

# Relatório da Experiência de Determinação da Condutividade Térmica do Alumínio

João Braz 69684, João Branco 69691, André Boné 69937, André Martins 70017

IST, MEFT, LCET, Prof. Dr. João Figueirinhas

## Resumo

Fazemos a determinação da condutividade térmica do alumínio para dois regimes de propagação de calor. Para o regime estacionário obtivemos, para 15.25V,  $k_h = 240 \pm 8$  e  $k_c = 150 \pm 40$  ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ). Para 18.41V, obtiveram-se os valores  $k_h = 230 \pm 10$  e  $k_c = 200 \pm 40$  ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ ). Para o regime variável, ajustando o gráfico tri-dimensional, obteve-se  $k = 158 \pm 1$   $W.m^{-1}.K^{-1}$ . Para um segundo método, chegou-se ao resultado  $k = 350 \pm 20$   $W.m^{-1}.K^{-1}$ .

## 1 Introdução [1]

Com este trabalho pretende-se determinar a condutividade térmica do alumínio.

A potência fornecida é dada por  $\frac{dQ}{dt} = mc\frac{dT}{dt}$ , onde  $m$  é a massa de um objecto,  $c$  a sua condutividade térmica, e  $T$  a sua temperatura.

A lei de Fourier é descrita por (1), onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica, e  $\vec{J}_Q$  o fluxo local de calor.

$$\vec{J}_Q = -k\nabla T \quad (1)$$

Utilizando agora (1) e o teorema da divergência, ficamos com (2) e (3), onde  $\chi := \frac{k}{c\rho}$ .

$$\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J}_Q \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{J}_Q dV \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad (3)$$

Neste trabalho de laboratório consideraremos apenas uma dimensão, visto que se utilizará uma barra de alumínio.

Primeiramente consideraremos um regime estacionário, o que implica que  $\nabla^2 T = 0$ , logo  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . A partir daí, aplicando a equação (3), ficamos com a equação (4) que descreve a temperatura em função da posição na barra ( $x$ ).  $T_c$  e  $T_h$  são, respectivamente, as temperaturas das fontes fria e quente, e  $l$  o comprimento da barra.

$$T(x) = \frac{T_c - T_h}{l}x + T_h \quad (4)$$

De 4 vem que  $\nabla T = C^{te}$ , logo, a partir de (1) e (2), mostramos (5), onde  $P = \frac{dQ_S}{dt}$  e  $S$  a secção da barra.

$$k = \frac{P}{S \left| \frac{\partial T}{\partial x} \right|} \quad (5)$$

Consideramos agora um regime variável, ou seja, com dependência espacial e temporal. Impondo como condições fronteira que a temperatura varia uniformemente na barra em  $t = 0$ , que  $T(l, t) = T_c$ , e que  $\partial Q|_{x=0} = 0$ , e aplicando (3), obtemos (6).

$$T(x, t) = T_c + (T_h - T_c) \frac{8}{\pi^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi \left( \frac{\pi}{l} + n\pi \right)^2} \frac{(-1)^n}{(1 + 2n)^2} \sin \left( \frac{l-x}{l} \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right) \quad (6)$$

## 2 Experiência Realizada

Este trabalho envolve o estudo da propagação do calor em regime estacionário e regime variável. A montagem inclui uma barra metálica, de Alumínio, com a superfície lateral termicamente isolada e com dimensões de  $4cm^2$  de secção e  $12cm$  de comprimento; um sistema de aquecimento eléctrico ligado a um extremo da barra e um sistema de circulação de água no lado oposto da mesma. Os valores para as temperaturas envolvidas serão obtidos através de um programa de conversão do laboratório, que utilizará as tensões eléctricas produzidas por um conjunto de sensores resistivos acoplado a uma unidade de polarização dos mesmos para registar as temperaturas necessárias.

