Documentación

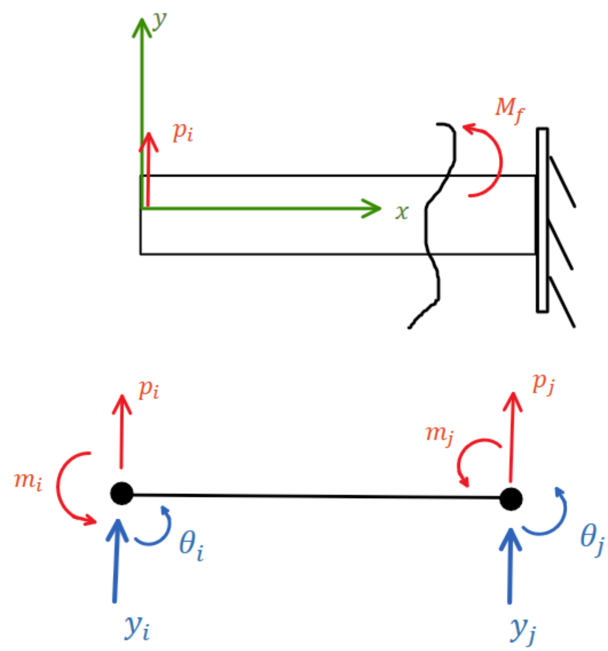
prueba de documentación utilizando livescript

El codigo fuente puede ser accedido a traves de su repositorio de github

Table of Contents

Elemento tipo Beam (viga)

Realizando el analisis de vigas de resistencia de materiales si una fuerza P actua el el borde de la viga se tiene que el momento flector $M_f(x) = P\,x$



Partiendo de las ecuaciones $\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{M_f}{\mathrm{EI}}$ y $\frac{d\,y}{d\,x} = \theta$ (valida para angulos pequeños proveniente de $\frac{d\,y}{d\,x} = \tan(\theta)$)

se pueden encontrar las deformaciones lineales (y) y angulares (θ) a partir del momento flector.

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} = \frac{M_f(x)}{\mathrm{EI}}$$

$$\theta(x) = \frac{d\,y}{d\,x} = \int \frac{M_f(x)}{\mathrm{EI}}\mathrm{dx} = \int \frac{P\,x}{\mathrm{EI}}\,\mathrm{dx} = \frac{P\,x^2}{2\mathrm{EI}} + c_1$$

Utilizando la restricción producido por el apoyo el cual no permite el giro se tiene que $\theta(l_e) = 0$ y por ende $c_1 = -\frac{P}{2\mathrm{EI}} l_e^2$. Evaluando para el borde de la viga.

$$\theta(0) = \frac{P\,(0)^2}{2\mathrm{EI}} + c_1 = -\frac{P}{2\mathrm{EI}} l_e^2$$

intengrando $\frac{d\,y}{d\,x}$

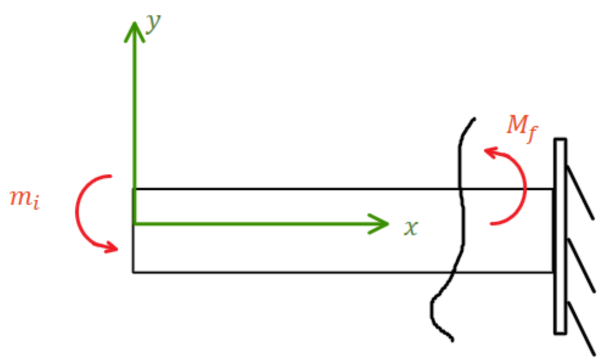
$$y(x) = \int \left(\frac{P\,x^2}{2\mathrm{EI}} - \frac{P}{2\mathrm{EI}} l_e^2 \right) \mathrm{dx}$$

$$y(x) = \frac{P\,x^3}{6\mathrm{EI}} - \frac{P}{2\mathrm{EI}} l_e^2 x + c_2$$

Utilizando nuevamente la restricción del apoyo el cual no permite un desplazamiento se tiene que $y(l_e) = 0$ y por ende $c_2 = \frac{P}{3\mathrm{EI}} l_e^3$.Evaluando para el borde de la viga.

$$y(0) = -\frac{P\,(0)^3}{6\mathrm{EI}} + \frac{P}{2\mathrm{EI}} l_e^2(0) + c_2 = \frac{P}{3\mathrm{EI}} l_e^3$$

Si a la viga se le aplica un momento m se tiene que el momento flector es $M_f(x) = -m$



Se tiene que la deformación angular es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{d^2 x} = \frac{M(x)}{\mathrm{EI}}$$

$$\theta(x) = \frac{d\,y}{d\,x} = \int \frac{M(x)}{\mathrm{EI}} \mathrm{dx} = \int -\frac{m}{\mathrm{EI}}\,\mathrm{dx} = -\frac{m\,x}{\mathrm{EI}} + c_1$$

Utilizando la restricción del apoyo $\theta(l_e) = 0$ se tiene que $c_1 = \frac{m}{\mathrm{EI}} l_e$. Evaluando para el borde de la viga

$$\theta(0) = \frac{P\,(0)^2}{2\mathrm{EI}} + c_1 = \frac{m}{\mathrm{EI}} l_e$$

integrando $\frac{d\,y}{d\,x}$ para obtener la

$$y(x) = \int \left(-\frac{m\,x}{\mathrm{EI}} + \frac{m}{\mathrm{EI}} l_e\right) \mathrm{dx}$$

$$y(x) = -\frac{m\,x^2}{2\mathrm{EI}} + \frac{m}{\mathrm{EI}} l_e x + c_2$$

Utilizando nuevamente la restricción del apoyo $y(l_e) = 0$ se tiene que $c_2 = -\frac{m}{\mathrm{EI}} l_e^{\,2}$

$$y(0) = -\frac{m\,x^2}{2\mathrm{EI}} + \frac{m}{\mathrm{EI}} l_e x + c_2 = -\frac{m}{\mathrm{EI}} l_e^{\,2}$$

