CÁLCULO INTEGRAL

UNIDAD DOS
TAREA 3: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

PRESENTADO A:
Leyder Hernan Lopez

TUTOR(A)

ENTREGADO POR:

Juan Sebastian Castillo Amaya
CÓDIGO: 1116553232
GRUPO: 211622_61

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA - UNAD
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, INGENIERÍAS Y TECNOLOGÍAS
CURSO DE CÁLCULO INTEGRAL COD. 100411
FECHA
Julio
2025

Introducción

De 8 a 10 renglones debe escribirse, use letra Times New Roman de 12pto, interlineado de 1.5. Eliminar esta frase al escribir la introducción.

Objetivos

Objetivo General

Explorar los diferentes métodos de integración.

Objetivo Especifico

- Uso de la integración por sustitución para resolver una integral indefinida.
- Uso de la integración por partes para resolver una integral indefinida.
- Uso de la integración por sustitución para resolver una integral indefinida.
-

Elección de Ejercicios a Desarrollar Parte Individual

Tabla 1

Tabla de elección de ejercicios

Nombre del estudiante	Letra Asignada ejercicios 1 al 5	Ejercicio 6
Juan Sebastin Castillo Amaya	*B*	*1B*

Nota: Esta tabla muestra la letra seleccionada. Fuente. Autor

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR

Temática 1– Método integración por sustitución

Tabla 2

Tabla de Ejercicio Temática 1

Letra	Ejercicio
b	$\int \frac{3z^2}{z^3 - 4} dz$

Desarrollo

$$\int \frac{3z^2}{z^3 - 4} dz$$

Tomamos el denominador para la sustitución es la opción más viable

$$u = z^3 - 4$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz} z^3 - 4 = 3z^2$$

$$du = 3z^2\, dz$$

$$\int \frac{3z^2}{z^3 - 4} dz = \int \frac{1}{z^3 - 4} du = \int \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Sustituyendo, y una aclaración importante se deja valor absoluto porque la función de logaritmo natural no se encuentra definida para valores negativos, por lo mismo se hace la acotación con el valor absoluto y eliminar esa indeterminación.

$$u = z^3 - 4$$

$$\ln|u| + C = \ln|z^3 - 4| + C$$

$$\int \frac{3z^2}{z^3 - 4} dz = \ln|z^3 - 4| + C$$

Temática 2– Método integración por partes.

Tabla 3

Tabla de Ejercicio Temática 2

Letra	Ejercicio
b	$\int z^4 e^{2z} dz$

Desarrollo

La fórmula de integración por partes es la siguiente:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Hay criterios para el orden de preferencia al momento de seleccionar la variable "u", usaremos la regla LIATE que consiste en la función que se encuentre más arriba en la Tabla 4.

Tabla 4

Tabla de Regla LIATE

Letra	Tipo de función	Ejemplo
L	Logarítmica	$\ln x, log_a x$
I	Inversa trigonometrcia	$\arcsin x, \arctan x$
A	Algebraica	$x, x^2, z^4, \sqrt{x}$
T	Trigonométrica	$\sin x, \cos x, \tan x$
E	Exponencial	$e^x, 2^x, e^{2z}$

Selección de variables

$$u = z^4 \Rightarrow du = 4z^3 dz$$

$$dv = e^{2z} dz \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2z}$$

$$\int z^4 e^{2z} dz = z^4 * \frac{1}{2} e^{2z} - \int \frac{1}{2} e^{2z} * 4z^3 dz$$

$$\int z^4 e^{2z} dz = \frac{1}{2} z^4 e^{2z} - 2 \int e^{2z} * z^3 dz$$

Ahora repetimos el proceso con la integral

$$\int e^{2z} * z^3 dz$$

$$u = z^3 \ \Rightarrow du = 3z^2 dz$$
$$dv = e^{2z} dz \ \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2z}$$
$$\int e^{2z} * z^3 dz = z^3 * \frac{1}{2} e^{2z} - \int \frac{1}{2} e^{2z} * 3z^2 dz$$
$$\int e^{2z} * z^3 dz = z^3 * \frac{1}{2} e^{2z} - \frac{3}{2} \int e^{2z} * z^2 dz$$

Nuevamente se repite el proceso

$$\int e^{2z} * z^2 dz$$

$$u = z^2 \ \Rightarrow du = 2zdz$$
$$dv = e^{2z} dz \ \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2z}$$

$$\int e^{2z} * z^2 dz = z^2 * \frac{1}{2} e^{2z} - \int \frac{1}{2} e^{2z} * 2zdz = z^2 * \frac{1}{2} e^{2z} - \int e^{2z} * zdz$$

