Maximum matchings minimalement colorés

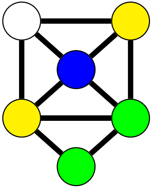
Jonas Sénizergues, Johanne Cohen, Yannis Manoussakis

13 Novembre 2019

Graphes colorés

Graphe sommet-coloré (resp. arête-coloré)

Un graphe coloré $G^c = (G, c)$ est un couple composé d'un graphe $G = (V, E)$ et d'une coloration c sur les sommets (resp. arêtes).



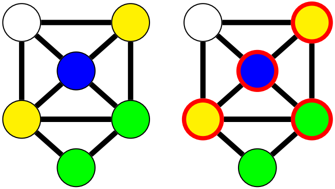
Objectif

Résoudre des problèmes (d'optimisation ou de structure) avec des contraintes sur les couleurs.

Graphes colorés

Graphe sommet-coloré (resp. arête-coloré)

Un graphe coloré $G^c = (G, c)$ est un couple composé d'un graphe $G = (V, E)$ et d'une coloration c sur les sommets (resp. arêtes).



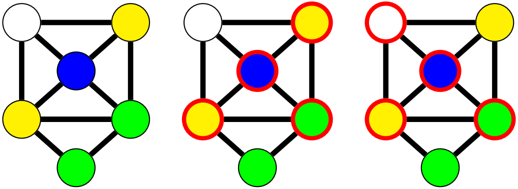
Objectif

Résoudre des problèmes (d'optimisation ou de structure) avec des contraintes sur les couleurs.

Graphes colorés

Graphe sommet-coloré (resp. arête-coloré)

Un graphe coloré $G^c = (G, c)$ est un couple composé d'un graphe $G = (V, E)$ et d'une coloration c sur les sommets (resp. arêtes).



Objectif

Résoudre des problèmes (d'optimisation ou de structure) avec des contraintes sur les couleurs.

Definition

Une partie tropicale d'un graphe coloré G^c est une partie qui contient toutes les couleurs de G^c

Théorème (Cohen, Manoussakis, Phong, Tuza)

Maximum matching tropical est polynomial.

Definition

Une partie tropicale d'un graphe coloré G^c est une partie qui contient toutes les couleurs de G^c

Théorème (Cohen, Manoussakis, Phong, Tuza)

Maximum matching tropical est polynomial.

Corollaire

Maximum matching maximalement coloré est polynomial.

Théorèmes

Théorème 1

Maximum Matching minimalement coloré (MCMM) paramétré par le nombre de couleurs de l'optimum est W[2]-difficile sur les arbres.

Théorème 2

MCMM n'est pas $log(k+1)(1-o(1))$ approximable sur les arbres où k est le nombre de noeuds internes.

Théorème 3

MCMM paramétré par la taille d'un matching maximum est FPT

Théorème 3

MCMM paramétré par la taille k d'un matching maximum peut être résolu en temps $O(|E|\sqrt{|V|}) + O(k^4 T_k B_k k! 2^k |V|)$

Théorème 3

MCMM paramétré par la taille k d'un matching maximum peut être résolu en temps $O(|E|\sqrt{|V|}) + O(k^4 T_k B_k k! 2^k |V|)$

- B_k : Nombre de Bell, nombre de partitions d'un ensemble à k éléments.
- T_k : Nombre téléphonique, nombre de matchings distincts possibles sur une clique à k sommets.

Théorème 3

MCMM paramétré par la taille k d'un matching maximum peut être résolu en temps $O(|E|\sqrt{|V|}) + O(k^4 T_k B_k k! 2^k |V|)$

