Jeux positionnels en convention Maker-Maker généralisée

Florian Galliot [1], Jonas Sénizergues [2]

[1]I2M, Université d'Aix-Marseille

[2]LaBRI, Université de Bordeaux

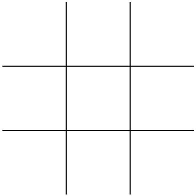
22 Novembre 2024

Jeux positionnels (Hales et Jewett 1968)

Jeu à deux joueurs **Alice** et **Bob** sur un hypergraphe $H = (V, E)$.

Alice et **Bob** sélectionnent chacun leur tour des sommets de H un par un et les colorent avec leur couleur (définitivement).

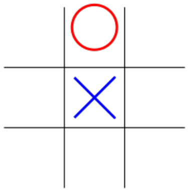
Les hyperarêtes représentent les objectifs de la partie.



Jeux positionnels (Hales et Jewett 1968)

Jeu à deux joueurs **Alice** et **Bob** sur un hypergraphe $H = (V, E)$.

Alice et **Bob** sélectionnent chacun leur tour des sommets de H un par un et les colorent avec leur couleur (définitivement).



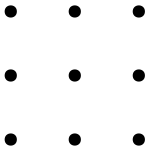
Les hyperarêtes représentent les objectifs de la partie.

Jeux positionnels (Hales et Jewett 1968)

Jeu à deux joueurs **Alice** et **Bob** sur un hypergraphe $H = (V, E)$.

Alice et **Bob** sélectionnent chacun leur tour des sommets de H un par un et les colorent avec leur couleur (définitivement).

Les hyperarêtes représentent les objectifs de la partie.

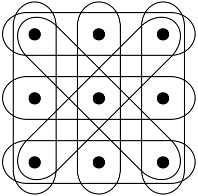


Jeux positionnels (Hales et Jewett 1968)

Jeu à deux joueurs **Alice** et **Bob** sur un hypergraphe $H = (V, E)$.

Alice et **Bob** sélectionnent chacun leur tour des sommets de H un par un et les colorent avec leur couleur (définitivement).

Les hyperarêtes représentent les objectifs de la partie.



Convention Maker-Maker

Convention Maker-Maker = Les hyperarêtes représentent des ensembles gagnants pour les deux joueurs.

Remarque : Par argument de vol de stratégie, seule **Alice** peut espérer gagner.

Question : Est-ce que **Alice** gagne ?

Convention Maker-Maker

Convention Maker-Maker = Les hyperarêtes représentent des ensembles gagnants pour les deux joueurs.

Remarque : Par argument de vol de stratégie, seule **Alice** peut espérer gagner.

Question : Est-ce que **Alice** gagne ?

Théorème (Biskov 2004 + Raham et Watson 2023)

Maker-Maker 7-uniforme est PSPACE-complet.

Convention Maker-Breaker

Convention Maker-Breaker = Les hyperarêtes représentent des ensembles gagnants pour **Alice**, **Bob** gagne si **Alice** échoue à gagner.

Théorème (Schaefer 1978)

Maker-Breaker 11*-uniforme est PSPACE-complet.*

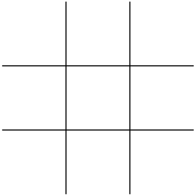
Théorème (Raham et Watson 2023)

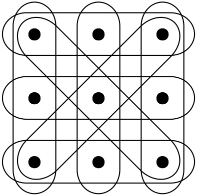
Maker-Breaker 6*-uniforme est PSPACE-complet.*

Théorème (Galliot et al. 2023)

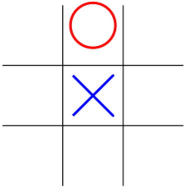
Maker-Breaker 3*-uniforme est polynomial.*

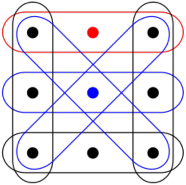
Jeux positionnels Maker-Maker partisans



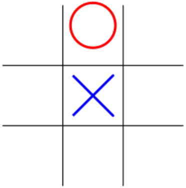


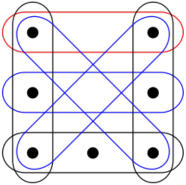
Jeux positionnels Maker-Maker partisans





Jeux positionnels Maker-Maker partisans





Au lieu d'un simple hypergraphe, on a deux ensembles d'hyperarêtes distincts pour **Alice** et **Bob**, $H = (V, E_A, E_B)$.

