

Lei de indução de Faraday

Gonçalo Quinta n° 65680, Fernando Rodrigues n°66326, Teresa Jorge n°65722 e Vera Patrício n°65726

Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica
Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica 2009/2010
Instituto Superior Técnico (IST)

(Dated: 16 de Maio de 2010)

Realizaram-se 2 ensaios com o objectivo de medir a força electromotriz induzida numa pequena bobine no centro de 2 bobines de Helmholtz. No primeiro ensaio, aplicou-se uma corrente sinusoidal às bobines de Helmholtz, tendo-se obtendo um coeficiente de indução mútua de $(1,11 \pm 0,01) \times 10^{-3}$ H. No segundo ensaio, com corrente fornecida constante e a bobine pequena em rotação, obteve-se um coeficiente de indução mútua máximo de $(1,14 \pm 0,06) \times 10^{-3}$ H. Estudou-se também o funcionamento do transformador, tendo-se concluído que a aproximação de um acoplamento perfeito é aceitável para o transformador usado, com uma precisão de cerca de 17% para frequências até 500 Hz.

I. INTRODUÇÃO

Um dos efeitos electromagnéticos com mais aplicações práticas e interessantes na física é conhecido pela lei de indução de Faraday. Esta afirma que na presença de um campo magnético variável é induzida uma corrente num circuito, consoante as características do campo e a forma como este varia.

Nesta experiência irão ser utilizadas duas bobines de Helmholtz, que criarão um campo magnético que actuará num circuito constituído por uma bobine pequena colocada simetricamente entre as duas primeiras bobines. Através do teorema de Ampère, é possível obter o campo magnético \vec{B} no interior de uma bobine ideal com n espiras, simétrica em relação ao eixo dos ZZ 's

$$\vec{B} = \mu_0 n i \vec{e}_z \quad (1)$$

μ_0 - permeabilidade magnética do vácuo = $4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$

i - intensidade de corrente que percorre as bobines de Helmholtz (A)

Aplicando este resultado a duas bobines (neste caso as de Helmholtz) afastadas a uma igual distância d da origem, é possível concluir que o campo magnético no eixo das cotas, entre as bobines, para $z = 0$, é constante e dado por

$$\vec{B}_z = \frac{32\pi n}{5\sqrt{5}} \frac{i}{r} \vec{e}_z \quad (2)$$

r - raio de uma bobine (m)

Colocando a pequena bobine no ponto anterior, e imprimindo-lhe um movimento de rotação em torno do seu próprio eixo, surge uma variação do fluxo do campo magnético ϕ na bobine (ou, no seu ponto de vista, esta fica sujeita a um campo magnético variável). A lei de indução de Faraday afirma que esta variação de fluxo de \vec{B} vai induzir uma corrente na bobine pequena, devido ao aparecimento de uma diferença de potencial ϵ_i , que se denomina força electromotriz. Mais precisamente, a lei prevê que

$$\epsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} \quad (3)$$

Concretizando, começa-se por notar que o fluxo que atravessa a superfície S que engloba as n espiras da bobine pequena, é dada por

$$\phi = n \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = nB \cos(\alpha)S \quad (4)$$

onde α é o ângulo formado entre o campo magnético e a normal à superfície S da bobine pequena onde existe fluxo. Forçando uma frequência angular ω na bobine resulta que

$$\frac{d\phi}{dt} = -nBS \sin(\omega t)\omega \quad (5)$$

e assim se obtém o resultado final

$$\epsilon_{i_n} = nBS\omega \quad (6)$$

onde ϵ_{i_n} se trata da força electromotriz máxima, quando $\sin(\omega t) = 1$. O caso oposto também irá ser estudado, onde o circuito se mantém estático e o campo magnético \vec{B} criado pelas bobines de Helmholtz varia no tempo. Nessa situação, a bobine pequena encontra-se na mesma posição que anteriormente, mas paralela às restantes bobines, sendo que agora

$$\epsilon_i = -\frac{d}{dt} \left(n \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right) = -\frac{d}{dt} (nBS) \quad (7)$$

Assumindo que B varia proporcionalmente com $i = i_n \cos(\omega t)$, pode-se escrever

$$\epsilon_i = nSK i_n \sin(\omega t)\omega \quad (8)$$

Tomando novamente a força electromotriz máxima, pode-se ainda obter a relação linear na forma de razão

$$\frac{\epsilon_{i_n}}{i_n} = nSK\omega \quad (9)$$

Será também estudado brevemente o coeficiente de indução mútua L entre os dois circuitos, que surge directamente da proporcionalidade entre o fluxo ϕ e a intensidade de corrente i

$$\epsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (10)$$

Este depende exclusivamente da geometria do sistema, e quantifica a "facilidade" com que é induzida uma força electromotriz num circuito ao variar a corrente nele percorrida. O restante objecto de estudo trata-se do transformador. Este tem como objectivo transmitir energia eléctrica de um circuito a outro, transformando tensões, correntes ou mesmo modificar os valores das impedância eléctrica de um circuito.

