ETH zürich

Übungslektion 6 – Asymptotik & Sortierung

Informatik II

25. / 26. März 2025

Willkommen!

Polybox

Passwort: jschul

Personal Website

`https://n.ethz.ch/~jschul`

Heutiges Programm

Wiederholung Theorie

Asymptotische Laufzeit

Sortieralgorithmen

Alte Prüfungsaufgaben

Hausaufgaben

1. Wiederholung Theorie

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

➜ Mengen von Funktionen!

Asymptotisches Verhalten

- Was sind $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $\mathcal{O}(g(n))$?

➜ Mengen von Funktionen!

Wiederholung, Mengen A, B:

Teilmenge	$A \subseteq B$
echte Teilmenge	$A \subsetneq B$
Schnittmenge	$A \cap B$

Asymptotisches Verhalten

Gegeben Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Definition:

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$
$$\Omega(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0, n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$
$$\Theta(g) = \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$$

Intuition:
$f \in \mathcal{O}(g)$: (Laufzeit) f wächst asymptotisch **nicht mehr** als g. Algorithmus mit Laufzeit f ist **nicht schlechter** als einer mit g.
$f \in \Omega(g)$: (Laufzeit) f wächst asymptotisch **nicht weniger** als g. Algorithmus mit Laufzeit f ist **nicht besser** als einer mit g.
$f \in \Theta(g)$: f wächst asymptotisch **gleich schnell** wie g. Algorithmus mit Laufzeit f ist **gleich gut** wie einer mit g.

Asymptotisches Verhalten

Einige nützliche Formeln:

- $$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

Asymptotisches Verhalten

Einige nützliche Formeln:

- $$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

- $$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Asymptotisches Verhalten

Einige nützliche Formeln:

- $$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$
- $$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
- $$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$$

  (das muss man nicht auswendig wissen)

Formeln auf ZF

Grössenordnung von Funktionen

$$c < \log(n) < \sqrt{n} < n < n \cdot \log(n) < n^2 < 2^n < n! < n^n$$

Rechenregeln

Summen:

$$\sum_{i=0}^{n-1} c = \sum_{i=0}^{n} c = c \cdot n \in \Theta(n)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (n-i) = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

$$\sum_{i=0}^{n^a} i^b \in \Theta(n^{a\cdot(b+1)})$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \frac{2^{n+1}-1}{n-1} \in \Theta(2^n)$$

Logarithmusfunktionen:

$$\log n^n = n \log n \in \Theta(n \log n)$$

$$\log n! = n \log n - n \in \Theta(n \log n))$$

Loris Frey

$$\mathcal{O}(1) < \mathcal{O}(\log(n)) < \mathcal{O}(\sqrt{n}) < \mathcal{O}(n) < \mathcal{O}(n\log(n))$$
$$< \mathcal{O}(n^2) < \mathcal{O}(2^n) < \mathcal{O}(n!) < \mathcal{O}(n^n)$$

Wobei log(…) in den meisten Fällen der Logarithmus zur Basis 2 ist

Achtung: $n = \mathcal{O}(n^2)$ und $n^2 = \mathcal{O}(n^2)$, dies impliziert aber nicht, dass die Laufzeiten von n und n^2 asymptotisch sind

Für die Laufzeitenanalyse sind folgende Formeln hilfreich:

Grundlagen Logarithmus:	$c^a = n \longrightarrow a = \log_c(n)$,	$\log(n^a) = a\log(n)$
Vereinfachungen Sigma:	$\sum_{i=0}^{n-1} c = \sum_{i=1}^{n} c$,	$\sum_{i=0}^{n} (n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$
Asymptotik Sigma:	$\sum_{i=0}^{n^a} i^b = \Theta(n^{a(b+1)})$,	$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$

Max Schaldach

2. Asymptotische Laufzeit

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

CodeExpert In-Class Aufgabe: **Nicht-rekursive Snippets Laufzeiten**

Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples`

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 0. (not on CodeExpert)

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, n):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 0. (not on CodeExpert)

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, n):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$n \cdot n \in \Theta(n^2)$$

$\sum_{k=0}^{n} 1 = n$ | $\sum_{m=0}^{n} n = n \cdot n = n^2$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 1.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 1.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} 1$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 1.

```python
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} 1 = \sum_{m=0}^{n-1} m$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 1.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} 1 = \sum_{m=0}^{n-1} m$$
$$= \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 1.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} 1 = \sum_{m=0}^{n-1} m$$

$$= \frac{(n-1) \cdot n}{2} \in \Theta(n^2)$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Snippet 2.

```
# pre: n is a positive integer
def run(n):
  count = 0
  while n // (2 ** count) >= 1:
    op()
    count += 1
```

Snippet 2.

```
# pre: n is a positive integer
def run(n):
  count = 0
  while n // (2 ** count) >= 1:
    op()
    count += 1
```

- Wie oft wird **`op()`** aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.

$$\frac{n}{2^{count}} \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 2^{count}$$

$$\log(n) \geq count \cdot \underbrace{\cancel{\log(2)}}_{const}$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 2.

```
# pre: n is a positive integer
def run(n):
  count = 0
  while n // (2 ** count) >= 1:
    op()
    count += 1
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.

