

Transformada Rápida de Fourier e Aplicações (Fast Fourier Transform, FFT)

José Luís Lima de Jesus Silva

Universidade Federal da Bahia
Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia
Instituto de Geociências, IFN, 40170-290, Federação, Salvador, BA, Brasil
E-mail: jseluisj@yahoo.com.br

Resumo

O desenvolvimento de algoritmos que calculam a transformada rápida de Fourier *FFT*, gerou diversas tentativas de aplicação no processamento de dados geofísicos. Segundo (Shin et al., 2006), uma das mais importantes aplicações na teoria dos campos potenciais foi realizada por Parker (Parker, 1973), que demonstrou que a transformada de Fourier pode ser utilizada para calcular anomalias gravitacionais geradas por camadas heterogêneas e assimétricas utilizando a transformada Discreta de Fourier. Segundo (Rao et al., 2010), a transformada rápida de Fourier (*FFT*) é um algoritmo eficiente para desenvolver a transformada discreta de Fourier (*DFT*). Neste trabalho exploramos os fundamentos da (*FFT*) e uma aplicação à Geofísica.

Palavras-chave: FFT, Teoria de campos potenciais, DFT

Abstract

The development of algorithms that computes the fast Fourier transform (FFT) generated several attempts at implementing geophysical data processing. According (Shin et al., 2006), one of the most important applications in the potential theory of fields was accomplished by Parker (Parker, 1973), which demonstrated that the Fourier transform can be used to calculate gravitational anomalies generated by asymmetric heterogeneous layers efficiently using the discrete Fourier transform. According (Rao et al., 2010), the FFT is an efficient algorithm to develop the discrete DFT. In this paper we explore the fundamentals of FFT and an application to potential theory in Geophysics.

Keywords: FFT, potential field theory, DFT

1 Introdução

Em 1994, Gilbert Strang descreveu a transformada rápida de Fourier como "*the most important numerical algorithm of our lifetime*" (Strang, 1994), sendo incluído no *IEEE journal Computing in Science and Engineering* entre os 10 melhores algoritmos desenvolvidos no século 20. Segundo (Rao et al., 2010), a transformada rápida de Fourier (*FFT*) é um algoritmo eficiente para desenvolver a transformada discreta de Fourier (*DFT*). A transformada discreta de Fourier mapeia uma sequência $x(n)$ no domínio da frequência, sendo uma técnica largamente utilizada em uma variedade de aplicações, vale ressaltar, desde o processamento digital de sinais à solução de equações diferenciais parciais considerando a multiplicação de grandes inteiros. A transformada discreta de Fourier foi originalmente desenvolvida por Cooley e Turkey (Cooley and Tukey, 1965) em 1965, entretanto, a aproximação dos fatores primos, split radix, vector radix, split vector radix e o algoritmo da transformada de Fourier de Winograd (WFTA) (Rao et al., 2010) fazem parte de uma extensa variedade de implementações que computam a *DFT* eficientemente.

O desenvolvimento dos algoritmos que computam a transformada rápida de Fourier *FFT* gerou diversas tentativas de aplicação no processamento de dados geofísicos. Segundo (Shin et al., 2006), uma das mais importantes aplicações na teoria dos campos potenciais foi realizada por Parker (Parker, 1973). Parker demonstrou como uma transformada de Fourier poderia ser utilizada para calcular anomalias gravitacionais geradas por camadas heterogêneas e assimétricas de forma eficiente. Posteriormente, Oldenburg (Oldenburg, 1974) deduziu um método para calcular o contraste de densidade da topografia através da inversão de anomalias gravitacionais observadas em um sistema de coordenadas Cartesiano bidimensional. Atualmente, a *FFT* é utilizada na modelagem direta e inversa de uma extensa base de dados gravitacionais no espaço Cartesiano tridimensional, fator que gera uma perda de eficiência devido ao aumento da complexidade computacional. No processo de modelagem direta e inversa, devemos considerar o balanço entre a velocidade e exatidão, portanto, os trabalhos desenvolvidos por Parker (Parker, 1973) e Oldenburg (Oldenburg, 1974) ainda são largamente explorados.

2 Formulação Matricial da *FFT*

Considere a transformada discreta de Fourier:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-2\pi jnk/N} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad ; \quad j = \sqrt{-1} \quad (1)$$

onde a equação (1) descreve N equações como combinação linear dos coeficientes $x_0(k)$. Considerando $N=4$ e $W = e^{-2\pi j/N}$, podemos representar k e n através de números binários com 2-bits:

$$\begin{aligned} k &= 0, 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad k = (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11 \\ n &= 0, 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad n = (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11 \end{aligned}$$

tal que $k = 2k_1 + k_0$ e $n = 2n_1 + n_0$. Os termos k_0, k_1, n_0, n_1 estão restritos a valores absolutos 0 e 1, portanto, escrevemos o número binário em uma base 10. A equação (1) para $N=4$

pode ser reescrita como:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) [e^{-2\pi j/N}]^{n_k} = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (2)$$

O somatório presente na equação (1) pode ser reformulado, de forma que a soma com relação a todos os bits da representação binária de k possam ser devidamente enumerados. Considerando uma amostragem $n=0,..N-1$, podemos expandir os termos da equação (1):

$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) [e^{-2\pi j/N}]^0 = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^0 \\ X(1) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) [e^{-2\pi j/N}]^k = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^k \\ X(2) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) [e^{-2\pi j/N}]^{2k} = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^{2k} \\ X(3) &= \sum_{k=0}^3 x_0(k) [e^{-2\pi j/N}]^{3k} = \sum_{k=0}^3 x_0(k) W^{3k} \end{aligned} \quad (3)$$

e reescrever a equação (3):

$$\begin{aligned} X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\ X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\ X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\ X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9 \end{aligned} \quad (4)$$

Podemos também representá-la na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (5)$$

ou de forma mais compacta:

$$\mathbf{X}(\mathbf{n}) = \mathbf{W}^{\mathbf{n}\mathbf{k}} \mathbf{x}_0(\mathbf{k}) \quad (6)$$

Examinando a equação 5 com \mathbf{W} e $\mathbf{x}_0(\mathbf{k})$ na forma complexa, teremos um total de N^2 multiplicações e $N(N-1)$ adições complexas para extrair as matrizes. O sucesso da *FFT* reside no fato de que o algoritmo reduz o número de multiplicações e adições para computar a equação 6.