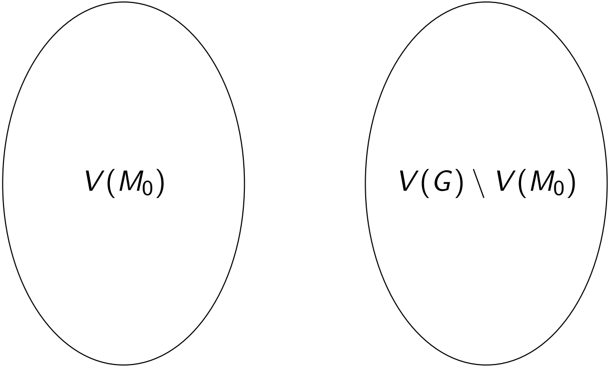
- B_k : Nombre de Bell, nombre de partitions d'un ensemble à k éléments.
- T_k : Nombre téléphonique, nombre de matchings distincts possibles sur une clique à k sommets.
- Pour tout $\epsilon > 0$, $k^4 T_k B_k k! 2^k = O((\frac{k}{e})^{(3/2+\varepsilon)k})$

Théorème 3

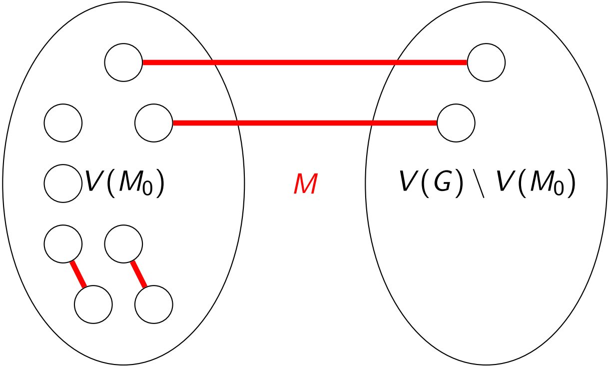
MCMM paramétré par la taille k d'un matching maximum peut être résolu en temps $O(|E|\sqrt{|V|}) + O(k^4 T_k B_k k! 2^k |V|)$

- $O(|E|\sqrt{|V|})$: Construction d'un maximum matching quelconque
- $O(k^4 T_k B_k k! 2^k |V|)$: Construction d'un arbre d'exploration des matchings possible "presque exhaustif".

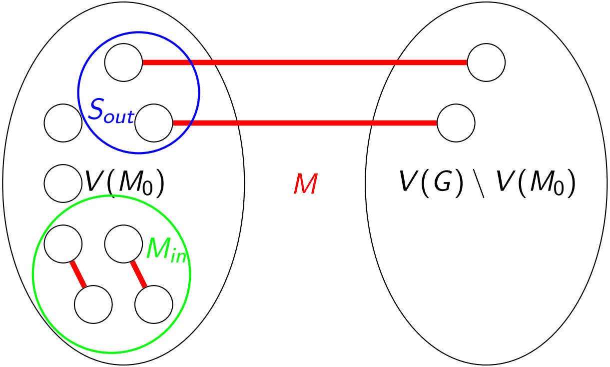
Etage 1 : On prend M_0 matching quelconque de G^c.



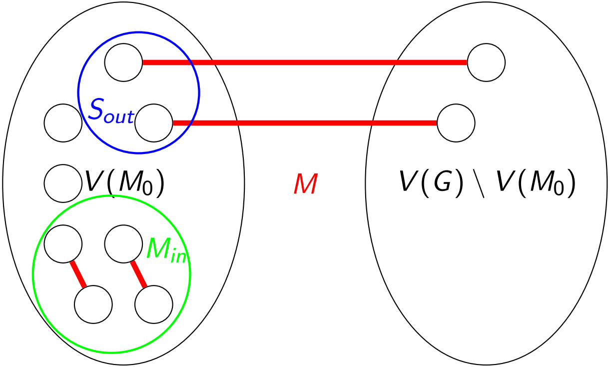
Etage 1 : On prend M_0 matching quelconque de G^c.



Etage 1 : On prend M_0 matching quelconque de G^c.

