性质5 行列式中两行(列)互换,行列式的值反号.

【注】 (1)以后用 ⓘ↔ⓙ表示第 i 行与第 j 行互换,$[i]\leftrightarrow[j]$表示第 i 列与第 j 列互换.

(2)以后称上述运算为“**互换**”性质.

性质6 行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例,则行列式为零.

性质7 行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

【注1】 (1)以后用ⓘ$+k$ⓙ表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行,$[i]+k[j]$表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

(2)以后称上述运算为“**倍加**”性质.

【注2】 以上七个性质均可由本讲“一、行列式的本质定义(第一种定义)”所介绍的行列式的几何背景直观地得到,而不需复杂抽象的分析.如性质6所说到的“两行(列)元素对应成比例,则行列式为零”,可取$\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}$,因向量$[2,3]$与向量$[4,6]$为平行向量,故$\begin{vmatrix}2&3\\4&6\end{vmatrix}=S_{\square}=0$,如图1-3所示,一目了然.

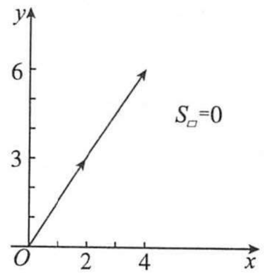

图 1-3

三、行列式的逆序数法定义(第二种定义)

1. 排列和逆序

排列 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列,如 23145 是一个 5 级排列,41352 也是一个 5 级排列.n 级排列共有 $n!$ 个.

逆序 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若 $i_s>i_t$,且 i_s 排在 i_t 前面,则称这两个数构成一个逆序.

逆序数 一个排列中,逆序的总数称为该排列的逆序数,记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$,如 $\tau(231546)=3$,$\tau(621534)=8$.由小到大顺排的排列称为自然排序,如 12345,显然,自然排序的逆序数为 0.

奇排列和偶排列 排列的逆序数为奇数时,该排列称为奇排列;排列的逆序数为偶数时,该排列称为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

$n(n\geqslant2)$阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有 n 个列下标排列求和,故为 $n!$ 项之和.注意到行下标已经顺排,而列下标是任一个 n 级排列,故每项由取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积组成,每项的正、负号取决于$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.当

列下标为奇排列时，应附加负号；当列下标为偶排列时，应附加正号.

【注】 (1)规定 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

(2)如：请确定“$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$”这一展开项前的正、负号. 答：首先将行下标顺排为 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$，然后计算 $\tau(25134)=4$，为偶排列，故该项前为正号.

(3)上述 n 阶行列式利用逆序的定义和教材中对于 2,3 阶行列式的定义是完全一致的. 也就是

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.$$

如

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix}=520,\quad \begin{vmatrix} 我 & 0 & 生 \\ 0 & 有 & 0 \\ 你 & 0 & 幸 \end{vmatrix}=我有幸一生有你,$$

读者若将上式结果中的减号“—”看作汉字“一”，一个浪漫的公式便产生了.

四、行列式的展开定理(第三种定义)

阶数超过 3 的行列式，若还用“一”“三”的方法，就太麻烦了，为此，提出行列式的展开定理.

1. 余子式

在 n 阶行列式中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素，由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式

余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和，即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

但行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和,结果为零,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0, i\neq k;$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0, j\neq k.$$

【注】 余子式与代数余子式是行列式展开定理的核心概念,关于它们的灵活使用请参看例1.13.

五、几个重要的行列式

1. 主对角线行列式(上(下)三角形行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 拉普拉斯展开式

设$\boldsymbol{A}$为m阶矩阵,$\boldsymbol{B}$为n阶矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

【注】 以后称以上12个行列式为“基本形”行列式,加上下面的“4. 范德蒙德行列式”,简称为“12+1”型行列式.

4. 范德蒙德行列式

记

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

基础例题精解

一、具体型行列式的计算

1. 化基本形法
- **直接展开**
- **爪形**
- **异爪形**
- **行(列)和相等**
- **消零化基本形**
- **拉普拉斯展开式**
- **范德蒙德行列式**

用行列式的性质或展开公式，化为“基本形”行列式.

