

Indução de Faraday

LCET/MEFT - 2º ano, 2º Semestre - 2013/2014

Turno de Sexta-feira

Professor João Figueirinhas

Grupo D

João Lourenço (75382)/ Miguel Mora (75399)/ Miguel Levy (75516)/ Ana Almeida (75986)

02/05/2014

Resumo

Esta actividade tem como objectivo verificar a lei de indução de Faraday em circuitos móveis na presença de campos magnéticos estáticos. Assim, determinou-se o coeficiente de indução para um campo magnético estático e uniforme através de dois processos, mantendo uma intensidade de corrente constante ($L_i = 1,16 \pm 0,04mH$) e tendo uma velocidade de oscilação constante ($L_\omega = 1,25 \pm 0,17mH$). Outro objectivo era a análise do circuito com transformador, para isso impôs-se uma tensão constante, determinando-se através do modelo teórico $L_M = 42,6 \pm 0,2mH$ e $k = 0,879$. Através da diferença de fase obteve-se, novamente, a constante de acoplamento ($k = 1,098 \pm 0,003mH$). Para concluir, ainda se analisou a relação entre a tensão à entrada e saída do transformador, comparando com o caso do transformador ideal.

1 Introdução

A indução de Faraday é uma lei que nos diz que irá aparecer uma corrente num circuito caso este seja colocado sob o efeito de um campo magnético, sob certas condições. A força eletromotriz induzida ϵ_i , que quantifica o efeito da indução de Faraday, é dada pela seguinte relação:

$$\epsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} \quad (1)$$

sendo ϕ o fluxo de campo magnético \vec{B} :

$$\phi = \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS \quad (2)$$

Nesta parte do trabalho, iremos analisar o caso em que foi colocado um circuito em rotação no espaço entre duas bobinas de Helmholtz. A rotação do circuito será feita no plano perpendicular ao eixo das bobinas e a normal da superfície será colocada na mesma direcção que o eixo central. Como temos que a rotação do circuito é feita num plano perpendicular à normal, significa que o ângulo α entre estes irá variar em cada instante de tempo. Assim, o produto interno do campo magnético produzido com a referida normal é dado por:

$$\phi = \int_S |\vec{B}| \cos(\alpha) dS \quad (3)$$

Como no eixo central entre as bobinas o campo magnético é constante e como α é independente do integral de superfície:

$$\phi = |\vec{B}| \cos(\alpha) S \quad (4)$$

Se em vez de se colocar apenas um circuito em rotação, se colocarem n espiras, temos que o fluxo ao longo das n espiras é dado pelo produto do número das espiras com o fluxo a atravessar apenas uma delas:

$$\phi_n = n\phi \iff \phi_n = n|\vec{B}| \cos(\alpha) S \quad (5)$$

Colocando o circuito em rotação com velocidade angular constante ω , podemos substituir α por:

$$\phi_n = n|\vec{B}| \cos(\omega t) S \quad (6)$$

Tendo o fluxo do campo de indução, substitui-se em (1) e obtém-se:

$$\epsilon_i = n|\vec{B}| \omega \sin(\omega t) S \quad (7)$$

O valor de $|\vec{B}|$ é obtido aplicando Biot-Savart no interior das bobinas:

$$|\vec{B}| = \frac{8\mu_0 N i}{5\sqrt{5}r} \quad (8)$$

em que N é o número de espiras das bobinas e r é o seu raio. A tensão criada por efeito de indução nos terminais do enrolamento em rotação é dada por:

$$V = Ri_{ind} + \frac{d\phi}{dt} + L \frac{di_{(ind)}}{dt} \quad (9)$$

sendo R a resistência interna do enrolamento, L o seu coeficiente de auto-indução e $i_{(ind)}$ a corrente induzida por efeito da indução de Faraday. Como podemos desprezar a auto-indução e a resistência interna de um enrolamento, temos que será apenas a derivada temporal do fluxo que descreverá a tensão aos terminais do enrolamento. Para se eliminar a função trigonométrica e os sinais, obtivemos a seguinte expressão para o módulo máximo da tensão:

$$|V| = L_M \omega i \quad (10)$$

em que:

$$L_M = \frac{8\mu_0 N n S}{5\sqrt{5}r} \quad (11)$$

Prossegue-se agora para a análise de outra montagem que dá origem ao efeito de indução magnética, a situação de condutores fixos num campo magnético variável. Para tal iremos utilizar um transformador, que é constituído por um núcleo de ferro maciço fechado e dois enrolamentos com números diferentes de espiras. O campo magnético no seu interior, criado pelas espiras quando percorridas por corrente, é aproximadamente 3 a 4 ordens de grandeza superior ao campo criado no exterior (ar), isto porque o ferro tem uma elevada permeabilidade magnética relativa. As linhas de força do campo permanecem e fecham-se no interior do núcleo. Nesta parte do trabalho considerou-se que o transformador era ideal, ou seja considerou-se que não existe fluxo de dispersão para o exterior do núcleo. Ao fazermos um dos enrolamentos ser percorrido por uma corrente variável no tempo, obtemos então um campo magnético variável no tempo e consequentemente o seu fluxo também. Utilizando o facto de que $\phi_n = n\phi$, temos que o fluxo através dos enrolamentos é directamente proporcional ao nº de espiras e que (as grandezas com índice

1 referem-se às espiras que são percorridas com a corrente por nós fornecida):

$$\left| \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right| = \frac{n_1}{n_2} \quad (12)$$

Ou seja, a razão entre as forças eletromotrizes induzidas é igual ao quociente entre o número de espiras de cada enrolamento. Como se desprezam as resistências internas dos enrolamentos, as tensões aos seus terminais são:

$$V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{di_2}{dt} \quad (13)$$

$$V_2 = L_M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (14)$$

sendo L_1 e L_2 os coeficientes de auto-indução do primeiro e segundo enrolamento, respetivamente e L_M o coeficiente de indução mútua. Introdúz-se agora uma outra grandeza, a constante de acoplamento magnético, que descreve a dispersão das linhas de força do campo:

$$k = \frac{L_M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (15)$$

Como num transformador ideal $k = 1$, podemos relacionar as tensões aos terminais dos enrolamentos, obtendo assim o módulo do seu quociente e a diferença de fase entre ambos, respetivamente:

$$\left| \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \right| = \frac{L_M}{L_1 \sqrt{1 + \omega L_2 \frac{1-k^2}{R}}} \quad (16)$$

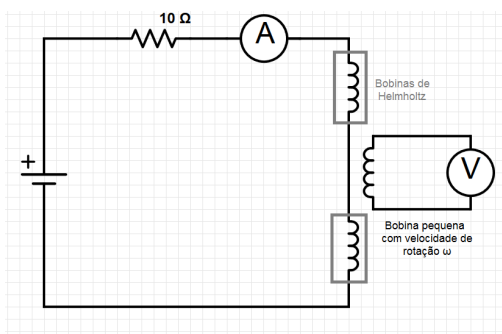
$$\Delta\delta = -\arctan\left(\omega L_2 \frac{1-k^2}{R}\right) \quad (17)$$

2 Montagem e Proctocolo experimental

Nesta experiência recorre-se a um campo magnético estático e uniforme gerado por bobinas de Helmholtz, sendo colocada no meio destas bobinas uma terceira bobina que efectua um movimento de rotação perpendicular ao campo de indução.

I - Campo magnético estático e uniforme

1. Faça a montagem conforme o esquema abaixo:



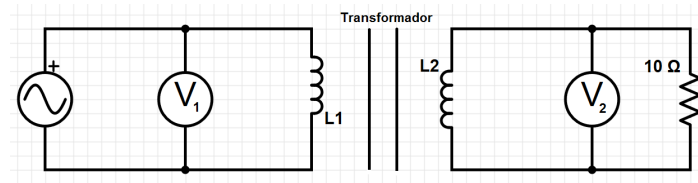
Esquema 1: Montagem experimental - parte I.

2. Imponha uma tensão por forma a obter uma corrente nas bobinas de Helmholtz de cerca de $800mA$;
3. Varie a tensão fornecida à pequena bobine em rotação;
4. Faça o ajuste (regressão linear) para (10), em que a intensidade é constante;

5. Obtenha L_i através da divisão do declive da regressão (m) pela intensidade de corrente ($I \approx 800mA$);
6. Para uma velocidade de rotação (ω) constante, varie as correntes entre os $300mA$ e $1.5A$ (em passos de $150mA$);
7. Faça a regressão linear segundo (10), obtendo L_ω através da divisão do declive da regressão (m) pela velocidade de rotação (ω);

II - Transformador

1. Monte o circuito conforme a figura a baixo, em que o enrolamento primário tem 600 espiras e o secundário 72;



Esquema 2: Montagem experimental - parte II.