O regime estacionário não inclui apenas variações espaciais. Para este ponto, proceder-se-á a uma medição consecutiva do caudal do fluido de arrefecimento (água) em circulação, de 30 em 30 minutos, utilizando uma proveta graduada, sendo também aplicada uma determinada tensão ao sistema de aquecimento. Será feito um estudo para dois valores de tensão eficaz: 15V e 18,5V. Serão, de seguida, concretizados os seguintes passos:

Representação gráfica da variação de temperatura e determinação do  $\nabla T$  (gradiente de temperatura médio);

Determinação do  $k$  da barra de Alumínio;

Determinação das perdas de calor por unidade de tempo para o exterior do sistema;

Determinação do valor da resistência térmica, tanto da barra como das junções da mesma com o sistema de aquecimento e arrefecimento, respectivamente;

Finalmente, efectua-se o estudo do regime variável. Para tal, recorre-se à separação entre a unidade de aquecimento e o Alumínio, efectuando uma quebra de tensão fornecida e adoptando uma placa isolante na face da barra. Os dados obtidos serão gravados computacionalmente e em tempo real. Assim, ajustando a variação da temperatura em ordem ao tempo e espaço à equação teórica, obtém-se uma estimativa da condutividade térmica  $k$ .

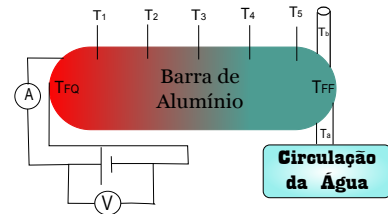


Figura 1: Esquema da montagem laboratorial

### 3 Tratamento de Dados e Resultados

Notamos que, tal como mencionado no protocolo experimental, era suposto termos feito medições para  $V = 20V$  e  $V = 25V$ . No entanto, o sistema foi calibrado para tensões mais baixas, que resultam em temperaturas de funcionamento mais baixas, pois o método calibração (aquecimento de todo o sistema num forno) poria em risco algumas componentes caso para as temperaturas resultantes das tensões planeadas.

#### Regime Estacionário

Todos os valores obtidos para os erros de valores calculados foram calculados por propagação linear. A capacidade térmica mássica da água ( $c$ ), a densidade da água ( $\rho$ ) e a secção da barra de Alumínio ( $S$ ) são tabelados. O erro para o volume do caudal é de  $1g/ml$  (erro de escala da proveta graduada utilizada) e o erro no intervalo de tempo ( $e_t$ ) foi considerado  $0.1s$ , apesar de o erro de escala do cronómetro utilizado ser de  $0.025s$ , devido ao tempo de reacção do observador, inerente a esta medição. Por fim as temperaturas determinadas e os respectivos erros foram obtidos recorrendo ao software disponibilizado, que utiliza um método estatístico que se baseia numa melhor aproximação para um conjunto de 100 medições tomadas durante  $\Delta t = 1s$ . Para este regime, os valores foram registados quando se verificou uma diferença inferior a  $0.3K$  num intervalo de tempo de 5 minutos, aproximadamente.

Sabemos que, para este regime, verifica-se a condição física  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ , pelo que será feito um ajuste a uma função  $T(x)$  que apresente tal condição, que pode ser uma função afim da forma  $f(x) = ax + b$ .

Hora	8:30h	9:10h	9:45h	10:15
Caudal/ $(\pm 0.01)g.s^{-1}$	1.18	1.19	1.14	1.09

Tabela 1: Valores do Caudal

v/V	$15.25 \pm 0.03$	$18.41 \pm 0.03$
i/A	$1.312 \pm 0.004$	$1.585 \pm 0.004$
$T_h/K$	$351.3 \pm 0.8$	$378 \pm 1$
$T_c/K$	$299.28 \pm 0.07$	$304.6 \pm 0.1$
$T_b/K$	$296.3 \pm 0.6$	$300.6 \pm 0.8$
$T_a/K$	$293.73 \pm 0.04$	$294.99 \pm 0.06$

Tabela 2: Alguns valores pertinentes

Ensaio	15V	18V
$P_h/W$	$20.0 \pm 0.1$	$29.2 \pm 0.1$
$P_c/W$	$13 \pm 3$	$25 \pm 4$
$P_{perdida}/W$	$7 \pm 4$	$4 \pm 5$

