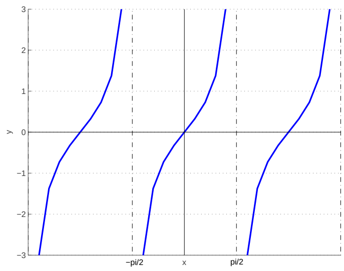
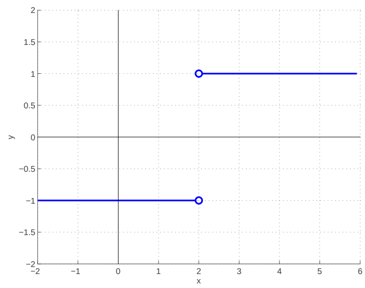
Práctica 4 -Continuidad-

1. Determinar el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones de manera gráfica y analítica. Marcar las discontiuidades en el gráfico y clasificarlas según sean evitables o esenciales.

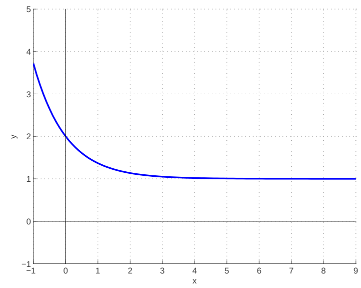
(a) $f(x) = \mathrm{tg}(x)$



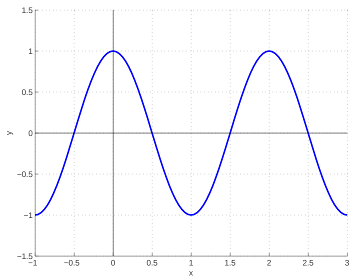
(c) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$



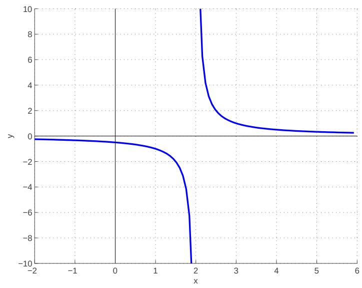
(e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 1$



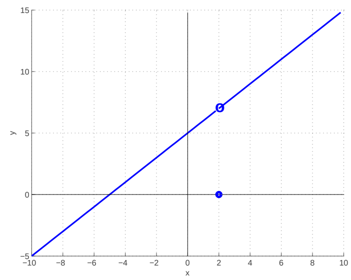
(b) $f(x) = \cos(\pi x)$



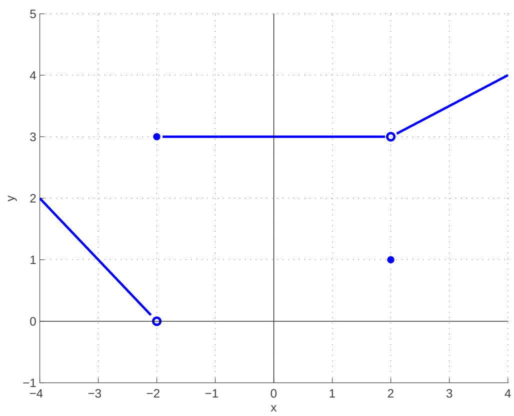
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$



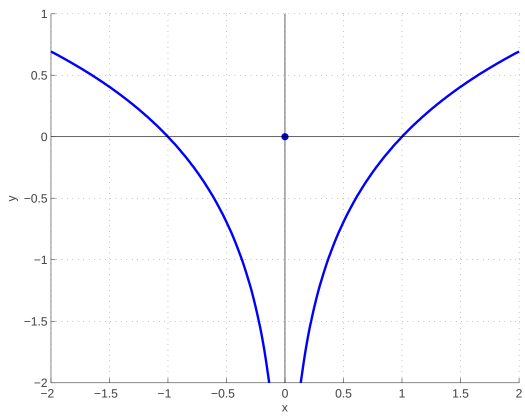
(f) $f(x) = \begin{cases} x+5, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$



2. Dados los siguientes gráficos, determinar el dominio las funciones correspondientes y los puntos de discontinuidad. Indicar si las discontinuidades son evitables o esenciales.