例 1.1 $D_4=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(\quad)$.

(A)17　　(B)15　　(C)13　　(D)11

解 应选(B).

按照第 1 列展开，得

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}-1\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$=16-1=15,$$

故选(B).

例 1.2 计算行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=2\times3\times4\begin{vmatrix}1&1&1&1\\\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{1}{4}&0&0&1\end{vmatrix}=24\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}&0&0&0\\\frac{1}{2}&1&0&0\\\frac{1}{3}&0&1&0\\\frac{1}{4}&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=24-12-8-6=-2.$$

【注】 本题的行列式是"爪形行列式"(除了第1列、第1行及主对角线元素,其余元素均为零的行列式),这种行列式都可以化为"基本形"行列式.

例 1.3 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=$______.

解 应填 $4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$.

按第4行展开,得

$$\text{原式}=4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1&0&0\\\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\end{vmatrix}+3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\0&-1&0\\0&\lambda&-1\end{vmatrix}+2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&0\\0&0&-1\end{vmatrix}+$$

$$(\lambda+1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4.$$

例 1.4 计算 n 阶行列式:

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第1列,则可提出公因子,即

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}\xlongequal{[1]+\sum_{i=2}^{n}[i]}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\1&a&b&\cdots&b\\1&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{ⓘ-①}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&b&b&\cdots&b\\0&a-b&0&\cdots&0\\0&0&a-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a-b\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【注1】 行和或列和相等的行列式(行和是指每一行元素相加的和,列和同理)

$$\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}_{n\times n}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【注2】 行列式中每行(列)元素之和相等时,将其余各列(行)加到第1列(行),然后提出公因子是可取的方法.

【注3】 这类字母抽象型行列式显然具有代表性.如

(1)当 $a=0,b=1$ 时,$\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}_{n\times n}=(n-1)(-1)^{n-1}$;

当 $a=2,b=1$ 时,$\begin{vmatrix}2&1&1&\cdots&1\\1&2&1&\cdots&1\\1&1&2&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&2\end{vmatrix}_{n\times n}=n+1$.

(2)当 $a=x$ 时,$\begin{vmatrix}x&b&b&\cdots&b\\b&x&b&\cdots&b\\b&b&x&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&x\end{vmatrix}_{n\times n}=[x+(n-1)b](x-b)^{n-1}$.

若视 x 为变量,b 是常数,则行列式是 x 的 n 次多项式,其根是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=b,x_n=(1-n)b$.

当 a 取为 $\lambda-a$ 时,$\begin{vmatrix}\lambda-a&b&b&\cdots&b\\b&\lambda-a&b&\cdots&b\\b&b&\lambda-a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&\lambda-a\end{vmatrix}_{n\times n}=[\lambda-a+(n-1)b](\lambda-a-b)^{n-1}$.

若视 λ 为变量，a,b 为常数，则行列式是 λ 的 n 次多项式，其根是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=a+b,\lambda_n=a-(n-1)b$.

(3) 当 a 在副对角线上时，

$$G_n=\begin{vmatrix} b & b & \cdots & b & a \\ b & b & \cdots & a & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & a & \cdots & b & b \\ a & b & \cdots & b & b \end{vmatrix} \xlongequal{(*)} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

$(*)$ 处是将最后 1 列和前面相邻列对换，对换 $n-1$ 次到第 1 列，再将最新的行列式的最后 1 列和相邻列对换，对换 $n-2$ 次到第 2 列，……，直到换成 D_n，共交换 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$ 次，故得

$$G_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

注意，上述结果不要当作公式去记忆，而是要学会分析行列式中元素分布的规律性，并掌握相应的计算方法.

例 1.5 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

解 先将第 2,4 列互换，再将第 2,4 行互换，最后利用拉普拉斯展开式.

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$$

$$=a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4-a_1b_2b_3a_4-b_1a_2a_3b_4.$$

【注】 注意：

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$$

是错误的. 不要当作 2 阶行列式计算. 展开式共有 4 项，且副对角线元素乘积的那一项取正号.

