

Determinação da Condutividade Térmica do Alumínio (k_{Al})

Emanuel Ricardo - n° 65677, Hugo Proença - n° 65683, João Martins - n° 65695, João Penedo - n° 65697

Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica, MEFT - IST 2009/10

(Dated: March 24, 2010)

Este trabalho laboratorial tem como objectivo a determinação da constante de condutividade térmica do alumínio. Serão analisados dois regimes, o **estacionário**, em que a temperatura não depende do tempo, e o **variável**, no qual esta depende de uma componente espacial e uma temporal.

Após análise da fiabilidade dos resultados, determinou-se $k_{Al} = 271.2 \pm 4.2 W/(m \cdot K)$ (precisão de 98.5%, exactidão de 87.4%), sendo $k_{Al \text{ referência}} = 237 W/(m \cdot K)$.

I. INTRODUÇÃO

Este trabalho focar-se-á na forma como o calor se propaga por condução através do alumínio. Relembrem-se alguns conceitos de termodinâmica.

O **calor** surge quando corpos a diferentes temperaturas entram em contacto térmico, consistindo este num fluxo de energia orientado no sentido decrescente das temperaturas. A transferência pode ocorrer sob as formas de radiação, convecção e condução.

Na **condução**, o fluxo de energia ocorre entre corpos em contacto material, sem trocas de massa. Verificando-se para todos os estados da matéria, a condução processa-se até ser atingido o equilíbrio térmico. No caso de um sólido (situação aqui estudada), este fenómeno resulta da energia vibracional (*i.e.* fonões) e da energia transportada por electrões livres.

Para descrever a condução, recorre-se à **Lei de Fourier**, que estabelece a proporcionalidade entre o vector de fluxo local de calor, \vec{J}_Q , e o simétrico do gradiente da temperatura na secção pela qual a energia flui (área perpendicular a $\vec{\nabla}T$). A constante de proporcionalidade é designada por **coeficiente de condutividade térmica** (unidades SI: $W/(m \cdot K)$), sendo representada por k :

$$\vec{J}_Q = -k \vec{\nabla}T \quad (1)$$

Note-se que a relação estabelecida ressalva o facto de o fluxo de calor se processar da zona com maior temperatura para a zona de menor temperatura. Destaca-se ainda que o fluxo de calor apenas é nulo quando o gradiente de temperatura for nulo, ou seja, quando se atinge o equilíbrio térmico. O coeficiente de condutividade térmica permite, deste modo, distinguir materiais pelo modo como o calor flui em função de uma mesma diferença de temperatura.

Tem-se ainda, para um dado volume fechado V e por definição do vector de fluxo de calor[1]:

$$\frac{dQ_S}{dt} = \int_{S \equiv \partial V} (\vec{J}_Q \cdot \vec{n}) dS \quad (2)$$

Recorrendo a (1) e (2), à relação $\frac{dQ}{dt} = -\frac{dU}{dt} = -mc \frac{\partial T}{\partial t}$ e ao teorema da divergência podemos deduzir a seguinte igualdade, designada por **equação do calor**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T \quad (3)$$

Sendo que $\chi := \frac{k}{\rho c}$ se designa por **difusibilidade térmica** (unidades SI: m^2/s). Esta equação estabelece uma equivalência entre a variação temporal da temperatura num dado ponto com a diferença entre a temperatura nesse mesmo ponto e a temperatura média dos pontos que lhe estão próximos[2]. Assim, se um dado ponto \mathcal{A} estiver a uma temperatura superior à temperatura média

dos pontos de uma esfera de raio muito pequeno nele centrada, a sua temperatura irá decrescer até ser atingida uma situação de equilíbrio. Analogamente, se a temperatura em \mathcal{A} for menor que a temperatura média dos pontos no interior da esfera, então a temperatura no ponto irá aumentar com o passar do tempo. A única forma da função temperatura no ponto \mathcal{A} se manter, por exemplo, constante ao longo do tempo é se esta for igual à média de temperaturas em seu redor (esta interpretação física da equação do calor revela-se, assim, bastante intuitiva).

Neste trabalho laboratorial, pretende-se analisar a função temperatura ao longo de uma barra de alumínio pelo que consideraremos a equação anterior a apenas uma dimensão espacial.