Repetimos otra vez

$$\int e^{2z} * zdz$$

$$u = z \ \Rightarrow du = dz$$
$$dv = e^{2z} dz \ \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2z}$$
$$\int e^{2z} * zdz = z * \frac{1}{2} e^{2z} - \int e^{2z} dz = z * \frac{1}{2} e^{2z} - \frac{1}{4} e^{2z}$$

Ahora vamos a empezar a recompilar cada uno

$$\int e^{2z} * z^2 dz = z^2 * \frac{1}{2} e^{2z} - \left(z * \frac{1}{2} e^{2z} - \frac{1}{4} e^{2z} \right) = \frac{1}{2} z^2 e^{2z} - \frac{1}{2} z e^{2z} + \frac{1}{4} e^{2z}$$

$$\int e^{2z} * z^3 dz = z^3 * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{3}{2}\int e^{2z} * z^2 dz$$
$$\int e^{2z} * z^3 dz = z^3 * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{3}{2}(\frac{1}{2}z^2e^{2z} - \frac{1}{2}ze^{2z} + \frac{1}{4}e^{2z})$$

$$\int e^{2z} * z^3 dz = \frac{1}{2}z^3e^{2z} - \frac{3}{4}z^2e^{2z} + \frac{3}{4}ze^{2z} - \frac{3}{8}e^{2z}$$

$$\int z^4e^{2z}dz = \frac{1}{2}z^4e^{2z} - 2(\frac{1}{2}z^3e^{2z} - \frac{3}{4}z^2e^{2z} + \frac{3}{4}ze^{2z} - \frac{3}{8}e^{2z})$$

$$\int z^4e^{2z}dz = \frac{1}{2}z^4e^{2z} - z^3e^{2z} + \frac{3}{2}z^2e^{2z} - \frac{3}{2}ze^{2z} + \frac{3}{4}e^{2z} + C$$

Temática 3– Integración por Fracciones parciales

Tabla 5

Tabla de Ejercicio Temática 3

Letra	Ejercicio
b	$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx$$

Primero vamos a descomponer en las fracciones parciales

$$\frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x-5}$$

$$4x + 3 = A(x^2 + 2x - 5) + (Bx + C)(X)$$
$$4x + 3 = (A + B)x^2 + (2A + C)x - 5A$$

$$x^2: \quad A + B \quad = 0$$
$$x^1: \quad 2A + C \quad = 4$$
$$x^0: \quad -5A \quad = 3 \Longrightarrow A = -\frac{3}{5}$$

$$x^2: \quad -\frac{3}{5} + B \quad = 0 \Longrightarrow B = \frac{3}{5}$$

$$x^1: \quad 2(-\frac{3}{5}) + C \quad = 4 \Longrightarrow C = 4 + \frac{6}{5} = \frac{26}{5}$$

Ahora se reescribe la integral

$$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx = \int \frac{-\frac{3}{5}}{x} + \frac{\frac{3}{5}x + \frac{26}{5}}{x^2+2x-5}dx$$

$$\int \frac{-\frac{3}{5}}{x} + \frac{\frac{3}{5}x + \frac{26}{5}}{x^2+2x-5}dx = -\frac{3}{5}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{5}\int \frac{x}{x^2+2x-5}dx + \frac{26}{5}\int \frac{1}{x^2+2x-5}dx$$

Ahora tenemos 3 integrales más sencillas para resolver

$$-\frac{3}{5}\int \frac{1}{x}dx = -\frac{3}{5}ln|x|$$

$$\frac{3}{5}\int \frac{x}{x^2+2x-5}dx = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}ln|x^2+2x-5|\right) = \frac{3}{10}ln|x^2+2x-5|$$

$$\frac{26}{5}\int \frac{1}{x^2+2x-5}dx = \frac{26}{5}\int \frac{1}{(x+1)^2-6}dx$$

$$\int \frac{1}{u^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$$

$$\frac{26}{5}\int \frac{1}{(x+1)^2-6}dx = \frac{26}{5} * \frac{1}{2\sqrt{6}}ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right| = \frac{13}{5\sqrt{6}}ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right|$$

$$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx = -\frac{3}{5}ln|x| + \frac{3}{10}ln|x^2+2x-5| + \frac{13}{5\sqrt{6}}ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right| + C$$

Temática 4 – Sustitución trigonométrica

Tabla 6

Tabla de Ejercicio Temática 4

Letra	Ejercicio
b	$\int \frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx$

