

# Condutividade Térmica do Alumínio

André Ramos      Gonçalo Quintal      Pedro Silva      Rui Claro

30 de Abril de 2009

Este trabalho experimental tem por objectivo estudar a condução de calor através duma barra de alumínio, calculando a sua condutividade térmica. A experiência será realizada primeiramente com um gradiente de temperatura constante onde verificaremos a Lei de Condução de Fourier e numa segunda parte em regime variável onde se estudarão os dados à luz da equação do calor. Na primeira parte foi obtido o valor de  $235,75 \pm 5,78$  e no regime variável de  $\kappa = 216,68 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$  para a condutividade do alumínio.

## Introdução

A transmissão de energia sobre a forma de calor entre e através dos corpos é feita sobre três formas: condução; convecção e radiação. Na condução o calor é propagado ao longo do material sem que exista deslocamento de matéria. Fourier estabeleceu para a condução de calor a seguinte lei:

$$P = -\kappa \cdot S \cdot \nabla T$$

onde  $P$  é a potência transmitida ao longo do corpo,  $S$  a secção do mesmo e  $\kappa$  uma constante, designada por condutividade térmica do material e permite comparar a capacidade dos diferentes materiais conduzirem calor por condução. No caso unidimensional temos portanto:

$$P = -\kappa \cdot S \cdot \frac{dT}{dx}$$

No caso de não existir um gradiente de temperatura constante a lei da condução de Fourier é generalizada pela chamada equação do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\chi \nabla^2 T$$

onde a constante multiplicativa  $\chi = \frac{\kappa}{\rho \cdot C}$  condensa a condutividade, densidade e calor específico do material. Tomando mais uma vez o problema a uma dimensão obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis e recorrendo à análise de Fourier.

## Experiência realizada

A montagem para esta experiência consiste numa barra de alumínio, em que cujas extremidades estão fixas uma fonte fria e uma fonte quente. A fonte quente consiste num fio de resistência enrolado e fixo em torno da extremidade superior da barra. A fonte fria consiste num tubo de água enrolado e fixo em torno da extremidade inferior da barra, no qual a água corrente irá retirar calor da barra, provocando a condução de energia. A barra tem  $4\text{cm}^2$  de secção e  $12\text{cm}$  de comprimento. Toda a montagem é mantida na vertical através de um suporte. Ao longo da barra temos sensores de temperatura que nos ajudam a retirar os valores da temperatura ao longo do tempo. Precisámos também de verificar os valores de tensão e corrente ao longo da experiência.

A experiência dividiu-se em dois processos, sendo que no primeiro se estudou o caso de um gradiente constante e no segundo o regime livre ou variável.

Na parte experimental a gradiente da temperatura constante verificou-se o nível de água e ligou-se a torneira para manter a temperatura da água constante. Verificou-se ainda que a unidade de aquecimento estava encostada ao extremo da barra de alumínio. Aplicou-se uma tensão aproximadamente de  $12,24\text{V}$  e esperou-se até que o regime estacionário fosse atingido, isto é, que diferença entre a temperatura máxima e mínima era inferior a  $0,3\text{C}$ . Anotaram-se os valores. Repetiu-se esta parte para uma tensão de cerca  $16,9\text{V}$ .

Na segunda parte da experiência houve a necessidade da ajuda do professor para a preparação visto serem preciso 5 pessoas

num dado instante. Um elemento no PC para correr o programa, um na fonte de energia para a desligar, o professor soltou os elásticos que unem as duas secções, outro elemento a levantar a fonte quente e o quarto elemento a colocar o isolamento térmico. Após algum tempo de espera a aquisição dos dados cesou e a experiência ficou completa.

Ao longo do procedimento o caudal da água que retira calor ao sistema foi medido repetidas vezes.

