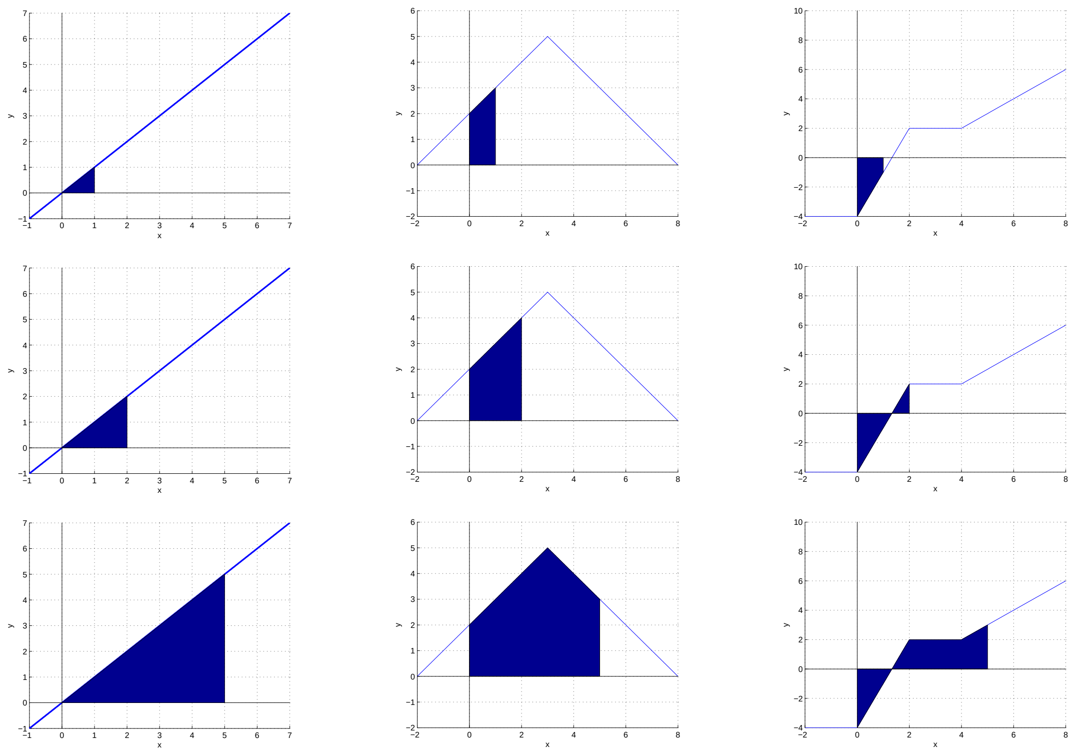
Práctica 8 -Integrales definidas-

1. Calcular $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx$ sabiendo que $\int_{-3}^{5} [f(x)-2]\,dx = 9$.

2. Calcular $\int_{1}^{2} [f(x)+2g(x)]\,dx$ sabiendo que $\int_{1}^{2} 2f(x)\,dx = 5$ y que $\int_{1}^{2} g(x)\,dx = 7$.

3. Completar la tabla en cada caso siendo $F_j(x) = \int\limits_0^x f_j(t)dt$, $j = 1,..,3$ y graficar cada F_j

$$f_1(t) = t \qquad f_2(t) = \begin{cases} t+2, & t \le 2 \\ t+8, & t > 2 \end{cases} \qquad f_3(t) = \begin{cases} 3t-4, & t \le 2 \\ 2, & 2 < t \le 4 \\ t-2, & 4 < t \end{cases}$$



x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$
1			
2			
5			
x			

4. Sean: $f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 3 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{array} \right.$ y $g(t) = \left\{ \begin{array}{ll} t & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 2 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{array} \right.$

   (a) Graficar $f(t), g(t)$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ y $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$.

(b) Probar que f no es continua en $x = 2$ pero que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ si lo es.

(c) Es $F'(x) = f(x)$?

(d) Es g derivable en todo el intervalo (0,4)? Si $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, es $G(x)$ derivable?

Teorema Fundamental del Cálculo Integral

---

5. Calcular las derivadas con respecto a x de las siguientes funciones en los dominios indicados:

(a) $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$ (b) $\displaystyle\int_0^{2x} \frac{\operatorname{sen}(u)}{1+u}\,du, \quad x > -\frac{1}{2}$ (c) $\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} \frac{y}{2+y^3}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2}\,dt, \quad x > 0$ (e) $\displaystyle\int_{\ln(x)}^{x^3} \frac{\operatorname{sen}(t)}{1+t^2}\,dt, \quad x > 0$ (f) $\displaystyle\int_x^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt\ , \quad x > 0$

6. Calcular $g(2)$ sabiendo que g es una función continua para todo $x \geq 0$ y satisface

$$\int_0^{x^2} g(t)\,dt = x^2(1+x).$$

7. Sea $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{sen}(x)} \frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Mostrar que f es creciente en su dominio.

