LAPORAN TUGAS PEMROGRAMAN
MATA KULIAH PENGANTAR OPTIMISASI
MA3071

MASALAH DAN ALGORITMA OPTIMISASI TANPA KENDALA

oleh :

Jessica Jocelyn Jakson
10121037

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2023

I. MASALAH

Diberikan permasalahan optimisasi tanpa kendala sebagai berikut:

$$\min f(x,y) = x^4 + y^4 - 16x^2 - 16y^2 + 5x + 5y$$

a. Tunjukkan bahwa $f(x,y)$ bukan merupakan fungsi konveks di $\mathbb{R}^2$.
b. Gunakan metode Newton biasa untuk menyelesaikan permasalahan diatas. Gunakan tebakan awal $(0,0)$.
c. Ulangi soal (b) dengan menggunakan tebakan awal (a,b) dengan a dan b merupakan **digit ke-7 dan 8 dari NIM anda.**
d. Gunakan metode Newton yang dimodifikasi untuk menyelesaikan permasalahan diatas. Gunakan $(0,0)$ sebagai tebakan awal.
e. Ulangi soal (d) dengan menggunakan tebakan awal (a,b) dengan a dan b merupakan **digit ke-7 dan 8 dari NIM anda.**
f. Analisis hasil yang diperoleh (*dipaparkan pada poin IV)*

II. LANDASAN TEORI

A. Syarat Cukup Orde Kedua

- Syarat cukup orde kedua ini hanya berlaku untuk kasus optimisasi tanpa kendala.
- Misalkan diberikan fungsi skalar $f : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathrm{C}^2$ pada himpunan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\mathrm{n}$ dan titik x^* merupakan titik interior di Ω. Misalkan pula:
  1) $\nabla f(x^*)^T = 0$
  2) $\nabla^2 f(x^*)$ matriks definit positif

  Maka titik x^* merupakan titik minimum lokal tegas dari fungsi f

B. Indikator Matriks Bentuk Kuadrat

Jika A matriks simetri berukuran $n\ x\ n$

1) A definiti positif (semidefinit positif) jika dan hanya jika smeua nilai eigen A positif (tak negatif).
2) A definiti negatif (semidefinit negatif) jika dan hanya jika smeua nilai eigen A negatif (tak positif).
3) A tak definit, jika mempunyai nilai eigen negatif dan nilai eigen positif.

C. Sifat Fungsi Konveks

1) Penjumlahan dua fungsi konveks pada daerah konveks adalah fungsi konveks. Perkalian skalar tak nol dari fungsi konveks pada daerah konveks adalah fungsi konveks.
2) Misalkan fungsi konveks $f(x)$ terdefinisi pada suatu himpunan konveks Ω . Himpunan $\Gamma = \{x \in: f(x) \leq c\}$ adalah himpunan konveks untuk stiap bilangan real c.
3) Misalkan fungsi $f(x) \in C^1$. Fungsi f bersifat konveks pada daerah konveks Ω jika dan hanya jika $f(y) \geq f(x) + \nabla \mathrm{f(x)(y-x)}$ untuk setiap $x, y \in \Omega$.
4) Misalkan fungsi $f(x, y) \in C^2$
   Fungsi f bersifat konveks pada daerah konveks Ω yang memuat titik interior $\boldsymbol{x}^*$ jika dan hanya jika matriks Hess $\nabla^2 f(x^*)$ bersifat semidefinit positif pada daerah konveks Ω.

D. Metode Newton untuk Masalah Minimasi

Untuk penerapan metode Newton pada masalah optimisasi, gunakan syarat perlu orde pertama untuk menentukan minimum lokal $\nabla f(x^*)^T = 0$. Karena turunan (Matriks Jacobi) dari $\nabla \mathrm{f(x)}$ adalah $\nabla^2 f(x)$ maka

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla \mathrm{f}(\mathrm{x_k})^T$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$x_{k+1} = x_k + p_k$$

dengan p_k merupakan solusi dari Persamaan Newton

$$[\nabla^2 f(x)] p_k = -\nabla \mathrm{f(x)^T}$$

p_k merupakan arah Newton yang dapat dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan.