En se tiene que las ecuaciones de la viga son:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI} = -m$$

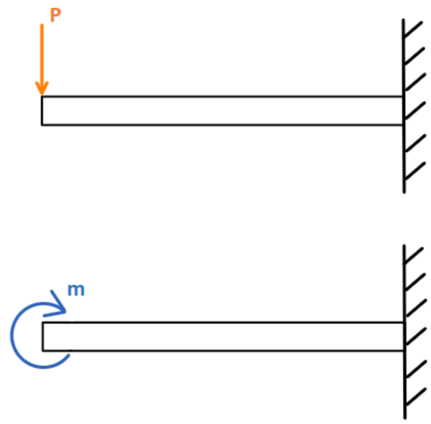
$$\theta = -\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{-mx}{EI} + \frac{mL}{EI}$$

$$y = \frac{-mx^2}{2EI} + \frac{mLx}{EI} + \frac{mL}{2EI}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-Px}{EI}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-Px^2}{2EI} + \frac{PL^2}{2EI}$$

$$y = \frac{-Px^3}{6EI} + \frac{PL^2 x}{2EI} + \frac{PL^3}{3EI}$$



Analizando para el elemento diferencial

$$y_i = \frac{p_i}{3\mathrm{EI}} l_e^{\,3} \qquad \theta_i = -\frac{p_i}{2\mathrm{EI}} l_e^{\,2}$$

$$y_i = -\frac{m_i}{2\mathrm{EI}} l_e^{\,2} \qquad \theta = \frac{m_i}{\mathrm{EI}} l_e$$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \begin{bmatrix} l_e^{\,3}/3 & -l_e^{\,2}/2 \\ -l_e^{\,2}/2 & l_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix}$$

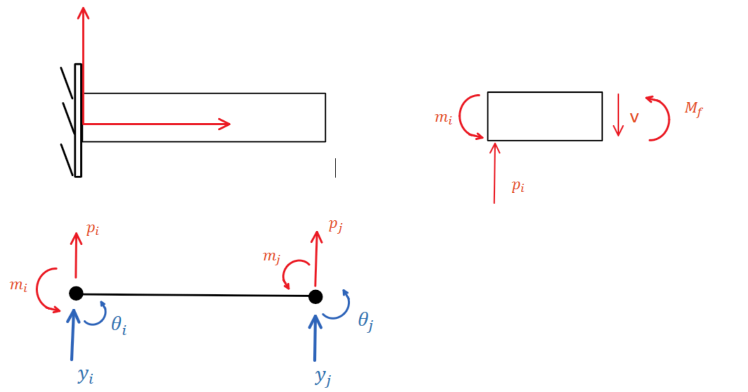
$$\begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{bmatrix} = \frac{1}{6\mathrm{EI}} \begin{bmatrix} 2l_e^{\,3} & -3l_e^{\,2} \\ -3l_e^{\,2} & 6l_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix} = \frac{1}{6\mathrm{EI}} B \begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix}$$

Despejando se puede obtener en terminos de las deformaciones.

$$\begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix} = 6\mathrm{EI}\ B^{-1} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix} = \frac{6\mathrm{EI}}{3l_e^4} \begin{bmatrix} 6l_e & 3l_e^2 \\ 3l_e^2 & 2l_e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{EI}}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$



A partir de las reacciones se tiene que el momento flector: $M_f(x) = P_i\,x - m_i$

$$\theta(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(P_i\,\frac{x^2}{2} - m_i\,x + c_1\right) \qquad \theta(0) = c_1 = 0 \qquad \theta(l_e) = \theta_j = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(p_i\,\frac{l_e^2}{2} - m_i\,l_e\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(P_i\,\frac{x^3}{6} - m_i\,\frac{x^2}{2} + c_2\right) \qquad y(0) = c_2 = 0 \qquad y(l_e) = \theta_j = \frac{1}{\mathrm{EI}}\left(p_i\,\frac{l_e^3}{6} - m_i\,\frac{l_e^2}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} y_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \begin{bmatrix} l_e^3/6 & -l_e^2/2 \\ l_e^2/2 & -l_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{EI}}{l_e^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l_e \\ -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_i \\ m_i \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{EI}}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

$$\sum F = 0 \qquad \sum M = 0$$

$$p_i + p_j = 0 \qquad m_i + m_j - l_e p_i = 0$$

$$p_j = -p_i \qquad m_j = l_e p_i - m_i$$

$$\begin{bmatrix} p_i \\ m_i \\ p_j \\ m_j \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{EI}}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

insertar elementos externos

imagenes

1.12. Determine the displacements of nodes of the spring system shown in Fig. P1.12.

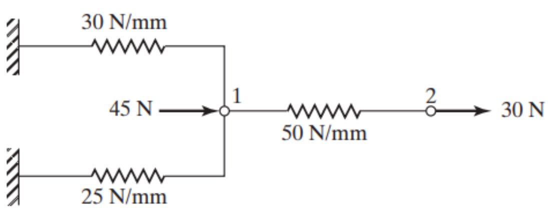


FIGURE P1.12

Tomado de Introduction to finite elements in engineering