Numa primeira fase, analisaremos o **regime estacionário**, no qual a temperatura não dependerá do tempo e seguirá uma configuração linear ao longo da barra (a média entre as temperaturas de pontos imediatamente à esquerda e à direita de um ponto \mathcal{A} será igual à temperatura em \mathcal{A} , o que corresponde ao caso acima apresentado).

A temperatura ao longo da barra no regime estacionário ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) é corresponde, por (3), a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 T = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow T(x) = C_1 x + C_2 \\ &\Leftrightarrow T(x) = \frac{T_{FQ} - T_{FF}}{L} x + T_{FF} \end{aligned} \quad (4)$$

Sendo aqui L o comprimento da barra e T_{FF} e T_{FQ} as temperaturas dos pontos terminais da barra, correspondentes, em condições ideais, às temperaturas das fontes fria e quente, respectivamente (acopladas às extremidades da barra de alumínio). Neste caso, o gradiente espacial da temperatura é constante pelo que, por (1), \vec{J}_Q é constante, sendo a quantidade de calor libertada por unidade de tempo descrita por[3] (considerando (2)):

$$\begin{aligned} \frac{dQ_S}{dt} &= \|\vec{J}_Q\| S = k S \left| \frac{dT}{dx} \right| \Leftrightarrow \mathcal{P} = k S \left(\frac{T_{FQ} - T_{FF}}{L} \right) \\ &\Leftrightarrow k = \frac{\mathcal{P}}{S \left| \frac{dT}{dx} \right|} \end{aligned} \quad (5)$$

Deste modo, torna-se fácil encontrar k , como pretendido, desde que se consiga medir a potência \mathcal{P} fornecida à barra.

No presente trabalho estuda-se, igualmente, o **regime variável**.

Admite-se neste caso uma dependência espacial (unidimensional) e temporal de T , já que se analisa o corte da ligação do sistema à fonte quente (considerando a inexistência de perdas de calor pela superfície lateral da barra).

As temperaturas das fontes traduzem-se em condições fronteira, sendo que este problema requer a implementação de análise de Fourier, chegando-se à solução:

$$T(x, t) = T_{FF} + (T_{FQ} - T_{FF}) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^2} e^{-\chi \left(\frac{\pi/2+n\pi}{L} \right)^2 t} \sin \left(\frac{x}{L} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right) \quad (6)$$

Pela definição de χ é possível obter k (neste caso, k_{AI}).

II. EXPERIÊNCIA REALIZADA

O sistema que utilizámos nesta actividade experimental é constituído por uma barra de alumínio lateralmente isolada, em que um dos extremos contacta com um sistema de aquecimento resistivo e o outro com um sistema de arrefecimento por circulação de água.

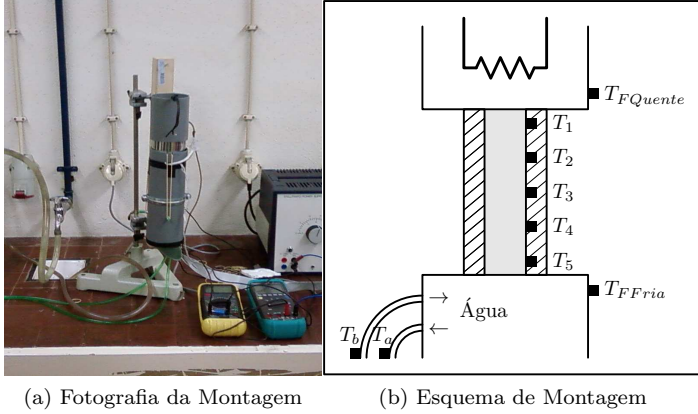


Figura 1: Montagem da experiência realizada

A barra tem $0.12m$ de comprimento e uma secção de área $4 \times 10^{-4} m^2$. Ao longo desta estão presentes sensores resistivos (como indicado na Figura 1b), nas seguintes posições: Existem

Tabela I: Posições dos sensores (que registam T_i) ao longo da barra

Sensor	T_5	T_4	T_3	T_2	T_1
$x(m)$	0.010	0.035	0.060	0.085	0.110

igualmente sensores em ambas as fontes e tanto na entrada como na saída de água da fonte fria. Um programa de conversão e uma unidade de polarização permitem o registo de temperaturas a partir das leituras dos sensores.