Tabela 3: Valores das Potências

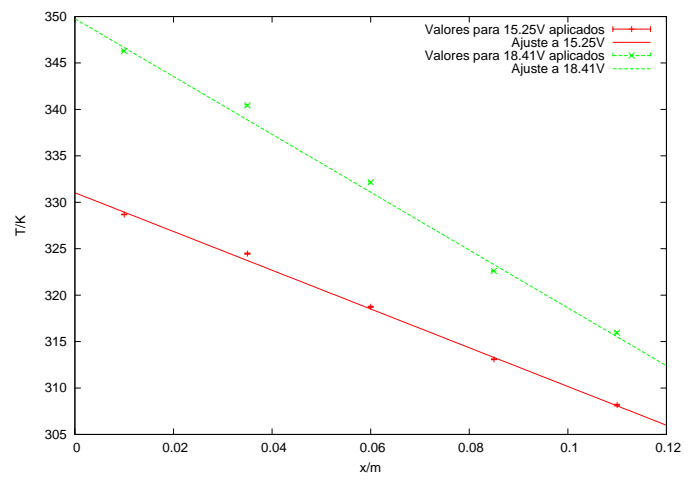


Figura 2: Ajustes à função  $F(x) = m.x + T_0$

Ensaio	15.25V	18.41V
$m/K.m^{-1}$	$-(2.086 \pm 0.007) \times 10^2$	$-(3.112 \pm 0.009) \times 10^2$
$T_0/K$	$(3.310 \pm 0.004) \times 10^2$	$(3.498 \pm 0.006) \times 10^2$
$\chi^2$	236	644

Tabela 4: Resultados dos ajustes à função  $F(x) = m.x + T_0$

Com estes resultados, aplicando (5),  $m = -\frac{dT}{dx}$  e conhecendo  $S = 4 \times 10^{-4}m^2$ , obtêm-se a tabela seguinte, onde  $k_h$  e  $k_c$  são, respectivamente, a capacidade térmica calculada com a potência da fonte quente, e com a da fonte fria. Os desvios à exactidão foram calculados com o valor  $k = 237W.m^{-1}.K^{-1}$  [2]

Ensaio	15.25V	18.41V
$k_h/W.m^{-1}.K^{-1}$	$(2.40 \pm 0.08) \cdot 10^2$	$(2.3 \pm 0.1) \cdot 10^2$
$k_c/W.m^{-1}.K^{-1}$	$(1.5 \pm 0.4) \cdot 10^2$	$(2.0 \pm 0.4) \cdot 10^2$
Desvio à exactidão ( $k_h$ )	1.3%	3.0%
Desvio à exactidão ( $k_c$ )	36.7%	15.6%

Tabela 5: Condutividades Térmicas calculadas em regime estacionário

Ensaio	15V	18V
$R_{topo}/J.W^{-1}$	$1.01 \pm 0.06$	$(9.7 \pm 0.6) \times 10^{-1}$
$R_{barra}(P_h)/J.W^{-1}$	$1.25 \pm 0.03$	$1.28 \pm 0.03$
$R_{barra}(P_c)/J.W^{-1}$	$2.0 \pm 0.5$	$1.5 \pm 0.3$
$R_{base_h}/J.W^{-1}$	$(3.4 \pm 0.3) \times 10^{-1}$	$(2.7 \pm 0.3) \times 10^{-1}$
$R_{base_c}/J.W^{-1}$	$(5 \pm 2) \times 10^{-1}$	$(3.1 \pm 0.9) \times 10^{-1}$

Tabela 6: Resistências Térmicas da barra de alumínio

## Regime Variável

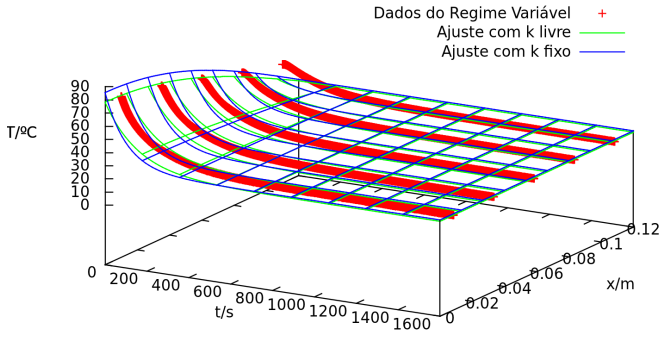


Figura 3: Ajustes à função (6)

