Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería

CÁLCULO INTEGRAL

UNIDAD DOS
TAREA 3: MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

PRESENTADO A:
Leyder Hernan Lopez

TUTOR(A)

ENTREGADO POR:

Juan Sebastian Castillo Amaya
CÓDIGO: 1116553232
GRUPO: 211622_61

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA - UNAD
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS, INGENIERÍAS Y TECNOLOGÍAS
CURSO DE CÁLCULO INTEGRAL COD. 100411
FECHA
Julio
2025

Introducción

En el siguiente documento se diferentes ejercicios resueltos con los diferentes métodos de integración (sustitución, por partes, fracciones parciales, etc.), y el análisis de una función en la cual se analiza la convergencia o divergencia de la misma.

Objetivos

Objetivo General

Explorar los diferentes métodos de integración.

Objetivo Especifico

- Uso de la integración por sustitución para resolver una integral indefinida.
- Uso de la integración por partes para resolver una integral indefinida.
- Uso de la integración por fracciones parciales para resolver una integral indefinida.
- Uso de la integración por fracciones parciales para resolver una integral indefinida.
- Identificar convergencia o divergencia de una integral impropia.
- Explicación mediante video del método de sustitución.

Elección de Ejercicios a Desarrollar Parte Individual

Tabla 1

Tabla de elección de ejercicios

Nombre del estudiante	Letra Asignada ejercicios 1 al 5	Ejercicio 6
Juan Sebastin Castillo Amaya	*B*	*1B*

Nota: Esta tabla muestra la letra seleccionada. Fuente. Autor

EJERCICIOS PARA DESARROLLAR

Temática 1– Método integración por sustitución

Tabla 2

Tabla de Ejercicio Temática 1

Letra	Ejercicio
b	$\int \frac{3z^2}{z^3 - 4} dz$

Desarrollo

$$\int \frac{3z^2}{z^3 - 4} dz$$

Tomamos el denominador para la sustitución es la opción más viable

$$u = z^3 - 4$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{d}{dz} z^3 - 4 = 3z^2$$

$$du = 3z^2\,dz$$

$$\int \frac{3z^2}{z^3\ -\ 4}dz = \int \frac{1}{z^3\ -\ 4}du = \int \frac{1}{u}du$$

$$\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$$

Sustituyendo, y una aclaración importante se deja valor absoluto porque la función de logaritmo natural no se encuentra definida para valores negativos, por lo mismo se hace la acotación con el valor absoluto y eliminar esa indeterminación.

$$u = z^3\ -\ 4$$

$$\ln|u| + C = \ln|z^3\ -\ 4| + C$$

$$\int \frac{3z^2}{z^3\ -\ 4}dz = \ln|z^3\ -\ 4| + C$$

Temática 2– Método integración por partes.

Tabla 3

Tabla de Ejercicio Temática 2

Letra	Ejercicio
b	$\int z^4 e^{2z} dz$

Desarrollo

La fórmula de integración por partes es la siguiente:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Hay criterios para el orden de preferencia al momento de seleccionar la variable “u”, usaremos la regla LIATE que consiste en la función que se encuentre más arriba en la Tabla 4.

Tabla 4

Tabla de Regla LIATE

Letra	Tipo de función	Ejemplo
L	Logarítmica	$\ln x, log_a x$
I	Inversa trigonometrcia	$\arcsin x$, $\arctan x$
A	Algebraica	$x, x^2, z^4, \sqrt{x}$
T	Trigonométrica	$\sin x$, $\cos x, \tan x$
E	Exponencial	$e^x, 2^x, e^{2z}$

Selección de variables

$$u = z^4 \;\Rightarrow du = 4z^3dz$$
$$dv = e^{2z}dz \;\Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2z}$$
$$\int z^4e^{2z}dz = z^4 * \frac{1}{2}e^{2z} - \int \frac{1}{2}e^{2z} * 4z^3dz$$

$$\int z^4e^{2z}dz = \frac{1}{2}z^4e^{2z} - 2\int e^{2z} * z^3dz$$

Ahora repetimos el proceso con la integral

$$\int e^{2z} * z^3dz$$

$$u = z^3 \;\Rightarrow du = 3z^2dz$$
$$dv = e^{2z}dz \;\Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2z}$$
$$\int e^{2z} * z^3dz = z^3 * \frac{1}{2}e^{2z} - \int \frac{1}{2}e^{2z} * 3z^2dz$$
$$\int e^{2z} * z^3dz = z^3 * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{3}{2}\int e^{2z} * z^2dz$$