- `op()` wird so lange aufgerufen, wie $n/2^{count} \geq 1$, d.h. solange $count \leq \log n$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 2.

```
# pre: n is a positive integer
def run(n):
  count = 0
  while n // (2 ** count) >= 1:
    op()
    count += 1
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.
- `op()` wird so lange aufgerufen, wie $n/2^{\textit{count}} \geq 1$, d.h. solange *count* $\leq \log n$
- Beachten Sie, dass *count* die Anzahl der Iterationen in der Schleife verfolgt.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 2.

```
# pre: n is a positive integer
def run(n):
  count = 0
  while n // (2 ** count) >= 1:
    op()
    count += 1
```

- Wie oft wird **`op()`** aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.
- **`op()`** wird so lange aufgerufen, wie $n/2^{count} \geq 1$, d.h. solange $count \leq \log n$
- Beachten Sie, dass *count* die Anzahl der Iterationen in der Schleife verfolgt.
- Daher wird **`op()`** zwischen $\lfloor \log n \rfloor$ und $\lceil \log n \rceil$ mal aufgerufen.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 3.

```
def run(n):
  l = 0
  r = n
  while l < r:
    op()
    m = (l + r) // 2
    if h(m):
      l = m + 1
    else:
      r = m - 1

# n is an integer
# h returns a bool
```

- Wie oft wird **op()** aufgerufen?

$r - l = n$

$\frac{n}{2^c}$

$n = 100$

$r = 100, \quad l = 0$

$m = 50$

case 1

$l = 51$

$r = 100$

case 2

$l = 0$

$r = 49$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 3.

```
def run(n):
  l = 0
  r = n
  while l < r:
    op()
    m = (l + r) // 2
    if h(m):
      l = m + 1
    else:
      r = m - 1

# n is an integer
# h returns a bool
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 3.

```
def run(n):
  l = 0
  r = n
  while l < r:
    op()
    m = (l + r) // 2
    if h(m):
      l = m + 1
    else:
      r = m - 1

# n is an integer
# h returns a bool
```

- Wie oft wird **op()** aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.
- Ähnlich wie bei Snippet 2, wenn man den Wert von $r - l$ betrachtet.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 3.

```
def run(n):
  l = 0
  r = n
  while l < r:
    op()
    m = (l + r) // 2
    if h(m):
      l = m + 1
    else:
      r = m - 1

# n is an integer
# h returns a bool
```

- Wie oft wird **`op()`** aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.
- Ähnlich wie bei Snippet 2, wenn man den Wert von $r - l$ betrachtet.
- Am Anfang haben wir $r - l = n$.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 3.

```python
def run(n):
  l = 0
  r = n
  while l < r:
    op()
    m = (l + r) // 2
    if h(m):
      l = m + 1
    else:
      r = m - 1

# n is an integer
# h returns a bool
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort: $\Theta(\log n)$.
- Ähnlich wie bei Snippet 2, wenn man den Wert von $r - l$ betrachtet.
- Am Anfang haben wir $r - l = n$.
- Bei jeder Iteration wird l oder r auf den Mittelwert $m = (l + r)/2$ gesetzt.
- Bei der Iteration c gilt also immer, dass $n/2^c - 1 \leq r - l < n/2^c$.

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 4.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m*m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 4.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m*m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m^2-1} 1$$

Snippet 4.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m*m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \boxed{\sum_{k=0}^{m^2-1}} 1 = \underline{\sum_{m=0}^{n-1}} m^2$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 4.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m*m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m^2-1} 1 = \sum_{m=0}^{n-1} m^2$$
$$= \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

Asymptotische Laufzeiten mit Θ

Snippet 4.

