Kapitel 8

Die Testfunktionen

Die Optimierung von Funktionen gehört zu den Standardaufgaben, bei denen genetische Algorithmen zum Einsatz kommen. In den folgenden Unterkapiteln werden einige ausgewählte Testfunktionen beschrieben, die auch in der GA–Klassenbibliothek bzw. in der GA–Testumgebung zur Verfügung stehen. Die meisten dieser Testfunktionen sind Teil von häufig verwendeten Testgruppen. Die bekannteste Testgruppe stammt von De Jong und besteht aus fünf der folgenden Testfunktionen [De Jong(1975)].

Jede der Funktionen wird hier grafisch und formelmäßig vorgestellt. Für die Darstellung der Funktionsgrafen wurde die Dimension der meist hochdimensionalen Probleme auf zwei Argumente eingeschränkt; die Grafen geben aber dennoch einen guten Einblick in die Eigenheit der Funktionen. Außerdem sind Standarddimension und Definitionsbereich, wie sie in der Literatur vorkommen, angegeben. Diese Standardwerte sind in der GA–Testumgebung abrufbar (siehe Kapitel 7.3.2).

8.1 Rosenbrocks Sattel

$$f(x,y) = 100 \cdot (x^2 - y)^2 + (1-x)^2$$
$$-2.048 \leq x, y \leq 2.048$$
$$\min(f(x,y)) = f(1,1) = 0$$

Rosenbrocks Sattel wird immer mit zwei Argumenten verwendet. Die Eigenheit der Funktion besteht in einem langgestreckten Tal, das zum eigentlichen Minimum hin

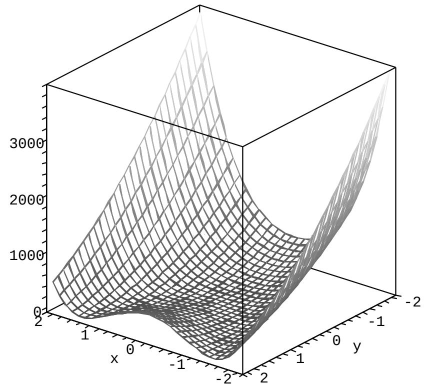

Abbildung 8.1: Rosenbrocks Sattel

nur noch unwesentlich abfällt. Viele Optimierungsalgorithmen finden leicht das Tal, bleiben aber dort hängen, ohne das globale Minimum zu erreichen. Rosenbrocks Sattel gehört zu De Jongs Testgruppe.

8.2 Quadratische Funktion

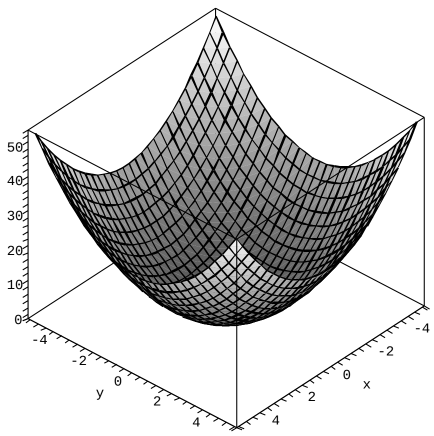

Abbildung 8.2: Quadratische Funktion

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
$$-5.12 \leq x_i \leq 5.12 \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = f(0,...,0) = 0$$

Standarddimension: $n = 3$. Diese Funktion ist die einfachste der Testfunktionen und sollte von jedem Optimierungsalgorithmus gelöst werden können. Sie ist stetig, konvex und unimodal und wird auch „Sphärenmodell“ genannt. Die quadratische Funktion ist Teil von De Jongs Testgruppe.

8.3 x^4 mit Rauschen

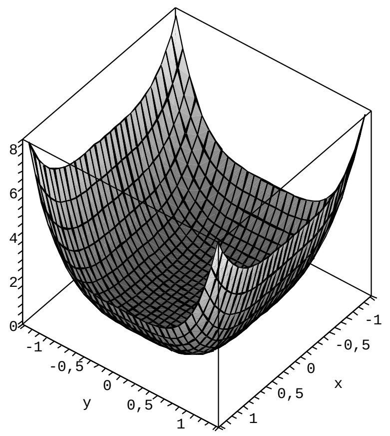

Abbildung 8.3: x^4 (ohne Rauschen)

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i^4 + N(0,1)$$
$$-1.28 \leq x_i \leq 1.28 \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = f(0,...,0) = 0 \qquad \text{(ohne Rauschen)}$$

Standarddimension: $n = 30$. Der Ausdruck $N(0,1)$ steht für eine standardnormalverteilte Zufallszahl. Dieses sogenannte Rauschen sorgt dafür, dass zwei Funktionsaufrufe mit denselben Argumenten in der Regel verschiedene Funktionswerte liefern. Dies ist ein in der Praxis häufig auftretendes Problem (z.B. aufgrund von Messungenauigkeiten). x^4 mit Rauschen ist Teil von De Jongs Testgruppe.