E. Pencarian Arah Metode Newton

Untuk metode Newton (klasik), arah pencariannya didefinisikan oleh

$$p = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x)^T$$

Jika p *descent direction* pada titik x, maka berlaku

$$\nabla f(x) p = -\nabla f(x) [\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x)^T < 0$$

atau

$$\nabla f(x) p = [\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x)^T > 0$$

dimana kondisi ini akan dipenuhi jika matriks $\nabla^2 f(x)$ definit positif.

III. RANCANGAN MODEL

Kita menggunakan metode Newton untuk mencari titik minimum lokal dari $f(x)$ karena metode Newton sendiri terbatas dalam mencari nilai minimum lokal saja. Hal ini dikarenakan iterasi Newton itu akan konvergen ke titik x_* yang memiliki jarak yang cukup dekat dengan x_0 .

$$||x_0 - x^*|| < epsilon$$

Tetapi, kita tidak bisa memastikan apakah titik x* tersebut adalah titik minimum global atau bukan. Kita hanya dapat menentukan titik x* minimum lokal atau tidak. Jadi, program ini hanyalah akan mencari titik minimum lokal dari fungsi tersebut menggunakan metode Newton.

ALGORITMA METODE NEWTON BIASA (B DAN C)

Input :

1) Nilai tebakan awal

$$\underset{x}{\rightarrow} := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2) Matriks gradien $\nabla f(x,y)$

$$grad\left(\underset{x}{\rightarrow}\right) = \nabla f(x,y) := \begin{bmatrix} 4x^3 - 32x + 5 \\ 4y^3 - 32y + 5 \end{bmatrix}$$

3) Matriks Hess $\nabla^2 f(x,y)$

$$hess(\underset{x}{\rightarrow}) = \nabla^2 f(x,y) := \begin{bmatrix} 12x^2 - 32 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 32 \end{bmatrix}$$

Output :

1) Solusi optimal $\underset{x}{\rightarrow}$

$$\underset{x}{\rightarrow} := (x^*, y^*)$$

Langkah-langkah :

1) Iter := 1
2) # Cari $\underset{x}{\rightarrow}$

$$\underset{x}{\rightarrow} := \underset{x}{\rightarrow} - \left(hess^{-1}(\underset{x}{\rightarrow})\right) . grad\left(\underset{x}{\rightarrow}\right)$$

3) # Cek Matriks gradien $\nabla f(x,y)$

$$cekgrad := grad(\underset{x_{k+1}}{\longrightarrow})$$

4) # Cek Matriks Hess $\nabla^2 f(x,y)$

$$cekhess := hess(\underset{x_{k+1}}{\longrightarrow})$$

5) # Jika $cekgrad = 0^T$, dilanjutan ke langkah 6. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 7.
6) Jika $cekhess$ matriks definit positif, solusi optimal didapatkan, stop/ break. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 7.
7) Iter := iter + 1
8) Ulangi langkah 2

ALGORITMA METODE NEWTON YANG TELAH DIMODIFIKASI

(D DAN E)

Input :

1) Nilai tebakan awal

$$\underset{x}{\rightarrow} := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2) Matriks gradien $\nabla f(x, y)$

$$grad\left(\underset{x}{\rightarrow}\right) = \nabla f(x, y) := \begin{bmatrix} 4x^3 - 32x + 5 \\ 4y^3 - 32y + 5 \end{bmatrix}$$

3) Matriks Hess $\nabla^2 f(x, y)$

$$hess(\underset{x}{\rightarrow}) = \nabla^2 f(x, y) := \begin{bmatrix} 12x^2 - 32 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 32 \end{bmatrix}$$

4) Matriks Hess $\nabla^2 f(x, y)$ mutlak
5) $hessmod(\underset{x}{\rightarrow}) = \nabla^2 f(x, y) := \begin{bmatrix} 12x^2 + 32 & 0 \\ 0 & 12y^2 + 32 \end{bmatrix}$

6) Maksimum iterasi

$$maksiter := 100$$

Output :

1) Solusi optimal $\underset{x}{\rightarrow}$

$$\underset{x}{\rightarrow} := (x^*, y^*)$$

Langkah-langkah :