Consideremos a ilustração do algoritmo *FFT* para uma amostragem $x_0(k)$ com $N = 2^\gamma = 2^2 = 4$ pontos. Inicialmente, precisamos reescrever a equação (5) como:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

O termo W^{nk} , considerando $N=4$; $n=N-1=3$; $k=3$, pode ser representado por $W^{nk} = W^{nk \bmod(N)}$, tal que $nk \bmod(N)$ é o resto da divisão de nk por N .

$$W^{nk} = W^9 = \exp \left[\frac{-2\pi j}{4}(9) \right] = W^1 = W^{nk \bmod(N)} \quad (8)$$

Generalizando, o termo $W^p = W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)}$ da equação (2) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= [W^{4n_1k_1}] W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \end{aligned}$$

E a equação (2) tem a forma :

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (9)$$

A equação (9) é o fundamento do algoritmo *FFT*. Considerando apenas o somatório dentro dos colchetes:

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \quad (10)$$

podemos expandir os termos da equação (10):

$$\begin{aligned} x_1(0, 0) &= x_0(0, 0) + x_0(1, 0)W^0 \\ x_1(0, 1) &= x_0(0, 1) + x_0(1, 1)W^0 \\ x_1(1, 0) &= x_0(0, 0) + x_0(1, 0)W^2 \\ x_1(1, 1) &= x_0(0, 1) + x_0(1, 1)W^2 \end{aligned}$$

e reescrever este sistema linear na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(0, 0) \\ x_1(0, 1) \\ x_1(1, 0) \\ x_1(1, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0, 0) \\ x_0(0, 1) \\ x_0(1, 0) \\ x_0(1, 1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Na equação (10), o somatório externo associado com a equação (9) pode ser reescrita como:

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad (12)$$

e expandindo os termos da série (12):

$$\begin{aligned} x_2(0, 0) &= x_1(0, 0) + x_1(0, 1)W^0 \\ x_2(0, 1) &= x_1(0, 0) + x_1(0, 1)W^2 \\ x_2(1, 0) &= x_1(1, 0) + x_1(1, 1)W^1 \\ x_2(1, 1) &= x_1(1, 0) + x_1(1, 1)W^3 \end{aligned} \quad (13)$$

podemos reescrevê-los na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Substituindo a equação (11) em (14), obtemos:

$$\begin{bmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Portanto, a composição dos somatórios determina a fatoração da matriz e deve satisfazer a condição:

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad (16)$$

Percebemos uma permutação na ordem dos valores de $X(n_1, n_0)$ com relação a $x_2(n_0, n_1)$ devido à aplicação do algoritmo *FFT*. Neste caso, temos a formulação do algoritmo *FFT* de Cooley-Turkey (Cooley and Tukey, 1965) para uma amostragem $N=4$ sendo representado por uma solução recursiva do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} \\ x_2(n_0, n_1) &= \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ X(n_1, n_0) &= x_2(n_0, n_1) \end{aligned} \quad (17)$$

Para avaliarmos as vantagens na aplicação da transformada rápida de Fourier devido à redução do número de operações, podemos simplificar a notação binária desenvolvida na equação (15) e considerar a fatoração da matriz (7) devido à expansão dos termos da equação (1), portanto :

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Realizamos a permutação entre as linhas 1 e 2 do vetor coluna. Vale ressaltar que a fatoração garante a eficiência na aplicação do algoritmo *FFT*. Considerando a equação (18), podemos examinar o número de multiplicações para computar o vetor coluna $\mathbf{x}_1(\mathbf{k})$:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Considerando as seguintes operações:

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) \quad (20)$$

$$x_1(1) = x_0(1) + W^0 x_0(3) \quad (21)$$

$$x_1(2) = x_0(0) + W^2 x_0(2) = x_0(2) - W^0 x_0(2) \quad (22)$$

$$x_1(3) = x_0(1) + W^2 x_0(3) = x_0(2) - W^0 x_0(3) \quad (23)$$

Ambos os elementos $x_1(0)$ e $x_1(1)$ possuem uma operação de multiplicação complexa e uma operação de adição complexa. Ambos os elementos $x_1(2)$ e $x_1(3)$ possuem apenas uma operação de adição complexa. Portanto, o vetor intermediário $\mathbf{x}_1(\mathbf{k})$ é determinado por quatro multiplicações e duas adições complexas. Utilizando a equação (19), simplificamos a equação (18) para verificar as operações associadas à composição das matrizes fatoradas. Considerando a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (24)$$

e as seguintes operações:

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (25)$$

$$x_2(1) = x_1(0) + W^2 x_1(1) = x_1(0) - W^0 x_1(1) \quad (26)$$

$$x_2(2) = x_1(2) + W^1 x_1(3) \quad (27)$$

$$x_2(3) = x_1(2) + W^3 x_1(3) = x_1(2) - W^1 x_1(3) \quad (28)$$

Ambos os elementos $x_2(0)$ e $x_2(2)$ possuem uma operação de multiplicação complexa e uma operação de adição complexa. Os elementos $x_2(1)$ e $x_1(3)$ possuem um total de 2 operação de adição complexa. Portanto, o vetor intermediário $\mathbf{x}_1(\mathbf{k})$ é determinado por 4 multiplicações complexas e 2 adições complexas. A equação (18), considerando $N = 2^\gamma, \gamma = 2$, possui um total de 4 operações de multiplicação complexa ($N\gamma/2$) e 8 operações de adição complexa ($N\gamma$). É importante notar a redução no número de operações, dado que geralmente teríamos um total de 16 operações de multiplicação (N^2) e 12 operações de adição ($N(N-1)$), como podemos visualizar na figura (1).

