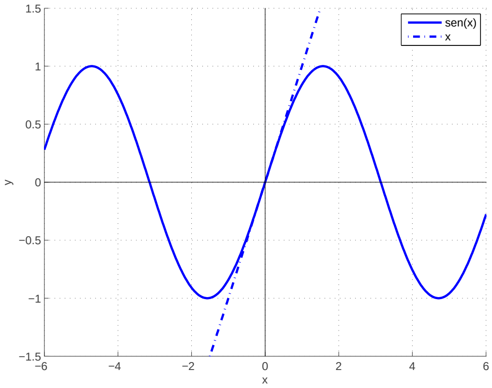
15. En cada uno de los siguientes casos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Decidir si existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y representar gráficamente.

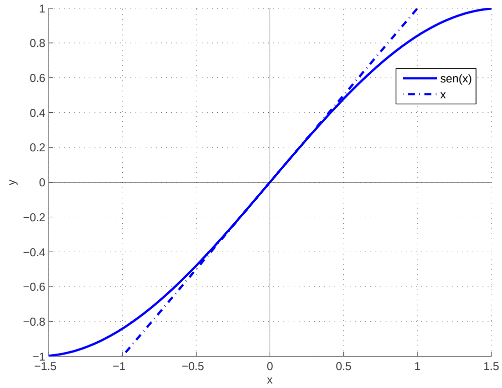
a) $f(x) = |3x - 6|$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Los siguientes gráficos corresponden a las funciones $\operatorname{sen}(t)$ y t. Observar que sus gráficos se acercan cuando $t \to 0$.





16. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, calcular:

    a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)}$

    b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}$

    c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{2x}$

    d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

    e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

    f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(3\pi x)}$

17. Calcular los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-5)^{\frac{1}{1-x}}$

    b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+1}{2x-5}\right)^{\frac{x+1}{3x+1}}$

    c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{\frac{1}{x}}$

    d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{\frac{\tan(x)}{3x}}$

    e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x}\right)^{x+1}$

    f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{\operatorname{sen}(4x^2)}\right)^{\frac{1}{x}}$

18. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{kx^2-x+1}-x}{4x+1}$, donde $k>0$.

    a) Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

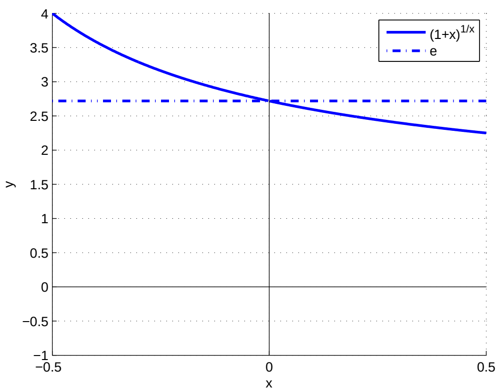
    b) Encontrar, si existe, un valor de k para el cual $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$.

19. Sea $f(x) = \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2x-8}$.

    a) Encontrar todos los valores de a para los cuales $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ es finito.

    b) Para los valores hallados en (a), calcular $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$.

En la figura de la derecha se muestra el gráfico de la función $(1+y)^{\frac{1}{y}}$ para valores cercanos a 0



20. Sabiendo que $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x+1}{-3x-2}\right)^x$

c) $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}\ x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x+x^2)}{2x^2}$

21. Calcular, los siguientes límites para $a\in\mathbb{R}$ fijo

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$.

b) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(a+h)-\ln\ a}{h}$, $\qquad a>0$.

22. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a})$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}^2(x)}{x+\operatorname{sen}(2x)}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

23. Considerar $f(x)=\frac{x|x-3|}{x^2-9}$. Hallar, cuando existan, los siguientes límites. Cuando sea necesario, estudie los límites laterales.

a) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$