Práctica 9 -Aproximaciones locales a funciones mediante polinomios-

1. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de f y estimar $f(0.23)$ para las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ (b) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
   (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ (d) $f(x) = \operatorname{sen}(ax)$, $a \in \mathbb{R}$

2. Considerar, en cada caso, la función f, el valor n y el punto x_0:
   (a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 2, \quad n = 3, \quad x_0 = 1$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad n = 3, \quad x_0 = 1$
   (c) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad n = 4, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (d) $f(x) = \mathrm{e}^x, \quad n = 3, \quad x_0 = 0$
   (e) $f(x) = \ln(x), \quad n = 4, \quad x_0 = 1$ (f) $f(x) = \sqrt{x}, \quad n = 3, \quad x_0 = 1$

   (I) Hallar el polinomio de Taylor de orden $n \in$ de f alrededor del punto x_0.
   (II) Utilizar los polinomios adecuados para estimar $\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{10}\right)$, e, $\ln(1.1)$ y $\sqrt{\mathrm{e}}$.

3. Dada $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
   (a) Hallar una expresión general para el polinomio de Maclaurin de orden $n \in \mathbb{N}$ para f.
   (b) Usar el polinomio de orden $n = 4$ para aproximar $f(0.1)$, $f(0.5)$, $f(0.9)$ y $f(2)$.
   (c) Comparar los resultados obtenidos con el valor verdadero. Qué observa en este ejemplo?

4. Calcular el polinomio de Taylor de orden 3 alrededor de $x_0 = -1$ de $h(x) = f(x)g(x)$ sabiendo que $P(x) = -2x^3 - 4x^2 - x + 4$ y $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ son los polinomios de Taylor de orden 3 de f y g, respectivamente, alrededor de $x_0 = -1$.

5. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $x_0 = 2$ de $h(x) = \ln(f^2(x))$ sabiendo que $P(x) = 3x^2 - 9x + 7$ es el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de $x_0 = 2$.

6. Hallar los valores de k y b de modo que $p(x) = 1 + bx - 6x^2$ sea el polinomio de orden 2 de Maclaurin de la función $f(x) = \sqrt[4]{kx+1}$.

7. Sea $P(x) = -x^3 + 3x + 4$ el polinomio de Taylor de orden 4 de f alrededor de $x_0 = -1$. Probar que f tiene un mínimo local en $x = -1$ y calcular $f(-1)$ y $f^{(4)}(-1)$.
   Sugerencia: usar el criterio de la derivada segunda.

8. Calcular los siguientes límites usando la fórmula de Maclaurin de orden apropiado para las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, según corresponda.
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6\operatorname{sen}(x) - 6x + x^3}{6x^5}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{24\cos(x) - 24 + 12x^2 - x^4}{24x^6}$

9. Hallar los polinomios de Maclaurin de orden 2 de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{1+u^4}\,du$ (b) $g(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}^2(x)} e^u (1-u)^{-1}\,du$

Acotación del error

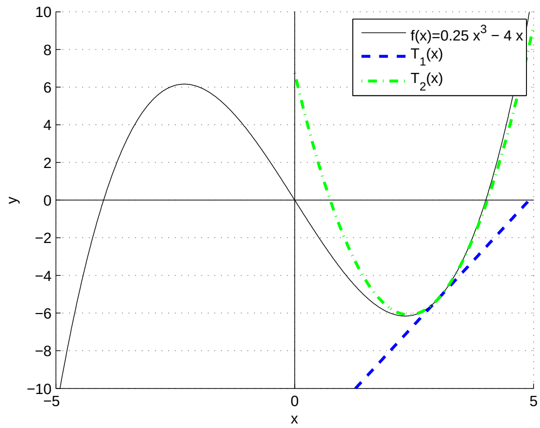
10. Para cada caso,

    (a) a partir delgráfico dar valores estimados de los errores que se cometen al aproximar $f(x)$ para $x \in [a, b]$ por los polinomios de Taylor de grado 1,2 y 3 ($T_1(x), T_2(x)$ y $T_3(x)$, respectivamente) alrededor del punto x_0.

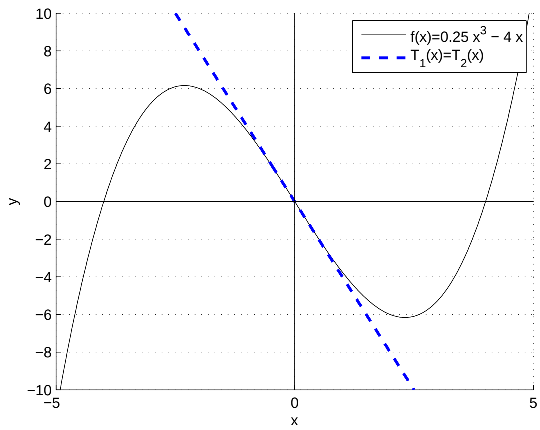
    (b) para cada polinomio $T_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, indicar en el gráfico un intervalo $[c_i, d_i]$ alrededor de x_0 de modo de cometer un error menor a 0.5 al aproximar $f(x)$ con $T_i(x)$: $|f(x) - T_i(x)| < 0.5\ \forall x \in [c_i, d_i]$ con $i = 1, 2, 3$.