1) Iter := 1
2) # Cari $\underset{x}{\rightarrow}$

$$\underset{x}{\rightarrow} := \underset{x}{\rightarrow} - \left(hessmod^{-1}(\underset{x}{\rightarrow})\right).grad\left(\underset{x}{\rightarrow}\right)$$

3) # Cek Matriks gradien $\nabla f(x, y)$

$$cekgrad := grad(\underset{x_{k+1}}{\longrightarrow})$$

4) # Cek Matriks Hess $\nabla^2 f(x, y)$

$$cekhess := hess(\underset{x_{k+1}}{\longrightarrow})$$

5) # Jika $cekgrad = 0^T$, dilanjutan ke langkah 6. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 7.
6) Jika $cekhess$ matriks definit positif, solusi optimal didapatkan, stop/ break. Jika tidak, dilanjutkan ke langkah 7.
7) Iter := iter + 1
8) Ulangi langkah 2

IV. SOLUSI

Berdasarkan rancangan model serta variabel-variabel yang telah dipaparkan, berikut adalah kode MATLAB metode Newton biasa dan metode Newton modifikasi dengan variasi tebakan awal sebagai berikut:

KODE MATLAB METODE NEWTON DENGAN TEBAKAN AWAL (0,0) [[B]]

```
% METODE NEWTON BIASA


% Bersihkan Command Window, menghapus variabel, dan menutup jendela
grafik yang aktif
clc;
clear all;
close all;


% Inisialisasi tebakan awal (x0, y0)
x0 = 0;
y0 = 0;


% Membuat fungsi f(x,y)
f = @(x,y) x^4 + y^4 - 16*x^2 - 16*y^2 + 5*x + 5*y;


% Membuat vektor kolom yang berisi x0 dan y0
xvec = [x0; y0];


% Definisikan gradien f(x, y) menggunakan fungsi anonim
grad = @(x, y) [4 * x^3 - 32 * x + 5;
                4 * y^3 - 32 * y + 5];


% Definisikan matriks hessian f(x, y) menggunakan fungsi anonim
hess = @(x, y) [12 * x^2 - 32, 0;
                0, 12 * y^2 - 32];


% Jumlah maksimum iterasi
maksiter = 100;
iter = 1;


% Mulai iterasi Metode Newton
while iter <= maksiter
```

```
    % Hitung x_k+1 menggunakan formula Metode Newton
    xvec = xvec - (inv(hess(xvec(1,1), xvec(2,1))) * grad(xvec(1,1),
xvec(2,1)));

    % Periksa gradien pada x_k+1
    cekgrad = grad(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekgrad adalah gradien
pada x_k+1

    % Periksa matriks hessian pada x_k+1
    cekhess = hess(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekhess adalah matriks
Hessian pada x_k+1

    % Periksa apakah gradien mendekati nol dan matriks Hessian
definit positif
    if abs(cekgrad(1,1)) < 10^(-10) && abs(cekgrad(2,1)) < 10^(-10)
        tf = issymmetric(cekhess); % Mengembalikan 1 jika matriks
simetris
        if tf == 1
            d = eig(cekhess); % Menghitung eigenvalues dari matriks
Hessian
            issemposdef = all(d > 0); % Mengembalikan 1 jika matriks
definit positif
            if issemposdef == 1
                % Tampilkan solusi minimum
                disp("Solusi minimum dari masalah tersebut adalah
");
                disp(xvec);
                % Tampilkan iterasi ke berapa solusi ditemukan
                disp("pada iterasi ke-" + iter + ".");
                disp("dengan nilai minimum "+f(xvec(1,1),
xvec(2,1)));
                return % Berhenti iterasi
            end
        end
    end
    iter = iter + 1; % Tambah iterasi jika kriteria belum terpenuhi
end
% Jika tidak ada solusi yang memenuhi kriteria
disp("Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria.");
```