Desarrollo

Primero identificamos la forma

$$\sqrt{a^2-b^2x^2} \Longrightarrow x = \frac{a}{b}sin\theta$$

$$\sqrt{121-16x^2} = \sqrt{11^2-(4x)^2}$$

$$\sqrt{11^2-(4x)^2} \Longrightarrow x = \frac{11}{4}sin\theta$$

$$x = \frac{11}{4}sin\theta \Longrightarrow dx = \frac{11}{4}cos\theta d\theta$$

$$16x^2 = 16\,(\frac{11}{4}sin\theta)^2 = 16 * \frac{121}{16}sin^2\theta = 121sin^2\theta$$

$$\sqrt{121-16x^2} = \sqrt{121-16\left(\frac{121}{16}sin^2\theta\right)} = \sqrt{121(1-sin^2\theta)} = \sqrt{121cos^2\theta}$$

$$\sqrt{121cos^2\theta} = 11cos\theta$$

$$\int \frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx = \int \frac{121sin^2\theta}{11cos\theta} * \frac{11}{4}cos\theta d\theta$$

$$\int \frac{121sin^2\theta}{11cos\theta} * \frac{11}{4}cos\theta d\theta = \int \frac{121 * 11}{4} sin^2\theta * d\theta = \frac{1331}{4}\int sin^2\theta \, d\theta$$

Usamos la identidad

$$sin^2\theta = \frac{1-\cos{(2\theta)}}{2}$$

$$\frac{1331}{4}\int sin^2\theta \, d\theta = \frac{1331}{4}\int \frac{1-\cos{(2\theta)}}{2}d\theta = \frac{1331}{8}\int 1-\cos{(2\theta)}\, d\theta$$

$$\frac{1331}{8}\int 1-\cos{(2\theta)}\, d\theta = \frac{1331}{8}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + C$$

Ahora volvemos a la variable original

$$x = \frac{11}{4}sin\theta \Longrightarrow sin\theta = \frac{4x}{11} \Longrightarrow \theta = \arcsin{(\frac{4x}{11})}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \sqrt{1-sin^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4x}{11})^2} = \frac{\sqrt{121-16x^2}}{11}$$

$$\sin(2\theta) = 2 * \frac{4x}{11} * \frac{\sqrt{121-16x^2}}{11} = \frac{8x\sqrt{121-16x^2}}{121}$$

$$\int \frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx = \frac{1331}{8}\left(\arcsin\left(\frac{4x}{11}\right) - \frac{1}{2} * \frac{8x\sqrt{121-16x^2}}{121}\right) + C$$

$$\int \frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx = \frac{1331}{8}\arcsin\left(\frac{4x}{11}\right) - \frac{1331x\sqrt{121-16x^2}}{242} + C$$

Temática 5 – Integrales impropias

Tabla 7

Tabla de Ejercicio Temática 5

Letra	Ejercicio
b	$\int_1^{\infty} \frac{-5}{(6x-4)^3} dx$

Desarrollo

$$\int_1^{\infty} \frac{-5}{(6x-4)^3} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{-5}{(6x-4)^3} dx$$

Vamos a sustituir para resolver la integral]

$$u = 6x - 4 \Longrightarrow du = 6dx \Longrightarrow dx = \frac{du}{6}$$

Para

$$x = 1 \ \Longrightarrow u = 6(1) - 4 = 2$$

$$x = b \ \Longrightarrow u = 6(b) - 4 = 6b - 4$$

$$\int_2^{6b-4} \frac{-5}{(u)^3} * \frac{1}{6} du = -\frac{5}{6} \int_2^{6b-4} u^{-3}\, du$$

$$-\frac{5}{6} \int u^{-3}\, du = -\frac{5}{6} * \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{5}{12u^2}$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12u^2}\right]_2^{6b-4} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12(6b-4)^2} - \frac{5}{12(2)^2}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12(6b-4)^2} - \frac{5}{12(2)^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12(6b-4)^2} - \frac{5}{48}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[0 - \frac{5}{48}\right] = -\frac{5}{48}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{-5}{(6x-4)^3}\,dx = -\frac{5}{48}$$

Tabla 2

Ejercicio 6 Video De Sustentación

Nombre Estudiante	Ejercicios sustentados	Link video explicativo
Ejemplo: *Adriana González*	*1E.*	*https://youtu.be/l8Mfcl_VLYM*

Nota: Esta tabla se coloca el video para sustentación. Fuente. Autor

Tabla 3

Evidencias Aportes al Foro

N° EVIDENCIAS	PANTALLAZO
APORTE 1:	
APORTE 2:	
APORTE 3:	

Nota: Esta tabla las Evidencias de aportes al Foro. Fuente. Autor

Conclusiones

De 5 a 6 renglones eliminar esta frase al escribir las conclusiones.

Referencias Bibliográficas

Con normas APA eliminar esta frase al escribir las referencias.