```
# pre: n is an integer
def run(n):
  for m in range(0, n):
    for k in range(0, m*m):
      op()
```

- Wie oft wird `op()` aufgerufen?
- Antwort:

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m^2-1} 1 = \sum_{m=0}^{n-1} m^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} \in \Theta(n^3)$$

3. Sortieralgorithmen

Sortieralgorithmen

Wie können wir ein Array nach möglichst schnell und effizient sortieren?
$\longrightarrow$ **Mit Sortieralgorithmen**
Die verschiedenen Algorithmen unterscheiden sich in:

- Strategie
- Laufzeit
- Speicherplatz

"15 sorting Algorithms in 6 Minutes"
`https://www.youtube.com/watch?v=kPRA0W1kECg`

Sortieralgorithmen

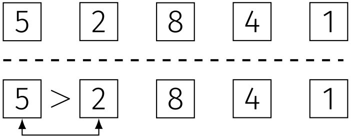
Wir schauen uns heute die folgenden an:

1. Bubblesort
2. Insertion sort (Sortieren durch Einfügen)

Bubblesort

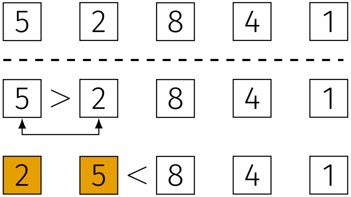
5	2	8	4	1

Bubblesort



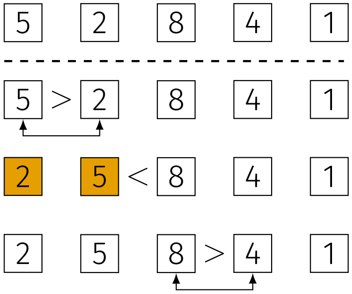
- Vergleiche jedes Paar benachbarter Elemente der Reihe nach. Wenn das erste größer ist, tausche sie aus.

Bubblesort



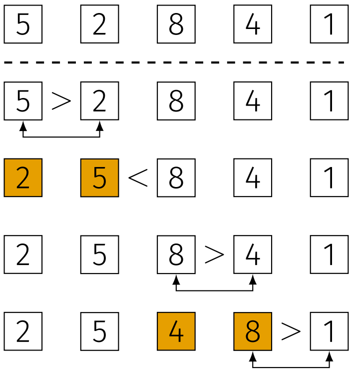
- Vergleiche jedes Paar benachbarter Elemente der Reihe nach. Wenn das erste größer ist, tausche sie aus.

Bubblesort



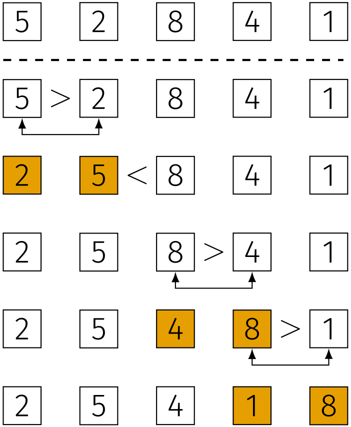
- Vergleiche jedes Paar benachbarter Elemente der Reihe nach. Wenn das erste größer ist, tausche sie aus.

Bubblesort



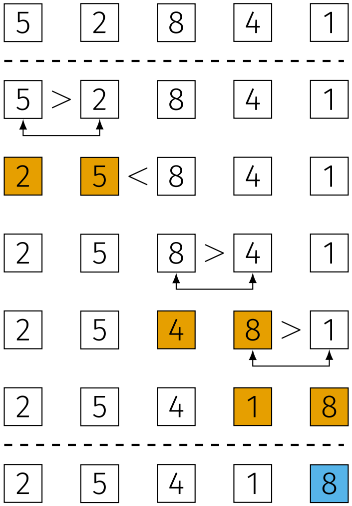
- Vergleiche jedes Paar benachbarter Elemente der Reihe nach. Wenn das erste größer ist, tausche sie aus.

Bubblesort



- Vergleiche jedes Paar benachbarter Elemente der Reihe nach. Wenn das erste größer ist, tausche sie aus.

Bubblesort



- Vergleiche jedes Paar benachbarter Elemente der Reihe nach. Wenn das erste größer ist, tausche sie aus.
- Nach einer Iteration (Iteration 0) befindet sich das größte Element am Ende der Liste.

Bubblesort

2	5	4	1	8

- Schleife, bis die Liste sortiert ist.

Bubblesort

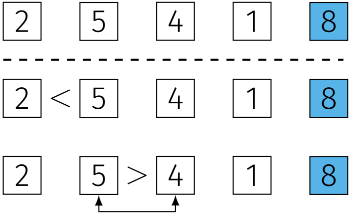
2 5 4 1 8

---

2 < 5 4 1 8

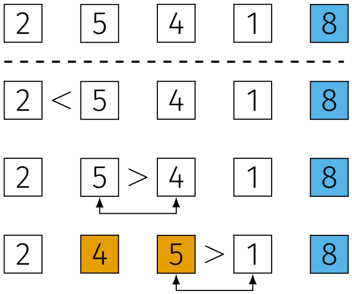
- Schleife, bis die Liste sortiert ist.