O procedimento de fatoração gera uma discrepância nos resultados devido à permutação entre as linhas do vetor $\mathbf{X}(\mathbf{n})$. Neste caso, a notação binária pode ser utilizada para reverter os argumentos, de forma que:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para situações em que $N \geq 4$, também podemos utilizar uma formulação de diagramas do fluxo de sinais para descrever o processo de fatoração da equação (18).

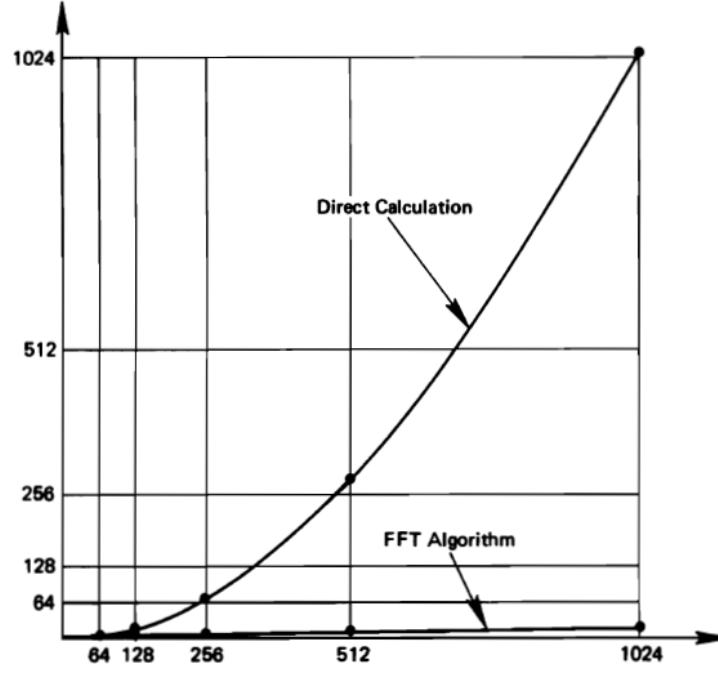


Figura 1: Comparação entre o número de multiplicações para o caso direto e utilizando o algoritmo *FFT*

3 Diagrama do fluxo de sinais N=4, N=16

Podemos converter a matriz fatorada da equação (18) em um diagrama do fluxo de sinais, como ilustrado na (2). Representamos o vetor de dados $\mathbf{x}_0(\mathbf{k})$ por uma coluna vertical composta por 4 nós presentes na região esquerda do esquema. Na segunda e terceira coluna vertical, ordenamos os nós associados ao vetor $\mathbf{x}_1(\mathbf{k})$ e $\mathbf{x}_2(\mathbf{k})$ respectivamente. Como geralmente $N = 2^\gamma$, com exceção do vetor de dados $\mathbf{x}_0(\mathbf{k})$, teremos γ vetores no digrama do fluxo de sinais. O diagrama pode ser interpretado considerando que cada nó recebe duas

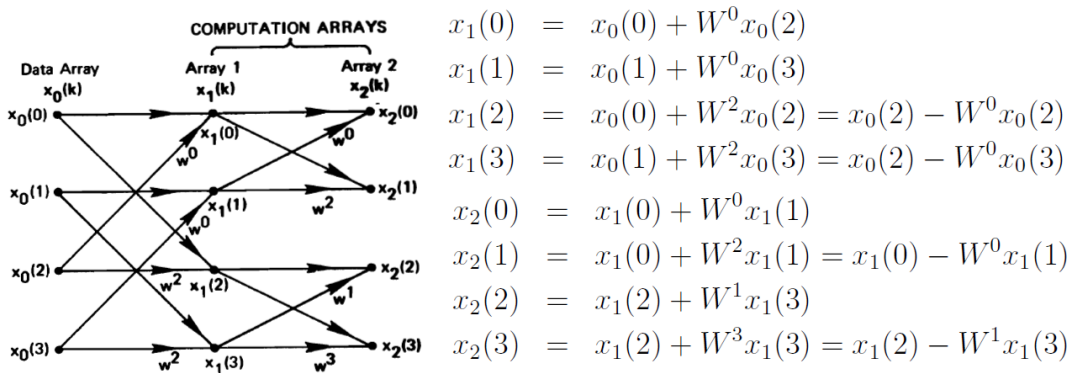


Figura 2: Diagrama do fluxo de sinais para *FFT* considerando N=4 (butterfly)

linhas sólidas (caminhos de transmissão) de nós anteriores. Um caminho transmite ou recebe uma quantidade de um nó presente em um ordenamento e o multiplica por um fator W^p . Desta forma, transformamos o resultado em uma entrada que será transmitida para o nó subsequente. A ausência do fator multiplicativo W^p no diagrama implica que $W^p = 1$. Os