## Resultados

Na parte da experiência a gradiente constante obtivemos os gráficos das figuras 1 e 2, que nos permitem obter os seguintes valores de condutividade para os dois casos de tensão aplicada:

$U$ (V)	$\kappa$ ( $Wm^{-1}K^{-1}$ )
12, 24	$224, 30 \pm 11, 23$
16, 85	$235, 75 \pm 5, 78$

Para a tensão de cerca de 12V a potência fornecida foi de  $12, 61 \pm 0, 13W$  e a potência removida  $6, 17 \pm 4, 99W$  o que corresponde a uma dissipação de  $12, 44W$  de potência. A 17V a potência fornecida foi de  $24, 1 \pm 0, 18W$  e a potência removida  $10, 81 \pm 9, 2W$  pelo que a potência dissipada é de  $13, 29W$ .

No regime variável foram efectuados os ajustes apresentados nos gráficos das figuras 3 a 7 que nos permitiram obter os seguintes valores de  $\chi$  como parâmetro de ajuste e assim calcular  $\kappa$ :

$\chi$	$\langle \chi \rangle$	$\kappa$
$3, 86 \times 10^{-5}$	$3, 53 \times 10^{-5}$	85, 57
$3, 70 \times 10^{-5}$		
$3, 52 \times 10^{-5}$		
$3, 30 \times 10^{-5}$		
$3, 25 \times 10^{-5}$		

Recorrendo ainda ao gráfico da temperatura em função da posição podemos calcular o  $\chi$  e obter uma condutividade de  $\kappa = 216, 68 \text{ } Wm^{-1}K^{-1}$

## Análise de resultados

No caso do cálculo de  $\kappa$  num regime a gradiente constante podemos calcular  $\kappa$  simplesmente a partir de

$$\kappa = \frac{P}{S \cdot \frac{dT}{dx}}$$

obtivemos valores de  $224, 30Wm^{-1}K^{-1}$  e  $235, 75Wm^{-1}K^{-1}$  o que corresponde a um erro de 5, 35% e 0, 53%, respectivamente,

<sup>1</sup>Os termos de ordem superior da série de Fourier decrescem rapidamente para zero pelo que não desprezáveis

face ao valor tabelado para o alumínio de  $237Wm^{-1}K^{-1}$ . A qualidade dos resultados pode também atestar-se pelos coeficientes de correlação das rectas de ajuste em que também o caso da tensão aplicada de 17V se mostra mais precisa, com  $R^2 = 0, 9989$ .

A potência fornecida à barra foi calculada por simples efeito de Joule em que

$$P_f = V \cdot I$$

, com um erro associado de  $\epsilon P_f = I \cdot \epsilon V + V \cdot \epsilon I$  enquanto que a potência retirada pela circulação de água fria é dada por

$$P_r = C \cdot c_{\text{água}} \cdot \Delta T$$

onde  $C$  é o caudal, em massa, de água que passa por unidade de tempo na fonte fria.

No regime variável os dados obtidos em cada sensor foram desenhados em gráfico e ajustados pela aproximação de segunda ordem<sup>1</sup> da solução da equação do calor para as condições fronteira específicas ou seja pela função:

$$T(t, x) = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\chi \left( \frac{x+n\pi}{L} \right)^2} t \frac{(-1)^n}{(1+2n)^2} \sin \left( \frac{x}{L} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right)$$

Neste caso embora o ajuste seja bastante bom o valor obtido de  $\kappa$  fica aquém do esperado sendo de cerca de 36% do valor esperado, apenas  $85, 57Wm^{-1}K^{-1}$ .