Bubblesort



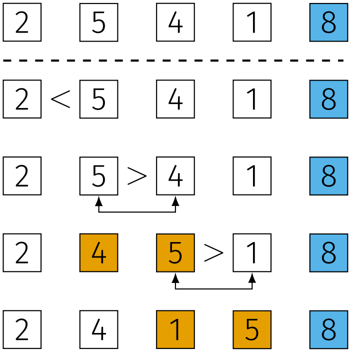
- Schleife, bis die Liste sortiert ist.

Bubblesort



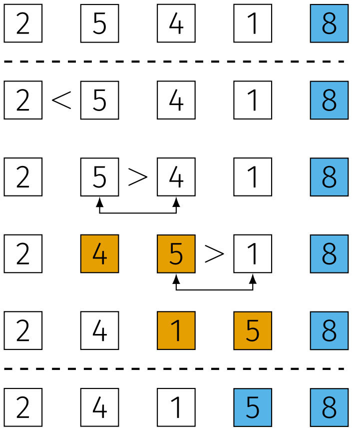
- Schleife, bis die Liste sortiert ist.

Bubblesort



- Schleife, bis die Liste sortiert ist.

Bubblesort



- Schleife, bis die Liste sortiert ist.
- **Schleifeninvariante**: Nach Iteration i sind Elemente `li[-(i+1):]` sortiert und an der richtigen Stelle.

Visualisation

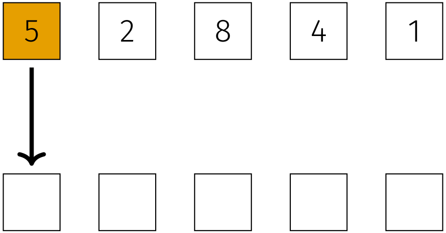
`https://visualgo.net/en/sorting`

Insertion Sort: Konzept

5	2	8	4	1

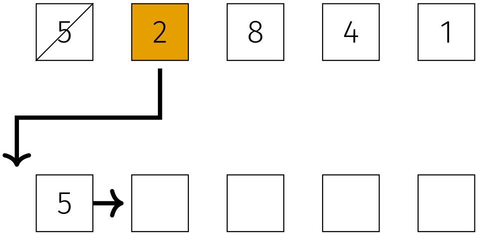
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



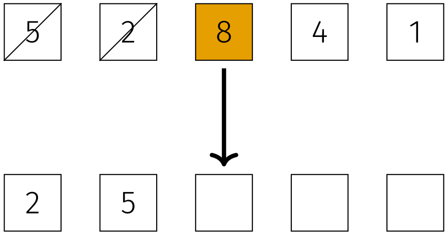
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



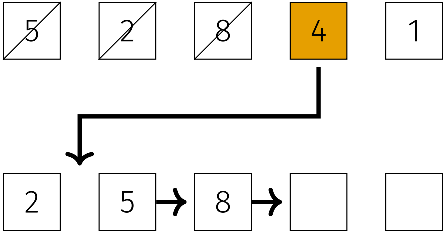
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



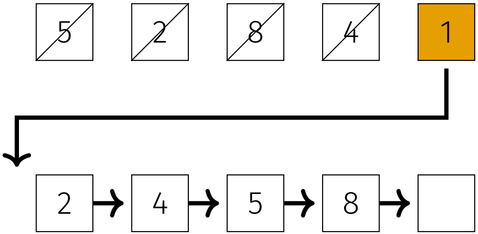
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



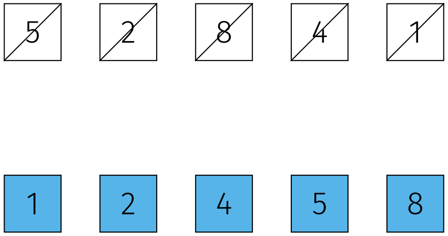
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



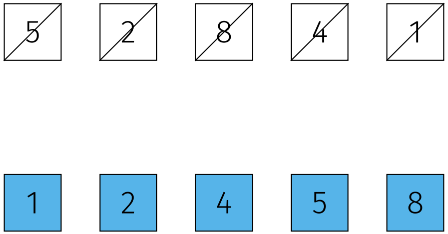
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.

Insertion Sort: Konzept



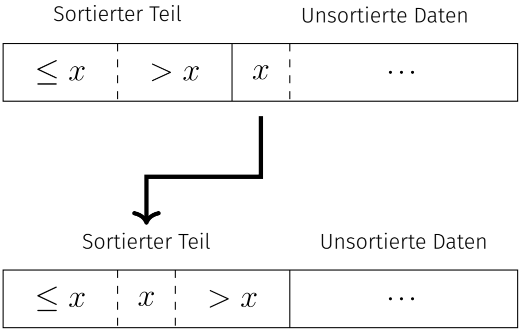
- Mit einer zweiten Liste können wir einfach jedes Element an der korrekten Stelle einsortieren.
- **Problem**: Benötigt n zusätzlichen Speicherplatz.

Insertion Sort

Sortierter Teil		Unsortierte Daten	
$\leq x$	$> x$	x	$\cdots$

Wir können den Speicherplatz, der in der ursprünglichen Liste frei wird verwenden.

Insertion Sort



Wir können den Speicherplatz, der in der ursprünglichen Liste frei wird verwenden.

Sortieren durch Einfügen

$\boxed{5}$ $\boxed{2}$ $\boxed{8}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$

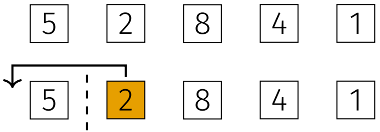
Sortieren durch Einfügen

- **Schleifeninvariante**: ??

5 2 8 4 1

5 | 2 8 4 1 $(i = 1)$

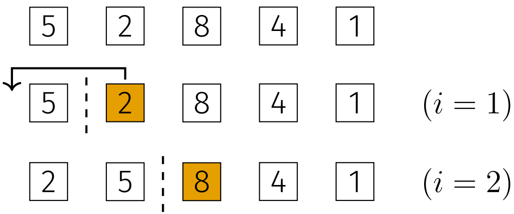
Sortieren durch Einfügen



$(i = 1)$

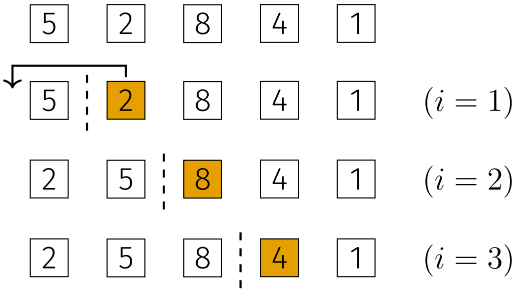
- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.

Sortieren durch Einfügen