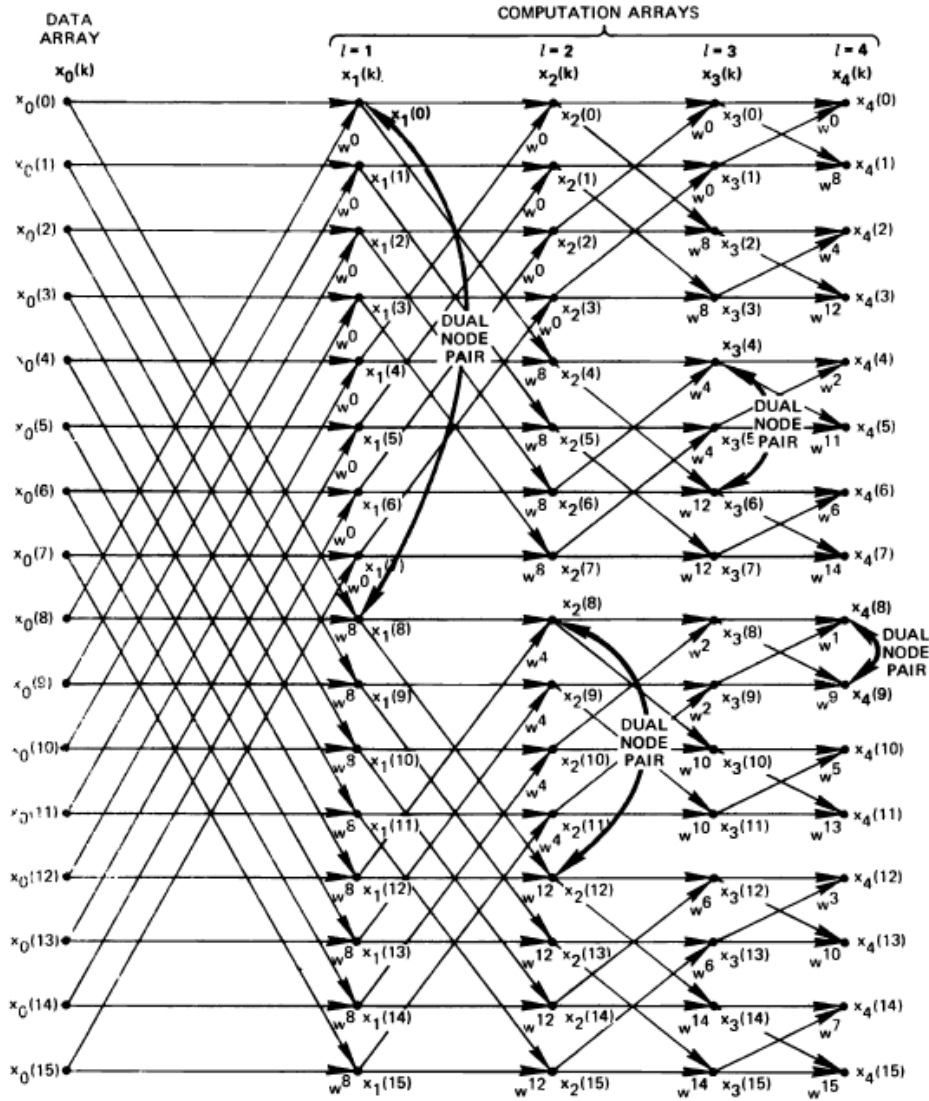


Figura 3: Diagrama do fluxo de sinais para *FFT* considerando $N=16$

resultados advindos de dois caminhos de transmissão distintos que adentram o mesmo nó são combinados através da operação de adição.

Este diagrama é uma forma concisa de representar as operações computadas pelo algoritmo FFT na fatoração da matriz (18). Cada coluna do esquema corresponde a uma matriz fatorada, portanto, teremos γ matrizes fatoradas com N pontos cada. Na figura 3 podemos observar algumas propriedades gerais relacionadas com o processo de fatoração da matriz para $N=16$. Verificamos a dualidade dos nós $x_1(0)$ e $x_1(8)$, cujas operações envolvem os nós $x_0(0)$ e $x_0(8)$. Como os nós que possuem a propriedade dual exibem apenas uma operação de multiplicação complexa, podemos desenvolver um fluxograma mais eficiente para programação do algoritmo (Rao et al., 2010).

4 Algoritmos de Cooley-Tukey na Base 2

4.1 Cooley-Tukey: N=8

Na formulação da *FFT* de Cooley-Tukey para $N = 2^3 = 8$, podemos utilizar a notação binária modificada:

$$\begin{aligned} k &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad \text{ou} \quad k = (k_2, k_1, k_0) = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \\ k &= 4k_2 + 2k_1 + k_0 \quad k_i = 0 \text{ ou } 1 \\ n &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad \text{ou} \quad n = (n_2, n_1, n_0) = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 \\ n &= 4n_2 + 2n_1 + n_0 \quad n_i = 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

A equação (2) é transformada em:

$$\begin{aligned} X(n_2, n_1, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) [e^{-2\pi j/N}]^{nk} \\ &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} \end{aligned} \quad (30)$$

e podemos escrever W^p :

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} &= W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} \\ &= W^{(4n_2+2n_1+n_0)4k_2} W^{(4n_2+2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (31)$$

onde podemos simplificar a equação (31), considerando que $W^8 = e^{[2\pi j/8]^8}$:

$$\begin{aligned} W^{(4n_2+2n_1+n_0)(4k_2+2k_1+k_0)} &= W^{8(2n_2k_2)} W^{8n_1k_2} W^{4n_0k_2} W^{8n_2k_1} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{4n_0k_2} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad (32)$$

Portanto, a equação (30) pode ser reescrita utilizando a equação (32):

$$X(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0k_2} W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0}$$

De forma que podemos determinar a matriz de fatoração através da solução recursiva do conjunto de equações derivadas do ordenamento do somatório (33):

$$x_1(n_0, k_1, k_0) = \sum_{k_2=0}^1 x_0(k_2, k_1, k_0) W^{4n_0k_2} \quad (33)$$

$$x_2(n_0, n_1, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)2k_1} \quad (34)$$

$$x_3(n_0, n_1, n_2) = \sum_{k_0=0}^1 x_2(n_0, k_1, k_0) W^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \quad (35)$$

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_0, n_1, n_2) \quad (36)$$

O diagrama do fluxo de sinais para N=8 associado com o processo de fatoração pode ser representado através da figura (4).