8. Hallar intervalos de crecimiento y extremos locales de las siguientes funciones:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} t^2 (t-1)(t-4)\,dt$ (b) $G(x) = \displaystyle\int_1^{e^{x-3}} [\ln^2(t) - 2\ln(t)]\,dt$

(c) $H(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \left[e^{7-t^2} - e^{t^2+1}\right]\,dt$ (d) $J(x) = \displaystyle\int_e^{x^2+e} \frac{1}{\ln(s)}\,ds$

9. Mostrar que la función $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t}{\operatorname{sen}(t)+2}\,dt$ tiene un mnimo absoluto en $x_0 = 0$. $y = -1 \in \operatorname{Im}(F)$?

10. Mostrar que $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(x)} \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$ tiene **exactamente un** cero.

11. Probar que la expresión siguiente es constante, es decir no depende de x, si $x > 0$

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$$

Regla de Barrow

12. Calcular

(a) $\displaystyle\int_0^3 3(x-2)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{\pi}^{5\pi} \operatorname{sen}(x)-\cos(x)\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}+2x^3-x^{-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^3+2x)\,dx$ (d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{2e^t+t}{3}\,dt$

13. Calcular las siguientes integrales definidas usando un método adecuado.

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,dx$

14. Marque con una cruz la única respuesta correcta.
Dada la función continua f, si $A=\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$ y $B=\displaystyle\int_8^{11} f\left(\frac{t-2}{3}\right)dt$, entonces.

☐ $A=3B$ ☐ $3A=B$

☐ $A=B$ ☐ Ninguna de las anteriores

15. La función f tiene derivada continua y cumple $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} f(x)\operatorname{sen}(x)\,dx=4$ y $f(-\pi)=3$.
Calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/2} f'(x)\cos(x)\,dx$.

16. En cada caso encontrar el valor medio de f en el intervalo indicado

a) $f(x)=4-x^2,\quad [-2,2]$ b) $f(x)=\dfrac{4(x^2+1)}{x^2},\quad [1,3]$

c) $f(x)=\operatorname{sen}(x),\quad [0,\pi]$ d) $f(x)=\cos(x),\quad [0,\pi/2]$.

17. La velocidad v del flujo de sangre a una distancia r del eje central de cualquier arteria de radio R es $v=k\,(R^2-r^2)$ donde k es la constante de proporcionalidad. Determine el flujo medio de sangre a lo largo de un radio de arteria. (Usar 0 y R como límites de integración.)

18. El volumen V en litros de aire en los pulmones durante un ciclo respiratorio de cinco segundos se aproxima a $V=0.1729t+0.1522t^2-0.0374t^3$ donde t es el tiempo en segundos. Aproximar el volumen medio de aire en los pulmones durante un ciclo.

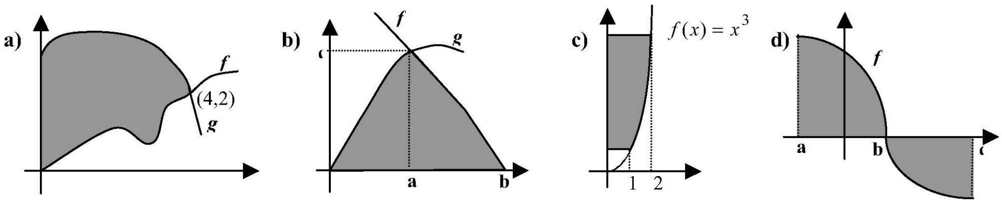
Cálculo de áreas

19. Calcular el área encerrada por la curva $y=f(x)$ y el eje x en el intervalo indicado en cada caso:

(a) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, en $[0,\pi]$ (b) $f(x)=\cos(x)$, en $\left[\dfrac{-\pi}{2},0\right]$ (c) $f(x)=x^2-1$, en $[-1,1]$

(d) $f(x)=e^x-1$, en $[0,e]$ (e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, en $[-2,1]$ (f) $f(x)=x^2-x$, en $[-1,3]$

20. Definir el área de cada una de las regiones sombreadas mediante integrales



21. En cada caso, calcular el área de la región encerrada por las curvas.
Sugerencia: hacer los gráficos.
(a) $y = x;\ y = x^2 - 1$
(b) $y = x^3;\ y = x$
(c) $y = x^{1/3};\ x = 0;\ y = 1$
(d) $y = x^3 - 12x;\ y = x^2$
(e) $y = x^{1/2};\ y = x - 2; x = 0$
(f) $y = x^{1/2};\ y = x - 2;\ y = 0$
(g) $y = e^{x-1};\ y = 1;\ x = 0$
(h) $y = \operatorname{sen}(x);\ y = x^2 - \pi^2$
(i) $y = -cos(x);\ y = x + \pi/2;\ y = -x + \pi/2$
(j) $y = e^x;\ y = e^{-x};\ x = 1;\ x = -1$
(k) $y = \sqrt{x+3};\ y = |x| - 3$
(l) $y = 2\sqrt{2};\ y = 2x - 4;\ x = 0$
(m) $y = x^3 - x$; y la recta tangente a esta curva en el punto $x = -1$