2. Ajuste o gerador para que produza uma tensão alternada sinusoidal de frequência $f = 50Hz$;
3. Varie a amplitude máxima da tensão produzida pelo gerador desde $1V$ até $9V$ (em passos de $1V$), registando as amplitudes máximas da tensão produzida pelo gerador e aplicada ao enrolamento primário do transformador (V_1) e da tensão de saída do transformador (V_2) que se encontra aplicada sobre a resistência ($R = 10\Omega$).
4. Repita os passos anteriores para frequências do gerador iguais a $100Hz$, $500Hz$, $1000Hz$ e $2500Hz$;
5. Mantenha a tensão gerada pelo gerador no seu valor máximo ($V = 9V$) e varie a sua frequência de modo a registar V_2 ;
6. Represente graficamente a tensão V_2 em função de V_1 (regressão linear com declive m);
7. A partir das regressões lineares, compare m com a razão do número de espiras entre os enrolamentos secundário e primário (12);
8. Com $f = 10kHz$ retire a resistência de 10Ω do secundário, deixando o circuito em aberto, registre V_1 e V_2 e a diferença de fase entre ambas as tensões;
9. Meça os coeficientes de autoindução do primário e do secundário utilizando o medidor de indutâncias;
10. Represente graficamente: $V_2(V_1)$ e $V_2/V_1(f)$, ajustando este ultimo ao modelo do transformador em regime linear (16);
11. Determine a constante de acoplamento magnético do transformador (k);
12. Ajuste a diferença de fase para $V = 9V$ em função da frequência segundo (17) e obtenha k .

3 Análise de Resultados

3.1 Campo magnético estático e uniforme

Com as bobinas de Helmholtz percorridas por uma corrente de $800mA$, liga-se o motor acoplado ao eixo central, variando-se a sua velocidade de rotação, obtendo-se a tensão aos terminais e a frequência de rotação, vindo:

$V_{entrada}$ (V)	$f(Hz)$	$\omega(rads^{-1})$	$V_{terminais}$ (V)
$10,00 \pm 0,25$	$27,2 \pm 0,3$	171 ± 2	$(1,60 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$9,50 \pm 0,25$	$26,3 \pm 0,3$	165 ± 2	$(1,56 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$9,00 \pm 0,25$	$24,8 \pm 0,3$	156 ± 2	$(1,51 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$8,50 \pm 0,25$	$24,0 \pm 0,2$	151 ± 2	$(1,42 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$8,00 \pm 0,25$	$21,9 \pm 0,2$	138 ± 1	$(1,31 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$7,50 \pm 0,25$	$20,5 \pm 0,2$	129 ± 1	$(1,22 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$7,00 \pm 0,25$	$18,9 \pm 0,2$	119 ± 1	$(1,12 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$6,50 \pm 0,25$	$17,5 \pm 0,2$	110 ± 1	$(1,03 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$6,00 \pm 0,25$	$15,6 \pm 0,2$	98 ± 1	$(0,94 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$5,50 \pm 0,25$	$14,0 \pm 0,2$	88 ± 1	$(0,84 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$5,00 \pm 0,25$	$12,0 \pm 0,2$	75 ± 1	$(0,72 \pm 0,04) \times 10^{-1}$
$4,50 \pm 0,25$	$10,8 \pm 0,2$	68 ± 1	$(0,66 \pm 0,04) \times 10^{-1}$

Tabela 1: Valores de frequência e tensão medidos no osciloscópio, para uma intensidade de corrente nas bobinas de Helmholtz de $\approx 803mA$, bem como valores da velocidade de rotação calculados.

Para verificar a relação de linearidade (10) entre a tensão e a velocidade de rotação, realizou-se um ajuste segundo $y = mx + b$, em que o factor m corresponde a Li , dado pela expressão (11). Desta forma calculou-se $L_{teorico} = 1,01mH$, sendo possível fazer o ajuste para $i = 803mA$, obtendo-se uma curva teórica e outra com os dados experimentais, vindo:

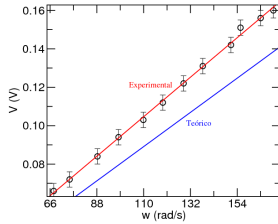


Gráfico 1: Ajuste $V(\omega)$, segundo $y = mx + b$, sendo

$$m_{experimental} = (9,35 \pm 0,34) \times 10^{-4} \text{ e}$$

$$b_{experimental} = (1,82 \pm 4,4) \times 10^{-3} \text{ e } m_{teorico} = 8,1 \times 10^{-4}.$$

Daqui retirou-se o valor de L (divisão de m por i):

$$\underline{\underline{L_i = 1,16 \pm 0,04mH}}$$

Com a velocidade de rotação (ω) constante, varia-se a corrente aplicada às bobinas de Helmholtz ($300mA - 1.5A$) em passos de $150mA$, por forma a se estudar a variação da tensão com a corrente.