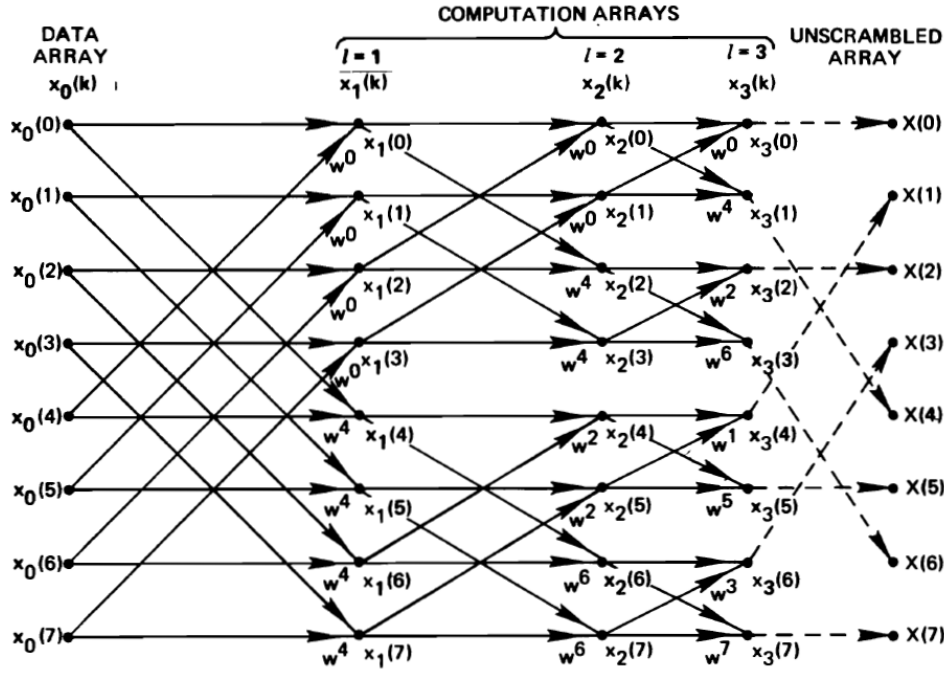


Figura 4: Diagrama do fluxo de sinais para FFT considerando N=8

4.2 Cooley-Tukey: $N = 2^\gamma$

Considerando $N = 2^\gamma$, podemos generalizar o método utilizando n e k na forma binária:

$$k = 0, 1, \dots, 2^\gamma - 1 \quad \text{ou} \quad k = (k_{\gamma-1}, \dots, k_1, k_0) \quad (37)$$

$$k = \sum_{i=\gamma-1}^0 2^i k_i = 2^{\gamma-1} k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} k_{\gamma-2} + \dots + k_0 \quad k_i = 0 \text{ ou } 1 \quad (38)$$

$$n = 0, 1, \dots, 2^\gamma - 1 \quad \text{ou} \quad n = (n_{\gamma-1}, \dots, n_1, n_0) \quad (39)$$

$$n = \sum_{i=\gamma-1}^0 2^i n_i = 2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0 \quad n_i = 0 \text{ ou } 1 \quad (40)$$

Aplicando esta representação na equação (2), teremos:

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) W^p \quad (41)$$

onde $p = (2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + 2^{\gamma-\gamma} n_1 + n_0)(2^{\gamma-1} k_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} k_{\gamma-2} + \dots + 2^{\gamma-\gamma} k_1 + k_0)$. Portanto, podemos reescrever W^p :

$$\begin{aligned} W^p &= W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-1} k_{\gamma-1})} W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-2} k_{\gamma-2})} \\ &\dots W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(2^{\gamma-\gamma} k_1)} W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + n_0)(k_0)} \end{aligned} \quad (42)$$

Considerando que $W^N = W^{2^\gamma} = e^{[-2\pi j/N]N} = 1$ no primeiro termo da equação (42):

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1} n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2} n_{\gamma-2} + \dots + 2^{\gamma-\gamma} n_1 + n_0)(2^{\gamma-1} k_{\gamma-1})} &= [W^{2^\gamma(2^{\gamma-2} n_{\gamma-1} k_{\gamma-1})}] [W^{2^\gamma(2^{\gamma-3} n_{\gamma-2} k_{\gamma-1})}] \\ &\quad \times \dots [W^{2^\gamma(n_1 k_{\gamma-1})}] [W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})}] \\ &= [W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})}] \end{aligned} \quad (43)$$

Podemos aplicar o mesmo procedimento ao segundo termo da equação (42):

$$\begin{aligned} W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+2^{\gamma-\gamma}n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})} &= [W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-3}n_{\gamma-1}k_{\gamma-2})}] [W^{2^{\gamma}(2^{\gamma-4}n_{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \\ &\quad \times \dots [W^{2^{\gamma-1}(n_1k_{\gamma-2})}] [W^{2^{\gamma-2}(n_0k_{\gamma-2})}] \\ &= [W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \end{aligned} \quad (44)$$

e generalizar a aplicação do procedimento para os termos residuais, de forma que a equação (42) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_1, n_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}] \\ &\quad \times [W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \dots \times W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)(k_0)} \end{aligned} \quad (45)$$

O processo de fatoração pode ser resolvido pelo conjunto de equações recursivas que representam a formulação original de Cooley-Tukey para *FFT*, considerando $N = 2^{\gamma}$.

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) [W^{2^{\gamma-1}(n_0k_{\gamma-1})}] \\ x_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_1, k_0) [W^{(2n_1+n_0)(2^{\gamma-2}k_{\gamma-2})}] \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ x_{\gamma}(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) &= \sum_{k_0=0}^1 x_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1}+2^{\gamma-2}n_{\gamma-2}+\dots+n_0)(k_0)} \end{aligned} \quad (46)$$

(47)

Vale ressaltar que a transformada de N pontos exige um total de N^2 operações de multiplicação complexa. Utilizando a equação (46), temos um total de $N\gamma/2$ multiplicações complexas e $N\gamma$ operações de adição complexa.

4.3 Sande-Tukey: $N=4$

Uma variedade de algoritmos canônicos realizam a transformada rápida de Fourier, portanto, devemos escolher o método conforme propriedades específicas dos dados que serão transformados e da arquitetura computacional utilizada (Rao et al., 2010). Sande desenvolveu uma variante do método em contraste com a aproximação de Cooley-Tukey para uma amostragem $N=4$.

