

# Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* , *FFT*)

José Luis Lima de Jesus Silva

Julho, 2015



# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentação Teórica
  - Transformada Rápida de Fourier
  - Diagrama do Fluxo de Sinais
- 3 Algoritmos de Cooley-Tukey
  - Algoritmo de Cooley-Tukey:  $N=8$
  - Algoritmo de Cooley-Tukey:  $N=2^{\gamma}$
  - Algoritmo de Sande-Tukey:  $N=4$
- 4 Anomalias Potenciais utilizando a FFT
- 5 Conclusão
- 6 Referências



# Introdução



# Introdução

- Em 1994, Gilbert Strang descreveu a transformada rápida de Fourier como *"the most important numerical algorithm of our lifetime"* [6], sendo incluído no IEEE journal Computing in Science and Engineering entre os 10 melhores algoritmos desenvolvidos no século 20.
- A transformada discreta de Fourier foi originalmente desenvolvida por Cooley e Turkey [1] em 1965
- Segundo [5], uma das mais importantes aplicações na teoria dos campos potenciais foi realizada por Parker [3]. Parker demonstrou como uma transformada de Fourier poderia ser utilizada para calcular anomalias gravitacionais geradas por camadas heterogêneas e assimétricas de forma eficiente
- Oldenburg [3] deduziu um método para calcular o contraste de densidade da topografia através da inversão de anomalias gravitacionais observadas em um sistema de coordenadas Cartesiano bidimensional



# Fundamentação Teórica



# Fundamentação Teórica

Considere a transformada discreta de Fourier:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-2\pi jnk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

Considerando  $N=4$  e  $W = e^{-2\pi j/N}$ , podemos representar  $k$  e  $n$  através de números binários com 2-bits:

$$k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad k = (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11$$

$$n = 0, 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad n = (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11$$

tal que  $k = 2k_1 + k_0$  e  $n = 2n_1 + n_0$ . Os termos  $k_0, k_1, n_0, n_1$  estão restritos a valores absolutos 0 e 1.



# Fundamentação Teórica

A equação (1) para  $N=4$  pode ser reescrita como:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) \left[ e^{-2\pi j/N} \right]^{nk} = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (2)$$

Expandindo o somatório associado com a equação (1), teremos:

$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) \left[ e^{-2\pi j/N} \right]^0 = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^0 \\ X(1) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) \left[ e^{-2\pi j/N} \right]^k = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^k \\ X(2) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) \left[ e^{-2\pi j/N} \right]^{2k} = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^{2k} \\ X(3) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) \left[ e^{-2\pi j/N} \right]^{3k} = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^{3k} \end{aligned}$$

(3)



# Fundamentação Teórica

$$\begin{aligned}X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9\end{aligned}$$

Podemos também representá-la na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou de forma mais compacta:

$$\mathbf{X}(n) = \mathbf{W}^{nk} \mathbf{x}_0(k) \quad (5)$$

onde teremos um total de  $N^2$  multiplicações e  $N(N-1)$  adições complexas.





# Fundamentação Teórica

o termo  $W^p = W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$  da equação (2) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= [W^{4n_1k_1}] W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \end{aligned}$$

De forma que a equação (2), pode ser reescrita como:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[ \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (6)$$

A equação (6) é o fundamento do algoritmo *FFT*. Considerando apenas o somatório dentro dos colchetes:

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \quad (7)$$



# Fundamentação Teórica

podemos expandir os termos da equação (7):

$$x_1(0,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^0$$

$$x_1(0,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^0$$

$$x_1(1,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^2$$

$$x_1(1,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^2$$

e reescrever este sistema linear na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \quad (8)$$



# Fundamentação Teórica

o somatório externo associado com a equação (6) pode ser reescrita como:

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (9)$$

os termos da série (9) podem ser expandidos:

$$\begin{aligned} x_2(0, 0) &= x_1(0, 0) + x_1(0, 1) W^0 \\ x_2(0, 1) &= x_1(0, 0) + x_1(0, 1) W^2 \\ x_2(1, 0) &= x_1(1, 0) + x_1(1, 1) W^1 \\ x_2(1, 1) &= x_1(1, 0) + x_1(1, 1) W^3 \end{aligned} \quad (10)$$

e de forma mais compacta:

$$\begin{bmatrix} x_2(0, 0) \\ x_2(0, 1) \\ x_2(1, 0) \\ x_2(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0, 0) \\ x_1(0, 1) \\ x_1(1, 0) \\ x_1(1, 1) \end{bmatrix} \quad (11)$$