KODE MATLAB METODE NEWTON DENGAN

TEBAKAN AWAL (3,7) DIGIT KE-7 DAN 8

DARI NIM 10121037 [[C]]

```
% METODE NEWTON BIASA


% Bersihkan Command Window, menghapus variabel, dan menutup jendela
grafik yang aktif
clc;
clear all;
close all;


% Inisialisasi tebakan awal (x0, y0)
x0 = 3;
y0 = 7;


% Membuat fungsi f(x,y)
f = @(x,y) x^4 + y^4 - 16*x^2 - 16*y^2 + 5*x + 5*y;


% Membuat vektor kolom yang berisi x0 dan y0
xvec = [x0; y0];


% Definisikan gradien f(x, y) menggunakan fungsi anonim
grad = @(x, y) [4 * x^3 - 32 * x + 5;
                4 * y^3 - 32 * y + 5];


% Definisikan matriks hessian f(x, y) menggunakan fungsi anonim
hess = @(x, y) [12 * x^2 - 32, 0;
                0, 12 * y^2 - 32];


% Jumlah maksimum iterasi
maksiter = 100;
iter = 1;


% Mulai iterasi Metode Newton
while iter <= maksiter
    % Hitung x_k+1 menggunakan formula Metode Newton
    xvec = xvec - (inv(hess(xvec(1,1), xvec(2,1))) * grad(xvec(1,1),
xvec(2,1)));
```

```
    % Periksa gradien pada x_k+1
    cekgrad = grad(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekgrad adalah gradien
pada x_k+1

    % Periksa matriks hessian pada x_k+1
    cekhess = hess(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekhess adalah matriks
Hessian pada x_k+1

    % Periksa apakah gradien mendekati nol dan matriks Hessian
definit positif
    if abs(cekgrad(1,1)) < 10^(-10) && abs(cekgrad(2,1)) < 10^(-10)
        tf = issymmetric(cekhess); % Mengembalikan 1 jika matriks
simetris
        if tf == 1
            d = eig(cekhess); % Menghitung eigenvalues dari matriks
Hessian
            issemposdef = all(d > 0); % Mengembalikan 1 jika matriks
definit positif
            if issemposdef == 1
                % Tampilkan solusi minimum
                disp("Solusi minimum dari masalah tersebut adalah
");
                disp(xvec);
                % Tampilkan iterasi ke berapa solusi ditemukan
                disp("pada iterasi ke-" + iter + ",");
                disp("dengan nilai minimum "+f(xvec(1,1),
xvec(2,1)));
                return % Berhenti iterasi
            end
        end
    end
    iter = iter + 1; % Tambah iterasi jika kriteria belum terpenuhi
end
% Jika tidak ada solusi yang memenuhi kriteria
disp("Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria.");
```

KODE MATLAB METODE NEWTON YANG TELAH DIMODIFIKASI DENGAN TEBAKAN AWAL (0,0) [[D]]

```
% METODE NEWTON DENGAN MODIFIKASI
% Bersihkan Command Window, menghapus variabel, dan menutup jendela
grafik yang aktif
clc;
clear all;
close all;


% Menentukan tebakan awal x0 dan y0
x0 = 0;
y0 = 0;


% Membuat vektor kolom xvec yang berisi tebakan awal x0 dan y0
xvec = [x0; y0];


% Membuat fungsi f(x,y)
f = @(x,y) x^4 + y^4 - 16*x^2 - 16*y^2 + 5*x + 5*y;


% Definisikan gradien f(x,y) sebagai fungsi anonim untuk menghitung
gradien fungsi tujuan
grad = @(x, y) [4 * x^3 - 32 * x + 5;
                4 * y^3 - 32 * y + 5];


% Definisikan matriks hessian f(x,y) sebagai fungsi anonim untuk
menghitung matriks hessian fungsi tujuan
hess = @(x, y) [12 * x^2 - 32, 0;
                0, 12 * y^2 - 32];


% Hessian alternatif (hessmod) dengan perubahan tanda pada elemen
diagonal utama
hessmod = @(x, y) [12 * x^2 + 32, 0;
                   0, 12 * y^2 + 32];


% Jumlah maksimum iterasi
maksiter = 100;
iter = 1;


% Mulai iterasi Metode Newton
while iter <= maksiter
```

```
    % Hitung x_{k+1} menggunakan formula Metode Newton dengan
matriks Hessian alternatif (hessmod)
    xvec = xvec - (inv(hessmod(xvec(1,1), xvec(2,1))) *
grad(xvec(1,1), xvec(2,1)));

    % Periksa gradien pada x_{k+1}
    cekgrad = grad(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekgrad adalah gradien
pada x_{k+1}

    % Periksa matriks hessian pada x_{k+1}
    cekhess = hess(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekhess adalah matriks
Hessian pada x_{k+1}

    % Periksa apakah gradien mendekati nol dan matriks Hessian
definit positif
    if abs(cekgrad(1,1)) < 10^(-10) && abs(cekgrad(2,1)) < 10^(-10)
        tf = issymmetric(cekhess); % Mengembalikan 1 jika matriks
simetris
        if tf == 1
            d = eig(cekhess); % Menghitung eigenvalues dari matriks
Hessian
            issemposdef = all(d > 0); % Mengembalikan 1 jika matriks
definit positif
            if issemposdef == 1
                % Tampilkan solusi minimum yang memenuhi kriteria
                disp("Solusi minimum dari masalah tersebut adalah
");

                disp(xvec);
                % Tampilkan iterasi ke berapa solusi ditemukan
                disp("pada iterasi ke-" + iter);
                disp("dengan nilai minimum "+f(xvec(1,1),
xvec(2,1))+".");
                return % Berhenti iterasi
            end
        end
    end
    iter = iter + 1; % Tambah iterasi jika kriteria belum terpenuhi
end


% Jika tidak ada solusi yang memenuhi kriteria
disp("Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria.");
```