I (A)	$V_{terminais}$ (V)
$0,299 \pm 0,001$	$0,061 \pm 0,004$
$0,449 \pm 0,001$	$0,091 \pm 0,004$
$0,599 \pm 0,001$	$0,120 \pm 0,004$
$0,750 \pm 0,001$	$0,154 \pm 0,004$
$0,900 \pm 0,001$	$0,186 \pm 0,008$
$1,048 \pm 0,001$	$0,220 \pm 0,008$
$1,200 \pm 0,001$	$0,254 \pm 0,008$
$1,347 \pm 0,001$	$0,288 \pm 0,008$
$1,497 \pm 0,001$	$0,324 \pm 0,008$

Tabela 2: Variação da tensão (V) com a intensidade (I) para $f = 27,8 \pm 3,1(Hz)$, ou seja $\omega = 175 \pm 19(rads^{-1})$

Com os dados da tabela 2, e usando um procedimento análogo ao anterior, mas agora para $\omega = const$, fez-se um novo ajuste experimental segundo (10), por forma a determinar L_ω , vindo:

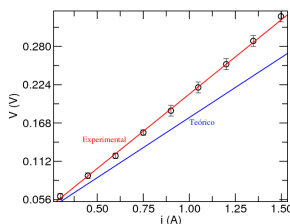


Gráfico 2: Ajuste $V(i)$, segundo $y = mx + b$, sendo

$$m_{experimental} = 0,218 \pm 0,005, b_{experimental} = -0,007 \pm 0,004 \text{ e}$$

$$m_{teorico} = 0,176.$$

Obtendo-se L_ω (divisão de m por ω) de:

$$\underline{\underline{L_\omega = 1,25 \pm 0,17mH}}$$

3.2 Transformador

Com uma onda sinusoidal de frequências distintas ($50Hz, 100Hz, 500Hz, 1000Hz$ e $2500Hz$), variou-se a amplitude do sinal de $1V$ a $9V$, registando-se a tensão no enrolamento primário e à saída do transformador, bem como a fase entre os dois sinais (V_1 e V_2).

No gráfico 3, encontram-se representadas as relações $V_{saida}(V_{entrada}) \iff V_2(V_1)$, para as frequências referidas anteriormente.

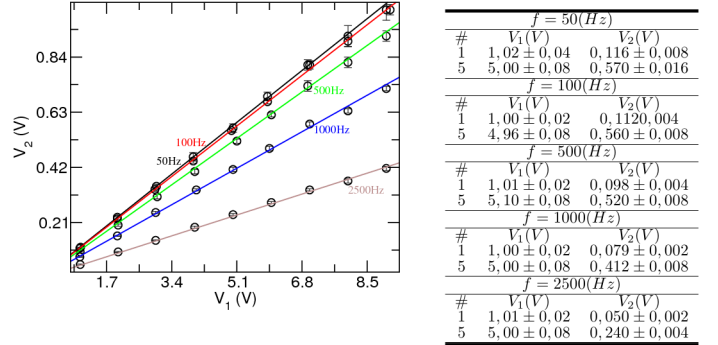


Gráfico 3: Ajuste $V_2(V_1)$, segundo $y = mx + b$ para frequências de $50Hz, 100Hz, 500Hz, 1000Hz$ e $2500Hz$.

f (Hz)	m	d.exactidão (%)
50	0,116	3,3
100	0,113	5,8
500	0,104	13,3
1000	0,082	31,7
2500	0,047	60,8

Tabela 3: Valores de m para diferentes frequências (f), obtidos nos ajustes $y = mx + b$ do gráfico 3, bem como desvios à exactidão de $m_{ideal} = 0,12$.

Para um transformador ideal, a relação entre a tensão à entrada e à saída é proporcional à divisão entre o número de espiras do enrolamento secundário e o número de espiras do enrolamento primário ($\frac{n_2}{n_1} = 0,12$). Desta forma se tivéssemos um transformador ideal, os valores para m da tabela 3, seriam iguais a $0,12$, o que não acontece uma vez que o transformador não é ideal.