$f_1(x) = \dfrac{x^3}{4} - 4x$

$x_0 = 3,\ [a, b] = [2, 4]$

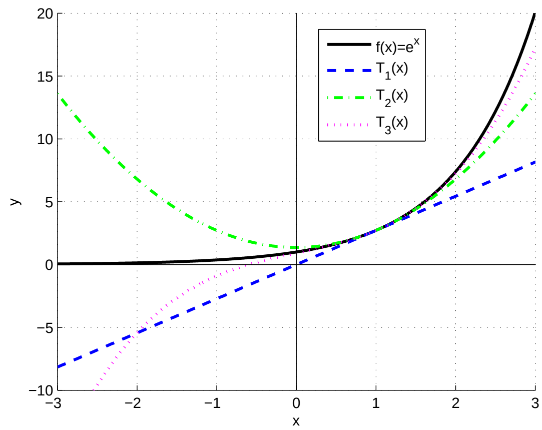


$x_0 = 0,\ [a, b] = [-2, 2]$

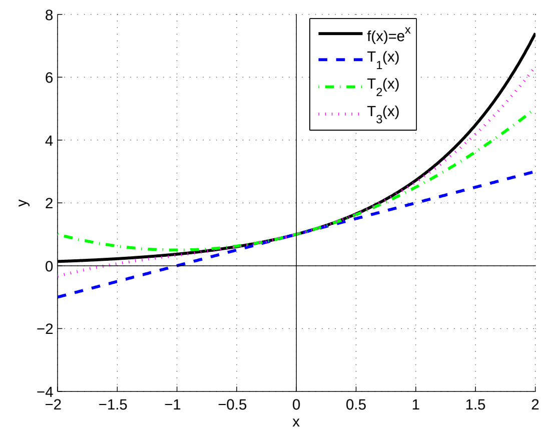


$f_2(x) = \mathrm{e}^x$

$x_0 = 1,\ [a, b] = [0, 2]$



$x_0 = 0,\ [a, b] = [-1, 1]$



11. En cada caso hallar una fórmula para el resto del polinomio de Taylor de orden 6, $R_6(x)$, alrededor de x_0 y obtener una cota para $R_6(0.5)$.

    (a) $\ln(1 + x),\ x_0 = 0$ (b) $\operatorname{sen} x,\ x_0 = 1$ (c) $e^{-x},\ x_0 = 0$ (c) $\dfrac{1}{x - 2},\ x_0 = 1$

12. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 3 y una cota del error en los siguientes casos

   (a) $(1+x)^{3/2}$, $x \in \left[-\dfrac{1}{10}, 0\right]$ (b) $(1+x)^{-1/2}$, $x \in \left[-\dfrac{5}{100}, \dfrac{5}{100}\right]$

13. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y una cota para el error en $\left[-\frac{5}{10}, \frac{5}{10}\right]$.

Ejercicios adicionales

---

14. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de f y estimar $f(0.23)$ para

   (a) $f(x) = e^{2x}$ (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 2$

15. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $x_0 = 1$ de la función $h(x)$ definida como $h(x) = f(2x-5)$ sabiendo que $P(x) = 2x^2 - 5x + 5$ es el polinomio de Taylor de orden 3 de f alrededor de $x_0 = -3$.

16. Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor de $x_0 = -2$ de $f(x) = x \cdot g(3x+7)$ sabiendo que el polinomio de Taylor de orden 2 de g alrededor de $x_0 = 1$ es $p(x) = 1 - x + x^2$.

17. Justificar las siguientes aproximaciones y acotar el error cometido:

   (a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2,\ |x| < 0,5$ (b) $e \approx 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$

   (c) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2,\ |x| < 0,5$ (d) $(a-x)e^{\frac{2x}{a}} \approx a + x,\ a > 0,\ |x| < a$

18. Un hilo pesado, bajo la acción de la gravedad, se comba formando la curva $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ (catenaria). Mostrar que si $|x|$ es chico, la forma del hilo puede representarse aproximadamente por la parábola $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

19. Utilizar el desarrollo de Taylor de la función $\operatorname{sen}(x)$ para probar que

$$|\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen}(a) - h\cos(a)| \leq \frac{1}{2}h^2.$$

20. Sea

$$f(x) = 3x + \int_4^{\sqrt{4x+12}} t\sqrt{25-t^2}\,dt.$$

   Encontrar P el polinomio de Taylor de orden 2 de f centrado $x_0 = 1$. Usar Ppara estimar el valor de $f(1,2)$ y acotar el error de estimación.

21. Sea $p(x) = 1 + x - 3x^2$ es el polinomio de Taylor de segundo orden de una función infinitamente derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alrededor de $x_0 = 1$. Construir el polinomio de Maclaurin de primer orden de la función

$$g(x) = f(x^2 - x + 1) + \int_1^{x^3+2x+1} f(t)dt$$

   .

22. Sea P_n el polinomio de Maclaurin de e^x. Determinar el orden n que debe tener el polinomio para estimar el número e alrededor de $x_0 = 1$ con un error menor que $5 \cdot 10^{-6}$.