Mais precisamente, será averiguado se, sob certas aproximações, as tensões existentes no transformador estão directamente relacionadas com a razão do número de espiras de cada enrolamento

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (11)$$

II. EXPERIÊNCIA REALIZADA

Bobines de Helmholtz - Corrente variável

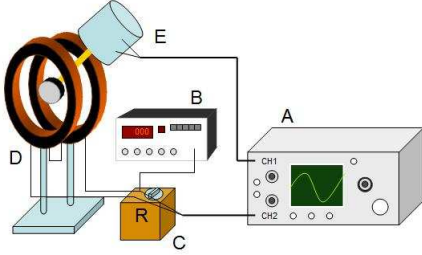


Figura 1. Esquema de montagem. A - Transformador; B - Resistência; C - Gerador de Sinais; D - Osciloscópio

A figura 1 ilustra o esquema de montagem usado. Numa primeira abordagem, a indução magnética é gerada por variação da corrente aplicada às bobines de Helmholtz. É pois aplicada uma corrente sinusoidal que gera um campo magnético variável, que por sua vez irá induzir corrente na bobine no centro da montagem. É medida a força electromotriz gerada na bobine pequena através da medição da amplitude de tensão que a percorre. Este processo é repetido para várias frequências de corrente aplicadas, cujas amplitudes são igualmente registadas, assim como a diferença de fase entre as duas. Com esses dados será verificada a lei da indução, ajustando-os à equação (9). O valor de L poderá ser calculado admitindo que o campo varia linearmente com a intensidade da corrente

$$\epsilon_i = -\frac{d}{dt}(nK i S) = -nKS \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (12)$$

pelo que L será dado por

$$L = nSK \quad (13)$$

Bobines de Helmholtz - Posição variável

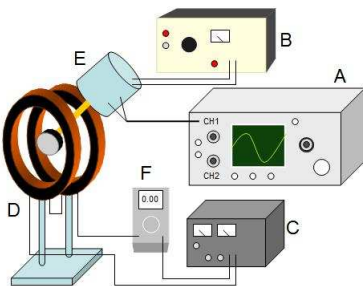


Figura 2. Esquema de montagem parte B. A - Osciloscópio; B - Fonte de alimentação da bobine pequena; C - Gerador de corrente; D - Bobines de Helmholtz; E - bobine pequena

Na etapa seguinte, o campo magnético gerado é estático e a variação do fluxo que atravessa a bobina pequena é obtido através da variação da posição dessa bobina em relação à direcção do campo. Novamente, existe uma força electromotriz induzida, dado que há variação do fluxo que atravessa a bobine ao longo do tempo, uma vez que a superfície que este atravessa tem direcção variável. Neste caso a corrente aplicada às bobines de Helmholtz é contínua e a bobine central estará em rotação. Como anteriormente, são medidas as amplitudes de tensão obtidas para diferentes frequências, desta vez frequências de rotação da bobine, que são iguais às frequências das tensões medidas nos seus terminais. Este procedimento é repetido para 10 frequências diferentes e os dados recolhidos são comparados com os previstos pela lei de indução, através do seu ajuste à equação (6).

Transformador

Na terceira parte do trabalho é estudado o funcionamento de um transformador. Começa-se por aplicar uma diferença de potencial numa bobine de 600 espiras e mede-se a diferença de potencial essa que aparece noutra bobine de 72 espiras. Estas medições são efectuadas para diferentes frequências da tensão aplicada e para diferentes amplitudes. Para a posterior análise de resultados, podem usar-se as amplitudes complexas \bar{U} das tensões, de modo a obter-se a expressão de ajuste

$$\frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} = \frac{L}{L_{11}} \frac{R}{R + j\omega L_{22}(1 - k^2)} \quad (14)$$

U_2 - tensão aplicada à bobine de 600 espiras (V)

U_1 - tensão aplicada à bobine de 72 espiras (V)

ω - frequência da tensão aplicada (rad/s)

L_{11} - coeficiente de auto-indução do enrolamento 1 em presença do enrolamento 2 (H)

L_{22} - coeficiente de auto-indução do enrolamento 2 em presença do enrolamento 1 (H)

R - resistência (Ω)

onde a quantidade k é denominada por coeficiente de acoplamento. Quando há um acoplamento perfeito, k toma o valor 1, significando que não há fugas das linhas de campo. Por outro lado, k tende para zero com o afastamento dos dois enrolamentos. Neste caso, será considerada a aproximação $k = 1$, de onde se tira a expressão (11).