É de notar, que para valores de frequência baixa ($50Hz, 100Hz$ e $500Hz$), a m não se encontra muito afastado do valor esperado caso o transformador fosse ideal.

Para terminar, aplicou-se uma tensão de $9V$ varia-se a frequência e registando-se V_2 , vindo:

f (Hz)	V_2 (V)
100 ± 1	$1,02 \pm 0,02$
160 ± 1	$1,02 \pm 0,02$
250 ± 1	$0,99 \pm 0,02$
400 ± 1	$0,95 \pm 0,02$
649 ± 1	$0,87 \pm 0,02$
1008 ± 1	$0,72 \pm 0,02$
1594 ± 1	$0,60 \pm 0,02$
2497 ± 1	$0,43 \pm 0,02$
4005 ± 1	$0,29 \pm 0,02$
5990 ± 1	$0,23 \pm 0,02$
9990 ± 1	$0,15 \pm 0,02$
$*9987 \pm 1$	$0,91 \pm 0,02$

Tabela 4: Para uma tensão $V_1 = 9V$, variou-se a frequência, registando-se os valores da tensão à saída V_2 , sendo o último valor apresentado (*) para o caso em que se retira a resistência.

Enrolamento	L (mH)
Primario (1)	$370,4 \pm 0,1$
Secundario (2)	$6,338 \pm 0,001$

Tabela 5: Coeficientes de auto-indução.

Com os valores da tabela 4, realizou-se um ajuste segundo a expressão 16, em que L_1 e L_2 foram fixos com os valores presentes na tabela 5, obtendo-se:

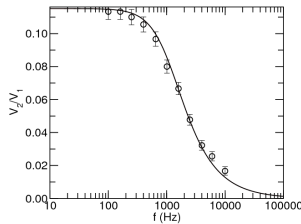


Gráfico 4: Ajuste, em escala logarítmica, de V_2/V_1 em função de f segundo 16 em que $L_1 = 370,4 \pm 0,1mH$, $L_2 = 6,338 \pm 0,001mH$ e $R = 10\Omega$. Do ajuste obtém-se $L_M = 42,6 \pm 0,2mH$.

Com os valores de L_1 e L_2 (tabela 5) e $L_M = 42,6 \pm 0,2mH$ obtido através do ajuste do gráfico 4, obtém-se a constante de acoplamento a partir de (15):

$$k = 0,879 \pm 0,004$$

Para concluir, fez-se um ajuste segundo (17), a fase entre V_1 e V_2 para diferentes frequências, vindo:

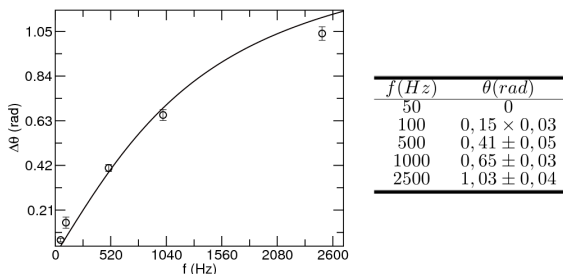


Gráfico 5: Ajuste $\Delta\theta(f)$ segundo (17) com $L_2 = 6,338 \pm 0,001(mH)$ e $R = 10\Omega$.

Do ajuste obteve-se:

$$k = 1,098 \pm 0,003$$

4 Conclusão

A primeira parte da experiência permite verificar a Lei de Indução de Faraday, no caso de ter um circuito a rodar sobre o seu eixo na presença de um campo magnético constante. Os resultados obtidos para o coeficiente de indução mútua, L_m , em ambos os casos estudados (variação da frequência de rotação e da intensidade) foram próximos e coerentes um com o outro atendendo ao valor da incerteza. É de notar que ambos os métodos apresentam erros muito semelhantes, pelo que não se pode afirmar que um método será mais fidedigno que o outro, com base em apenas esta análise. No entanto, nenhum dos valores obtidos encorpora o valor teórico na sua gama de erro, apresentando em ambos os casos um valor superior ao esperado. Assim, existindo coerência entre os métodos mas não com o valor esperado, podemos supor que existe um erro sistemático a afectar as medições, de forma a comprometer a sua exactidão mas não a sua exactidão. Notou-se que para frequências baixas, como o valor de tensão a ser medido diminuía, o ruído lido se tornava mais significativo, aumentando possíveis erros na experiência. Contudo, o segundo método realizou-se para uma frequência constante e elevada, pelo que é possível excluir este facto como principal causa de erro. Assim, é necessário referir que as elevadas frequências de rotação provocavam um vibração do sistema mecânico, e que este movimento contribuiu para a variação de fluxo magnético e, por conseguinte, para o aumento da força electromotriz. Assim, este facto pode ter influenciado a nossa experiência.

