Taller 2

Juan Barbosa - 201325901

1. **A white floodlight beam crosses a large volume containing a tenuous molecular gas mixture of mostly oxygen and nitrogen. Compare the relative amount of scattering occurring for the yellow (580 nm) component with that of the violet (400 nm) component.**

   De Rayleigh se sabe que el scattering es proporcional a $1/\lambda^4$:

$$S \propto \frac{1}{\lambda^4} \tag{1}$$

   Entonces el cociente entre el scattering del violeta ($5v$) y el amarillo (y):

$$\frac{S_v}{S_y} = \frac{1/\lambda_v^4}{1/\lambda_y^4} = \left(\frac{\lambda_y}{\lambda_v}\right)^4 \tag{2}$$

$$S_v = S_y\left(\frac{\lambda_y}{\lambda_v}\right)^4 \approx 4.42 S_y \tag{3}$$

2. **A very narrow laserbeam is incident at an angle of 58” on a horizontal mirror. The reflected beam strikes a wall at a spot 5.0 m away from the point of incidence where the beam hit the mirror. How far horizontally is the wall from that point of incidence?**

   El ángulo incidente debe ser igual al reflejado. Lo cual implica que existe un triángulo rectángulo con hipotenusa 5.0 m.

$$\sin(58^\circ) = \frac{d}{5.0} \qquad \longrightarrow d = 5\sin(58^\circ) = 4.2 \text{ m} \tag{4}$$

3. **Determine the direction of the exiting ray with respect to the incident ray.**

   Para la parte superior del espejo, el ángulo reflejado es igual al incidente. Para el segundo se cumple que está a un ángulo de 90 °, entonces la diferencia es $\theta_r = 90 - \theta_i$.

4. **Calculate the transmission angle for a ray incident in air at 30° on a block of crown glass (n = 1.52).**

   Usando la ley de Snell:

$$\sin\theta_t = \frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i \tag{5}$$

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{1.00}{1.52}\sin 30\right) = 19.2^\circ \tag{6}$$

5. **Discuss the curve. What is the significance of the slope of the line? Guess at what the dense medium might be.**

   La ecuación (5) es análoga a la ecuación de una recta con intercepto $b = 0$. Si $y = \sin\theta_t$ y $x = \sin\theta_i$, la pendiente corresponde con $m = n_i/n_t$. La pendiente se puede calcular como:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0.75 - 0.00}{1.00 - 0.00} = \frac{0.75}{1.00} = 0.75 \qquad \longrightarrow \qquad n_t = \frac{1}{0.75} = 1.33 \tag{7}$$

   El valor corresponde con el índice de refracción del agua.

6. **Light of wavelength 600 nm in vacuum enters a block of glass where $n = 1.5$. Compute its wavelength in the glass. What color would it appear to someone embedded in the glass?**

   La definición del índice de refracción es:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\nu_0 \lambda_0}{\nu_0 \lambda'} = \frac{\lambda_0}{\lambda'} \qquad \longrightarrow \qquad \lambda' = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{600}{1.5} = \frac{2 * 600}{3} = 400 \text{ nm} \tag{8}$$

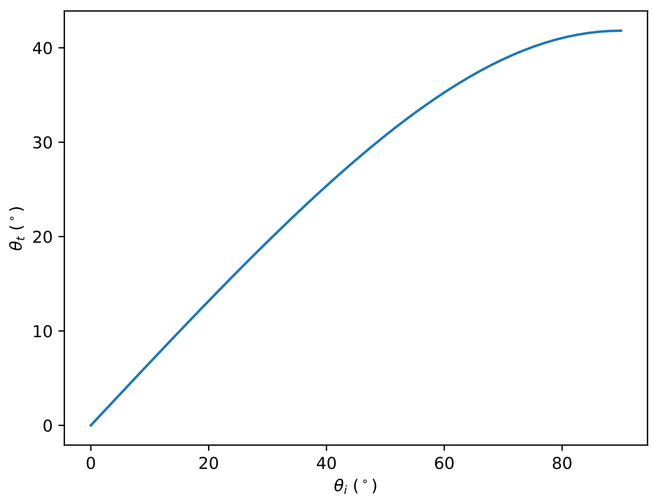
   En la región de 400 nm, los colores percibidos son azules/violetas.