$k/W.m^{-1}.K^{-1}$	$T_1/^{\circ}C$	$T_2/^{\circ}C$	$\chi^2$
$157.8 \pm 0.6$	$90.1 \pm 0.2$	$26.93 \pm 0.03$	6.27
237(fixo)	$98.9 \pm 0.2$	$28.00 \pm 0.03$	9.5

Tabela 7: Resultados do ajuste a (6)

Para o cálculo da condutividade térmica por regime variável, recorreu-se à equação do calor. Para isso efectuaram-se 2 ajustes a funções quadráticas da forma  $f(x) = a + b.x + c.x^2$ , numa região de concavidade dos dados.

Para um 1º ajuste, fixamos o  $x$  numa zona em  $x = 0.06m$ ; para um 2º ajuste fixamos o tempo  $t$  em  $t = 150s$

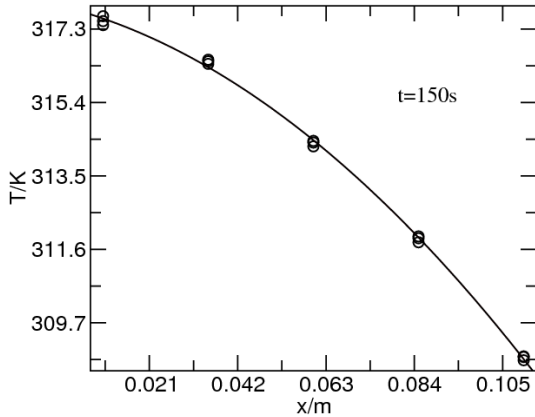


Figura 4: Regime variável a 2D, com tempo  $t$  fixo

$a/K$	$b/Km^{-1}$	$c/Km^{-2}$
$317.90 \pm 0.08$	$-28 \pm 3$	$(-5.0 \pm 0.2)E01$

Tabela 8: Ajuste a  $T(x) = a + b.x + c.x^2$  em  $t = 150s$

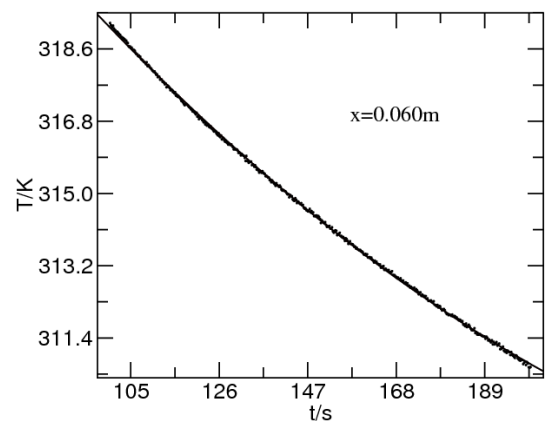


Figura 5: Regime variável a 2D, com posição  $x$  fixa

$a/K$	$b/Ks^{-1}$	$c/Ks^{-2}$
$332.5 \pm 0.2$	$(-1.58 \pm 0.02)E-01$	$(2.45 \pm 0.06)E-04$

(7)

Tabela 9: Ajuste a  $T(t) = a + b.t + c.t^2$  em  $x = 6cm$

Para o caso de  $x$  fixo, deriva-se a função  $T(t)$  e calcula-se em  $t = 150s$ ; para  $t$  fixo, deriva-se a função  $T(x)$  duas vezes e calcula-se em  $x = 0.060m$ . Substituindo os valores na equação do calor, obtêm-se  $k = (3.5 \pm 0.2) \times 10^2 Wm^{-1}K^{-1}$ .