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad (48)$$

No algoritmo de Cooley-Tukey para uma amostragem $N=4$, separamos as componentes k , entretanto, o algoritmo de Sande-Tukey separa as componentes n :

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= [W^{4n_1k_1}] [W^{2n_1k_0}] [W^{(2k_1+k_0)n_0}] \\ &= W^{2n_1k_0} W^{(2k_1+k_0)n_0} \end{aligned} \quad (49)$$

(50)

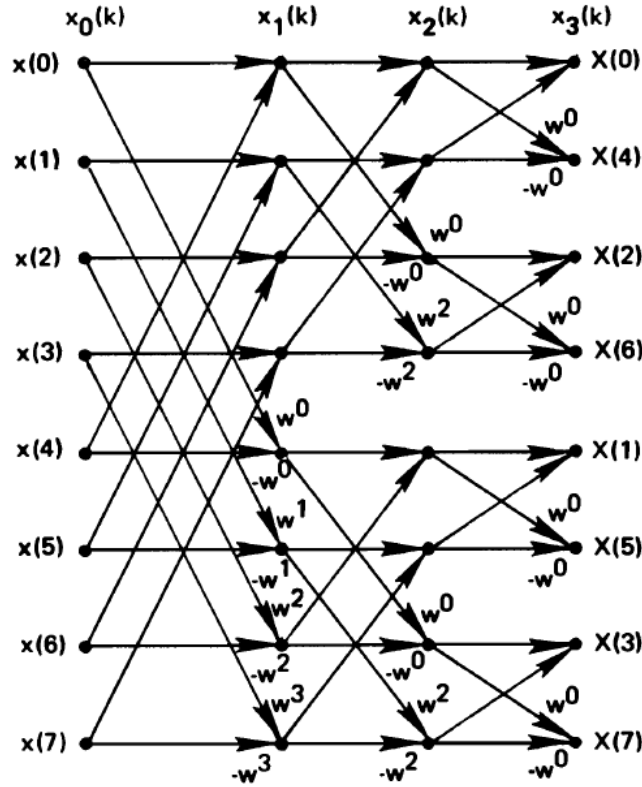


Figura 5: Diagrama do fluxo de sinais do algoritmo de Sande-Tukey, N=8

Aplicando a equação (50) em (48), teremos:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} W^{n_0 k_0} \right] W^{2n_1 k_0} \quad (51)$$

Desta forma, temos o procedimento para a fatoração da matriz através da aplicação das seguintes equações recursivas:

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1} W^{n_0 k_0} \quad (52)$$

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{2n_1 k_0} \quad (53)$$

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad (54)$$

Na figura (5), ilustramos o diagrama de fluxo de sinais do algoritmo de Sande-Tukey para N=8.

5 Anomalias Potenciais utilizando a *FFT*

Segundo Parker (Parker, 1973), um método largamente utilizado na interpretação de dados geofísicos é correlação entre os campos potenciais observados e aqueles produzidos por modelos crustais. O método convencional de discretização do meio em blocos prismáticos ou

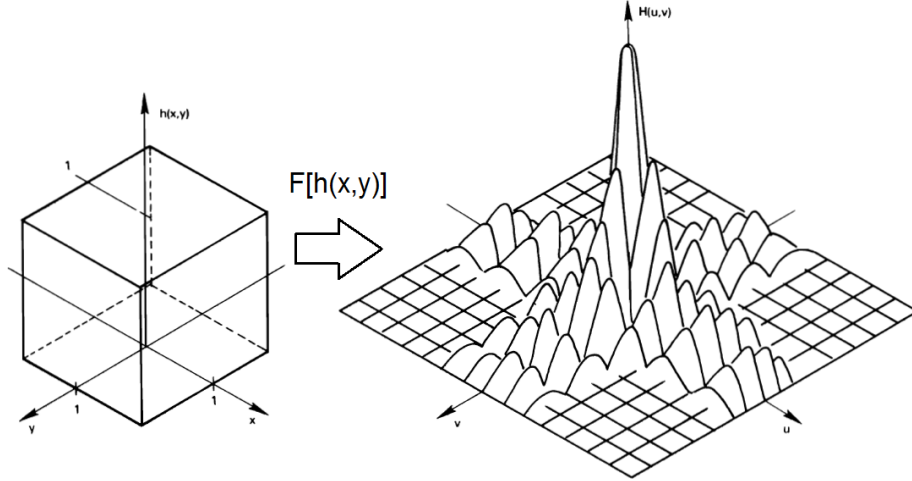


Figura 6: transformada de Fourier bi-dimensional considerando $h(x,y) = 1$ no intervalo $x,y \in [-1,1]$ e $h(x,y)=0$ caso x,y não pertença ao intervalo $[-1,1]$

retangulares, onde a soma parcial destes blocos gera um efeito potencial total, é utilizado na obtenção dos campos potenciais teóricos. Quando o modelo é complexo e uma grande quantidade de dados é disponibilizado, o tempo computacional aumenta drasticamente. O método de fatoração denominado transformada rápida de Fourier se tornou uma alternativa na redução do número de operações para computação da transformada de Fourier. Parker demonstrou como uma série de transformada de Fourier podem ser utilizada para calcular a anomalia magnético ou gravitacional causada por uma camada uniforme, não uniforme do material.