É feita uma verificação inicial ao sistema de forma a comprovar o contacto térmico, a circulação de água (efectuando medições periódicas de caudal com um cronómetro digital) e o funcionamento do programa¹.

A. Regime estacionário

Este regime é estudado para duas tensões na fonte quente, de forma consecutiva, tendo-se primeiro $U_I = 16.08 \pm 0.05 V$, correspondente a $i_I = 1.36 \pm 0.01 A$ e finalmente $U_{II} = 20.35 \pm 0.05 V$,

com agora $i_{II} = 1.71 \pm 0.02 A$ (incertezas decorrentes das oscilações nas leituras dos multímetros). Em ambos os casos, o procedimento é idêntico, aguardando-se o estabelecimento de um equilíbrio térmico para cada sensor (condição de estacionaridade - oscilações $\leq 0.3^\circ C$). O ajuste linear destes valores $T(x)$ permite determinar k_{AI} a partir de (5). O cálculo de \mathcal{P} é feito, tanto considerando os valores de tensão e intensidade ($\mathcal{P}_Q = UI$) - potência na fonte quente, como através do caudal e diferença de temperatura da água, \mathcal{P}_F - potência na fonte fria.

B. Regime variável

Neste regime, interrompe-se a acção da fonte quente da barra de alumínio (após a análise dos regimes estacionários) através da sua remoção e do isolamento do topo da barra, provocando a descida das temperaturas (que tendem a aproximar-se da temperatura da fonte fria) devido a um novo fluxo de calor. Os registos de $T(t)$ para cada sensor são conseguidos pelo referido *software* de leitura. A análise destes resultados corresponde tanto a ajustes a (3) como a (6). Nesta última equação são considerados apenas os quatro primeiros termos da série como significativos.

III. RESULTADOS

A. Caudal de água na fonte fria

Ao longo do trabalho realizou-se um total de três medições (espaçadas de meia hora), cada uma composta de três ensaios, onde se determinou o tempo que se demorava a encher uma pipeta até $\Delta V = (100.0 \pm 0.5) ml = (100.0 \pm 0.5) \times 10^{-6} m^3$ usando o fluxo de água que circula na fonte fria:

Tabela II: Medidas temporais (s) para cálculo do caudal

Medição I			Medição II			Medição III		
18.6	19.0	18.9	19.0	18.6	18.9	19.1	19.2	18.9

Sabendo que o caudal corresponde a $\Delta V / \Delta t$, e escolhendo $\Delta t = 18.9 \pm 0.3 s$ (média dos 9 ensaios, sendo que o erro é a maior diferença entre a média e cada um dos valores), obteve-se um (caudal) = $(5.29 \pm 0.11) \times 10^{-6} m^3/s$.

B. Regime Estacionário

Para ambos os casos estacionários, apresentam-se as distribuições espaciais de temperatura: Dos valores de T_a , T_b e do caudal, para U_I e U_{II} , podemos obter o valor da potência, $\mathcal{P}_F = c \frac{\Delta m}{\Delta t} (T_a - T_b) = c \rho \times (\text{caudal}) \times \Delta T$, que passa pela fonte fria, sendo que $c \equiv c_{H_2O} = 4186 J/(kg \cdot K)$ e $\rho \equiv \rho_{H_2O} = 998 kg/m^3$. Apresentam-se ainda os valores de \mathcal{P}_Q calculados como acima descrito e da potência dissipada, $\mathcal{P}_D := \mathcal{P}_Q - \mathcal{P}_F$:

¹ Configuração *Samples per channel read* = 100

Tabela III: $T(x)$ para os regimes estacionários (em unidades SI: K)

	T_I	e_{T_I}	T_{II}	$e_{T_{II}}$
T_1	324.389	0.037	342.285	0.058
T_2	319.989	0.056	335.444	0.095
T_3	314.967	0.066	326.672	0.099
T_4	309.514	0.041	317.517	0.057
T_5	304.609	0.082	311.210	0.125
T_{FF}	297.160	0.035	299.473	0.051
T_a (saída)	295.216	0.022	295.980	0.021
T_b (entrada)	294.925	0.382	295.462	0.604
T_{FQ}	332.736	0.561	354.873	0.785