7. **An underwater swimmer shines a beam of light up toward the surface. It strikes the air-water interface at 35°. At what angle will it emerge into the air?**

   Usando la ecuación (5):

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i\right) = \arcsin\left(\frac{1.33}{1.00}\sin 35\right) = 49.7^\circ \tag{9}$$

8. **Make a plot of θ_i versus θ_t, for an air-glass boundary where $n_g = 1.5$. Discuss the shape of the curve.**



9. **A laserbeam having a diameter D in air strikes a piece of glass (n_g) at an angle θ_i. What is the diameter of the beam in the glass?**

   La diferencia de camino entre la parte superior del laser y la inferior es Δx, esta distancia es normal a la dirección del rayo, por lo cual:

$$\tan\theta_i = \frac{\Delta x}{D} \qquad \longrightarrow \qquad \Delta x = D\tan\theta_i \tag{10}$$

   Usando el teorema de Pitágoras:

$$D'^2 = D^2\tan\theta_i + D^2 = D^2\left(\tan^2\theta_i + 1\right) = D^2\sec^2\theta_i \tag{11}$$

$$D' = \frac{D}{\cos\theta_i} \tag{12}$$

10. **Calculate the critical angle beyond which there is total internal reflection at an air-glass ($n_g = 1.5$) interface. Compare this result with that of Problem 4.5 (6).**

    Para la reflexión interna total se calcula el ángulo incidente para el cuál el ángulo transmitido es 90 °.

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1.5}{1.0}\right) \tag{13}$$

    Lo anterior no ocurre porque para que exista reflexión interna total, se debe ir de un material ópticamente más denso a uno menos denso.

11. **What is the critical angle for total internal reflection for diamond? What, if anything, does the critical angle have to do with the luster of a well-cut diamond?**

    Para el diamante el índice de refracción es: 2.418, entonces:

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{1.000}{2.418}\right) = 24.43^\circ \tag{14}$$

12. **Describe completely the state of polarization of each of the following waves:**

    1. $\vec{E} = \hat{\imath}E_0\cos(kz - wt) - \hat{\jmath}E_0\cos(kz - wt)$
    2. $\vec{E} = \hat{\imath}E_0\sin 2\pi(z/\lambda - \nu t) - \hat{\jmath}E_0\sin 2\pi(z/\lambda - \nu t)$
    3. $\vec{E} = \hat{\imath}E_0\sin(\omega t - kz) + \hat{\jmath}E_0\sin(wt - kz - \pi/4)$
    4. $\vec{E} = \hat{\imath}E_0\cos(\omega t - kz) + \hat{\jmath}E_0\cos(\omega t - kz + \pi/2)$

    La polarización puede ser de tres tipos, lineal (un sólo plano), circular (dos planos, igual magnitud y desfase de $\pi/2$), y ellíptica (dos planos, magnitud distinta o desfase diferente de $\pi/2$).

    1. $\vec{E} = (\hat{\imath} - \hat{\jmath})E_0\cos(kz - wt)$ $\quad \theta = \arctan(-1) = -45^\circ$ Polarización lineal.
    2. $\vec{E} = (\hat{\imath} - \hat{\jmath})E_0\sin 2\pi(z/\lambda - \nu t)$ $\quad \theta = \arctan(-1) = -45^\circ$ Polarización lineal.
    3. $\vec{E} = E_0\left(\hat{\imath}\sin(\alpha) + \hat{\jmath}\sin(\alpha - \pi/4)\right)$ Ambas componentes tienen la misma magnitud, sin embargo existe un desfase de $\pi/4$, esto hace que la polarización sea ellíptica.
    4. $\vec{E} = E_0\left(\hat{\imath}\cos(\alpha) + \hat{\jmath}\cos(\alpha - \pi/2)\right)$ Ambas componentes tienen la misma magnitud, sin embargo existe un desfase de $\pi/2$, esto hace que la polarización sea circular.

13. **A beam of vertically polarized linear light is perpendicularly incident on an ideal linear polarizer. Show that if its transmission axis makes an angle of 60 ° with the vertical of only 25 % of the irradiance will be transmitted by the polarizer.**

    La ley de Malus:

$$I(\theta) = \frac{c\epsilon_0}{2}E_{01}^1\cos^2\theta \tag{15}$$

    Para $\theta = 0$ la transmisión de radiación es total.

$$I(0) = I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2}E_{01}^1 \qquad I(\theta) = I_0\cos^2\theta \tag{16}$$

$$\frac{I(60)}{I_0} = \cos^2 60^\circ = 0.5^2 = 0.25 \tag{17}$$

14. **A glass vessel is placed between a pair of crossed HN-50 linear polarizers, and 50 % of the natural light incident on the first polarizer is transmitted through the second polarizer. By how much did the sugar solution in the cell rotate the light passed by the first polarizer?**

    Si no existiera nada en el medio de los polarizadores, dado que ambos son paralelos, se debería observar intensidad $I = 0$. Sin embargo como la intensidad de salida es igual a la del primer polarizador, la luz debe haber rotado el mismo ángulo que la diferencia entre los polarizadores, esto es 90°.