A aproximação feita será então a um acoplamento perto de perfeito, onde o ajuste traçado é então linear. Assim, para um transformador ideal, e dentro de uma certa gama de frequências, é espectável que a constante de proporcionalidade encontrada entre as tensões seja igual à razão entre o número de espiras das duas bobines. A tensão lida na resistência é posta em função da tensão aplicada à bobine de 600 espiras, sendo utilizados dados para as frequências de 50, 100, 500, 1000 e 2000 Hz. É ainda medida a diferença de fase entre a tensão na bobine de 600 espiras e na de 72 espiras.

III. RESULTADOS

Obtiveram-se os dados que constam nas tabelas I e II e no gráfico da figura 3:

Tabela I. Dados das bobinas de Helmholtz - Corrente variável

F (Hz)	e_F (Hz) ^a	V_r ^b (V)	e_{V_r} (V)	Ea ^c (V)	e_{Ea} (V)	Fase (°) ^d
1005	50	1,27	0,05	0,42	0,02	89,6
2033	102	0,64	0,01	0,42	0,01	91,4
3000	150	0,43	0,01	0,43	0,01	91,6
4004	200	0,32	0,01	0,42	0,01	99,7
5005	250	0,26	0,01	0,43	0,01	93,6
5957	298	0,22	0,01	0,44	0,01	94,8
6989	349	0,18	0,01	0,43	0,01	94,7
8051	403	0,16	0,01	0,43	0,01	94,6
8945	447	0,14	0,01	0,43	0,01	95,4
10028	501	0,13	0,01	0,43	0,01	95,0
11035	552	0,12	0,01	0,43	0,01	95,5
11973	599	0,11	0,01	0,43	0,01	95,6
13055	653	0,10	0,01	0,43	0,01	95,6
13997	700	0,09	0,01	0,44	0,01	95,0
14958	748	0,08	0,01	0,44	0,01	99,7

^a Foi considerado um erro de aparelho de 5%^b tensão na resistência R^c tensão na bobine pequena^d Erro 0,4°

Tabela II. Dados Bobines de Helmholtz - Posição variável

V (V) ^a	I (A)	e_I (A)	F (Hz)	e_F (Hz)	Ea (V)	e_{Ea} (V)
10	0,97		28,5	0,81	0,404	0,01
9	0,97		25,0	0,63	0,370	0,01
8,5	0,95		23,8	0,57	0,328	0,01
8	0,96		22,2	0,49	0,316	0,01
7	0,96		18,8	0,35	0,274	0,01
6	0,96	0,05	15,4	0,25	0,228	0,01
5,5	0,95		13,9	0,19	0,198	0,01
5	0,96		12,4	0,15	0,178	0,01
4	0,96		9,12	0,08	0,132	0,01
3	0,96		5,98	0,04	0,090	0,01

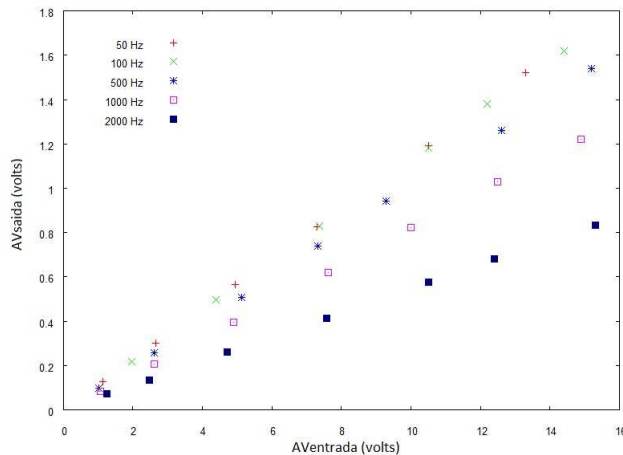
^a Meramente indicativo

Figura 3. Dados obtidos das medições no transformador

IV. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Bobines de Helmholtz - Corrente variável

O ajuste das razões entre a força electromotriz induzida e a corrente aplicada em função da frequência (em radianos por segundo) encontram-se na figura 4. O coeficiente de indução obtido, que corresponde ao declive da recta, foi de $(1,112 \pm 0,008) \times 10^{-3}$ H.