Tabela IV: Potências em jogo no sistema térmico (W)

Regime est.	\mathcal{P}_Q	$e_{\mathcal{P}_Q}$	\mathcal{P}_F	$e_{\mathcal{P}_F}$	\mathcal{P}_D	$e_{\mathcal{P}_D}$
U_I	21.87	0.23	6.43	13.36	15.44	13.59
U_{II}	34.80	0.49	11.45	18.30	23.35	18.79

C. Regime Variável

Apresentam-se para este regime os resultados, $T_i(t)$, condensados graficamente (cerca de 500 kB de dados):

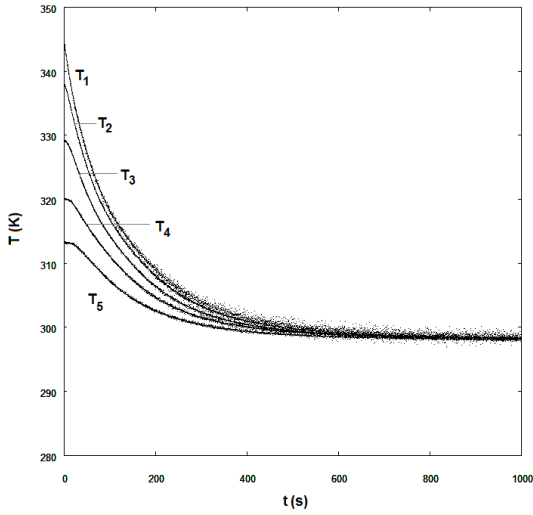


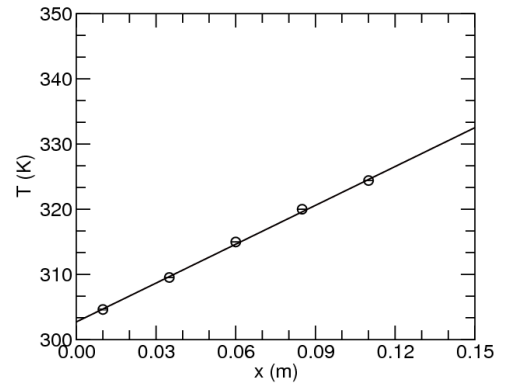
Figura 2: Temperaturas ao longo da barra, ao longo do tempo (SI)

IV. ANÁLISE DE RESULTADOS

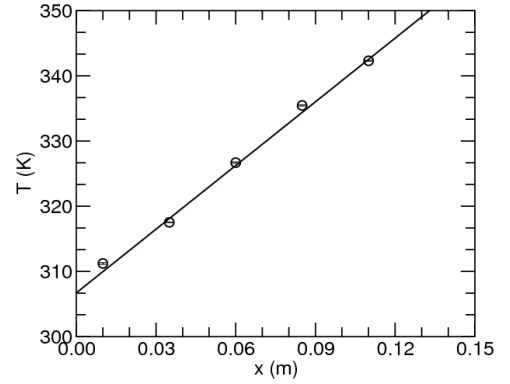
A. Módulo do Gradiente de Temperatura, $|\frac{dT}{dx}|$

Os gradientes de temperaturas foram determinados através de um ajuste a uma recta dos dados das tabelas I e III. O ajuste a uma recta é efectuado apenas porque nos situamos no regime estacionário, sendo possível determinar k_{Al} a partir de (5). Note-se que o gradiente de temperaturas corresponderá ao declive da recta de ajuste $T(x)$, por (4).

Para o primeiro patamar de equilíbrio (U_I), obteve-se o seguinte ajuste linear²:

Figura 3: Ajuste linear para o primeiro regime estacionário, U_I

Deste ajuste obtém-se um declive de $|\frac{dT}{dx}| = 198.64 \pm 0.63 \text{ K/m}$ e uma ordenada na origem de $302.70 \pm 0.05 \text{ K}$. Extrapolando, podemos obter $T_{topo} = 326.54 \pm 0.13 \text{ K}$ e T_{base} igual à ordenada na origem. Para U_{II} , por sua vez, obteve-se o ajuste linear (a $T(x)$):

Figura 4: Ajuste linear para o segundo regime estacionário, U_{II}

Deste outro ajuste obtém-se um declive de $|\frac{dT}{dx}| = 325.60 \pm 0.95 \text{ K/m}$ e uma ordenada na origem de $306.70 \pm 0.07 \text{ K}$. Extrapolando, podemos obter $T_{topo} = 345.77 \pm 0.19 \text{ K}$ e T_{base} igual à ordenada na origem.