Por fim foi ainda obtida condutividade recorrendo à equação do calor,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

realizando um ajuste polinomial aos valores de temperatura para as cinco posições para  $t_0 = 1, 16s$  obtemos uma função de quarto grau da qual podemos facilmente obter a segunda derivada  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$  num dado ponto (no caso a  $0, 06m$ ), a derivada em ordem ao tempo pode ser encontrada calculando a taxa de variação de  $T$  para instantes próximos de  $t_0$ ,  $t = 0, 53s$  e  $t = 2, 4s$ . Assim encontramos  $\chi$  por:

$$\chi = -\frac{\frac{\partial T}{\partial t}}{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} = 8, 926 \times 10^{-5}$$

o que nos leva a uma condutividade  $\kappa = 216, 68Wm^{-1}K^{-1}$  em que o desvio ao valor tabelado é de 8, 57%

## Conclusão e críticas

Deste trabalho obtiveram-se medições da condutividade térmica do alumínio com precisão apreciável, tendo sido o melhor valor o de  $235, 75Wm^{-1}K^{-1}$  o que representa apenas um erro de 0, 53% relativamente ao

tabelado. De notar que os valores mais adequados foram obtidos no regime estacionário e que no regime variável, ao realizar o ajuste dos dados à solução da equação do calor adequada a esta situação obtemos um valor para a condutividade que muito se afasta do valor esperado de uma forma inesperada e que pode corresponder a um erro sistemático como por exemplo um atraso na leitura ou processamento de dados nos sensores ou unidade de aquisição.

Também a grande disparidade entre a potência fornecida e a removida, tendo em

conta que o sistema nos parece bem isolado (não se sente por exemplo emissão significativa de calor em torno da montagem) pode indicar um ponto a ter em atenção na análise e tratamento de dados, provavelmente os sensores de temperatura da fonte fria estão influenciados pelo aquecimento da própria montagem. Este factor é ainda potenciado uma vez que a diferença de temperatura da água ao entrar e sair da fonte fria é pequena pelo que qualquer erro se torna bastante relevante para este cálculo.