# Fundamentação Teórica

Substituindo a equação (8) em (11), obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

O algoritmo *FFT* formulado por Cooley-Turkey para uma amostragem  $N=4$  é a solução recursiva do seguinte conjunto de equações:

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \quad (13)$$

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (14)$$

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad (15)$$

Considerando a equação (12), podemos examinar o número de multiplicações para computar o vetor coluna  $\mathbf{x}_1(\mathbf{k})$ :

# Fundamentação Teórica

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Considerando as seguintes operações:

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) \quad (17)$$

$$x_1(1) = x_0(1) + W^0 x_0(3) \quad (18)$$

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(2) - W^0 x_0(2) \quad (19)$$

$$x_1(3) = x_0(1) + W^2 x_0(3) = x_0(3) - W^0 x_0(3) \quad (20)$$

- $x_1(0)$  e  $x_1(1)$  possuem um total de 2 operações de multiplicação e 2 operações de adição
- elementos  $x_1(2)$  e  $x_1(3)$  possuem um total de 2 operações de adição



# Fundamentação Teórica

Precisamos examinar o número de multiplicações para computar o vetor coluna  $\mathbf{x}_2(\mathbf{k})$ :

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde temos as seguintes operações:

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (22)$$

$$x_2(1) = x_1(0) + W^2 x_1(1) = x_1(0) - W^0 x_1(1) \quad (23)$$

$$x_2(2) = x_1(2) + W^1 x_1(3) \quad (24)$$

$$x_2(3) = x_1(2) + W^3 x_1(3) = x_1(2) - W^1 x_1(3) \quad (25)$$

- $x_2(0)$  e  $x_2(2)$  possuem um total de 2 operações de multiplicação e 2 operações de adição
- $x_2(1)$  e  $x_1(3)$  possuem um total de 2 operações de adição



# Fundamentação Teórica

Portanto, temos um total de  $N\gamma/2$  operações de multiplicação e  $N\gamma$  operações de adição complexa.

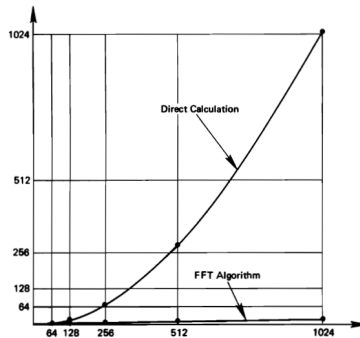


Figura: Comparação entre o número de multiplicações para o caso direto e utilizando o algoritmo FFT



# Diagrama do Fluxo de Sinais

O diagrama de fluxo de sinais é representação das operações computadas pelo algoritmo FFT na fatoração da matriz. Cada coluna do esquema corresponde a uma matriz fatorada, portanto, teremos  $\gamma$  matrizes fatoradas com N pontos cada.

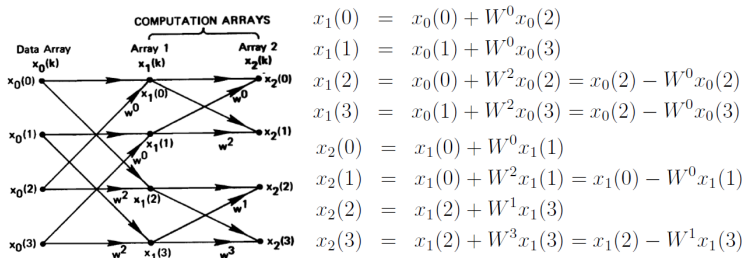


Figura: Diagrama de Fluxo de Sinais para FFT, N=4





# Diagrama do Fluxo de Sinais

Considerando  $N = 2^4$ , verificamos a dualidade dos nós  $x_1(0)$  e  $x_1(8)$ , cujas operações envolvem os nós  $x_0(0)$  e  $x_0(8)$ .