B. Condutividade térmica

Através da relação (5) calculou-se k_{Al} , assumindo que o fluxo de calor está associado ao valor de \mathcal{P}_Q .

Tem-se assim que, para o regime estacionário I, $k_{Al I} = 275.23 \pm 3.75 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ e para o r.e. II, $k_{Al II} = 267.19 \pm 4.56 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$. Obtém-se um valor médio de $271.21 \pm 4.16 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$, que encerra uma precisão de 98.5% e uma exactidão de 87.4%.

Se se assumir que a potência em jogo é \mathcal{P}_F , obtém-se um valor médio para $k_{Al} = 84.4 \pm 154.6 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ cujo erro, derivado dos erros obtidos na medição de diferenças de temperaturas para o cálculo de \mathcal{P}_F , lhe retira o significado (cobrindo, no entanto, o valor de referência). Podemos à partida considerar $84.4 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ como um limite inferior do valor de k_{Al} , enquanto que $k_{Al II}$ pode ser tomado como superior (análise de perdas de energia).

C. Resistências Térmicas

Estabelecendo uma analogia com um circuito eléctrico, pode-se calcular a resistência que um dado material oferece à transmissão de energia por condução. A **resistência térmica** para uma certa região da barra é assim dada por $R_{\text{região}} = \Delta T / \mathcal{P}$, tendo-se:

² Todos os ajustes foram realizados recorrendo ao *OneFit*, disponível em <http://lince.ist.utl.pt>

Tabela V: Resistências térmicas no sistema térmico (K/W)

Regime est.	R_{base}	$e_{R_{\text{base}}}$	R_{topo}	$e_{R_{\text{topo}}}$	R_{barra}	$e_{R_{\text{barra}}}$
U_I	0.253	0.007	0.283	0.034	1.090	0.019
U_{II}	0.207	0.006	0.261	0.032	1.123	0.023

Estes valores foram obtidos considerando que a potência que flui na barra é \mathcal{P}_Q e usando, para R_{base} , T_{FF} e T_{base} , para R_{topo} , T_{FQ} e T_{topo} , e para R_{barra} , T_{base} e T_{topo} .

D. Equação do Calor

Determine-se k_{AI} recorrendo a (3): $\chi = \frac{\partial T}{\partial t} / \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$. Para tal, considera-se um conjunto discreto de pontos correspondentes a temperaturas num intervalo de tempo Δt e em redor do ponto central da barra (a incerteza é maior nos extremos). Para $\Delta t = 4.062 \text{ s}$ (de 100.0 s a 104.1 s), tem-se $\Delta T_3 = |T_3(100.0) - T_3(104.1)| = 0.352 \text{ K} \sim 1 \text{ K}$, donde se tira $\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\Delta T_3}{\Delta t}$.

Por outro lado, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ foi obtido pelo método das diferenças finitas, a partir de um instante médio do intervalo de tempo e das temperaturas T_2 e T_4 .

Obteve-se assim, $\chi = 8.49 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, donde se tem $k = 355 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

E. Análise de Fourier

Foi aplicada a equação (6) para ajustar os dados deste segundo regime, obtendo-se os seguintes resultados gráficos (para melhorar o ajuste deixaram-se T_{FF} e T_{FQ} livres).