Foi igualmente calculado o factor K , através da relação (13), tendo-se obtido um valor de $(4,65 \pm 0,04) \times 10^{-3}$, em vez do valor teórico $4,23 \times 10^{-3}$.

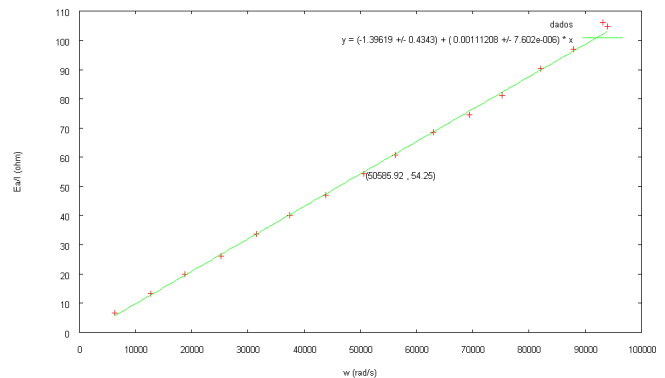


Figura 4. Ajuste dos dados da tabela I à equação (9)

Bobines de Helmholtz - Posição variável

O ajuste feito à força electromotriz máxima gerada em função da frequência angular de rotação da bobine pequena encontram-se na figura 5:

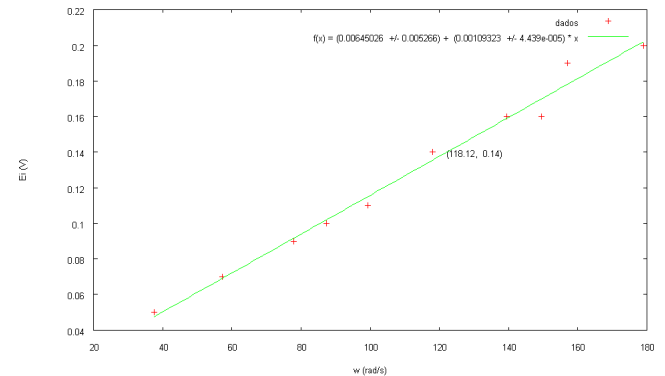


Figura 5. Ajuste dos dados da tabela II à equação (6)

O valor de B obtido através do declive do ajuste foi de $(4,58 \pm 0,19) \times 10^{-4}$ T. Na tabela III encontram-se tabelados os valores teóricos de B para as correntes aplicadas:

Tabela III. B teóricos

I (A)	e_I (A)	B_z (mT)	e_{B_z} (mT)
0,97		4,10	
0,96	0,01	4,06	$4,2 \times 10^{-2}$
0,95		4,02	

Considerando que a corrente aplicada se manteve aproximadamente constante a um valor de 0,96 A, e sabendo que, por definição, o coeficiente de auto-indução é dado por

$$\phi = Li \quad (15)$$

foi possível obter para este um valor de $(1,14 \pm 0,06) \times 10^{-3}$ H.

Transformador

Aos dados da figura 3 foi feito um ajuste linear, com a intenção de verificar se o seu declive correspondia à

relação entre o número de espiras das duas bobinas - figura 7.

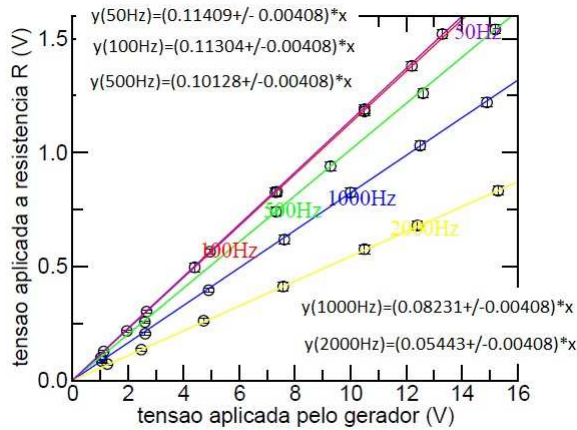


Figura 6. Ajuste linear dos dados da figura 3

Usando os declives obtidos neste último ajuste, foi feito um ajuste destes valores com os respectivos valores de frequência a que foram obtidos à equação XXX.