22. Calcular el área encerrada entre las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, en el intervalo señalado en cada caso:
(a) $f(x) = \dfrac{12}{x^2+2},\quad g(x) = x^2 - 2$ en $[-3, 0]$
(b) $f(x) = \dfrac{3x-3}{x+3},\quad g(x) = 2x^2 - x - 1$ en $[-1, 1]$
(c) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1},\quad g(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ en $[0, 1]$
(d) $f(x) = \dfrac{-4x}{\sqrt{1-x^2}},\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $\left[\frac{-1}{2}, 0\right]$

23. Hallar el área de la región comprendida entre las curvas dadas.
(a) $y = x\sqrt{2x+3}$, $y = 0$ $(x \leq 0)$
(b) $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$, $y = \ln(x+4)$
(c) $y = x^2\, e^{3x+1}$, $y = 4\, e^{3x+1}$
(d) $y = 0$, $y = \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, e^{\operatorname{sen}(x)}$, $x = 0$ y $x = \pi$
(e) $y = (x+2)^2$, $y = \sqrt{8(x+2)}$
(f) $y = (x^2 - 8)\ln(x-1)$, $y = \ln(x-1)$

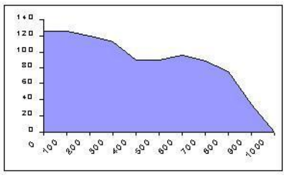
24. Dar los posibles números reales a de modo que el área encerrada entre los gráficos de $f(x) = \frac{x^2}{4}$ y $g(x) = a^2$ sea 3.

Integración numérica

---

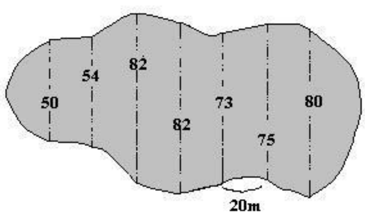
25. Aproximar el valor del área considerando $n = 2$ y $n = 4$. Comparar los resultados con el valor exacto.
(a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 1\right) dx$
(b) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\, dx$
(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$

26. Usar la regla del Trapecio para estimar los metros cuadrados de un lote del que se tienen los siguientes datos



x	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
y	125	125	120	112	90	90	95	88	75	35	0

27. Para estimar la superficie de un lago se tomaron algunas mediciones, como se muestra en la figura. Usar la regla del Trapecio para estimar la superficie del lago



Integrales impropias.

28. Evaluar las siguientes integrales impropias o mostrar que divergen.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-3}^2 \frac{1}{x^4}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{27} x^{-2/3}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(3-x)^{2/3}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2+x-2}$

(j) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,dx}{x^2-9}$

(k) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{-x^2+9}}\,dx$

(l) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{-x^2+9}}$

(m) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)} \frac{dx}{e^{2x}-9}$

(n) $\displaystyle\int_{-6}^3 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-10e^x+9}$

(o) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^2 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-4}}\,dx$

29. Calcular, si convergen, las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{2-x}$

(b) $\displaystyle\int_1^{-\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-2t}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1}$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,dt$

(h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^{5/2}}$

30. Hallar $b \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^b \ln x\,dx = 0$.

31. Dar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx$ resulta finita.

32. Evaluar o mostrar que divergen las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3x}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(1-x)^{2/3}}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(2x-1)^3}$

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^x\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} xe^{-x^2}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$

(h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\, dx$

(i) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x/\ln^2(x)}\, dx$

(j) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\, dx$

(k) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx$

(l) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-1.01}\, dx$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{4+x^2}}$