KODE MATLAB METODE NEWTON YANG TELAH DIMODIFIKASI DENGAN TEBAKAN AWAL (3,7) DIGIT KE-7 DAN 8 DARI NIM 10121037 [[E]]

```
% METODE NEWTON DENGAN MODIFIKASI
% Bersihkan Command Window, menghapus variabel, dan menutup jendela
grafik yang aktif
clc;
clear all;
close all;


% Menentukan tebakan awal x0 dan y0
x0 = 3;
y0 = 7;


% Membuat vektor kolom xvec yang berisi tebakan awal x0 dan y0
xvec = [x0; y0];


% Membuat fungsi f(x,y)
f = @(x,y) x^4 + y^4 - 16*x^2 - 16*y^2 + 5*x + 5*y;


% Definisikan gradien f(x,y) sebagai fungsi anonim untuk menghitung
gradien fungsi tujuan
grad = @(x, y) [4 * x^3 - 32 * x + 5;
                4 * y^3 - 32 * y + 5];


% Definisikan matriks hessian f(x,y) sebagai fungsi anonim untuk
menghitung matriks hessian fungsi tujuan
hess = @(x, y) [12 * x^2 - 32, 0;
                0, 12 * y^2 - 32];


% Hessian alternatif (hessmod) dengan perubahan tanda pada elemen
diagonal utama
hessmod = @(x, y) [12 * x^2 + 32, 0;
                   0, 12 * y^2 + 32];


% Jumlah maksimum iterasi
maksiter = 100;
iter = 1;
```

```
% Mulai iterasi Metode Newton
while iter <= maksiter
    % Hitung x_{k+1} menggunakan formula Metode Newton dengan
matriks Hessian alternatif (hessmod)
    xvec = xvec - (inv(hessmod(xvec(1,1), xvec(2,1))) *
grad(xvec(1,1), xvec(2,1)));

    % Periksa gradien pada x_{k+1}
    cekgrad = grad(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekgrad adalah gradien
pada x_{k+1}

    % Periksa matriks hessian pada x_{k+1}
    cekhess = hess(xvec(1,1), xvec(2,1)); % cekhess adalah matriks
Hessian pada x_{k+1}

    % Periksa apakah gradien mendekati nol dan matriks Hessian
definit positif
    if abs(cekgrad(1,1)) < 10^(-10) && abs(cekgrad(2,1)) < 10^(-10)
        tf = issymmetric(cekhess); % Mengembalikan 1 jika matriks
simetris
        if tf == 1
            d = eig(cekhess); % Menghitung eigenvalues dari matriks
Hessian
            issemposdef = all(d > 0); % Mengembalikan 1 jika matriks
definit positif
            if issemposdef == 1
                % Tampilkan solusi minimum yang memenuhi kriteria
                disp("Solusi minimum dari masalah tersebut adalah
");
                disp(xvec);
                % Tampilkan iterasi ke berapa solusi ditemukan
                disp("pada iterasi ke-" + iter + ".");
                disp("dengan nilai minimum "+f(xvec(1,1),
xvec(2,1))+".");
                return % Berhenti iterasi
            end
        end
    end
    iter = iter + 1; % Tambah iterasi jika kriteria belum terpenuhi
end


% Jika tidak ada solusi yang memenuhi kriteria
disp("Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria.");
```