Nuevamente se repite el proceso

$$\int e^{2z} * z^2dz$$

$$u = z^2 \;\Rightarrow du = 2zdz$$

$$dv = e^{2z}dz \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2z}$$

$$\int e^{2z} * z^2 dz = z^2 * \frac{1}{2}e^{2z} - \int \frac{1}{2}e^{2z} * 2zdz = z^2 * \frac{1}{2}e^{2z} - \int e^{2z} * zdz$$

Repetimos otra vez

$$\int e^{2z} * zdz$$

$$u = z \Rightarrow du = dz$$
$$dv = e^{2z}dz \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2z}$$
$$\int e^{2z} * zdz = z * \frac{1}{2}e^{2z} - \int e^{2z}dz = z * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{1}{4}e^{2z}$$

Ahora vamos a empezar a recompilar cada uno

$$\int e^{2z} * z^2 dz = z^2 * \frac{1}{2}e^{2z} - \left(z * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{1}{4}e^{2z}\right) = \frac{1}{2}z^2e^{2z} - \frac{1}{2}ze^{2z} + \frac{1}{4}e^{2z}$$

$$\int e^{2z} * z^3 dz = z^3 * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{3}{2}\int e^{2z} * z^2 dz$$
$$\int e^{2z} * z^3 dz = z^3 * \frac{1}{2}e^{2z} - \frac{3}{2}(\frac{1}{2}z^2e^{2z} - \frac{1}{2}ze^{2z} + \frac{1}{4}e^{2z})$$

$$\int e^{2z} * z^3 dz = \frac{1}{2}z^3e^{2z} - \frac{3}{4}z^2e^{2z} + \frac{3}{4}ze^{2z} - \frac{3}{8}e^{2z}$$

$$\int z^4e^{2z}dz = \frac{1}{2}z^4e^{2z} - 2(\frac{1}{2}z^3e^{2z} - \frac{3}{4}z^2e^{2z} + \frac{3}{4}ze^{2z} - \frac{3}{8}e^{2z})$$

$$\int z^4e^{2z}dz = \frac{1}{2}z^4e^{2z} - z^3e^{2z} + \frac{3}{2}z^2e^{2z} - \frac{3}{2}ze^{2z} + \frac{3}{4}e^{2z} + C$$

Temática 3– Integración por Fracciones parciales

Tabla 5

Tabla de Ejercicio Temática 3

Letra	Ejercicio
b	$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx$

Desarrollo

$$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx$$

Primero vamos a descomponer en las fracciones parciales

$$\frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x-5}$$

$$4x+3 = A(x^2+2x-5) + (Bx+C)(X)$$
$$4x+3 = (A+B)x^2 + (2A+C)x - 5A$$

$$x^2: \quad A+B \quad = 0$$
$$x^1: \quad 2A+C \quad = 4$$
$$x^0: \quad -5A \quad = 3 \Longrightarrow A = -\frac{3}{5}$$

$$x^2: \quad -\frac{3}{5} + B \quad = 0 \ \Longrightarrow B = \frac{3}{5}$$

$$x^1: \quad 2(-\frac{3}{5}) + C \quad = 4 \ \Longrightarrow C = 4 + \frac{6}{5} = \frac{26}{5}$$

Ahora se reescribe la integral

$$\int \frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx = \int \frac{-\frac{3}{5}}{x} + \frac{\frac{3}{5}x + \frac{26}{5}}{x^2+2x-5}dx$$

$$\int \frac{-\frac{3}{5}}{x} + \frac{\frac{3}{5}x + \frac{26}{5}}{x^2+2x-5}dx = -\frac{3}{5}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{5}\int \frac{x}{x^2+2x-5}dx + \frac{26}{5}\int \frac{1}{x^2+2x-5}dx$$