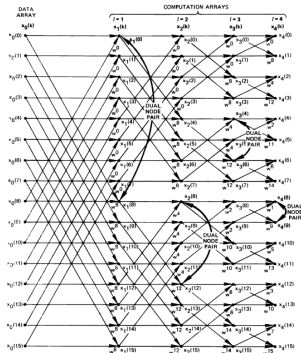


Figura: Diagrama de Fluxo de Sinais para FFT,  $N=16$



# Algoritmo de Cooley-Tukey: $N=8$

Na formulação da *FFT* de Cooley-Tukey para  $N = 2^3 = 8$ , podemos utilizar a notação binária modificada:

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad \text{ou} \quad k = (k_2, k_1, k_0) = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

$$k = 4k_2 + 2k_1 + k_0 \quad k_i = 0 \text{ ou } 1$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad \text{ou} \quad n = (n_2, n_1, n_0) = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$$

$$n = 4n_2 + 2n_1 + n_0 \quad n_i = 0 \text{ ou } 1$$

A equação (2) é transformada em:

$$\begin{aligned} X(n_2, n_1, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) \left[ e^{-2\pi j/N} \right]^{nk} \\ &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} \end{aligned} \quad (26)$$



# Algoritmo de Cooley-Tukey: $N=8$

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} &= W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} \\ &= W^{(4n_2+2n_1+n_0)4k_2} W^{(4n_2+2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (27)$$

onde podemos simplificar a equação (27), considerando que  $W^8 = e^{[2\pi j/8]^8}$ :

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} &= W^{8(2n_2k_2)} W^{8n_1k_2} W^{4n_0k_2} W^{8n_2k_1} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{4n_0k_2} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (28)$$

Portanto, a equação (26) pode ser reescrita utilizando a equação (28):

$$X(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0k_2} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0}$$



# Algoritmo de Cooley-Tukey: N=8

De forma que podemos determinar a matriz de fatoração através da solução recursiva do conjunto de equações:

$$x_1(n_0, k_1, k_0) = \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0 k_2} \quad (29)$$

$$x_2(n_0, n_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)2k_1} \quad (30)$$

$$x_3(n_0, n_1, n_2) = \sum_{k_0=0}^1 x_2(n_0, k_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \quad (31)$$

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_0, n_1, n_2) \quad (32)$$



# Algoritmo de Cooley-Tukey: $N=8$

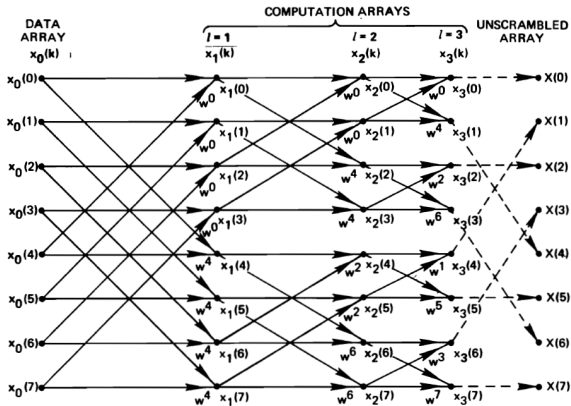


Figura: Diagrama de Fluxo de Sinais de Cooley-Tukey  $N=8$



# Algoritmo de Cooley-Tukey: $N=2^\gamma$

Considerando  $N = 2^\gamma$ , podemos generalizar o método utilizando  $n$  e  $k$  na forma binária:

$$k = 0, 1, \dots, 2^\gamma - 1 \quad \text{ou} \quad k = (k_{\gamma-1}, \dots, k_1, k_0) \quad (33)$$

$$k = \sum_{i=\gamma-1}^0 2^i k_i = 2^{\gamma-1} k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} k_{\gamma-2} + \dots + k_0 \quad k_i = 0 \text{ ou } 1 \quad (34)$$

$$n = 0, 1, \dots, 2^\gamma - 1 \quad \text{ou} \quad n = (n_{\gamma-1}, \dots, n_1, n_0) \quad (35)$$

$$n = \sum_{i=\gamma-1}^0 2^i n_i = 2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0 \quad n_i = 0 \text{ ou } 1 \quad (36)$$

Aplicando esta representação na equação (2), teremos:

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) W^p \quad (37)$$



## Algoritmo de Cooley-Tukey: $N=2^\gamma$

onde  $p = (2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + 2^{\gamma-\gamma}n_1 + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}k_{\gamma-2} + \dots + 2^{\gamma-\gamma}k_1 + k_0)$ .  
Portanto, podemos reescrever  $W^p$ :

$$\begin{aligned} W^p = & W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} \\ & \dots W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-\gamma}k_1)} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(k_0)} \end{aligned} \quad (38)$$

Considerando que  $W^N = W^{2^\gamma} = e^{[-2\pi j/M]^N} = 1$  no primeiro termo da equação (38):

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + 2^{\gamma-\gamma}n_1 + n_0)(2^{\gamma-1}k_{\gamma-1})} &= [W^{2^\gamma(2^{\gamma-2}n_{\gamma-1}k_{\gamma-1})}] [W^{2^\gamma(2^{\gamma-3}n_{\gamma-2}k_{\gamma-1})}] \\ &\quad \times \dots [W^{2^\gamma(n_1k_{\gamma-1})}] [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}] \\ &= [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}] \end{aligned} \quad (39)$$



# Algoritmo de Cooley-Tukey: N=2<sup>γ</sup>

Podemos aplicar o mesmo procedimento ao segundo termo da equação (38):

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+2^{\gamma-\gamma}n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} &= [W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-3}n_{\gamma-1}k_{\gamma-2})}] [W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-4}n_{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \\ &\times \dots [W^{2^{\gamma-1}(n_1k_{\gamma-2})}] [W^{2^{\gamma-2}(n_0k_{\gamma-2})}] \\ &= [W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \end{aligned} \quad (40)$$

e generalizar a aplicação do procedimento para os termos residuais, de forma que a equação (38) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}] \\ &\times [W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \dots \times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)(k_0)} \end{aligned} \quad (41)$$





# Algoritmo de Cooley-Tukey: $N=2^\gamma$

O processo de fatoração pode ser resolvido pelo conjunto de equações recursivas que representam a formulação original de Cooley-Tukey para *FFT* considerando  $N = 2^\gamma$ .

$$x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) [W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})}] \quad (42)$$

$$x_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) [W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})}]$$

.

.

.

$$x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) = \sum_{k_0=0}^1 x_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)(k_0)}$$

(43)



## Algoritmo de Sande-Tukey: N=4

Sande-Tukey desenvolveu uma variante do método em contraste com a aproximação de Cooley-Tukey para uma amostragem N=4.

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (44)$$

No algoritmo de Cooley-Tukey para uma amostragem N=4, separamos as componentes k, entretanto, o algoritmo de Sande-Tukey separa as componentes n:

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= [W^{4n_1k_1}] [W^{2n_1k_0}] [W^{(2k_1+k_0)n_0}] \\ &= W^{2n_1k_0} W^{(2k_1+k_0)n_0} \end{aligned} \quad (45)$$

Aplicando a equação (45) em (44), teremos:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[ \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} W^{n_0k_0} \right] W^{2n_1k_0} \quad (46)$$



## Algoritmo de Sande-Tukey: N=4

Desta forma, temos o procedimento para a fatoração da matriz através da aplicação das seguintes equações recursivas:

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} W^{n_0 k_0} \quad (47)$$

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{2n_1 k_0} \quad (48)$$

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad (49)$$



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

- Segundo Parker [3], um método largamente utilizado na interpretação de dados geofísicos é correlação entre os campos potenciais observados e aqueles produzidos por modelos crustais . O método convencional de discretização do meio em blocos prismáticos ou retangulares, onde a soma parcial destes blocos gera um efeito potencial total, é utilizado na obtenção dos campos potenciais teóricos.
- Quando o modelo é complexo e uma grande quantidade de dados é disponibilizado, o tempo computacional aumenta drasticamente. O método de fatoração denominado transformada rápida de Fourier se tornou uma alternativa na redução do número de operações para computação da transformada de Fourier. Parker demonstrou como uma série de transformada de Fourier podem ser utilizada para calcular a anomalia magnético ou gravitacional causada por uma camada assimétrica com material heterogêneo.