(n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(4+x^2)^2}\, dx$

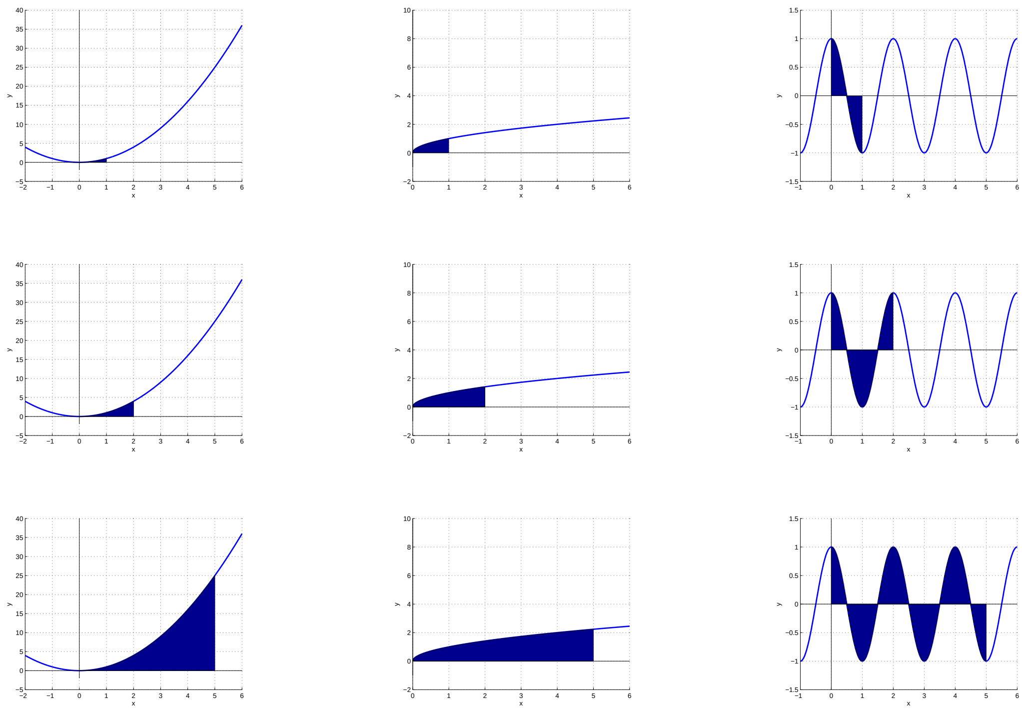
(o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{e^{|x|}}\, dx$

Adicionales

---

33. Calcular para cada caso $F_j(x) = \displaystyle\int_0^x f_j(t)dt$, $j = 1, .., 3$ y graficar cada F_j

(a) $f_2(t) = t^2$ (b) $f_3(t) = \sqrt{t}$ (c) $f_4(t) = \cos(5t)$



34. Decidir si son verdaderas o falsas. Graficar.

(a) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x - 2$, la recta $x = 4$, el eje x y el eje y está dada por la siguiente integral: $\displaystyle\int_0^4 (x-2)\, dx$.

(b) El área de la región del plano limitada por el gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ y el eje x para $-1 \leq x \leq 3$ está dada por la siguiente suma de integrales: $-\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx + \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx$.

(c) El área encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = -x + 2$ está dada por la integral siguiente: $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^2 + x - 2)\, dx$.

35. Evaluar o mostrar que divergen las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}}\, dx$ (e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x + x\ln(2x)}$ (i) $\displaystyle\int_4^{\infty} xe^{-x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{x\, dx}{(x^2-4)^{2/3}}$ (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ (j) $\displaystyle\int_{-4}^{\infty} \frac{e^x\, dx}{e^{2x} - 2e^x - 3}$

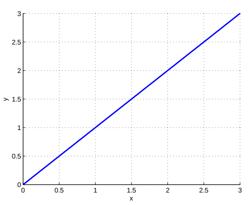
(c) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{(x+1)^{4/3}}\, dx$ (g) $\displaystyle\int_{-1}^{8} x^{-1/3}\, dx$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

(d) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{x}{\sqrt{-x^2+9}}\, dx$ (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx$ (l) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\, dx$

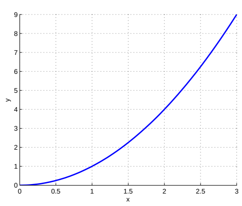
36. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ con $x \geq 0$. Indicar cuál es el gráfico de $f(t)$ y cuál el de $F(x)$.

(a)

i)

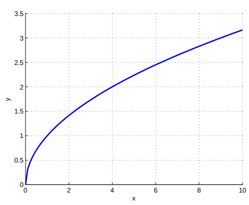


ii)

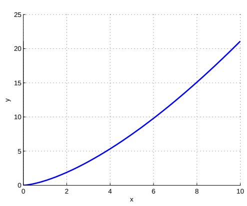


(b)

i)

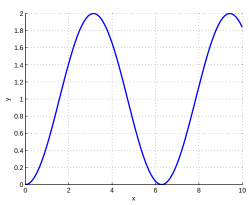


ii)

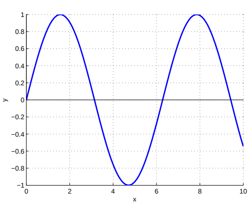


(c)

i)



ii)



37. Suponer que la función $y = f(x)$ es continua. Aproximar la integral $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ usando los datos de la tabla obtenidos en un experimento

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y	4.32	4.36	4.58	5.79	6.14	7.25	7.64	8.08	8.14