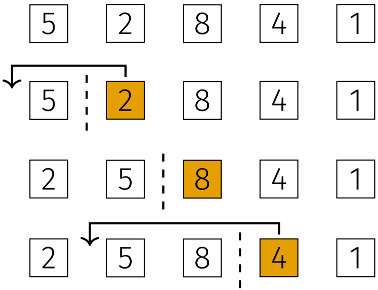
- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist $(i = n)$.

Sortieren durch Einfügen



- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist ($i = n$).

Sortieren durch Einfügen



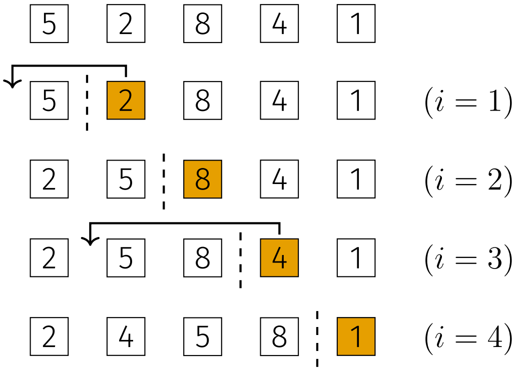
$(i = 1)$

$(i = 2)$

$(i = 3)$

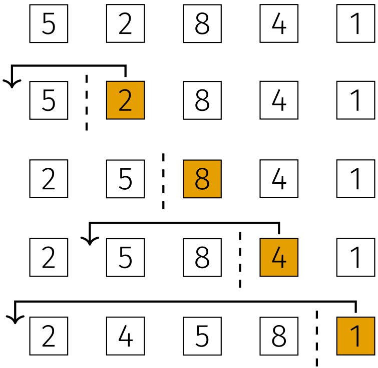
- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist $(i = n)$.

Sortieren durch Einfügen



- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist ($i = n$).

Sortieren durch Einfügen



$(i = 1)$

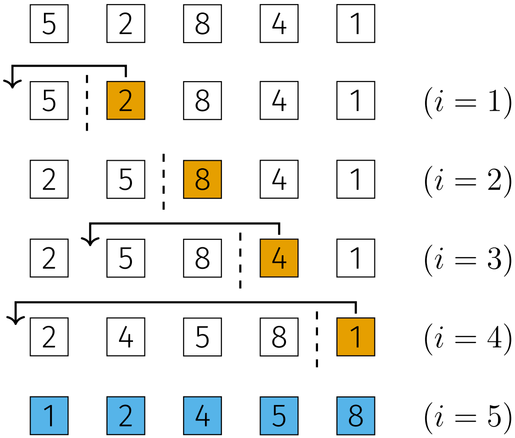
$(i = 2)$

$(i = 3)$

$(i = 4)$

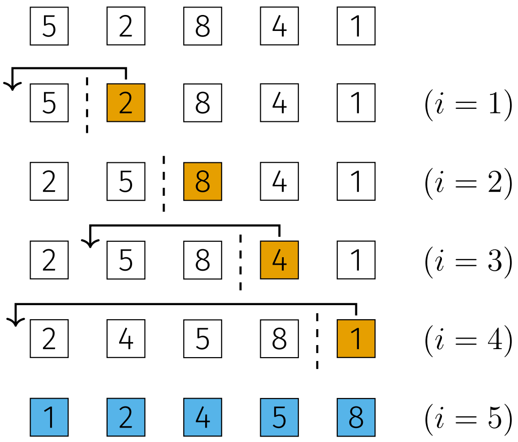
- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist ($i = n$).

Sortieren durch Einfügen



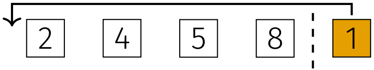
- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist $(i = n)$.

Sortieren durch Einfügen



- **Schleifeninvariante**: Vor Iteration i sind Elemente in `li[:i]` sortiert. (Für Selection Sort: Vor iteration i enthält `li[:i]` die i niedrigsten Elemente von `li` in sortierter Reihenfolge.)
- Bei Iteration i, das i-te Element an der korrekten Position in die sortierte Teilliste `li[:i]` einfügen.
- Wiederholen bis alles sortiert ist ($i = n$).
- **Frage**: Wie kann man die Insertion durchführen?

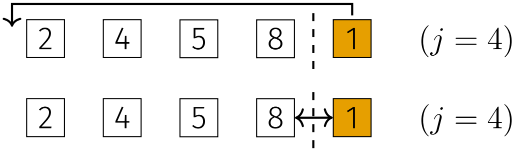
Einfügen durch Austauschen



$(j = 4)$

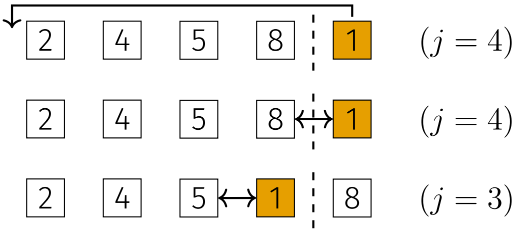
- Betrachten wir Iteration $i = 4$.
- Setze Variable $j = i$.

Einfügen durch Austauschen



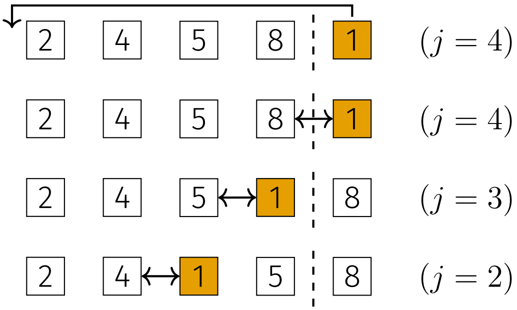
- Betrachten wir Iteration $i = 4$.
- Setze Variable $j = i$.
- Vergleiche `li[j]` und `li[j-1]` und tausche, falls `li[j-1] > li[j]`.

Einfügen durch Austauschen



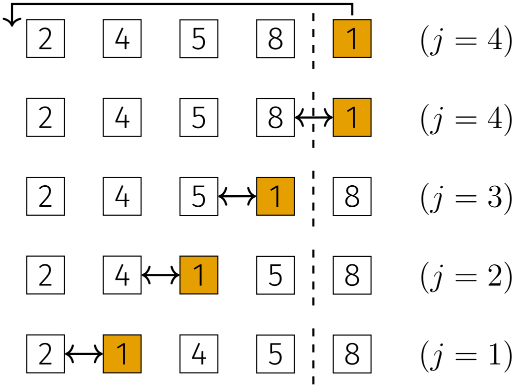
- Betrachten wir Iteration $i = 4$.
- Setze Variable $j = i$.
- Vergleiche `li[j]` und `li[j-1]` und tausche, falls `li[j-1]` > `li[j]`.
- Wiederhole bis $j = 0$ or `li[j-1]` $\leq$ `li[j]`.

Einfügen durch Austauschen



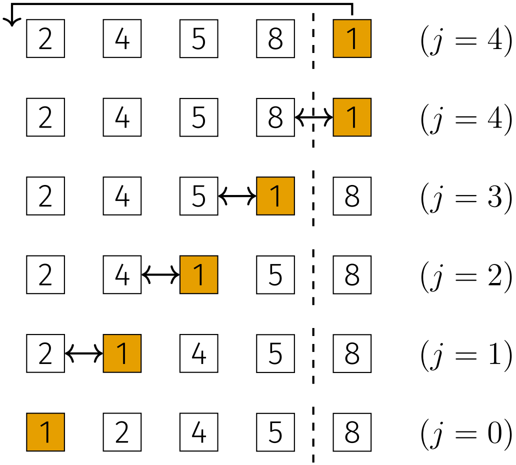
- Betrachten wir Iteration $i = 4$.
