Rapport för projekt: Kretsen

Grupp: Kretsen 6

Viola Söderlund
XXXXXX-XXXX
violaso@kth.se

Jakob Carlsson
XXXXXX-XXXX
jakobcar@kth.se

14 maj 2020

1 Frekvens och svängningstid med konstant L

Vi vet att I(t) ska vara periodisk, vilket betyder att den kan skrivas på formen

$$I(t) = A * \sin(B * t + D)$$

Detta ger oss

$$\begin{aligned} I(t) &= A * \sin(B * t + D) \\ \implies I'(t) &= A * B * \cos(B * t + D) \\ \implies I''(t) &= -A * B^2 * \sin(B * t + D) \end{aligned}$$

och givet relationerna (om L är konstant)

$$U = L * I' \implies U' = L * I'' \tag{1}$$

$$I = -C * U' \iff I = -(L * C * I'') \iff \frac{1}{-C * L} * I = I'' \tag{2}$$

får vi att

$$\begin{aligned} \frac{1}{-C * L} * A * sin(B * t + D) &= -A * B^2 * sin(B * t + D) \\ \iff -B^2 &= -\frac{1}{C * L} \\ \iff B &= \sqrt{\frac{1}{C * L}} \end{aligned}$$

Med $L = L_0 = 0.7$ och det givna värdet $C = 0.5 * 10^{-6}$ får man:

$$\begin{aligned} p &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{C*L}}} \approx 0,0037 \\ fq &= \frac{1}{p} \approx 269.0210 \end{aligned}$$

Dessa värden är exakta (till maskinnogrannheten) eftersom de räknades ut analytiskt och inte numeriskt. Detta hjälper oss att välja en rimlig intervallbredd senare, eftersom den ju bör vara (mycket) mindre än perioden p.

2 Plotter av strömkurvorna vid olika U_0

Enligt projektbeskrivningen använder vi Runge-Kutta 4 för att räkna ut stömkurvorna givet tre olika värden på U_0, nämligen 220 V, 1500 V och 2300 V.

Med hjälp av resultatet i förra sektionen kan vi välja en rimlig steglängd h för metoden, t.ex. $h = 1 * 10^{-6}$.

Här stötte vi på ett problem. Relationerna givna i instruktionerna

$$U(t) = L(I) * I'(t)$$
$$I(t) = -C * U'(t)$$

divergerar.

Om vi byter plats på -C och L, så får vi relationer som ger resultat som passar med hur de beskrivs i instruktionerna. På grund av detta använder vi dessa relationer istället.

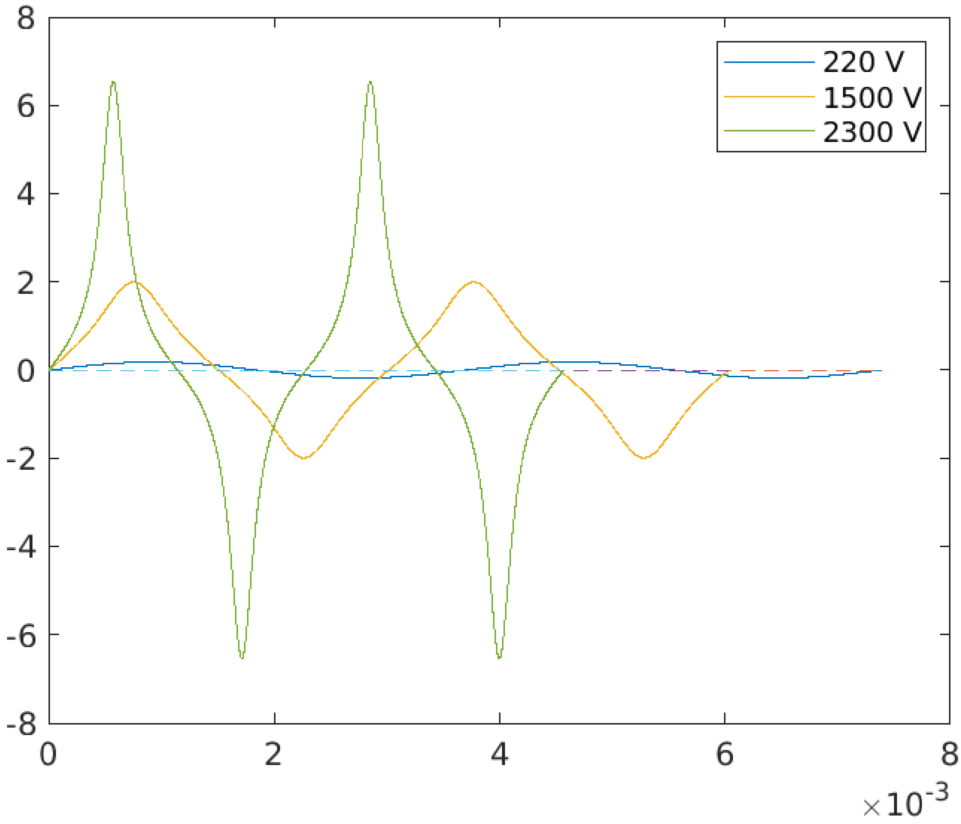
$$U(t) = -C * I'(t)$$
$$I(t) = L(I) * U'(t)$$