Empat kode diatas adalah implementasi dari Metode Newton untuk menyelesaikan permasalahan optimisasi tanpa kendala yang meminimalkan

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 16x^2 - 16y^2 + 5x + 5y$$

Metode Newton adalah teknik iteratif yang mencari solusi optimum dengan menghitung gradien dan matriks Hessian dari fungsi tujuan. Pertama, nilai awal x dan y ditentukan sebagai dalam variabel x_0 dan y_0 lalu digabungkan dalam bentuk vektor kolom `xvec` yang merepresentasikan titik tebakan awal. Selanjutnya, gradien dari fungsi $f(x,y)$ dihitung menggunakan fungsi anonim, `grad` yang merupakan turunan parsial dari fungsi tujuan terhadap variabel x dan y. Hal serupa dilakukan untuk menghitung matriks Hessian yang merepresentasikan turunan kedua terhadap variabel x dan y yang disimpan dalam fungsi anonim `hess` (untuk kode bagian B dan C). Sedangkan, untuk bagian D dan E menggunakan rumus Metode Newton yang memanfaatkan invers dari matriks Hessian yang diperbarui 'hessmod' dan gradien pada iterasi sebelumnya.

Setelah inisialisasi, dilakukan iterasi menggunakan Metode Newton. Iterasi ini menghitung iterasi berikutnya $\nabla f(x,y)$ berdasarkan rumus Metode Newton yang memanfaatkan invers dari matriks Hessian dan gradien pada iterasi sebelumnya. Selanjutnya, dilakukan pengujian apakah merupakan titik minimum lokal dengan menggunakan syarat cukup orde dua, yaitu $\nabla f(x,y)^T = 0$ dan $\nabla^2 f(x^*)$ semidefinit positif. Kemudian, syarat $\nabla f(x,y)^T = 0$

Pertama, lakukan pengecekan $\nabla f(x,y)$pada iterasi x_{k+1} untuk memastikan mendekati nol. Kemudian, matriks Hessian pada iterasi tersebut diperiksa apakah definit positif. Pengecekan ini melibatkan fungsi bawaan MATLAB seperti inv untuk menghitung invers dari matriks, issymmetric untuk memeriksa apakah matriks simetris, dan eig untuk menghitung nilai eigen dari matriks Hessian.

Jika gradien mendekati nol dan matriks Hessian definit positif, maka iterasi dihentikan dan solusi optimum dari fungsi fungsi $f(x,y)$ yang memenuhi kriteria akan ditampilkan beserta iterasi keberapa solusi tersebut ditemukan. Namun, jika kriteria tersebut tidak terpenuhi dalam jumlah iterasi maksimum, maka pesan "Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria" akan ditampilkan.

Selanjutnya, kita tahu bahwa salah satu kriteria suatu titik (x, y) dikatakan optimal adalah dengan syarat perlu orde 1, dimana gradient dari titik tersebut bernilai 0. Tetapi, di kode yang saya gunakan dipilih toleransi 10^{-10}(bukan cek grad == 0). Hal ini dilakukan untuk mengatasi galat komputasi. Kita tahu bahwa galat komputasi akan membuat nilai gradien dari titik yang kita dapat mungkin tidak akan sama persis dengan 0. Jadi, alih-alih mencari titik yang akan membuat gradien = 0 (yang mungkin membuat iterasi kita semakin banyak dan tidak efisien untuk dilakukan), kita menggunakan toleransi 10^{-10}. Hal tersebut memiliki makna bahwa nilai gradien yang kita dapat sudah mendekati 0 (galatnya dengan 0 sudah sangat kecil) dan kita bisa mengatakan titik itu optimal karna sudah memenuhi syarat perlu orde 1.