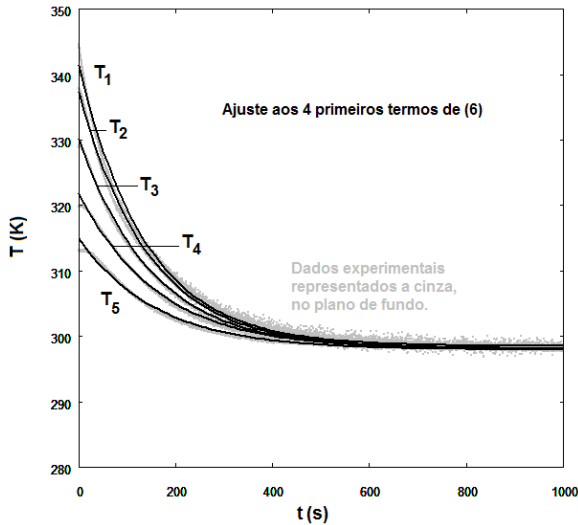


Figura 5: Ajuste da série para o regime variável

A partir de cada um dos ajustes T_i podemos determinar um valor χ_i . Fazendo a média destes valores obtemos $3.87 \times 10^{-5} \pm (2 \times 10^{-11}) \text{ m}^2/\text{s}$, o que corresponde a um $k = 161.67 \pm (7 \times 10^{-5}) \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

V. CONCLUSÕES E CRÍTICA

A análise do regime estacionário permitiu a obtenção de um valor médio $k_{AI} = 271.2 \pm 4.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Impondo uma tensão de $U_I \approx 16.08 \text{ V}$ à fonte quente, determinou-se um $k_{AII} = 273.2 \pm 3.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, enquanto que a utilização de $U_{II} \approx 20.35 \text{ V}$ conduziu a $k_{AIII} = 267.2 \pm 4.6 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ para o mesmo coeficiente. Pode facilmente verificar-se que o resultado mais exacto (88.7%) foi o obtido quando se forneceu uma maior potência à fonte quente (\mathcal{P}_Q).

As discrepâncias entre os valores experimentais e teórico devem-se sobretudo às perdas de energia no sistema (principalmente nos extremos da barra), situação não prevista pelo modelo teórico.

Analisando os ajustes lineares efectuados, verificamos que os conjuntos de pontos estão coerentes com as rectas, o que refuta a hipótese de constituição significativamente heterogénea da barra ou o mau funcionamento dos sensores. O único problema está nos seus declives inferiores ao esperado. Estes dever-se-ão a perdas de energia, pelo que a potência que efectivamente atravessa o meio é inferior à considerada.

Por outro lado, a consideração de uma zona mal isolada pode, numa primeira análise, implicar uma certa incoerência de resultados, pois o valor mais exacto foi o obtido quando se forneceu uma maior potência ao sistema, onde se esperaria uma maior perda energética, logo menor fluxo de calor. No entanto, uma abordagem mais cuidada do problema alerta para o facto de que as resistências térmicas na barra poderem variar de forma não-linear com a energia. De facto, os valores a negrito na tabela V ilustram uma diminuição da resistência com a temperatura, o que terá permitido uma menor dissipação relativa de energia, explicando os resultados obtidos.

Deve-se referir que um balanço energético com base nas potências fornecida e retirada não permite a medição da potência dissipada com grande rigor devido aos erros verificados na determinação do ΔT na fonte fria (c_{H_2O} é relativamente grande). O erro humano na medição do caudal é desprezável.

Estando interessados numa leitura de potência mais fiável, poderia ser implementada no sistema, uma célula de Peltier em substituição da presente fonte fria, permitindo uma medição de potência análoga à da potência na fonte quente.

Quanto ao regime variável, deparamo-nos com resultados incoerentes com o esperado e entre si. Este regime é igualmente caracterizado por grandes perdas de energia. Recorrendo à equação do calor, obtemos $k_{AII} = 355 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ (desvio de 49.8% à exactidão), enquanto que aplicando análise de Fourier chegamos a $k_{AII} = 162 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ (desvio de 31.6% à exactidão). É de referir que, na primeira determinação, tanto a fiabilidade dos dados como os resultados obtidos, ao longo da curva $T_3(t)$, variam bruscamente, sendo que as aproximações definidas são insuficientes para a determinação de k_{AI} . Para a série (6), verifica-se que, apesar de se conseguirem ajustes satisfatórios, o modelo matemático não contempla factores como a dissipação energética e a variação não-linear das resistividades térmicas ao longo do tempo.

(Wiley, 2004) Chap. 20, pp. 623–625, 7th ed.