Se sektion 3 för vidare diskussion om detta.

Vi definierar $y' = F(t, y)$ enligt:

$$y(t) = [U(t); I(t)] = [-C * I'(t); L(I) * U'(t)]$$
$$\implies y'(t) = [I'(t); U'(t)] = [U(t)/(-C); I(t)/L(I)] =: F(t, y)$$

Vilket ger strömkurvorna:



Figur 1: Två perioder av strömkurvorna vid några olika U_0

Startvärdena var alltså $I_0 = 0$ och tre olika U_0 enligt figuren.

3 Energin i spolen och kondensatorn

Den totala energin $E(t)$ i systemet ska vara konstant. Detta beror på att det är modellerat som ett slutet system. Om inte energin då är konstant skulle vi ju bryta mot termodynamikens första huvudsats.

Utöver (1) och (2) från tidigare har vi också:

$$L(I(t)) = L_0 * \frac{I_0^2}{I_0^2 + I(t)^2} \tag{3}$$

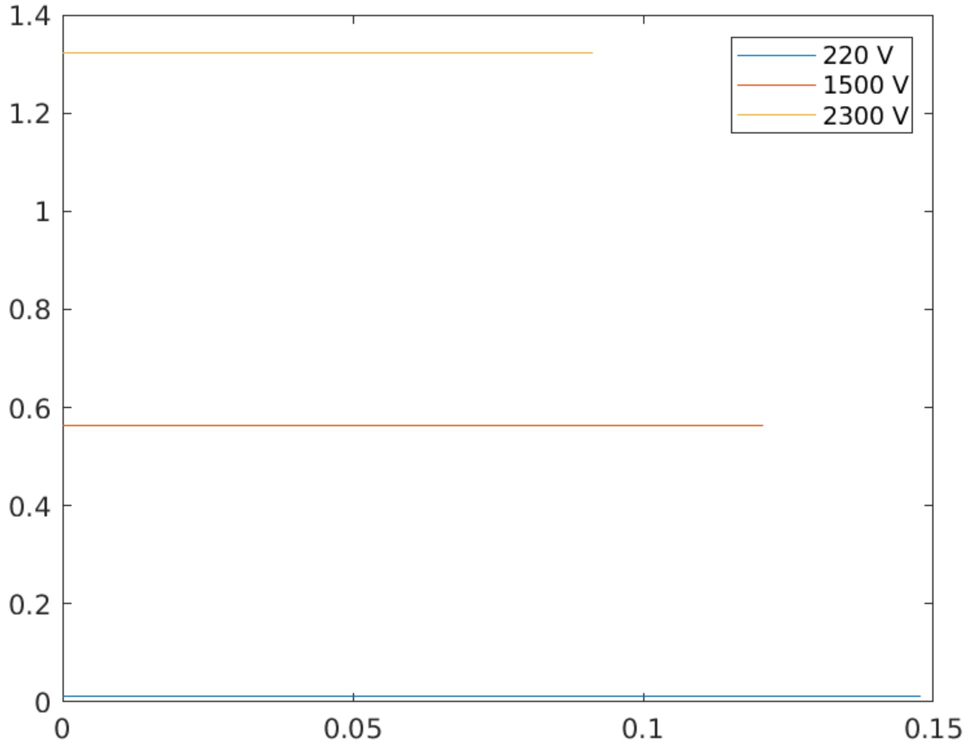
Vi deriverar

$$E(t) = \frac{1}{2}CU(t)^2 + \frac{1}{2}L_0 * I_0^2 * \ln(I_0^2 + I(t)^2)$$

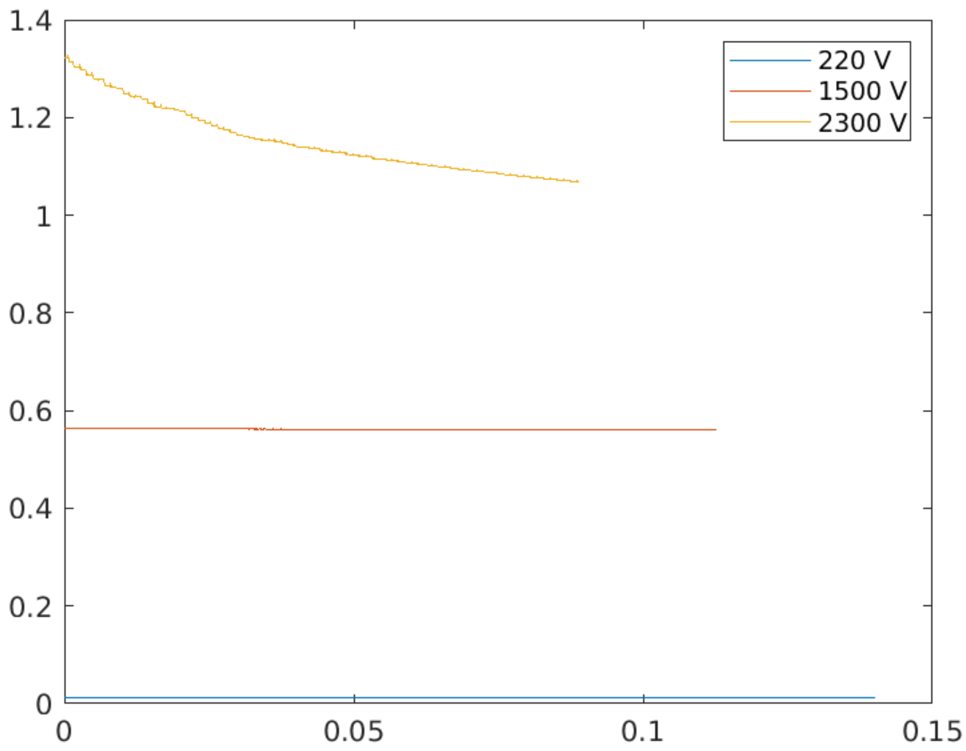