Remarque : A priori trois issues sont possibles : **Alice** gagne, **Bob** gagne, et partie nulle.

Vol de stratégie

Peut-on étendre la notion de vol de stratégie ?

Vol de stratégie

Peut-on étendre la notion de vol de stratégie ?

Lemme

Soit $H = (V, E_A, E_B)$. S'il existe $\sigma : V \to V$ une bijection telle que pour $e \in E_B$, $\sigma(e) \in E_A$, et $\sigma^{-1}(e) \in E_A$, alors seule ***Alice*** *peut espérer gagner.*

Idée : Si **Bob** avait une stratégie gagnante, alors **Alice** pourrait la simuler en lui appliquant σ. La condition sur σ^{-1} permet de garantir que dans cette simulation **Bob** ne peut pas gagner avant **Alice** (si c'était le cas, la stratégie gagnante initiale de **Bob** n'en serait pas une).

Complexité de l'issue

Question : Est-ce que **Alice** gagne ? Selon la taille maximum respective des arêtes d'**Alice** et de **Bob**.

	0 1	2	3	4	5	6+
0 1	L	L	P	?	?	PSPACE-c
2	L					PSPACE-c
3+	L					PSPACE-c

Première ligne : Maker-Breaker classique.

Le cas (2,2)

Si des arêtes de taille 1 sont présentes : on se ramène au cas où il n'y en a pas.

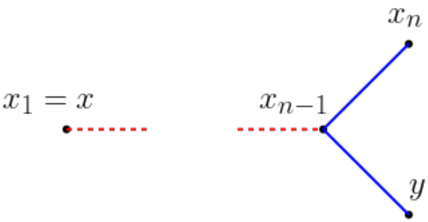
Si toutes les arêtes sont de taille 2 alors **Alice** gagne si et seulement si il y a un P_3 rouge (sinon **Bob** joue systématiquement le sommet restant de toute arête d'**Alice** sur laquelle **Alice** joue).

Si **Alice** ne peut pas gagner, peut-elle empêcher **Bob** de gagner ? Si elle "perd la main", **Bob** gagnera s'il reste un P_3 bleu.

Le cas (2,2)

Classification des coups possibles d'**Alice** selon les chaines de coups forcés depuis $x \in V$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

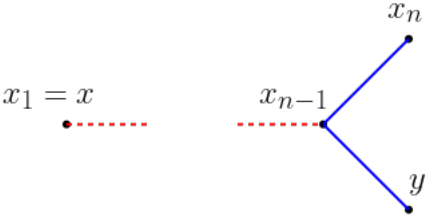
1. S'il existe une telle chaine de longueur impaire et $x_{n-1}y \in E_B$ pour y n'apparaissant pas dans la chaîne, x est perdant pour **Alice** .



Le cas (2,2)

Classification des coups possibles d'**Alice** selon les chaines de coups forcés depuis $x \in V$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1. S'il existe une telle chaine de longueur impaire et $x_{n-1}y \in E_B$ pour y n'apparaissant pas dans la chaîne, x est perdant pour **Alice** .
2. Si une telle chaine maximale est de longueur impaire, x est perdant pour **Alice** sauf si tous les P_3 on été éliminés.
3. Si elle est de longueur paire, alors x est un coup optimal pour **Alice** .



Le cas (2,2)

Calculer la chaine forçante maximale de x dans une configuration donnée prend un temps $O(|E|)$. Calculer le type de tous les coups se fait donc en $O(|V||E|)$.

Théorème

*La détermination de l'issue d'un jeu lorsqu'**Alice** et **Bob** ont des arêtes de taille au plus 2 se fait en temps polynomial ($O(|V|^2|E|)$).*

co-NP-complétude du cas (2,k)

Lemme

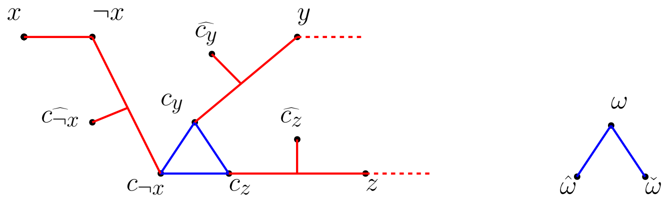
*Se demander si **Alice** gagne dans le cas (k, k') ou de si **Bob** gagne dans le cas (k', k), sont des problèmes équivalents à réduction linéaire près.*

On se pose donc la question de "**Alice** peut-elle empêcher **Bob** de gagner" dans le cas $(k, 2)$. Comme dans le cas $(2, 2)$ **Bob** gagnera si à son tour il peut jouer sur un P_3.