Ketika menggunakan kondisi norm < epsilon sebagai kriteria berhenti dalam iterasi, hal ini menyiratkan bahwa perubahan relatif sudah sangat kecil dan hampir tidak terjadi sehingga menyebabkan titik yang diiterasikan hampir tidak berubah atau dalam konteks gradient, mendekati nol. Dengan norm < epsilon, kita secara implisit menentukan bahwa perubahan yang direpresentasikan oleh nilai gradien telah sangat kecil sehingga dapat dianggap sebagai tidak ada. Dengan demikian, iterasi dihentikan karena titik yang diperoleh hampir tidak berubah atau dalam interpretasi gradien mendekati nilai minimum yang diinginkan.

V. HASIL DAN ANALISIS MASALAH

Diberikan permasalahan optimisasi tanpa kendala sebagai berikut:

$$\min f(x,y) = x^4 + y^4 - 16x^2 - 16y^2 + 5x + 5y$$

A. $\boldsymbol{f(x,y)}$ bukan merupakan fungsi konveks di $\mathbb{R}^2$.

- Berdasarkan sifat fungsi konveks keempat,
  Misalkan fungsi $f(x,y) \in C^2$
  Fungsi f bersifat konveks pada daerah konveks Ω yang memuat titik interior $\boldsymbol{x}^*$ jika dan hanya jika matriks Hess $\nabla^2 f(x^*)$ bersifat semideinit positif pada daerah konveks Ω.
- Akan ditunjukkan $f(x,y)$ bukan merupakan fungsi konveks di $\mathbb{R}^2$ dengan menunjukkan terdapat titik interior $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ pada $\mathbb{R}^2$ sehingga matriks Hess $\nabla^2 f(x^*)$ tidak semidefinit positif.
- Hitung $\nabla f(x,y)^T = 0$

$$\begin{bmatrix} 4x^3 - 32x + 5 \\ 4y^3 - 32y + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Hitung$\nabla^2 f(x,y)^T = \begin{bmatrix} 12x^2 - 32 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 32 \end{bmatrix}$
- Cari nilai eigennya dengan $\det|\, A - \lambda I \,| = 0$

$$det\left|\begin{bmatrix} 12x^2 - 32 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$det\left|\begin{bmatrix} (12x^2 - 32) - \lambda & 0 \\ 0 & (12y^2 - 32) - \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

  Didapatkan nilai eigen $\lambda_1 = 12x^2 - 32$ dan $\lambda_2 = 12y^2 - 32$.
- Jika titik $(x^*, y^*) = (0,0)$ yang merupakan titik interior pada $\mathbb{R}^2$ disubstitusikan, maka matriks Hess $\nabla^2 f(0,0)$ akan memiliki nilai eigen $\lambda_1 = -32$ dan $\lambda_2 = -32$.
- Perhatikan bahwa kedua nilai eigen bernilai negatif. Berdasarkan indikator matriks bentuk kuadrat, matriks Hess dikatakan semidefinit positif jika dan hanya jika smeua nilai eigennya positif (tak negatif). Namun, nilai eigen yang kita dapatkan keduanya bernilai negatif sehingga matriks Hess $\nabla^2 f(0,0)$ tidak semidefinit positif.
- Oleh karena itu, terdapat titik interior $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ pada $\mathbb{R}^2$ yaitu (0,0) yang membuat matriks Hess $\nabla^2 f(0,0)$ tidak semidefinit positif.
- Dengan demikian, telah ditunjukkan terdapat titik interior $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ pada $\mathbb{R}^2$ sehingga matriks Hess $\nabla^2 f(x^*)$ tidak semidefinit positif sehingga $f(x,y)$ bukan merupakan fungsi konveks di $\mathbb{R}^2$.

B. Metode Newton biasa untuk menyelesaikan permasalahan diatas dengan tebakan awal $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

- Hasil output kode :

```
Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria.
```

- Analisis Hasil :
  "Tidak ditemukan solusi yang memenuhi kriteria" saat menggunakan tebakan awal (0,0), maka dapat disimpulkan bahwa matriks Hessian pada titik awal dan setiap titik iterasi tidak definit positif sehingga arah Newton kurang baik untuk mencapai titik minimum yang diharapkan. Hal ini menyebabkan Metode Newton tidak mampu mencapai titik minimum yang diharapkan.