Ahora tenemos 3 integrales más sencillas para resolver

$$-\frac{3}{5}\int\frac{1}{x}dx=-\frac{3}{5}ln|x|$$

$$\frac{3}{5}\int\frac{x}{x^2+2x-5}dx=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}ln|x^2+2x-5|\right)=\frac{3}{10}ln|x^2+2x-5|$$

$$\frac{26}{5}\int\frac{1}{x^2+2x-5}dx=\frac{26}{5}\int\frac{1}{(x+1)^2-6}dx$$

$$\int\frac{1}{u^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|$$

$$\frac{26}{5}\int\frac{1}{(x+1)^2-6}dx=\frac{26}{5}*\frac{1}{2\sqrt{6}}ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right|=\frac{13}{5\sqrt{6}}ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right|$$

$$\int\frac{4x+3}{x(x^2+2x-5)}dx=-\frac{3}{5}ln|x|+\frac{3}{10}ln|x^2+2x-5|+\frac{13}{5\sqrt{6}}ln\left|\frac{x+1-\sqrt{6}}{x+1+\sqrt{6}}\right|+C$$

Temática 4 – Sustitución trigonométrica

Tabla 6

Tabla de Ejercicio Temática 4

Letra	Ejercicio
b	$\int\frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx$

Desarrollo

Primero identificamos la forma

$$\sqrt{a^2-b^2x^2} \Longrightarrow x=\frac{a}{b}sin\theta$$

$$\sqrt{121-16x^2}=\sqrt{11^2-(4x)^2}$$

$$\sqrt{11^2-(4x)^2} \Longrightarrow x=\frac{11}{4}sin\theta$$

$$x=\frac{11}{4}sin\theta \Longrightarrow dx=\frac{11}{4}cos\theta d\theta$$

$$16x^2=16\,(\frac{11}{4}sin\theta)^2=16*\frac{121}{16}sin^2\theta=121sin^2\theta$$

$$\sqrt{121-16x^2}=\sqrt{121-16\left(\frac{121}{16}sin^2\theta\right)}=\sqrt{121(1-sin^2\theta)}=\sqrt{121cos^2\theta}$$

$$\sqrt{121cos^2\theta}=11cos\theta$$

$$\int\frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx=\int\frac{121sin^2\theta}{11cos\theta}*\frac{11}{4}cos\theta d\theta$$

$$\int\frac{121sin^2\theta}{11cos\theta}*\frac{11}{4}cos\theta d\theta=\int\frac{121*11}{4}sin^2\theta*d\theta=\frac{1331}{4}\int sin^2\theta\,d\theta$$

Usamos la identidad

$$sin^2\theta=\frac{1-\cos{(2\theta)}}{2}$$

$$\frac{1331}{4}\int sin^2\theta\,d\theta=\frac{1331}{4}\int\frac{1-\cos{(2\theta)}}{2}d\theta=\frac{1331}{8}\int 1-\cos{(2\theta)}\,d\theta$$

$$\frac{1331}{8}\int 1-\cos{(2\theta)}\,d\theta=\frac{1331}{8}\left(\theta-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)+C$$

Ahora volvemos a la variable original

$$x=\frac{11}{4}sin\theta \Longrightarrow sin\theta=\frac{4x}{11}\Longrightarrow \theta=\arcsin{(\frac{4x}{11})}$$

$$\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta)=\sqrt{1-sin^2\theta}=\sqrt{1-(\frac{4x}{11})^2}=\frac{\sqrt{121-16x^2}}{11}$$

$$\sin(2\theta)=2*\frac{4x}{11}*\frac{\sqrt{121-16x^2}}{11}=\frac{8x\sqrt{121-16x^2}}{121}$$

$$\int\frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx=\frac{1331}{8}\left(\arcsin\left(\frac{4x}{11}\right)-\frac{1}{2}*\frac{8x\sqrt{121-16x^2}}{121}\right)+C$$

$$\int\frac{16x^2}{\sqrt{121-16x^2}}dx=\frac{1331}{8}\arcsin\left(\frac{4x}{11}\right)-\frac{1331x\sqrt{121-16x^2}}{242}+C$$

Temática 5 – Integrales impropias

Tabla 7

Tabla de Ejercicio Temática 5

Letra	Ejercicio
b	$\int_1^{\infty}\frac{-5}{(6x-4)^3}dx$

Desarrollo

$$\int_1^{\infty}\frac{-5}{(6x-4)^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{-5}{(6x-4)^3}dx$$