15. **Imagine a pair of crossed polarizers with transmission axes vertical and horizontal. The beam emerging from the first polarizer has flux density I_1, and of course no light passes through the analyzer ($I_2 = 0$). Now insert a perfect linear polarizer (HN-50) with its transmission axis at 45 $^\circ$ to the vertical between the two elements, compute I_2. Think about the motion of the electrons that are radiating in each polarizer.**

    Las expresiones para cada polarizador son:

$$I_1 = I_1 \tag{18}$$

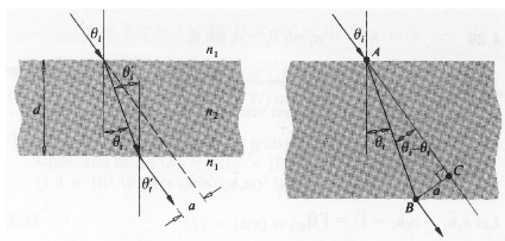
$$I_m = I_1 \cos^2(\theta_m) \tag{19}$$

$$I_2 = I_m \cos^2(\theta_2 - \theta_m) = I_1 \cos^2(\theta_m) \cos^2(\theta_2 - \theta_m) = I_1 \cos^2(45) \cos^2(45) = I_1 \cos^4(45) \tag{20}$$

    El resultado es entonces:

$$I_2 = I_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{I_1}{4} \tag{21}$$

16. **Show analytically that a beam entering a planar transparent plate emerges parallel to its initial direction. Derive an expression for the lateral displacement of the beam. Incidentally, the incoming and outgoing rays would be parallel even for a stack of plates of different material.**



    Por ley de Snell se tiene:

$$n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t \tag{22}$$

    En el lado izquierdo de la figura se observa que los dos rayoz más externos a la izquierda son paralelos, y el superior de ellos tiene ángulo θ_t, por lo cual $\theta_i' = \theta_t$, de la misma forma se tiene $\theta_i = \theta_t'$.

    La distancia entre los puntos A y B (lado derecho) se puede escribir en términos de el coseno de θ_t.

$$\cos\theta_t = \frac{d}{h} = \frac{d}{|B - A|} \tag{23}$$

    Usando la misma figura también se observa que es posible escribir la distancia como:

$$\sin(\theta_i - \theta_t) = \frac{a}{h} = \frac{a}{|B - A|} \tag{24}$$

    Usando las dos ecuaciones anteriores:

$$a = \sin(\theta_i - \theta_t)|B - A| = \sin(\theta_i - \theta_t)\frac{d}{\cos\theta_t} \tag{25}$$

    Como se observa en la figura derecha, a corresponde con el desplazamiento del rayo incidente con el transmitido.

    Con información de `http://www.cmu.edu/biolphys/smsl/teaching/IntermedOptics/IntOptics_data/HW/solns/HW%204%20solution.pdf`

17. **Light having a vacuum wavelength of 600 nm, traveling in a glass ($n_g = 1.50$) block, is incident at 45 $^\circ$ on a glass-air interface. It is then totally internally reflected. Determine the distance into the air at which the amplitude of the evanescent wave has dropped to a value of $1/e$ of its maximum value at the interface.**

    Para una onda electromagnética, para el caso donde $\sin\theta_i > n_{ti}$, donde $n_{ti} = n_t/n_i$, además $k_t = 2\pi/\lambda$.

$$\beta = k_t \left(\frac{\sin^2\theta_i}{n_{ti}^2} - 1\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\sin^2 45}{(1/1.5)^2} - 1\right)^{1/2} = \frac{2\pi}{600\times 10^{-9}}(0.125)^{1/2} = 3702402 \text{ 1/m} \tag{26}$$

    También se sabe que la amplitud depende de $e^{y\beta}$, por la condición de amplitud, $y\beta = 1$, donde y es la distancia.

$$y = \frac{1}{\beta} = 2.7009\times 10^{-7}\text{ m} = 270 \text{ nm} \tag{27}$$

18. **Suppose that we look at the source perpendicularly through a stack of N microscope slides. The source seen through even a dozen slides will be noticeably darker. Assuming negligible absorption, show that the total transmittance of the stack is given by:**

$$T_t = (1-R)^{2N}$$

    and evaluate T_t for three slides in air.

    Existen dos fronteras en donde hay trasmisión, para cada existe transmisión T. Esto implica que para cada placa la transmisión es T^2, para N placas, la transmisión total es T^{2N}.

    La transmisión y la reflexión debe sumar 1.

$$T_{total} = T^{2N} = (1-R)^{2N} \tag{28}$$

    Para R

$$R = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2 = \left(\frac{1.5-1.0}{1.5+1.0}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{2.5}\right)^2 = 0.04 \tag{29}$$

    La transmisión total para 3 barreras es:

$$T_{total} = (1-R)^(2\times 3) = (0.96)^6 = 0.78 \tag{30}$$

Tarea disponible en `https://github.com/jsbarbosa/MicroscopiaModerna`