C. Pengulangan Metode Newton biasa untuk menyelesaikan permasalahan diatas dengan menggunakan tebakan awal $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ dengan $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ merupakan digit ke-7 dan 8 dari NIM.

- Hasil output kode :

```
Solusi minimum dari masalah tersebut adalah

    2.7468
    2.7468

pada iterasi ke-7,

dengan nilai minimum -100.1178
```

- Penjelasan :
  Dari output yang menunjukkan solusi minimum pada iterasi ke-7, dengan nilai x dan y sebesar 2.7468 dapat disimpulkan bahwa matriks Hessian pada titik iterasi definit positif. Arah Newton yang dihasilkan dari invers matriks Hessian dan gradien dapat menuju ke titik minimum yang diharapkan karena sifat positifnya.

D. Metode Newton yang telah dimodifikasi untuk menyelesaikan permasalahan diatas dengan tebakan awal $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

- Hasil output kode :

```
Solusi minimum dari masalah tersebut adalah

   -2.9035
   -2.9035

pada iterasi ke-42.
```

- Penjelasan :
- Dari output yang menunjukkan solusi minimum pada iterasi ke-42, dengan nilai x dan y sebesar -2.9035 dapat disimpulkan bahwa matriks Hessian pada titik iterasi definit positif. Arah Newton yang

dihasilkan dari invers matriks Hessian dan gradien dapat menuju ke titik minimum yang diharapkan karena sifat positifnya. Selain itu, hal ini terjadi karena matriks hess dibuat multak sehingga memiliki matriks definit positif dengan solusi minimum yang bergantung dengan pemilihan nilai awal.

E. Pengulangan Metode Newton yang telah dimodifikasi untuk menyelesaikan permasalahan diatas dengan menggunakan tebakan awal $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ dengan $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ merupakan digit ke-7 dan 8 dari NIM.

- Hasil output kode :

```
Solusi minimum dari masalah tersebut adalah

    2.7468
    2.7468

pada iterasi ke-45.

dengan nilai minimum -100.1178.
```

- Penjelasan :
- Dari output yang menunjukkan solusi minimum pada iterasi ke-45, dengan nilai x dan y sebesar 2.7468 dapat disimpulkan bahwa matriks Hessian pada titik iterasi definit positif. Arah Newton yang dihasilkan dari invers matriks Hessian dan gradien dapat menuju ke titik minimum yang diharapkan karena sifat positifnya. Selain itu, hal ini terjadi karena matriks hess dibuat multak sehingga memiliki matriks definit positif dengan solusi minimum yang bergantung dengan pemilihan nilai awal.

VI. KESIMPULAN

Kesimpulan dari permasalahan yang diberikan adalah bahwa untuk fungsi $f(x, y)$, matriks Hessian tidak selalu definit positif. Dengan demikian, metode Newton biasa tidak selalu menjamin solusi yang diharapkan. Jika matriks Hessian tidak definit positif, arah Newton dapat menjadi tidak optimal, bukan sebagai arah descent yang menuju minimum.

Di sisi lain, dengan menggunakan metode Newton yang dimodifikasi, di mana matriks Hessian dimodifikasi untuk selalu definit positif, akan memberikan solusi yang diharapkan. Modifikasi matriks Hessian memastikan keberadaan arah descent yang baik, karena matriks Hessian selalu definit positif. Oleh karena itu, metode Newton yang dimodifikasi cenderung memberikan solusi yang lebih konsisten dan diharapkan daripada metode Newton biasa dalam kondisi di mana matriks Hessian tidak definit positif.

Namun, pada bagian (d) dan (e) dapat diperhatikan bahwa terdapat dua solusi optimal berbeda dengan tebakan awal (0,0) dan (3,7). Berdasarkan sifat, jika $f(x, y)$ konveks, maka nilai minimumnya unik dan nilai minimum lokalnya adalah nilai minimum global itu sendiri. Tetapi pada bagian (a) telah ditunjukkan bahwa $f(x)$ bukan fungsi konveks. Dalam konteks fungsi non-konveks terdapat kemungkinan adanya lebih dari satu titik minimum lokal yang memenuhi syarat orde kedua sehingga hasil yang didapat tidak bertentangan dengan sifat tersebut.