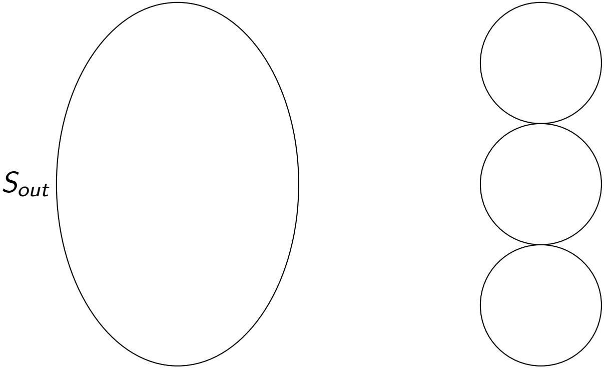


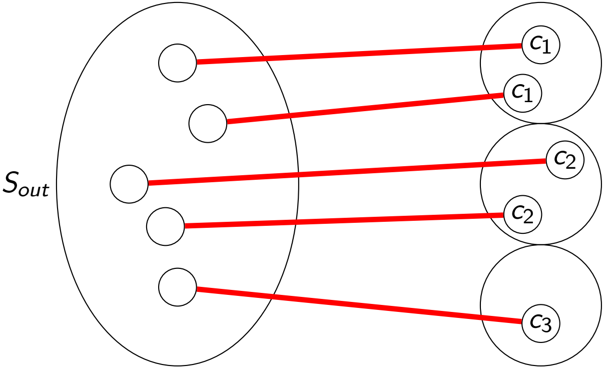
Etage 1 : On prend M_0 matching quelconque de G^c.



On crée une branche par couple (M_{in}, S_{out}) possible.

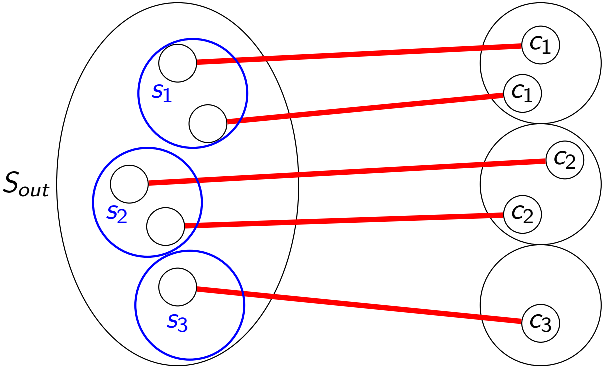
Etage 2 :

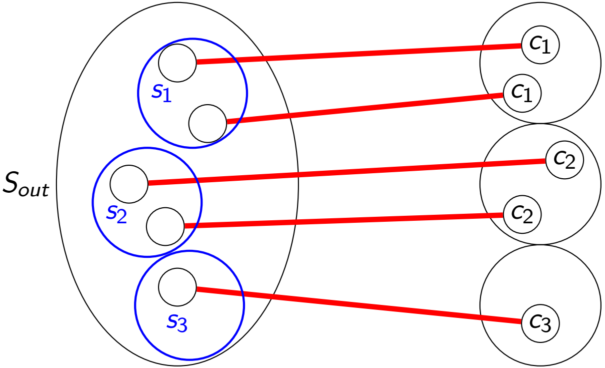




Etage 2 :

Etage 2 :





Etage 2 :
On crée une branche par partition $\mathcal{S}_{out} = \{s_1, s_2, ..\}$ de S_{out}

Pour chaque s_i,

- Soit on lui attribue une couleur c_i de $c(S_{out}) \cup c(M_{in})$
- Soit on décide qu'il sera lié à une couleur externe à cet ensemble

On crée une branche par possibilité.

Pour chaque s_i on calcule un ensemble $\mathcal{M}_i$, de matchings de taille $|s_i|$:

- Si une couleur c_i a été attribuée, on cherche un matching m entre s_i et $c^{-1}(c_0) \setminus V(M_0)$
- Sinon, on cherche un matching par couleur de $im(c) \setminus (c(M_{in}) \cup c(S_{out}))$

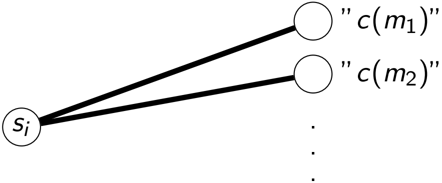
Pour chaque s_i on calcule un ensemble $\mathcal{M}_i$, de matchings de taille $|s_i|$:

- Si une couleur c_i a été attribuée, on cherche un matching m entre s_i et $c^{-1}(c_0) \setminus V(M_0)$
- Sinon, on cherche un matching par couleur de $im(c) \setminus (c(M_{in}) \cup c(S_{out}))$ et on n'en garde que $k+1$ si on en trouve plus

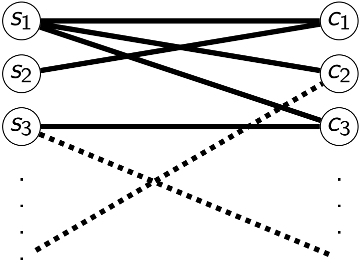
Pour chaque s_i on calcule un ensemble $\mathcal{M}_i$, de matchings de taille $|s_i|$:

- Si une couleur c_i a été attribuée, on cherche un matching m entre s_i et $c^{-1}(c_0) \setminus V(M_0)$
- Sinon, on cherche un matching par couleur de $im(c) \setminus (c(M_{in}) \cup c(S_{out}))$ et on n'en garde que $k+1$ si on en trouve plus $\leftarrow$ on perd l'exhaustivité de l'exploration ici

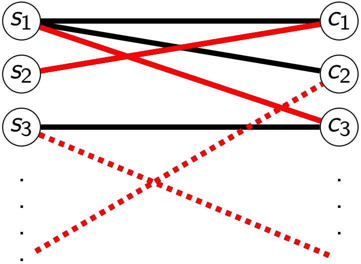
On prend le graphe biparti avec d'un côté les s_i, de l'autre les couleurs, avec une arrête de s_i vers une couleur c_0 si il y a un matching "de couleur c_0 à droite" dans $\mathcal{M}_i = \{m_1, m_2, ..\}$.



On prend le graphe biparti avec d'un côté les s_i, de l'autre les couleurs, avec une arrête de s_i vers une couleur c_0 si il y a un matching "de couleur c_0 à droite" dans $\mathcal{M}_i = \{m_1, m_2, ..\}$.

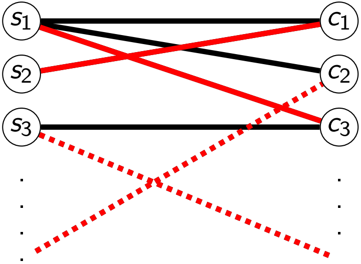


On prend le graphe biparti avec d'un côté les s_i, de l'autre les couleurs, avec une arrête de s_i vers une couleur c_0 si il y a un matching "de couleur c_0 à droite" dans $\mathcal{M}_i = \{m_1, m_2, ..\}$.



On prend un matching de taille $|\mathcal{S}|$ de ce graphe et on reconstitue un maximum matching de G^c à partir des "petits" matchings correpondants

On prend le graphe biparti avec d'un côté les s_i, de l'autre les couleurs, avec une arrête de s_i vers une couleur c_0 si il y a un matching "de couleur c_0 à droite" dans $\mathcal{M}_i = \{m_1, m_2, ..\}$.



On prend un matching de taille $|\mathcal{S}|$ de ce graphe et on reconstitue un maximum matching de G^c à partir des "petits" matchings correpondants S'il n'en existe pas, la branche échoue et ne calcule rien.

Deux arguments-clés :

- Tous les maximum matchings correspondant aux mêmes choix faits dans l'aborescence ont le même nombre de couleurs

Deux arguments-clés :

- Tous les maximum matchings correspondant aux mêmes choix faits dans l'aborescence ont le même nombre de couleurs
  $\uparrow$ Par construction

Deux arguments-clés :

- Tous les maximum matchings correspondant aux mêmes choix faits dans l'aborescence ont le même nombre de couleurs
  $\uparrow$ Par construction
- S'il existe un maximum matching correspondant à un ensemble de choix faits dans l'arborescence, alors la feuille est habitée

Cloture