och visar med hjälp av sambanden att $E'(t) = 0 \implies E(t) = \text{konstant}$.

$$E'(t)$$
$$=$$
$$C * U(t) * U'(t)$$
$$+$$
$$\frac{1}{2} * L_0 * I_0^2 * \frac{I(t)I'(t)}{I_0^2 + I(t)^2}$$
$$=$$
$$C * U(t) * U'(t)$$
$$+$$
$$\frac{L_0 * I_0^2}{I_0^2 + I(t)^2} * I(t)I'(t)$$
$$=$$
$$C * U(t) * U'(t) + L(I(t)) * I(t)I'(t)$$
$$=$$
$$-I(t)U(t) + U(t)I(t) = 0$$

Vi simulerar även E(t) över ett stort antal perioder ($p = 40$). Vi gör detta genom att köra Runge-Kutta som tidigare med dels samma steglängd $h_1 = 10^{-6}$, och dels med en större steglängd $h_2 = 10^{-4}$. Sedan applicerar vi bara formeln för E vektorvis över hela resultatet.



Figur 2: E(t) över 40 perioder av I(t) med några olika U_0, och med h = 10^{-6}



Figur 3: E(t) över 40 perioder av I(t) med några olika U_0, och med h = 10^{-4}

Vi ser här att det är viktigt att ha en tillräckligt liten steglängd för att resultatet ska bli korrekt.

