Oscilador armónico

Juan Barbosa, 201325901
Febrero 2, 2017

La ecuación de movimiento para un sistema armónico se obtiene usando la segunda ley de Newton y la ley de Hooke:

$$F = m\ddot{x} = -\kappa x \qquad \text{con } \kappa \text{ la constante del resorte}$$

Haciendo explícita la ecuación para la aceleración:

$$\ddot{x} = \left(-\frac{\kappa}{m}\right)x = -kx \tag{1}$$

Dado que la ecuación (1) es de segundo orden es necesario reescribirla como dos ecuaciones acopladas de primer orden.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \int \ddot{x}dt \\ x &= \int \dot{x}dt \end{aligned} \tag{2}$$

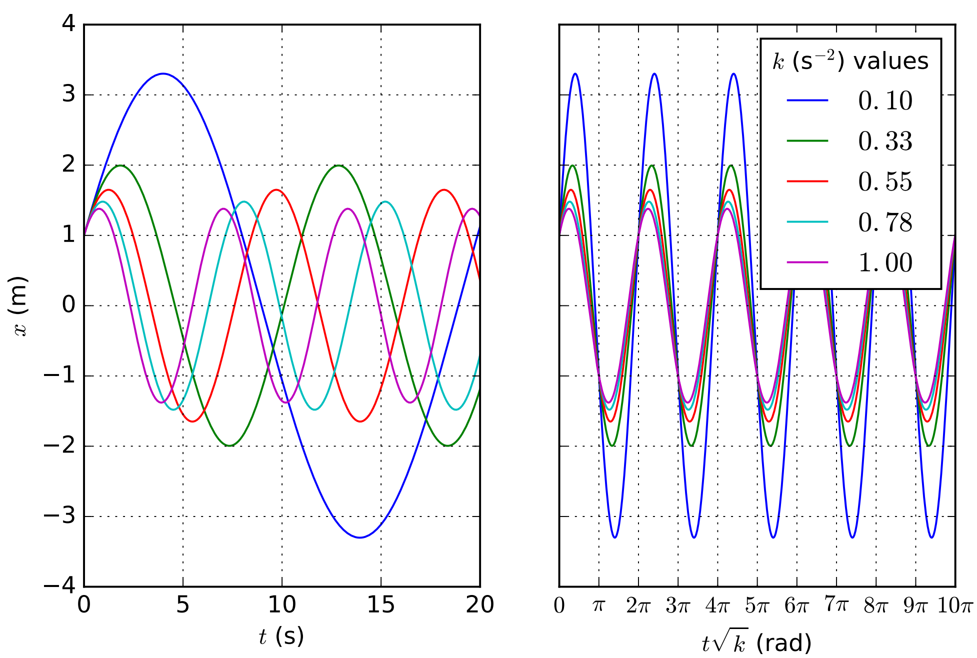
Usando el método de Euler para resolver numéricamente se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_n &= \dot{x}_{n-1} + \ddot{x}_{n-1}\Delta t \\ x_n &= x_{n-1} + \dot{x}_n\Delta t \end{aligned} \tag{3}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales es resuelto usando como condiciones iniciales para todos los casos $x(0) = 1$ m y $\dot{x}(0) = 1$ m/s. La constante k varía entre 0.1 y 1 s^{-2}. Para todos los casos $dt = 0.1$ s y el número de puntos es $N = 1000$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 1000; n = 5
x = np.zeros(N); v = np.zeros(N)
ks = np.linspace(0.1, 1, n)
dt = 0.1
t = np.linspace(0, (N-1)*dt, N)

x[0] = 1
v[0] = 1

fig, axes = plt.subplots(1, 2, sharey = True, figsize=(8, 5))
```

```python
ax1, ax2 = axes

def equation(x):
    return -k*x

def solver():
    for i in range(1,N):
        v[i] = v[i-1] + equation(x[i-1])*dt
        x[i] = x[i-1] + v[i]*dt
    ax1.plot(t, x)
    ax2.plot(t*np.sqrt(k), x, label="$%.2f$ "%k)

for i in range(n):
    k = ks[i]
    solver()

for ax in axes:
    ax.set_xlim(0, 20)
    ax.grid()

plt.legend(title = "$k$ (s$^{-2}$) values")
ax1.set_ylabel("$x$ (m)")
ax1.set_xlabel("$t$ (s)")
ax2.set_xlabel("$t\sqrt{k}$ (rad)")

n = int(np.ceil(max(t)/np.pi))
xticks = [i*np.pi for i in range(n)]
xticks_labels = ['$0$', '$\pi$'] + ['$%d\pi$'%i for i in range(2, n)]
plt.xticks(xticks,xticks_labels)
ax2.set_xlim(0, 10*np.pi)
plt.savefig("plot.pdf")
```



La solución analítica a la ecuación es de la forma:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{k}t\right) + B\sin\left(\sqrt{k}t\right) \tag{4}$$

Lo anterior implica que la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k}$, por lo cual en la gráfica izquierda se observa que para valores de k pequeños se tienen frecuencias cortas. En la gráfica derecha se tiene la fase para distintos valores de k, los cuales presentan nodos en múltiplos enteros de π.