## Anexo

### Gráficos obtidos

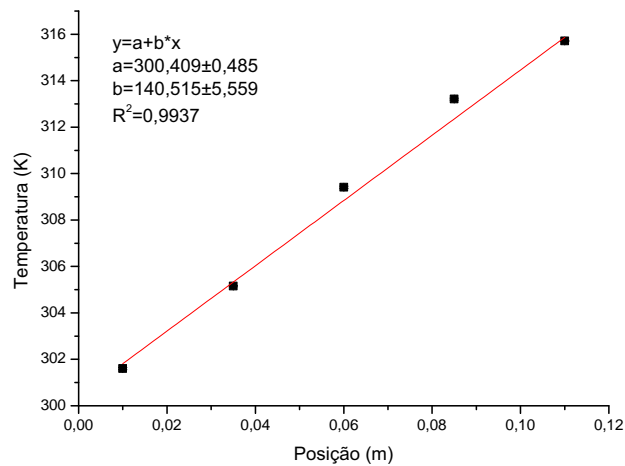


Figura 1: Gradiente constante a 12V

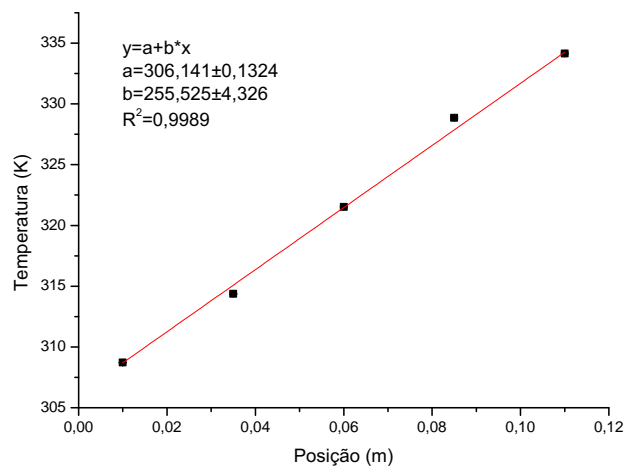


Figura 2: Gradiente constante a 17V

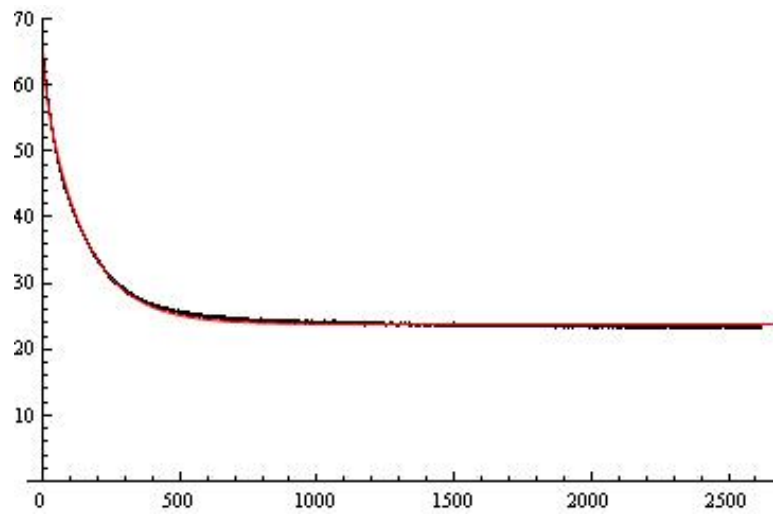


Figura 3: Regime variável na posição  $x = 0,01m$

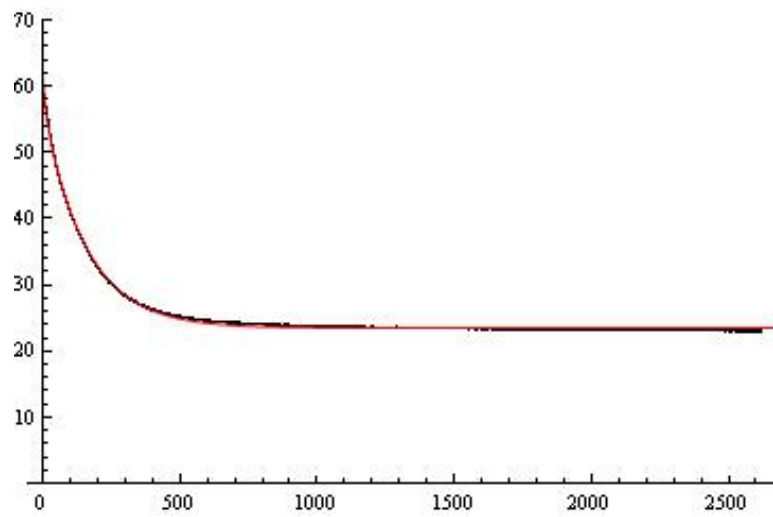


Figura 4: Regime variável na posição  $x = 0,035m$