- Setze Variable $j = i$.
- Vergleiche `li[j]` und `li[j-1]` und tausche, falls `li[j-1]` > `li[j]`.
- Wiederhole bis $j = 0$ or `li[j-1]` $\leq$ `li[j]`.

Einfügen durch Austauschen



- Betrachten wir Iteration $i = 4$.
- Setze Variable $j = i$.
- Vergleiche `li[j]` und `li[j-1]` und tausche, falls `li[j-1] > li[j]`.
- Wiederhole bis $j = 0$ or `li[j-1]` $\leq$ `li[j]`.

Einfügen durch Austauschen



- Betrachten wir Iteration $i = 4$.
- Setze Variable $j = i$.
- Vergleiche `li[j]` und `li[j-1]` und tausche, falls `li[j-1] > li[j]`.
- Wiederhole bis $j = 0$ or `li[j-1]` $\leq$ `li[j]`.

Implementierung von Insertion Sort

CodeExpert In-Class Aufgabe: **Insertion Sort Laufzeit**
Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples`

Danach werden wir folgendes diskutieren:

- Was ist das worst-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?
- Was ist das best-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?

Implementierung von Insertion Sort

CodeExpert In-Class Aufgabe: **Insertion Sort Laufzeit**
Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples`

Danach werden wir folgendes diskutieren:

- Was ist das worst-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
  $\Rightarrow$ Falsch herum sortiert
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?
- Was ist das best-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?

Implementierung von Insertion Sort

CodeExpert In-Class Aufgabe: **Insertion Sort Laufzeit**
Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples`

Danach werden wir folgendes diskutieren:

- Was ist das worst-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
  $\Rightarrow$ Falsch herum sortiert
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?
  $\Rightarrow \Theta(n^2)$
- Was ist das best-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?

Implementierung von Insertion Sort

CodeExpert In-Class Aufgabe: **Insertion Sort Laufzeit**
Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples`

Danach werden wir folgendes diskutieren:

- Was ist das worst-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
  $\Rightarrow$ Falsch herum sortiert
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?
  $\Rightarrow \Theta(n^2)$
- Was ist das best-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
  $\Rightarrow$ Bereits richtig sortiert
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?

Implementierung von Insertion Sort

CodeExpert In-Class Aufgabe: **Insertion Sort Laufzeit**
Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/codeExamples`

Danach werden wir folgendes diskutieren:

- Was ist das worst-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
  $\Rightarrow$ Falsch herum sortiert
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?
  $\Rightarrow \Theta(n^2)$
- Was ist das best-case Szenario für das Sortieren einer Liste mit Insertion Sort?
  $\Rightarrow$ Bereits richtig sortiert
- Was ist die Θ Laufzeitkomplexität von Insertion Sort in diesem Fall?
  $\Rightarrow \Theta(n)$

4. Alte Prüfungsaufgaben

Runtime Analysis

MAVT 2023

A: $\Theta(1)$	**B:** $\Theta(\log n)$	**C:** $\Theta(\log^2 n)$	**D:** $\Theta(\log\log n)$
E: $\Theta(n)$	**F:** $\Theta(n^2)$	**G:** $\Theta(n^3)$	**H:** $\Theta(n^4)$
I: $\Theta(n \log n)$	**K:** $\Theta(n^2 \log n)$	**L:** $\Theta(n \log^2 n)$	**M:** $\Theta(n^2 \log^2 n)$
N: $\Theta(n^{\log_2 3})$	**O:** $\Theta(\sqrt{n})$	**P:** $\Theta(\sqrt{n^3})$	**Q:** $\Theta(\sqrt{\log n})$
R: $\Theta(\sqrt{n \log n})$	**S:** $\Theta(\sqrt[3]{2^n})$	**T:** $\Theta(2^n)$	**U:** $\Theta(3^n)$
V: $\Theta(n!)$	**W:** $\Theta(n^n)$	**X:** N/A	

	$f(n)$	$f \in \ldots$		$f(n)$	$f \in \ldots$
0.	$2n$	E			
1.	$\sqrt{n} + n^4$	H	2.	2023^{2023}	A
3.	$\sum_{i=0}^{n} i^2$	G	4.	$\log\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)$	B
5.	$n^2 + n\log n$	F			

Runtime Analysis

BAUG 2024

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!} \cdot 2!}$

	$f(n)$	$f \in \dots$		$f(n)$	$f \in \dots$
0.	$2n$	E			
1.	$\binom{n}{2}$		2.	$\frac{10n}{2n+10}$	
3.	3^{2n}		4.	$\sum_{i=1}^{\log n} i$	C

$\frac{10}{2+\frac{10}{n}}$

Runtime Analysis

MAVT 2023

(1.b)