A transformada de Fourier bidimensional é dada por:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi j(ux+vy)} dx dy \quad (55)$$

onde a equação (55) é análoga à transformada de Fourier unidimensional, entretanto, a função bi-dimensional $h(x,y)$ tem as componentes em $\cos 2\pi(ux + vy)$ e $\sin 2\pi(ux + vy)$. Um exemplo prático pode ser a transformada de Fourier de uma função caixa, onde $h(x,y) = 1$ no intervalo $x,y \in [-1,1]$ e $h(x,y)=0$ caso x,y não pertença ao intervalo $[-1,1]$. Neste caso teremos:

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \int_{-1}^1 e^{-2\pi jvy} dy \int_{-1}^1 e^{-2\pi jux} dx \\ &= \frac{\sin(2\pi u) \sin(2\pi v)}{\pi^2 uv} \end{aligned} \quad (56)$$

Onde a figura (6) representa uma ilustração da aplicação da transformada de Fourier bi-dimensional representada na equação (56). A transformada de Fourier bidimensional pode ser interpretada como duas transformadas unidimensionais sucessivas:

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(u, y) e^{-2\pi j(vy)} dy \quad (57)$$

tal que $Z(u, y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) e^{-2\pi j(ux)} dx$. Podemos discretizar $h(x,y)$ nas dimensões x e y com intervalos de amostragem T_x e T_y respectivamente. A função de amostragem pode ser

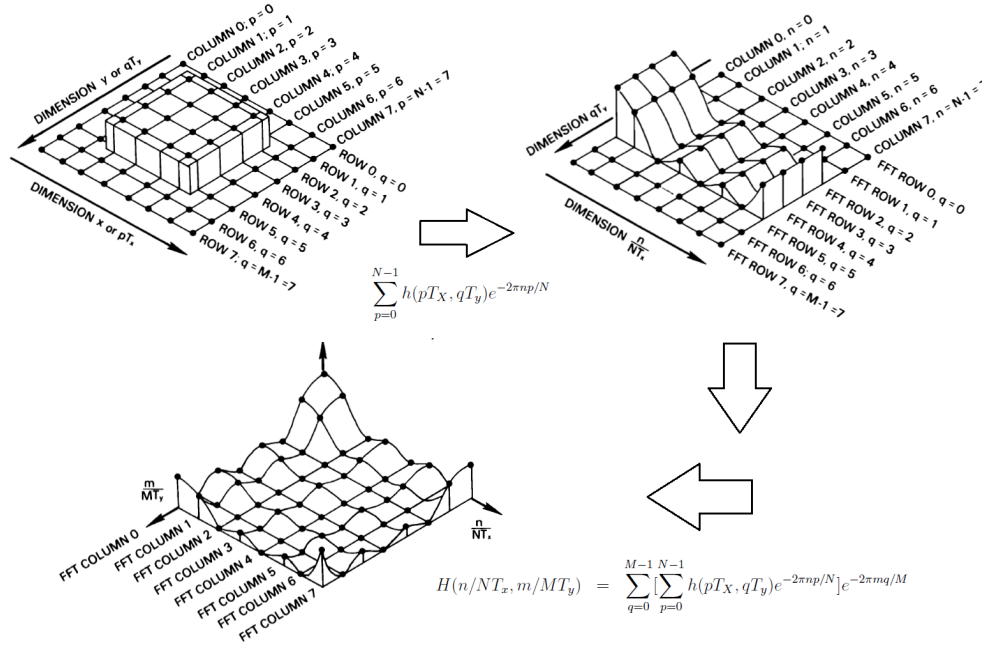


Figura 7: Procedimento gráfico para *FFT* bidimensional de uma caixa; A segunda figura corresponde a uma função magnitude calculada através do somatório entre colchetes para cada linha $q=0, \dots, M-1$. A transformada de Fourier resultante envolve a soma com relação a cada coluna $p=0, \dots, N-1$.

reescrita como $h(pT_x, qT_y)$, tal que $p=0, 1, \dots, N-1$ e $q=0, 1, \dots, M-1$. Desta forma, teremos a seguinte transformada discreta de Fourier:

$$H(n/NT_x, m/MT_y) = \sum_{q=0}^{M-1} \left[\sum_{p=0}^{N-1} h(pT_x, qT_y) e^{-2\pi np/N} \right] e^{-2\pi mq/M} \quad (58)$$

onde $n=0, 1, \dots, N-1$ e $m=0, 1, \dots, M-1$. Portanto, temos M transformada de Fourier unidimensionais, o que equivale a uma transformada para cada q ao longo do ordenamento definido para cada p . Podemos ilustrar a aplicação da transformada de Fourier bi-dimensional em uma função caixa na figura (7)

Parker (Parker, 1973) derivou uma expansão em série de transformadas de Fourier bidimensionais que computam anomalias gravitacionais e magnéticas geradas por uma camada não uniforme com material heterogêneo. Ele definiu a transformada de Fourier de uma função $f(\vec{r})$ como:

$$F[f(\vec{r})] = \int_X f(\vec{r}) e^{(j\vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (59)$$

onde X é o plano x - y , \vec{k} é o vetor de onda da função transformada e \vec{r} representa as posições projetadas no plano x - y . Considerando a atração gravitacional causada por uma camada de material, tal que o limite inferior é o plano $z=0$ e o limite superior é definido pela equação $z = h(\vec{r})$, de forma que $h(\vec{r}) = 0$ em uma região fora do domínio D . Parker também supõe que em qualquer modelo de topografia, podemos considerar que h é limitada e integrável. O potencial gravitacional em uma posição \vec{r}_0 devido a uma camada pode ser expresso como:

$$U(\vec{r}_0) = G\rho \int_V dV / |\vec{r}_0 - \vec{r}| = G\rho \int_D dS \int_0^{h(\vec{r})} dz / |\vec{r}_0 - \vec{r}| \quad (60)$$