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

A transformada de Fourier bidimensional é dada por:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi j(ux + vy)} dx dy \quad (50)$$

onde a equação (50) é análoga à transformada de Fourier unidimensional, entretanto, a função bidimensional  $h(x,y)$  tem componentes com  $\cos 2\pi(ux + vy)$  e  $\sin 2\pi(ux + vy)$ . Um exemplo prático pode ser a transformada de Fourier de uma função caixa, onde  $h(x,y)=1$  no intervalo  $x,y \in [-1,1]$  e  $h(x,y)=0$  caso  $x,y$  não pertença ao intervalo  $[-1,1]$ . Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi jy} dy \int_{-1}^1 e^{-2\pi jux} dx \\ &= \frac{\sin(2\pi u) \sin(2\pi v)}{\pi^2 uv} \end{aligned} \quad (51)$$

A próxima figura é uma ilustração da aplicação da transformada de Fourier bidimensional considerando a equação (51).



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

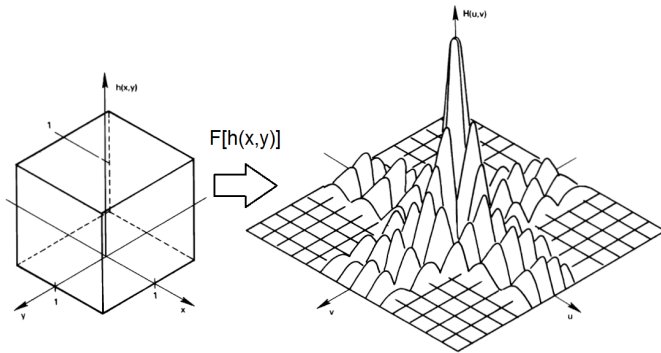


Figura: transformada de Fourier bidimensional considerando  $h(x,y) = 1$  no intervalo  $x,y \in [-1,1]$ .



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

A transformada de Fourier bidimensional pode ser interpretada como duas transformadas unidimensionais sucessivas:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(u, x) e^{-2\pi j(vy)} dy \quad (52)$$

tal que  $Z(u, x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi j(uv)} dx$ . Podemos discretizar  $h(x, y)$  nas dimensões  $x$  e  $y$  com intervalos de amostragem  $T_x$  e  $T_y$  respectivamente. A função de amostragem pode ser reescrita como  $h(pT_x, qT_y)$ , tal que  $p=0,1,...,N-1$  e  $q=0,1,...,M-1$ . Desta forma, teremos a seguinte transformada discreta de Fourier:

$$H(n/NT_x, m/MT_y) = \sum_{q=0}^{M-1} \left[ \sum_{p=0}^{N-1} h(pT_x, qT_y) e^{-2\pi np/N} \right] e^{-2\pi mq/M} \quad (53)$$

onde  $n=0,1,...,N-1$  e  $m=0,1,...,M-1$ . Portanto, temos M transformada de Fourier unidimensionais, equivalente a uma transformada para cada  $q$ .



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

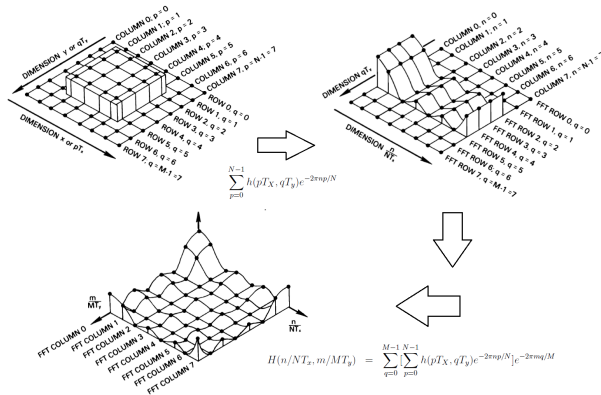


Figura: Procedimento gráfico da FFT bidimensional aplicada a uma função caixa.





# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

Parker [3] derivou uma expansão em série de transformadas de Fourier bidimensionais que computam anomalias gravitacionais e magnéticas geradas por uma camada não uniforme com material heterogêneo. Ele definiu a transformada de Fourier de uma função  $f(\vec{r})$  como:

$$F[f(\vec{r})] = \int_X f(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (54)$$

onde  $X$  é o plano  $x$ - $y$ ,  $\vec{k}$  é o vetor de onda da função transformada e  $\vec{r}$  representa as posições projetadas no plano  $x$ - $y$ . Considerando a atração gravitacional causada por uma camada de material, tal que o limite inferior é o plano  $z=0$  e o limite superior é definido pela equação  $z = h(\vec{r})$ , de forma que  $h(\vec{r}) = 0$  em uma região fora do domínio  $D$ .

$$U(\vec{r}_0) = G\rho \int_V dV / |\vec{r}_0 - \vec{r}| = G\rho \int_D dS \int_0^{h(\vec{r})} dz / |\vec{r}_0 - \vec{r}| \quad (55)$$



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

A transformada de Fourier aplicada ao potencial pode ser reescrita:

$$F[U(\vec{r}_0)] = G\rho \int_X dS_0 \int_D e^{(j\vec{k} \cdot \vec{r}_0)} dS \int_0^{h(\vec{r})} dz / |\vec{r}_0 - \vec{r}| = G\rho \int_D dS \int_0^{h(\vec{r})} dz \int_X dS_0 e^{(j\vec{k} \cdot \vec{r}_0)} / |\vec{r}_0 - \vec{r}| \quad (56)$$

Segundo Parker, podemos expressar a equação (56) como uma série de transformadas de Fourier:

$$F[U(\vec{r}_0)] = 2\pi G\rho e^{-|\vec{k}|z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{k}|^{n-2}}{n!} F[h^n(\vec{r})] \quad (57)$$

A atração vertical do material gera um termo residual para correção do terreno. Na região acima das massas  $\nabla U = 0$ . Parker deduziu uma relação entre o efeito de variação vertical da gravidade  $\delta g$  e a topografia massiva que gera este efeito  $h(\vec{r})$  no domínio de Fourier:

$$F[\delta g] = -2\pi G\rho e^{-|\vec{k}|z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{k}|^{n-1}}{n!} F[h^n(\vec{r})] \quad (58)$$



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

Shin [5] realizou a modelagem direta de uma elevação (2D-*Bump*) considerando 128 pontos de dados com 1km de intervalo no eixo x e contraste de densidade constante  $1.0\text{g/cm}^3$ . O cálculo do contraste de densidade da topografia gerado por dados de anomalia foi realizado através da equação de Oldenburg :

$$F[h(x)] = -F[\delta g(x)]e^{-|\vec{k}|z_0}/(2\pi G\rho) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\vec{k}|^{n-1}}{n!} F[h^n(\vec{x})] \quad (59)$$



# Anomalias Potenciais utilizando a FFT

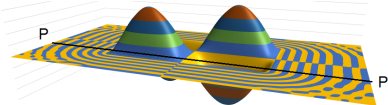
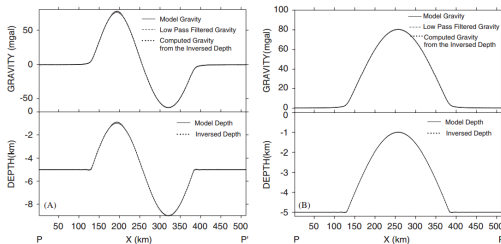


Figura: A inversão de dados de anomalia para a determinação das profundidades e dos efeitos gravitacionais estão em boa concordância com os resultados da modelagem direta. A maioria das diferenças entre as profundidades exibiram um erro inferior 10m. As diferenças máximas são inferiores a 112m em (A) e 56m em (B).



# Conclusão



# Conclusão

A transformada de discreta de Fourier é uma técnica largamente empregada em uma variedade de aplicações para o processamento de sinais em geofísica. A sua utilidade reside na drástica redução do tempo computacional durante o processo de modelagem direta e inversa em problemas que utilizam a transformada discreta de Fourier (*DFT*).



# Referências

- [1] J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. Mathematics of Computation, 1965.
- [2] D. W. Oldenburg. The Inversion and Interpretation of Gravity Anomalies. Geophysics.
- [3] R. L. Parker. The rapid calculation of potential anomalies. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1973.
- [4] K. Rao, D. Kim, and J. Hwang. Fast Fourier Transform: Algorithms and Applications. Springer.
- [5] Y. H. Shin, K. S. Choi, and H. Xu. Three-dimensional forward and inverse models for gravity based on the fast fourier transform. Computers and Geosciences.
- [6] G. Strang. Wavelets. American Scientist.