## 4 Críticas e Conclusões

Da análise dos resultados obtidos no regime estacionário, há um aspecto a notar imediatamente: os erros obtidos para as potências na fonte fria, tanto para  $\approx 15V$  como para  $\approx 18.5V$ , são muito grandes, muito superiores aos erros obtidos para as potências na fonte quente. Isto indica que os resultados calculados a partir da  $P_{FF}$  não serão representativos. Esta hipótese verifica-se com os valores experimentais de  $k$ : tanto para  $V \approx 15V$  como para  $V \approx 18.5V$ , há uma excelente concordância entre os valores experimentais calculados através da  $P_{FQ}$  e o valor tabelado, com desvios à precisão bastante reduzidos. Esta concordância permite-nos concluir que os valores de potência dissipada são absurdos, consequência da imprecisão nas  $P_{FF}$ , e que a potência que flui pela barra é, por uma boa aproximação, a posta em jogo por  $P_{FQ}$ . Há, na verdade, uma discrepância evidente entre os valores experimentais obtidos por  $P_{FF}$  e os restantes valores de  $k$ . Em particular, apesar de  $k$  por  $P_{FF}$  para  $V \approx 18.5V$  abranger o valor tabelado na sua margem de erro, esta representa um erro relativo demasiado grande para se poderem tirar conclusões válidas.

De entre as variáveis medidas directamente, de salientar que  $T_h$  e  $T_b$  assinalam valores superiores no que respeita aos erros.  $T_h$  é a temperatura na fonte quente, que estava directamente sujeita às oscilações de tensão e corrente fornecidas pela fonte de tensão, evidentes durante toda a experiência. Isto deve-se ao gerador utilizado não ser estabilizado, ou seja, está sujeito às oscilações inerentes à rede eléctrica. As oscilações davam-se em torno de um valor de equilíbrio, tendo sido estimadas amplitudes de  $0.03V$  e de  $0.004A$ , e davam-se de forma aparentemente errática. Por esta razão o valor de  $T_h$  nunca estabilizava completamente, logo o erro ser acrescido. Por outro lado, após um certo período de tempo, este ponto de equilíbrio mudava, por factores desconhecidos e que presumimos não estarem relacionados com

a experiência. É por esta razão que as tensões e correntes registadas no equilíbrio não correspondem exactamente às planeadas.  $T_b$  é a temperatura à saída da água no sistema de arrefecimento. É razoável considerar que a água podia não ser uniformemente aquecida, portanto o sensor não conseguir estabilizar a leitura, resultando num erro acrescido.

Notamos também que, claramente, todos os erros e desvios das grandezas medidas e calculadas com a tensão a  $\approx 18.5V$  são maiores ou iguais às mesmas a  $\approx 15V$  (excluindo as que envolvem  $P_{FF}$  que, como já vimos, não são válidas). Como as oscilações do gerador tinham a mesma amplitude e admitindo que a água não aquece menos uniformemente quando recebe uma maior potência, este aumento justifica-se pelo facto de o sistema ter sido calibrado para temperaturas (i.e. tensões) mais baixas.

Através da estimativa das resistências dos contactos e da barra pudemos verificar que os valores destes são comparáveis, isto é, as resistências dos contactos não são desprezáveis face à resistência da barra. Pudemos também confirmar os resultados de  $k$  obtidos, estando coerentes com os valores de resistência da barra. Por comparação dos valores das mesmas resistências obtidos para as diferentes tensões, verificámos também que estas se igualam dentro das margens de erro, que são válidas, representando desvios à precisão relativamente baixos. Estes resultados vêm confirmar a hipótese inicial de que a gama de temperaturas seria estreita o suficiente, de tal forma que poderíamos considerar  $k \approx cte.$

Nas conclusões tiradas até aqui, não estamos a ter em conta os valores obtidos através de  $P_{FF}$ , por motivos já apontados. Consideramos, também, que a expansão térmica da barra é desprezável, no cálculo de valores que dependem da geometria desta.