8.4 Treppenfunktion

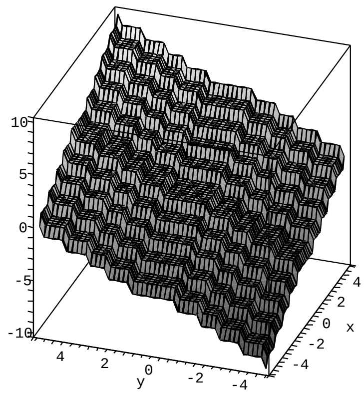

Abbildung 8.4: Treppenfunktion

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} integer(x_i)$$
$$-5.12 \leq x_i \leq 5.12 \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = -5 \cdot n \qquad \text{mit } x_i \leq -5$$

Standarddimension: $n = 5$. Die Treppen– oder Stufenfunktion ist eine unstetige Funktion mit vielen einzelnen Plateauflächen, die jeweils lokale Minima bilden. Für viele Optimierungsverfahren stellt dies ein Problem dar, da sie leicht auf einem Plateau hängenbleiben: Der Funktionswert ist für alle Punkte eines Plateaus gleich und somit fehlen Anhaltspunkte, in welcher Richtung weiter gesucht werden soll. Diese Treppenfunktion gehört zu De Jongs Testgruppe.

8.5 Bäcks Treppenfunktion

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i + 0,5 \rfloor^2$$
$$-5.12 \leq x_i \leq 5.12 \qquad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = 0 \qquad \text{mit } -0.5 \leq x_i < 0.5$$

Standarddimension: $n = 5$. Bäcks Treppenfunktion ist eine etwas anspruchsvollere Variante der normalen Treppenfunktion. Sie wurde von Bäck et al. entwickelt [Bäck(1996)].

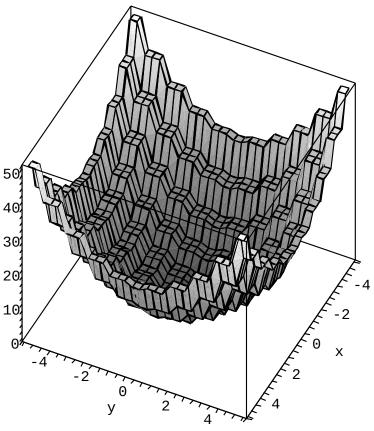

Abbildung 8.5: Bäcks Treppenfunktion

8.6 Rastrigins Funktion

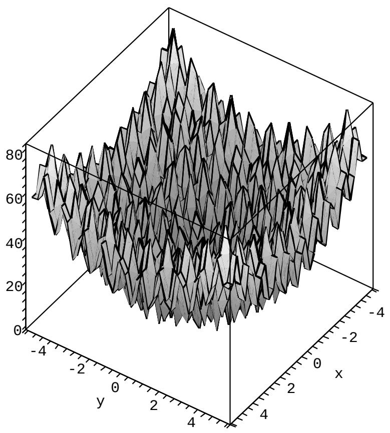

Abbildung 8.6: Rastrigins Funktion

$$f(\underline{x}) = n \cdot A + \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - A \cdot \cos(2\pi x_i)) \text{ mit } A \in \mathbb{R}$$
$$-5.12 \leq x_i \leq 5.12 \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = f(0, ..., 0) = 0$$

Standarddimension: $n = 20$ mit $A = 10$. Rastrigins Funktion besteht aus einer quadratischen Funktion, die durch einen auf dem Cosinus basierenden Term moduliert wird. Dadurch wird sie multimodal mit extrem vielen lokalen Extrema, die in einem rechteckigen Raster der Breite 1 angeordnet sind.

8.7 Griewangks Funktion

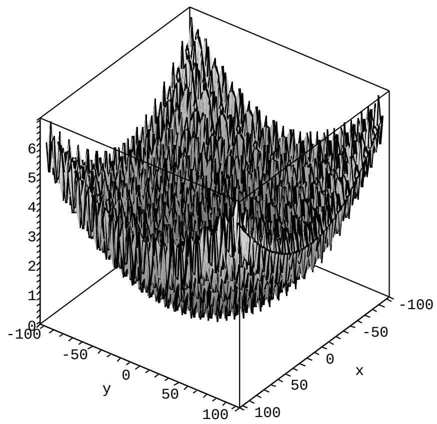

Abbildung 8.7: Griewangks Funktion

$$f(\underline{x}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)$$
$$-600 \leq x_i \leq 600 \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = f(0, ..., 0) = 0$$

Standarddimension: $n = 10$. Griewangks Funktion besitzt ebenfalls sehr viele kleine Täler. Die Modulation des quadratischen Teils besteht hier aus einem Produktterm, der wiederum den Cosinus beinhaltet und in den außerdem die Dimensionsgröße einfließt. Je größer die Dimension, desto flacher fällt die Funktion aus, da der quadratische Teil dann mehr zur Geltung kommt.