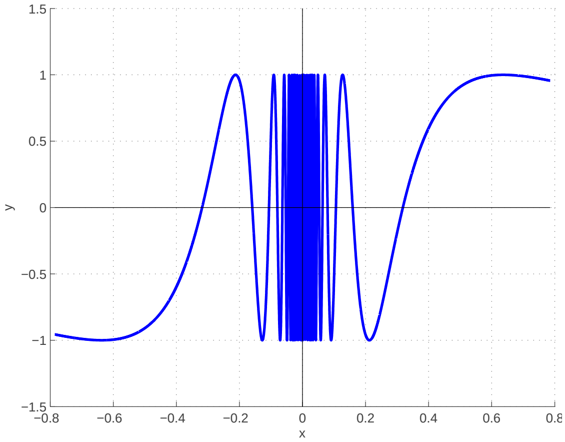
(a)



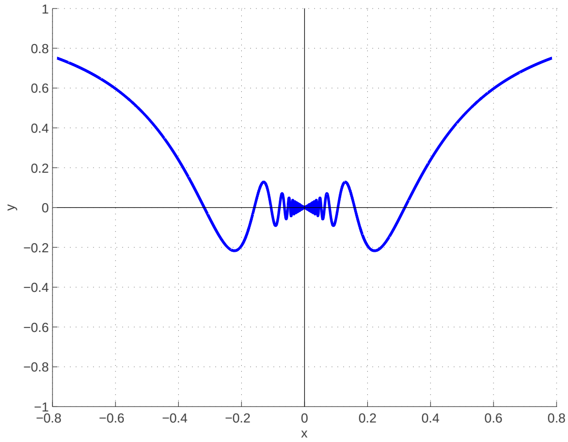
(b)

3. Determinar el dominio de las siguientes funciones y los puntos de discontinuidad indicando de qué tipo se trata. (Observar que en estos casos no es posible determinar las discontinuidades a partir de los gráficos).

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$



(b) $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$



4. Determinar el dominio y analizar los límites (laterales si es necesario) y la continuidad de las siguientes funciones en el punto $x = 0$. En caso de discontinuidad, decidir de qué tipo se trata.

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{x}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen}(2x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

5. Determinar el dominio, analizar la continuidad y clasificar los puntos de discontinuidad de la siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$,

(c) $f(x) = \dfrac{x-2}{\operatorname{sen}(x^2 - 4)}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x - 2}$,

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^3 - 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$.

6. Determinar el dominio y el conjunto de puntos de discontinuidad de las siguientes funciones. Redefinirlas en los puntos de discontinuidad evitable.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 4x}$,

   (b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$,

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1} - 1}$,

   (d) $f(x) = \dfrac{x^{2/3} - 4}{2x^{2/3} - 3x^{2/3} - 2}$,

   (e) $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{(x^2 - 3x + 2)(x-3)}{x^2 - 4x + 3} & \text{si } x < 1 \end{cases}$,

   (f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{x^2 - x} & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(-2x+2)}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

7. Si es posible, elegir $k \in \mathbb{R}$ de modo que la función resulte continua en todos los números reales

   (a) $f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$,

   (b) $f(x) = \begin{cases} k + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{(x^2 + 4x - 5)\operatorname{sen}(x+1)}{x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ kx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$.

8. Siempre que sea posible, hallar todos los pares $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales la función f resulta continua.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$,

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + b & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$,

   (c) $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{3 + 1/x}{\sqrt{4 + 1/x^2}} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ a & 2 \leq x \end{cases}$,

   (d) $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}(x-5)}{\sqrt{x+2}} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ b\,\dfrac{\ln(5-2x)}{x-2} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$,

   (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x-1}} & \text{si } 1 < x \\ ax + b & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x < -2 \end{cases}$.

9. Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de cada una de las siguientes funciones. Si hubiera discontinuidades, clasificarlas y, de ser posible, redefinir la función para que resulte continua.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } 0 < x \end{cases}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x-2}}{\sqrt{4x+1}-3} & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{9x-18}{x^2+4x-12} & \text{si } x < 2 \end{cases}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2(1-\cos^2(x))}{x^2+x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+1/x}{x+2^{1/x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

(Usar que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{-1/x}}{x} = 0$).

10. Analizar la continuidad en $\mathbb{R}$ de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3(x+1)e^{x-5} & \text{si } x \leq 5 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-5)\,\ln(\frac{4}{5}x-3)}{2(x-5)^2} + 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$,

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+6}-2}{\operatorname{sen}(x+2)} + 2x + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 1 & \text{si } x > -2 \end{cases}$,

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(\frac{1}{x+1})}}{\operatorname{sen}(x+1)} & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{\operatorname{sen}(\sqrt{x+1})} & \text{si } x > -1 \end{cases}$,

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}}{\operatorname{sen}(\sqrt{x+4})} & \text{si } x \leq -3 \\ \dfrac{\sqrt{-x^2-x+6}}{\sqrt{x+4}-1} & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ \dfrac{e^{-(\frac{1}{x-2})^2}}{\ln(x-1)} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Teorema de Bolzano

Sea $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Si $f(a)f(b)<0$ entonces existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

11. Mostrar que el polinomio $P(x)=x^3+x+1$ toma el valor cero en el intervalo $(-1;0)$.

12. Mostrar que los gráficos de las funciones $f(x)=\mathrm{e}^x$ y $g(x)=x+2$ se cortan para algún $x_0\geq 0$.

13. Mostrar que existe un $x_0\in(1,e)$ que satisface la ecuación $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1}{3}$.

14. Determinar la existencia de raíces reales de la función $f(x)=\dfrac{|x|}{4-x^2}$ en los intervalos $[-4;-3],[-3;3]$ y $[-1;1]$.

15. Una determinada compañía vende un producto de consumo por kg (o fracción). Para favorecer compras grandes, la productora cobra \$1,10 por kg en compras de menos de 8kg, mientras que cobra \$1 por kg si se compra 8kg o más.

    (a) Expresar matemáticamente la función costo $C(x)$ donde x indica la cantidad de kilogramos que se compra. Representar gráficamente esta función.

    (b) ¿Es continua $C(x)$? En caso negativo, indicar los puntos de discontinuidad, justificando dicha respuesta.

    (c) Explicar por qué no conviene (en estas condiciones) que un cliente compre $7,5$kg de este producto.

16. La misma compañía productora del problema anterior vende un segundo producto a \$ 1,20 por kg los primeros 5 kg, y para compras mayores a 5 kg cobra \$ 6 más \$ 0,90 por cada kilo que sobrepase los 5. Responder los incisos a), b) y c) del ejercicio anterior.

Método de Bisección

Sea $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Si $f(a)f(b)<0$ el procedimiento de la bisección genera una sucesión de valores reales $s_n=\frac{a_n+b_n}{2}$ que satisfacen $a_1=a$, $b_1=b$, $f(a_n).f(b_n)<0,\forall n\in\mathbb{N}$, siendo $(s_n)_{n\geq1}$ convergente con $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, $f(s)=0$ y $|s_n-s|\leq\frac{|b-a|}{2^n}$

17. Calcular de manera aproximada la solución de la ecuación $\cos(x)=x$ en $(0,\pi/2)$.

18. Para las siguientes funciones calcular la cantidad de pasos necesarios para encontrar la raíz de $f(x)$ utilizando el Método de la Bisección en el intervalo $[a,b]$ con un error menor a 0.01(en el valor de x). Realizar los tres primeros pasos y calcular el valor de la función en el punto obtenido.

    (a) $f(x)=x^{10}-1$, $a=0$; $b=2$,

    (b) $f(x)=e^{-x}+4x^3-5$, $a=1$; $b=2$,

    (c) $f(x)=3x+\operatorname{sen}(x)-\mathrm{e}^x$, $a=0$; $b=1$,

    (d) $f(x)=x^3+4x^2-10$, $a=0$; $b=2$.