⇒Le problème est co-NP car il suffit de donner comme certificat la liste des coups forçants d'**Alice** aboutissant à une configuration sans P_3.

co-NP-complétude du cas (2,k)

Co-NP-difficulté : on réduit 3-SAT au problème complémentaire. Soit φ une formule 3-SAT, si p.e. la clause $c = \neg x \vee y \vee z$ apparait dans φ on introduit le gadget suivant :



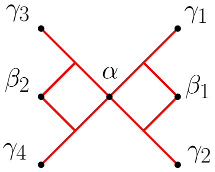
Alice doit éliminer tous les P_3. Elle doit perdre l'initiative pour détruire celui contenant ω, et ne peut pas la perdre avant.

NP-difficulté du cas (k,2)

On rajoute deux papillons !

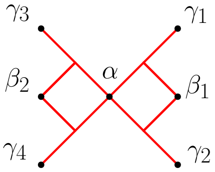
NP-difficulté du cas (k,2)

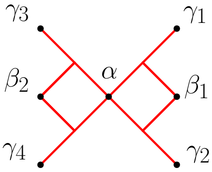
On rajoute deux papillons !



NP-difficulté du cas (k,2)

On rajoute deux papillons !





Idée : Une fois que **Alice** a détruit le P_3 contenant ω, **Bob** peut jouer sur l'un des deux papillon, **Alice** joue sur le α de l'autre et gagne car **Bob** ne pourra pas casser les deux P_3 résultants.

PSPACE-complétude du cas (3,3)

Théorème

*Déterminer si **Alice** (resp. **Bob**) gagne est PSPACE-complet lorsque les deux ont des arêtes de taille au plus* 3*.*

Par réduction de QBF : **Alice** veut rendre une formule 3-SAT vraie, **Bob** veut la falsifier, et choisissent chacun leur tour les valeurs des variables dans l'ordre. L'idée de la construction est de séparer deux phases de jeu :

- Une phase de choix “indirect” des valuations des variables (sans prendre les sommets impliqués dans les gadgets de clause).
- Une phase de résolution où si **Bob** a réussi à choisir une valuation qui falsifie au moins une des clause, il va pouvoir prendre l'arête bleue représentant la clause.

PSPACE-complétude du cas (3,3)

Corollaire

Maker-Maker 4-uniforme avec des sommets déjà attribués est PSPACE-complet

Complexité de l'issue

Question : Est-ce que **Alice** gagne ? Selon la taille maximum respective des arêtes d'**Alice** et de **Bob**.

	0 1	2	3	4	5	6+
0 1	L	L	P	?	?	PSPACE-c
2	L					PSPACE-c
3+	L					PSPACE-c

Complexité de l'issue

Question : Est-ce que **Alice** gagne ? Selon la taille maximum respective des arêtes d'**Alice** et de **Bob**.

	0 1	2	3	4	5	6+
0 1	L	L	P	?	?	PSPACE-c
2	L	**P**	**NP-hard**			PSPACE-c
3+	L	**co-NP**-c	**PSPACE**-c			PSPACE-c

Complexité de l'issue

Question : Est-ce que **Alice** gagne ? Selon la taille maximum respective des arêtes d'**Alice** et de **Bob**.

	0 1	2	3	4	5	6+
0 1	L	L	P	?	?	PSPACE-c
2	L	**P**	**NP-hard**	**?**	**?**	PSPACE-c
3+	L	**co-NP**-c	**PSPACE**-c			PSPACE-c

Possibilité d'approcher les conjectures sur Maker-Breaker 4- et 5-uniforme par une autre direction ?

Et après ?

- Etudier les cas $(4, 2)$ et $(5, 2)$.
- Considérer les jeux Maker-Breaker en tant que jeux Maker-Maker généralisés (**Bob** prend les transversaux des arêtes d'**Alice**) : restent-ils PSPACE-c ?