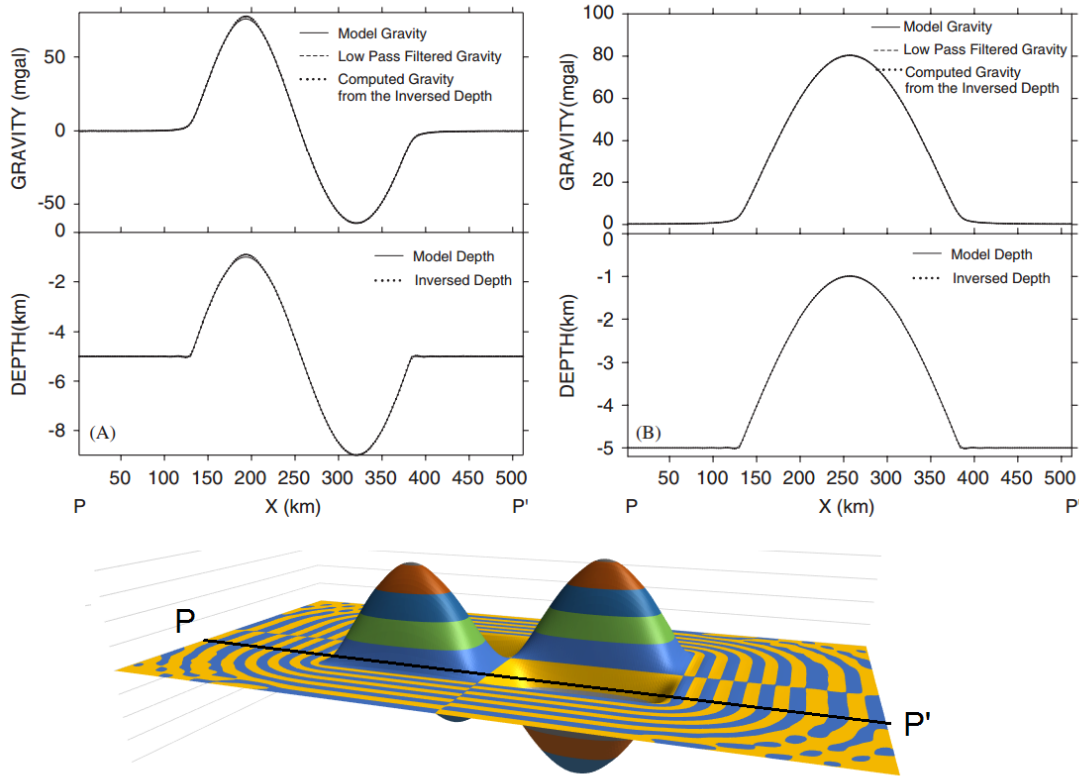


Figura 8: Inversão do Modelo tri-dimensional. (Shin et al., 2006)

tal que G é a constante gravitacional e a densidade não é uma função da posição. Supondo que o ponto de observação está confinado ao plano $z = z_0$, o potencial exibe apenas uma dependência com \vec{r}_0 . Portanto, a transformada de Fourier (59) aplicada ao potencial terá a forma:

$$F[U(\vec{r}_0)] = G\rho \int_X dS_0 \int_D e^{(j\vec{k} \cdot \vec{r}_0)} dS \int_0^{h(\vec{r})} dz / |\vec{r}_0 - \vec{r}| = G\rho \int_D dS \int_0^{h(\vec{r})} dz \int_X dS_0 e^{(j\vec{k} \cdot \vec{r}_0)} / |\vec{r}_0 - \vec{r}| \quad (61)$$

Segundo Parker, podemos expressar a equação (61) como uma série de transformadas de Fourier (Parker, 1973):

$$F[U(\vec{r}_0)] = 2\pi G\rho e^{-|\vec{k}|z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{k}|^{n-2}}{n!} F[h^n(\vec{r})] \quad (62)$$

A atração vertical do material gera um termo residual para correção do terreno. Na região acima das massas $\nabla U = 0$. Parker deduziu uma relação entre o efeito de variação vertical da gravidade δg e a topografia massiva que gera este efeito $h(\vec{r})$ no domínio de Fourier:

$$F[\delta g] = -2\pi G\rho e^{-|\vec{k}|z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{k}|^{n-1}}{n!} F[h^n(\vec{r})] \quad (63)$$

Shin *et al* (Shin et al., 2006) realizou uma modelagem direta de uma elevação (2D-Bump) considerando 128 pontos de dados com 1km de intervalo no eixo x e contraste de densidade

constante $1.0\text{g}/\text{cm}^3$. Foi utilizada a equação deduzida por Oldenburg (Oldenburg, 1974) para computar o contraste de densidade da topografia gerado por dados de anomalia revertidos no sistema de coordenadas Cartesiano em 2D. Oldenburg manipulou a equação 63, e encontrou a seguinte expressão:

$$F[h(x)] = -F[\delta g(x)]e^{-|\vec{k}|z_0}/(2\pi G\rho) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\vec{k}|^{n-1}}{n!} F[h^n(\vec{x})] \quad (64)$$

onde $h(x)$ pode ser resolvido iterativamente considerando um valor inicial. Shin (Shin et al., 2006) demonstrou que a inversão de dados de anomalia para encontrar a profundidade e os efeitos gravitacionais estão em boa concordância com os resultados da modelagem direta, como pode ser verificado na figura (8). A maioria das diferenças entre as profundidades exibiram um erro inferior 10m. As diferenças máximas são menores que 112m em (A) e 56m em (B).

6 Conclusões

A transformada de discreta de Fourier é uma técnica que pode ser utilizada em uma variedade de aplicações para o processamento de sinais em geofísica. Dentre as vantagens, a transformada rápida de Fourier (*FFT*) é uma opção para computar a transformada discreta de Fourier (*DFT*) com sensível redução do tempo computacional na modelagem direta e inversa.

Referências

- J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 1965.
- D. W. Oldenburg. The Inversion and Interpretation of Gravity Anomalies. *Geophysics*, 39, 1974. doi: 10.1190/1.1440444.
- R. L. Parker. The rapid calculation of potential anomalies. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1973. ISSN 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.1973.tb06513.x.
- K. Rao, D. Kim, and J. Hwang. *Fast Fourier Transform: Algorithms and Applications*. Springer, New York, first edition, 2010. ISBN 9781402066283. doi: 10.1007/978-1-4020-6629-0.
- Y. H. Shin, K. S. Choi, and H. Xu. Three-dimensional forward and inverse models for gravity fields based on the fast fourier transform. *Computers and Geosciences*, 32(6):727 – 738, 2006. ISSN 0098-3004. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cageo.2005.10.002>.
- G. Strang. Wavelets. *American Scientist*, 82(3):pp. 250–255, 1994.