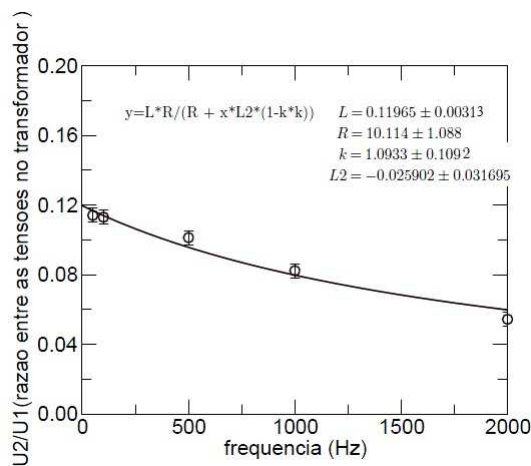


Figura 7. Ajuste dos declives da figura XX à equação XX

V. CONCLUSÃO E CRÍTICAS

Embora se tratem de ensaios diferentes, com diferentes campos magnéticos gerados, o valor de L calculado no primeiro ensaio e o valor de L máximo calculado no segundo ensaio devem ser coincidentes, já que no segundo ensaio L é máximo para a mesma posição em que a bobine se encontrava no primeiro método. Esta observação confirma-se, uma vez que os valores são muito próximos um do outro, sendo mesmo cobertos pelo erro experimen-

tal. A pequena diferença entre os valores pode ser explicada por erros de medição, ou pela eventualidade das posições relativas das bobinas terem sido ligeiramente alteradas entre medições, devido a algum contacto físico accidental por parte dos observadores.

Quanto ao valor do módulo do campo magnético B , verifica-se que este pouco se desvia do que teoricamente se esperava. O facto do erro experimental não cobrir os valores teóricos advém provavelmente da consideração de que, devido à geometria das bobinas de Helmholtz, o campo é praticamente uniforme numa área pequena centrada nesse eixo. No entanto, considerando que as linhas de campo magnético deixam de ser paralelas a uma determinada distância do eixo, a componente normal do campo diminuirá, uma vez que aperecerá uma componente tangencial desse mesmo. Como tal, alguma da componente normal que é considerada teoricamente não existirá na realidade, pelo que o fluxo que atravessa a bobine pequena será menor. Na verdade, não se sabe até que ponto o raio da bobine pequena satisfaz a aproximação considerada, pelo que algum erro experimental poderá ser explicado deste modo. Este problema poderia ser ultrapassado repetindo o procedimento experimental para diversas bobinas pequenas de raios diferentes, de modo a concluir até que raio a aproximação é razoável.

Relativamente à diferença de fase, seria de esperar que fosse de 90° - a diferença de fase entre o cosseno e o seno - já que se trata da diferença entre a corrente aplicada (sinusoidal) e a sua derivada. No entanto, embora o valor se aproxime muito dos 90° para os três menores valores de frequência, aumenta progressivamente com o aumento da frequência, chegando a um máximo de $99,7^\circ$. Este resultado pode ser interpretado notando-se que a partir de uma frequência de 5000 Hz, o sistema está claramente saturado. Assim, o aumento da frequência não leva a um aumento significativo na força electromotriz induzida. A saturação ocorre porque a impedância das bobinas ($jL_{11}\omega$) aumenta com o aumento da frequência, o que faz com que a corrente que nelas circule seja menor, factor esse que é compensado pelo próprio aumento da frequência, fazendo com o que o campo gerado não se altere significativamente com o aumento da frequência da corrente. É portanto plausível que estes dois factos, a saturação da bobine e a diferença de fase não ser 90° , estejam relacionados.

Finalmente, quanto ao transformador, verifica-se claramente que a aproximação de um acoplamento perfeito diminui com o aumento da frequência. De facto, sendo a razão entre espiras igual a 0,12, observa-se que só apenas até 500 Hz existe um desvio máximo de aproximadamente 17%, sendo que para valores maiores a precisão diminui ainda mais.

TRANSFORMADOR —verificar ajuste mais manhoso com complexos. É preciso ajustar ao modulo! —explicar porque é que quando se abre o circuito a relação deixa de depender da frequência (contra fluxo).

[1] *Introdução à Física* by J. D. Deus, et al., McGraw-Hill, 2000