8.8 Ackleys Funktion

$$f(\underline{x}) = 20 + e - 20 \cdot \exp\Big(-0,2 \cdot \sqrt{1/n \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\Big) - \exp\Big(1/n \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{n} \cos(2\pi x_i)\Big)$$
$$-32.768 \leq x_i \leq 32.768 \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) = f(0, ..., 0) = 0$$

Standarddimension: $n = 5$. Ackleys Funktion ist ebenfalls multimodal. Die meisten der lokalen Minima befinden sich dabei etwa auf derselben Höhe, während das globale Minimum in einem schmalen aber tiefen Tal liegt.

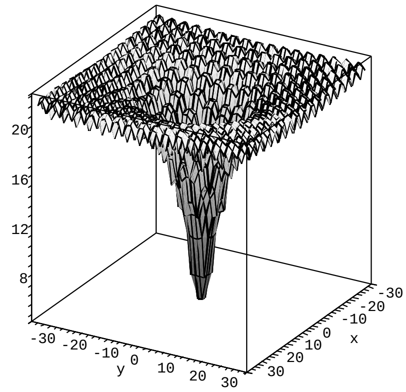

Abbildung 8.8: Ackleys Funktion

8.9 Schwefels Funktion

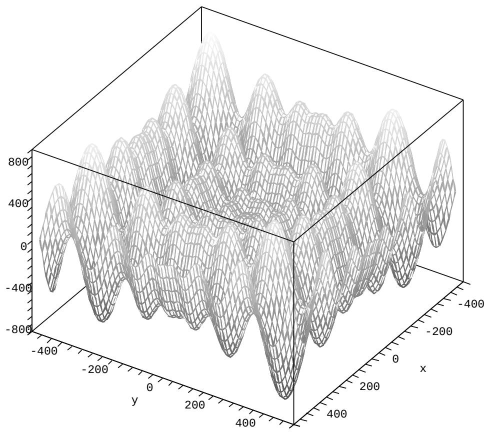

Abbildung 8.9: Schwefels Funktion (2–dimensional)

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} (-x_i \cdot \sin(\sqrt{|x_i|}))$$
$$-500 \leq x_i \leq 500 \qquad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\min(f(\underline{x})) \approx -418.9829 \cdot n \qquad \text{mit } x_i \approx 420.9687$$

Standarddimension: $n = 10$. Diese Funktion ist ebenfalls recht „boshaft“ und wurde — wie viele der hier vorgestellten Funktionen — von H.P. Schwefel ausschließlich zu dem Zweck entwickelt, Suchverfahren in die Irre zu leiten. Eine besondere Schwierigkeit besteht darin, dass das zweitbeste Minimum weit vom globalen Minimum entfernt liegt.

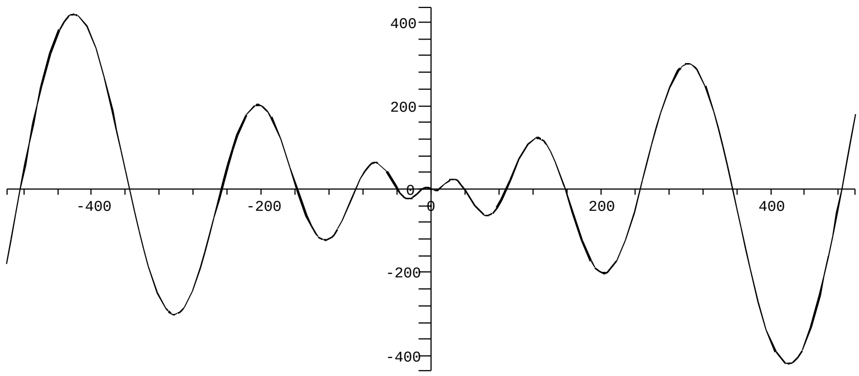

Abbildung 8.10: Schwefels Funktion (1–dimensional)

Anmerkung: Erweitert man den Definitionsbereich der Funktionsargumente, so finden sich andere globale Minima, z.B.

$$\min(f(\underline{x})) \approx -557.1593 \cdot n \qquad \text{mit } x_i \approx 559.1486$$