Analisando os resultados obtidos para o regime variável, verificamos que, apesar de termos obtido um ajuste bastante satisfatório (com valores de  $\chi^2$  muito baixos, inclusive), o valor de  $k$  está em desacordo com o valor obtido no regime estacionário e com o tabelado. Esta discrepância justifica-se pelas hipóteses tomadas na construção do modelo baseado na resolução da equação do calor: considerámos que não havia fluxo de calor através do topo da barra; considerámos que a temperatura na base da barra correspondia à temperatura da fonte fria, mantendo-se esta temperatura constante ao longo do tempo, e que não havia nenhuma resistência térmica no contacto da barra com a  $FF$ . Por análise do ajuste, verificamos que há uma muito boa concordância do ajuste com os pontos experimentais no início da barra. Podemos admitir que a primeira hipótese é satisfeita: a placa de esferovite colocada entre a  $FQ$  (desligada) e a barra fornecia uma resistência térmica que tornava desprezável qualquer fluxo que pudesse surgir entre a  $FQ$  (ainda a uma temperatura elevada, mesmo que desligada) e barra. No entanto, depois do ponto médio da barra, começamos a verificar alguma discordância dos pontos experimentais com os teóricos. Depois de verificado, através do estudo do regime estacionário, que as resistências térmicas por contacto não são desprezáveis, este resultado já era expectável. Logo, a segunda hipótese não é válida: a base da barra não se encontra a  $T_{FF}$  e, seja qual for a tempe-

ratura, esta não será constante ao longo do tempo. Pelo modelo teórico, a temperatura final de equilíbrio corresponde à temperatura na base da barra (que coincidiria com  $T_{FF}$ ) mas isso, na realidade, não acontece, devido à resistência de contacto. É este o aspecto crucial em que o modelo falha.

Notamos também que a curva teórica, no instante inicial, tendo partido do regime estacionário, devia apresentar uma recta, em vez da curva aparentemente parabólica mostrada. Isto, no entanto, justifica-se facilmente pelo erro de truncatura nos termos de Fourier: tendo considerado um número finito de termos (apenas os 3 primeiros), a curva não se aproximará completamente da imposta pelas condições iniciais. No entanto, o intuito era determinar um parâmetro associado à função em série de Fourier, e para tal bastavam os 3 primeiros termos.

Com esta situação, pudemos também verificar a necessidade de confirmar um modelo teórico, que se apresentava como fisicamente satisfatório e matematicamente elegante, através da experiência, tendo esta acabado por evidenciar a ineficácia na descrição da realidade de que este modelo padecia, devido às hipóteses que foram necessárias introduzir.

O cálculo da condutividade térmica no regime variável também foi efectuado utilizando directamente a equação do calor (3), sendo para isso necessário determinar  $\frac{\partial T}{\partial t}$  e  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , sabendo de antemão os valores de  $\rho$  e  $c$  da água. O valor para o  $k$  desta forma, quando comparado com os valores tabelado e obtido por regime estacionário, registou uma discordância ainda mais significativa que o obtido por ajuste ao regime variável. Optou-se por aplicar um método numérico de aproximação por mínimos quadrados a uma função quadrática  $f(y) = a + b.y + c.y^2$ , tanto para  $T(x)$  como para  $T(t)$ . Poder-se-ia ter optado por outro método, como o método de Euler, mas foi tomada esta opção, obtendo os valores necessários por derivação das funções aproximadas. A discrepância entre os valores obtido e tabelado e o erro associado devem-se ao facto de a escolha de  $t$  e  $x$  fixo ser arbitrário e obrigar a uma escolha criteriosa, e talvez não tenha sido o suficiente. Em 1º lugar, apesar de se ter seleccionado  $0.06m$  (meio da barra) como a posição mais adequada para se fixar, não podemos efectivamente considerar esta como a localização ideal, pois apenas constitui uma aproximação. Em 2º lugar, a selecção de uma região para o ajuste à função  $T(t)$  também foi grosseira, pois foi feita em base da observação do gráfico com  $x$  fixo e, apesar da sua selecção ser aparentemente válida, o comportamento da função não será quadrático ao longo desse intervalo, pelo que esta aproximação provocará um erro considerável no cálculo da condutividade térmica  $k$ .

## Referências

- [1] A. Martins. Notas das aulas teóricas de laboratório de complementos de termodinâmica e electromagnetismo do prof. dr. João Luís Maia Figueirinhas, 2012.
- [2] the free encyclopedia Wikipedia. Aluminium - wikipedia, the free encyclopedia.