例 1.6 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a).$$

2. 递推法

例 1.7 $D_4=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) $a^4+2a^3+6a^2+2a+1$ (B) $a^4-2a^3+6a^2+a$

(C) $a^4+a^3+a^2+a+1$ (D) $a^4-a^3+a^2-a+1$

解 应选(D).

对这类行列式，适宜采用递推法计算．计算的关键是找到上、下阶行列式之间的关系式，即递推公式．

先将其余各行加至第 4 行，化简整理，再按第 4 行展开，有

$$D_4=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-(-1)^{4+1}a^4+D_3=a^4-(-1)^{3+1}a^3+D_2=a^4-a^3-(-1)^{2+1}a^2+D_1$$

$$=a^4-a^3+a^2-a+1,$$

故选(D).

【注】 本题也可考虑用归纳法. 考虑到行列式排列有序，可以从低阶计算，逐步升阶找出规律. 由

$$D_1=1-a,\quad D_2=\begin{vmatrix}1-a & a\\ -1 & 1-a\end{vmatrix}=1-a+a^2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1-a & a & 0\\ -1 & 1-a & a\\ 0 & -1 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)D_2-1\times(-1)^{2+1}a(1-a)=1-a+a^2-a^3,$$

可类推得 $D_4=a^4-a^3+a^2-a+1$，故选(D).

3. 行列式表示的函数和方程

这类问题的行列式元素 a_{ij} 往往不是具体数值，而是含 x 或 λ 等的函数，可能会在计算之外给读者带来新的困难和麻烦，自然也会给命题人带来新的角度. 请读者重视对此类问题的研究.

例 1.8 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$，求 $f(x+1)-f(x)$.

解

$$f(x+1)-f(x)=\begin{vmatrix}1 & 0 & x+1\\ 1 & 2 & (x+1)^2\\ 1 & 3 & (x+1)^3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & x+1\\ 1 & 2 & x^2+2x+1\\ 1 & 3 & x^3+3x^2+3x+1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 1 & 2 & x^2\\ 1 & 3 & x^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2x+1\\ 1 & 3 & 3x^2+3x+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 3x^2\end{vmatrix}=6x^2.$$

【注】 函数可以用含有变量的行列式表示，因此，对这类行列式当然也可以求极限、导数、积分等，如本题 $[f(x+1)-f(x)]'=(6x^2)'=12x$，$\int[f(x+1)-f(x)]\mathrm{d}x=2x^3+C$.

例 1.9 设 $f(x)=\begin{vmatrix}x-2 & x-1 & x-2 & x-3\\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3\\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5\\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3\end{vmatrix}$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

分析 此题实质上是计算行列式，观察计算出的关于 x 的多项式的次数. 在计算过程中要充分运用行列式的性质.

解 应选(B).

$$f(x)\xlongequal[[4]-[1]]{[2]-[1]\atop [3]-[1]}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal{[4]+[2]}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1),$$

由此可知 $f(x)$是二次多项式,故应选(B).

【注】 不要错误地认为 $f(x)$一定是四次多项式.

例 1.10 设关于 λ 的方程

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & a & \lambda-5 \end{vmatrix}=0$$

有二重根,求参数 a 的值.

解

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & a & \lambda-5 \end{vmatrix}\xlongequal{①-②}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & a & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{[2]+[1]}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-5)-3(a-1)]$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18-3a)=0.$$

若 $\lambda=2$ 是二重根,则

$$(\lambda^2-8\lambda+18-3a)\Big|_{\lambda=2}=4-16+18-3a=0,$$

得 $a=2$,经验证 $\lambda=2$ 是二重根.

若 $\lambda=2$ 不是二重根,则 $\lambda^2-8\lambda+18-3a=0$ 有两个相等的根,故 $\Delta=(-8)^2-4(18-3a)=0$,得 $a=\frac{2}{3}$. 此时,$\lambda=4$ 是二重根.

综上所述,$a=2$ 或 $a=\frac{2}{3}$.

二、抽象型行列式的计算

例 1.11 已知 4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=a$, $|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1|=b$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|=$ ______.

解 应填 $a+b$.

这是一个抽象的带字母的行列式计算题,要通过列变换将要求的行列式简化分离,最终表示为两个已