8.10 Shekels Fuchsbauten

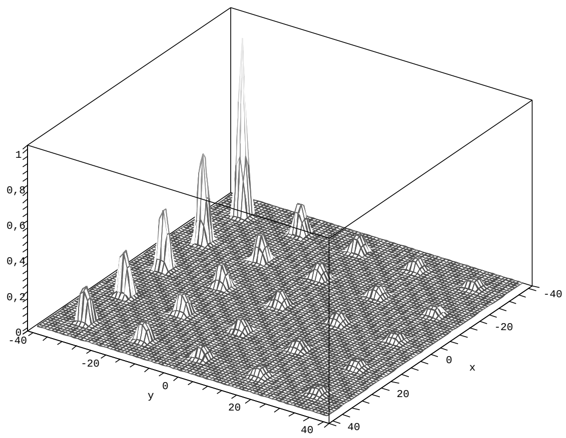

Abbildung 8.11: Shekels Fuchsbauten

$$f(\underline{x}) = 0,002 + \sum_{j=1}^{25} \left(\frac{1}{j + \sum_{i=1}^{2} (x_i - a_{i,j})^6} \right)$$

$$a = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & -16 & 0 & 16 & 32 \\ -32 & -32 & -32 & -32 & -32 & -16 & -16 & -16 & -16 & -16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 16 & 16 & 16 & 16 & 32 & 32 & 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}$$

$$-65.536 \leq x_i \leq 65.536 \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\max(f(\underline{x})) \approx 1.002 \qquad \text{mit } x_i \approx -31.978$$

Shekels Fuchsbauten haben immer genau zwei Argumente. Im Gegensatz zu den anderen vorgestellten Funktionen handelt es sich hier um ein Maximierungsproblem. Die Funktion besteht aus einer Ebene, aus der in einem rechteckigen Raster verschieden hohe Spitzen ragen. Shekels Fuchsbauten ist die fünfte Funktion aus De Jongs Testgruppe.

8.11 Ein lineares ganzzahliges Problem

Ein lineares Maximierungsproblem mit (ebenfalls linearen) Nebenbedingungen hat standardmäßig die folgende Form:

$$f(\underline{x}) = \underline{c} \cdot \underline{x} \qquad \text{u.d.N. } A \cdot \underline{x} \leq \underline{b}$$

$$\underline{x}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Das von uns für die Optimierung verwendete lineare Problem nimmt nur positive ganzzahlige Argumente, d.h. es gilt $x_i \in \mathbb{Z}^+$. Die Dimension liegt bei $n = 8$, die Anzahl der Nebenbedingungen bei $m = 3$. Die Vektoren $\underline{c}$ und $\underline{b}$ und die Matrix A haben die folgenden Gestalt:

$$\underline{c}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^t = \begin{pmatrix} 600 & 1200 & 800 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen haben wir dabei recht willkürlich gesetzt. Das lineare Problem wurde von uns hauptsächlich zu dem Zweck benutzt, genetische Algorithmen allgemein einmal für ganzzahlige Optimierung zu verwenden. Ein anspruchsvolleres Problem zu entwickeln und zu testen steht noch aus.

8.12 Rucksackproblem

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \qquad \text{u.d.N.} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leq W$$
$$\text{mit } x_i \in \{0, 1\} \text{ für } i = 1...n$$

Beim Rucksackproblem bzw. Knapsackproblem handelt es sich um ein Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen. Anschaulich gesehen geht es darum, viele möglichst „nützliche" Gegenstände in einem Rucksack unterzubringen, ohne dabei ein bestimmtes Gesamtgewicht zu überschreiten. Dabei wird der Nutzen der Gegenstände im Vektor $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ und das Gewicht im Vektor $\underline{w} = (w_1, ..., w_n)$ festgehalten; W steht für das zulässige Gesamtgewicht. Ein Argument x_i der Funktion kann entweder den Wert 1 oder 0 annehmen und bestimmt dadurch, ob der entsprechende Gegenstand i in den Rucksack aufgenommen wird oder nicht.

8.13 Travelling Salesman Problem

Das Travelling Salesman Problem (TSP) ist eins der bekanntesten Reihenfolgeprobleme: Ein fahrender Händler soll eine Anzahl von Städten besuchen und evtl. anschließend zur Anfangsstadt zurückkehren. Dabei soll der zurückgelegte Weg möglichst kurz sein. Es geht also darum, diejenige Reihenfolge (der Städte) zu finden, für die der Weg bzw. die Summe der Abstände zwischen den Städten minimal wird. An Stelle von Abständen wird allgemein auch von Kosten gesprochen.