Relativamente à segunda parte da experiência, analisou-se o funcionamento de um transformador. Idilicamente, a tensão na segunda bobine seria proporcional à tensão na

segunda bobine por um factor determinado pela razão do número de espiras das bobines ($\frac{N_2}{N_1} = 0,12$). Contudo, isto significa que se assume a resistência dos fios das espiras desprezáveis, e o coeficiente de acoplamento magnético ideal ($k = 1$). Ao analisar os resultados obtidos deparamo-nos com um crescente afastamento dos resultados obtidos em relação ao esperado consoante o aumento da frequência. Enquanto que para a frequência mais baixa analisada ($50Hz$) o desvio à exactidão máximo é de 5.72%, para a frequência estudada de maior valor ($\simeq 2500Hz$) este valor é de 61.67%. Esta deteriorização do funcionamento do transformador pode ser verificada pela análise do declive das diferentes rectas do gráfico W. Com o aumento da frequência é também notório um aumento da diferença de fase entre o sinal de saída e o sinal de entrada, quase atingido os 60° de diferença. É relevante então relembrar a Lei de Lenz que postula que o sentido da corrente induzida é tal que o campo magnético por ela criado tende a contrariar a variação de fluxo que lhe dá origem. Para frequências mais baixas, este efeito é desprezável pelo que produzirá apenas pequenos desvios à formulação do transformador ideal, ao passo que se tornará mais significativo com o aumento da frequência. Este efeito de interferência entre o campo secundário criado e o campo que lhe deu origem é também a razão pela qual se verifica uma diferença de fase que se torna mais significativa com o aumento da frequência.

Posteriormente, repetiu-se esta análise para um valor de tensão fixo, variando apenas o valor de frequência do sinal de entrada. Como seria expectável, verificou-se que a relação entre a tensão de entrada e a tensão de saída ia diminuindo, afastando-se da razão do número de espiras, mostrando coerência com os dados anteriores. No entanto, foi estendida a gama de frequências e, para a mais elevada ($\simeq 10kHz$) retirou-se a resistência que fechava o circuito secundário. Assim, deixando o circuito secundário em aberto, a relação entre a tensão de entrada e a tensão de saída ficou próxima do valor ideal (0.12), tendo também ficado em fase com o sinal de entrada. Este facto vem a confirmar a hipótese explicada acima, pois ao abrir o circuito não é possível gerar a corrente induzida no circuito secundário e, como tal, não existirá o efeito de contra-fluxo explicado. Assim, a diferença de fase será nula e a relação seria a ideal. Contudo, o valor obtido foi menor do que o obtido para frequências baixas com o circuito fechado, pelo que o efeito de Lenz não é a única razão por detrás da degradação da relação das tensões com a frequência. O aumento da frequência pode também ser responsável por uma maior dispersão das linhas de campo, de forma a que estas não fiquem constrangidas à zona dentro do material de alta permeabilidade magnética, fechando no ar em torno das espiras.

Por fim, analisou-se a diferença de fases criada pelo efeito de contra-fluxo, tal como o ganho de tensão do transformador por relação à frequência de forma a obter o valor do coeficiente de acoplamento magnético k . Não nos é possível concluir nada acerca deste coeficiente através do gráfico de fases visto o resultado obtido ser fora da gama de valores possíveis para o coeficiente (é impossível esta grandeza tomar valores superiores à unidade). Contudo, podemos afirmar que o erro apresentado, embora apresentado pelo ajuste, se encontra muito subvalorizado, vindo até o pobre ajuste que a curva ajustada tem aos pontos experimentais. Desta forma, é necessário também afirmar que os erros apresentados para a diferença de fases também não possuem significado, visto terem igualmente sido subvalorizados. Contudo, a segunda análise permitiu a obtenção de um valor coerente para k e com um pequeno erro relativo. Assim, através do resultado obtido podemos afirmar que este circuito se classifica enquanto um circuito fortemente acoplado.

5 Referências

- FIGUEIRINHAS, João. "Protocolos dos trabalhos práticos de Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica", 2014 IST