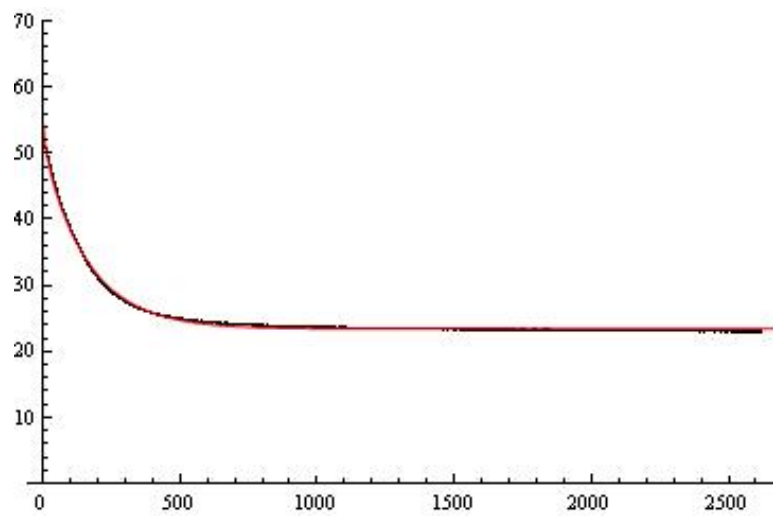


Figura 5: Regime variável na posição  $x = 0,06m$

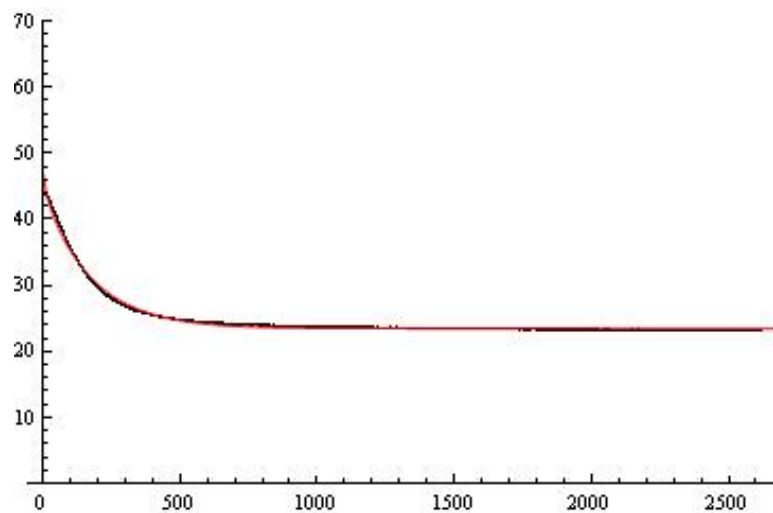


Figura 6: Regime variável na posição  $x = 0,085m$

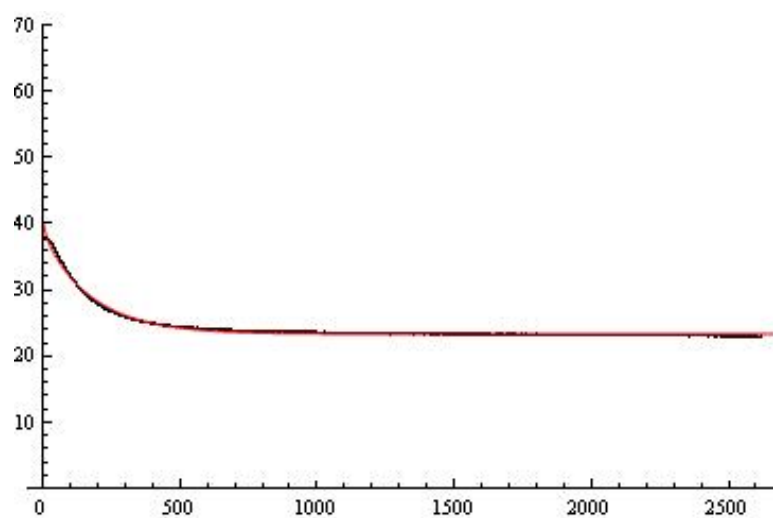


Figura 7: Regime variável na posição  $x = 0,11m$

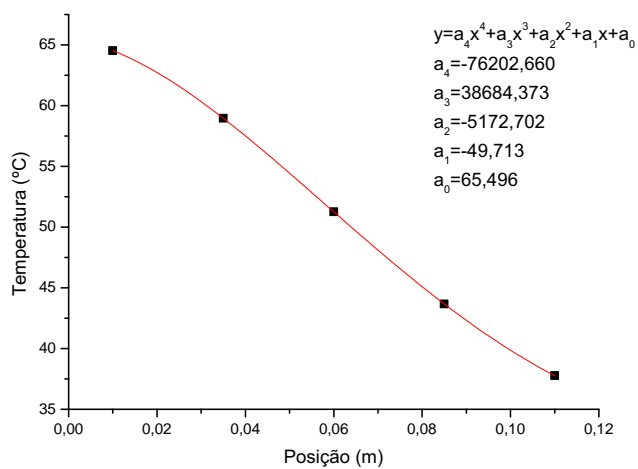


Figura 8: Temperatura em função da posição para  $t = 1,16s$