```python
def g(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(j):
                f()
```

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j} 1 = j$$

$= n^2$

$= n^3$

Asymptotische Anzahl Aufrufe von f / *Asymptotic number of calls to f:*

○ 1 ○ n ○ $\log n$ ○ $\sqrt{n}$ ○ n^2 ○ 2^n ○ $n \log n$ ☒ n^3

(1.d)

```python
def g(n):
    i = 1
    while i <= n**4:
        f()
        i = i * 2
```

$c = 0$

$c += 1$

$c \cdot 2 = 2^c$

$2^c \leq n^4$

$c \cdot \cancel{\log(2)} \leq 4 \log(n)$

Asymptotische Anzahl Aufrufe von f / *Asymptotic number of calls to f:*

○ 1 ○ n ☒ $\log n$ ○ $\sqrt{n}$ ○ n^2 ○ 2^n ○ $n \log n$ ○ n^3

Runtime Analysis: Tipp

```
def g(n):
  i = 1
  while i <= n:
    f()
    i = i * 4
```

Nun denken wir uns eine counter-variable dazu, das Snippet sieht also so aus:

```
def g(n):
  i = 1
  c = 0
  while i <= n:
    f()
    c = c + 1
    i = i * 4
```

Nun können wir zwar nicht direkt `c` und `n` vergleichen, wohl aber `i` und `c`: Wir erkennen, dass $i = 4^c$. Nun setzen wir dies in die Loop-Condition ein: $i = n \implies 4^c = n \implies c = \log_4 n = \Theta(\log n)$

Runtime Analysis

MAVT 2024FS

(1.1) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i}$

○ $\Theta(1)$ ○ $\Theta(\log\log n)$ ○ $\Theta(\log n)$ ○ $\Theta(\log^2 n)$ ○ \(\Theta 👎 \) ○ $\Theta(n^2)$ ○ $\Theta(n^3)$ ○ $\Theta(n^4)$ ○ $\Theta(n\log n)$
○ $\Theta(n^2\log n)$ ○ $\Theta(n\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^2\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^{\log_2 3})$ ○ $\Theta(\sqrt{n})$ ○ $\Theta(\sqrt{n^3})$ ○ $\Theta(\sqrt{\log n})$
○ $\Theta(\sqrt{n\log n})$ ○ $\Theta(\sqrt[3]{2^n})$ ○ $\Theta(2^n)$ ○ $\Theta(3^n)$ ○ $\Theta(n!)$ ○ $\Theta(n^n)$ ○ N/A

Die richtige Antwort ist: \(\Theta 👎 \)

(1.2) $\sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}$

○ $\Theta(1)$ ○ $\Theta(\log\log n)$ ○ $\Theta(\log n)$ ○ $\Theta(\log^2 n)$ ○ \(\Theta 👎 \) ○ $\Theta(n^2)$ ○ $\Theta(n^3)$ ○ $\Theta(n^4)$ ○ $\Theta(n\log n)$
○ $\Theta(n^2\log n)$ ○ $\Theta(n\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^2\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^{\log_2 3})$ ○ $\Theta(\sqrt{n})$ ○ $\Theta(\sqrt{n^3})$ ○ $\Theta(\sqrt{\log n})$
○ $\Theta(\sqrt{n\log n})$ ○ $\Theta(\sqrt[3]{2^n})$ ○ $\Theta(2^n)$ ○ $\Theta(3^n)$ ○ $\Theta(n!)$ ○ $\Theta(n^n)$ ○ N/A

Die richtige Antwort ist: $\Theta(2^n)$

(1.3) $\frac{n^5-n^2}{n^2+n}$

○ $\Theta(1)$ ○ $\Theta(\log\log n)$ ○ $\Theta(\log n)$ ○ $\Theta(\log^2 n)$ ○ \(\Theta 👎 \) ○ $\Theta(n^2)$ ○ $\Theta(n^3)$ ○ $\Theta(n^4)$ ○ $\Theta(n\log n)$
○ $\Theta(n^2\log n)$ ○ $\Theta(n\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^2\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^{\log_2 3})$ ○ $\Theta(\sqrt{n})$ ○ $\Theta(\sqrt{n^3})$ ○ $\Theta(\sqrt{\log n})$
○ $\Theta(\sqrt{n\log n})$ ○ $\Theta(\sqrt[3]{2^n})$ ○ $\Theta(2^n)$ ○ $\Theta(3^n)$ ○ $\Theta(n!)$ ○ $\Theta(n^n)$ ○ N/A

Die richtige Antwort ist: $\Theta(n^3)$

Runtime Analysis

(1.4) 4613^{976}

○ $\Theta(1)$ ○ $\Theta(\log\log n)$ ○ $\Theta(\log n)$ ○ $\Theta(\log^2 n)$ ○ \(\Theta 👎 \) ○ $\Theta(n^2)$ ○ $\Theta(n^3)$ ○ $\Theta(n^4)$ ○ $\Theta(n\log n)$
○ $\Theta(n^2\log n)$ ○ $\Theta(n\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^2\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^{\log_2 3})$ ○ $\Theta(\sqrt{n})$ ○ $\Theta(\sqrt{n^3})$ ○ $\Theta(\sqrt{\log n})$
○ $\Theta(\sqrt{n\log n})$ ○ $\Theta(\sqrt[3]{2^n})$ ○ $\Theta(2^n)$ ○ $\Theta(3^n)$ ○ $\Theta(n!)$ ○ $\Theta(n^n)$ ○ N/A

Die richtige Antwort ist: $\Theta(1)$

(1.5) $n\sum_{i=1}^{\log n} i$

○ $\Theta(1)$ ○ $\Theta(\log\log n)$ ○ $\Theta(\log n)$ ○ $\Theta(\log^2 n)$ ○ \(\Theta 👎 \) ○ $\Theta(n^2)$ ○ $\Theta(n^3)$ ○ $\Theta(n^4)$ ○ $\Theta(n\log n)$
○ $\Theta(n^2\log n)$ ○ $\Theta(n\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^2\log^2 n)$ ○ $\Theta(n^{\log_2 3})$ ○ $\Theta(\sqrt{n})$ ○ $\Theta(\sqrt{n^3})$ ○ $\Theta(\sqrt{\log n})$
○ $\Theta(\sqrt{n\log n})$ ○ $\Theta(\sqrt[3]{2^n})$ ○ $\Theta(2^n)$ ○ $\Theta(3^n)$ ○ $\Theta(n!)$ ○ $\Theta(n^n)$ ○ N/A

Die richtige Antwort ist: $\Theta(n\log^2 n)$

5. Hausaufgaben

Übung 5: Algorithmen und Effizienz

Auf `https://expert.ethz.ch/enrolled/SS25/mavt2/exercises`

Übung 5: Algorithmen und Effizienz
Einfach, Mittel, Schwer

- Asymptotische Laufzeit, Auf ZF schauen!
- Längstes gemeinsames Präfix, Recursion??
- Dutch Flag (Die niederländische Flagge), Probieren (Video schauen?)
- k-kleinstes Element, Recursion??

Abgabedatum: Montag 31.03.2024, 20:00 CET

KEINE HARDCODIERUNG

Fragen?

Feedback

https://n.ethz.ch/~jschul/Feedback

6. Herleitungen

Einige Formeln mit Herleitung

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?

Intuition

$$1 + ... + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51)$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Warum?
Intuition

$$1 + ... + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (50 + 51)$$

Formaler?

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} (n - i) = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i &= \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}(n-i) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(i + (n-i)) = \sum_{i=0}^{n} n = (n+1) \cdot n
\end{aligned}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} i &= \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n}(n-i) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(i + (n-i)) = \sum_{i=0}^{n} n = (n+1) \cdot n\end{aligned}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = ?$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Summen

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Das muss man nicht auswendig wissen. Aber man sollte wissen, dass es ein Polynom dritten Grades in n ist

Summen

Wie kommt man darauf?

Summen

Wie kommt man darauf? Interessanter Trick: Einerseits

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3,$$

Summen

Wie kommt man darauf? Interessanter Trick: Einerseits

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3,$$

andererseits

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^3 - (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot i^2 - 3 \cdot i + 1\end{aligned}$$