Vamos a sustituir para resolver la integral]

$$u = 6x - 4 \Longrightarrow du = 6dx \Longrightarrow dx = \frac{du}{6}$$

Para

$$x = 1 \;\Longrightarrow u = 6(1) - 4 = 2$$

$$x = b \;\Longrightarrow u = 6(b) - 4 = 6b - 4$$

$$\int_{2}^{6b-4} \frac{-5}{(u)^3} * \frac{1}{6} du = -\frac{5}{6}\int_{2}^{6b-4} u^{-3}\, du$$

$$-\frac{5}{6}\int u^{-3}\, du = -\frac{5}{6} * \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{5}{12u^2}$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12u^2}\right]_2^{6b-4} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12(6b-4)^2} - \frac{5}{12(2)^2}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12(6b-4)^2} - \frac{5}{12(2)^2}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{5}{12(6b-4)^2} - \frac{5}{48}\right]$$

$$\lim_{b\to\infty}\left[0 - \frac{5}{48}\right] = -\frac{5}{48}$$

La integral es convergente

$$\int_{1}^{\infty} \frac{-5}{(6x-4)^3} dx = -\frac{5}{48}$$

Tabla 8

Ejercicio 6 Video De Sustentación

Nombre Estudiante	**Ejercicios sustentados**	**Link video explicativo**
Ejemplo: *Juan Sebastian Castillo Amaya*	*1B.*	*https://youtu.be/p1CB07M6OTM*

Nota: Esta tabla se coloca el video para sustentación. Fuente. Autor

Tabla 9

Evidencias Aportes al Foro

N° EVIDENCIAS	**PANTALLAZO**
APORTE 1:	**Re: Foro de discusión: Unidad 2 Tarea 3 – Métodos de Integración** de JUAN SEBATIAN CASTILLO AMAYA - lunes, 7 de julio de 2025, 10:38 Saludos a todos, para la actividad elijo los ejercicios del literal B Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Responder
APORTE 2:	**Re: Foro de discusión: Unidad 2 Tarea 3 – Métodos de Integración** de JUAN SEBATIAN CASTILLO AMAYA - martes, 8 de julio de 2025, 14:20 Saludos a todos, adjunto avance de ejercicios 1 al 3 Tarea 3 JuanCastillo.pdf Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Responder
APORTE 3:	**Re: Foro de discusión: Unidad 2 Tarea 3 – Métodos de Integración** de JUAN SEBATIAN CASTILLO AMAYA - miércoles, 9 de julio de 2025, 14:12 Saludos a todos, adjunto correciones y avance del trabajo, espero la siguiente version subir el video. Tarea 3 JuanCastillo.pdf Enlace permanente Mostrar mensaje anterior Responder

Nota: Esta tabla las Evidencias de aportes al Foro. Fuente. Autor

Conclusiones

Al momento de solucionar una integral es importante identificar primero el timo de función que se tiene, para poder abordarla con el método mas adecuado, si se realiza mediante el método de partes es recomendable usar la tabla LIATE para evitar aumentar el grado de complejidad al hacer la sustitución de las variables. También es importante tener en cuenta que al tener integrales impropias con intervalos al infinito no necesariamente esto implica que la integral diverja, se debe realizar un análisis más exhaustivo de la misma y si es necesario se debería realizar las aproximaciones por izquierda y derecha.

Referencias Bibliográficas

Rivera Figueroa, A. (2015). *Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias: (ed.)* . Grupo Editorial Patria. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/39430?page=541

Velásquez Bastidas, W. (2014). *Cálculo Integral: la integral indefinida y métodos de integración: (ed.)* . Editorial Unimagdalena. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/70095?page=66

Guerrero Torres, G. (2015). *Cálculo integral: Serie Universitaria Patria: (ed.)* . Grupo Editorial Patria. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/39432?page=135

Guerrero Torres, G. (2015). *Cálculo integral: Serie Universitaria Patria: (ed.)* . Grupo Editorial Patria. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/39432?page=176

García Franchini, C. & Alvarado Arellano, M. (2016). *Cálculo integral en competencias: (ed.)* . Grupo Editorial Patria. https://elibro-net.bibliotecavirtual.unad.edu.co/es/ereader/unad/40465?page=181

Avila, W. A. (2024). *Explorando las integrales impropias* . [Objeto_virtual_de_Informacion_OVI]. Repositorio Institucional UNAD. https://repository.unad.edu.co/handle/10596/62660