Något intressant här är att när vi visar analytiskt att E(t) är konstant använder vi relationerna som gavs i instruktionerna. När vi simulerar och visar på det sättet använder vi de modifierade relationerna som diskuterades i sektion 2.

4 Strömmens toppvärde och periodtid

Här används styckvis linjär interpolation.

JAG FÖRSTÅR ÄRLIGT TALAT INTE HUR FUNKTIONEN FUNGERAR, SÅ JAG KAN INTE SKRIVA NÅGOT RIMLIGT HÄR ANNAT ÄN RESULTATEN.

Tabell 1: Strömmens maxvärde I_{max} och periodlängd T beroende på spänningen U_0. Felet ligger alltid i sista decimalen, som kan vara fel på grund av avrundning.

$\mathbf{U_0}$	220	1500	2300
$\mathbf{I_{max}}$	0.187553	1.997132	6.5386
T	0.03701	0.003019	0.002285

Tabell 2: Rådata för tillförlitlighetsbedömning, där $h = 10^{-6}$

$\mathbf{U_0}$**, h**	$\mathbf{I_{max}}$	**T**
220, h	0.187552548575790	0.003700568248926
220, h/2	0.187552558040406	0.003701068248639
220, h/4	0.187552570642913	0.003701068248619
1500, h	1.997132052304110	0.003018680878398
1500, h/2	1.997132052303030	0.003019180878903
1500, h/4	1.997132298244580	0.003019180878994
2300, h	6.538558656458210	0.002284745598040
2300, h/2	6.538608843205730	0.002285245599219
2300, h/4	6.538609292790240	0.002285245599511

5 Hitta spänningen $U_0{}^*$ för frekvensen 400 Hz

Här använder vi sekantmetoden för att lösa ekvationen VAD ÄR EKVATIONEN??

Startgissningarna kommer från förra sektionen. Eftersom vi söker en frekvens på 400 Hz, dvs. $T = \frac{1}{400} = 0.0025$, och vi hade

$$U_0 = 2300 \implies T = 0.0023 < 0.0025$$
$$U_0 = 1500 \implies T = 0.0030 > 0.0025$$

så är dessa två värden på U_0 rimliga att använda som startgissningar.

Detta ger oss värdet $U_0^* = 2069$ vilket ger ett maxvärde på strömmen $I^*_{max} = 4.5031$. Alla siffror i dessa tal är korrekta. Mer specifikt är felet på U_0^* i storleksordningen 10^{-3} och felet på I^*_{max} är i storleksordningen 10^{-6}.

Tabell 3: Rådata för tillförlitlighetsbedömning, olika steglängder och toleranser. $h = 10^{-6}$, eps $= 2.220446049250313 * 10^{-16}$

h, tol	$\mathbf{U^*_0}$	$\mathbf{I^*_{max}}$
h, 1e-10	2068.99484901206	4.50310419770553
h, 1e-15	2068.99500936829	4.50310531749166
h, eps	2068.99500936911	4.50310531749737
h/2, 1e-10	2068.99481404489	4.50310395344584
h/2, 1e-15	2068.99500936242	4.50310531737086
h/2, eps	2068.99500936338	4.50310531737757
h/4, 1e-10	2068.99485072491	4.50310420958168
h/4, 1e-15	2068.99500936160	4.50310531736015
h/4, eps	2068.99500936317	4.50310531737108

6 Osäkerhet i modellen

Om man varierar L_0 och C vardera med ±5% får man att största felet på U_0^* är ungefär 140 och det största felet på I_{max}^* är ungefär 1.01. Detta är betydligt större än de numeriska felen från förra sektionen.

Tabell 4: Rådata för felen i U_0^* och I_{max}^*.

indatastörning, $5\% * [L_0, C]$	**abs[felet i** $\mathbf{U^*_0}$**]**	**abs[felet i** $\mathbf{I^*_{max}}$**]**
-1, 0	119.7911953379	0.4529453012
1, 0	116.9956676344	0.4777440246
0, -1	17.2015209153	0.4529453012
0, 1	12.9008734915	0.4777440246
-1, -1	140.1589962046	0.8617237602
-1, 1	104.1614611061	0.0232231367
1, -1	102.6631229215	0.0232231367
1, 1	127.4086699916	1.007785437

7 Egen arbetsinsats