

Estudo da Radiação Emitida por um Corpo Negro

João Ferreira (78179), Henrique Rodrigues (78632), Rodrigo C. Carvalho (78646) e Cristina Melício (78947)
MEFT · 2º Ano, 2º Semestre · Laboratório de Complementos de Eletromagnetismo e Termodinâmica

Grupo III · Sexta-Feira · 27 de Março de 2015

Resumo

Nesta experiência foi estudada a emissão de radiação por diversos corpos enquanto aproximação do modelo de Corpo Negro. Verificou-se experimentalmente a Lei de Planck e a Lei de Wien com o auxílio de uma lâmpada de tungsténio para três temperaturas distintas, tendo sido obtido para a constante de Wien o valor de $(2.5 \pm 0.4)m \cdot K$. Posteriormente, determinou-se o expoente da temperatura na lei de Stefan, tendo-se verificado que este correspondia a $\alpha = 4.64 \pm 0.02$. Por fim, comparam-se as emissividades de diferentes faces de um cubo de Leslie.

1 Introdução

Esta experiência consiste no estudo de um corpo negro, que é definido como sendo um corpo que absorve toda a radiação que nele incide sem a refletir ou transmitir inteiramente, irradiando posteriormente de acordo com a sua temperatura absoluta T .

Para um corpo arbitrário define-se o seu poder de absorção como sendo:

$$Q = \frac{P_a}{P_i} \quad (1)$$

(onde P_a é a potência absorvida e P_i é a potência incidente)

Para o corpo negro tem-se que $Q_N = 1$ uma vez que absorve toda a radiação que nele incide e para os outros corpos tem-se $Q_C < 1$.

A emissividade é dada pelo quociente:

$$e = \frac{Q_C}{Q_N} \quad (2)$$

Sendo assim, para o corpo negro $e_N = 1$ e para os outros corpos $e_C < 1$.

O comportamento de um corpo relativamente à radiação emitida é descrito pelo poder emissivo ou emitância I_C e é caracterizado como sendo a energia radiada por unidade de tempo e por unidade de área em todos os comprimentos de onda. É possível quantificar o poder emissivo do corpo negro I_N pela Lei de radiação de Stefan¹

$$I_N = \sigma T^4 \quad (3)$$

Tem-se assim o Teorema de Kirchoff que considera a relação entre o poder emissivo e o poder de absorção como sendo:

$$F(T) = \frac{I_C}{Q_C} = \sigma T^4 \quad (4)$$

Deste enunciado, conclui-se que a emissividade e o poder de absorção são iguais, sendo que um bom absorvedor é um bom emissor e vice versa. Utilizaremos um cubo de Leslie

A partir de lei de Stefan, conclui-se que a emissão de radiação por um corpo negro depende apenas da sua temperatura, quando este se encontra em equilíbrio térmico. Tem-se então a Lei de Wien, segundo a qual quanto maior for a temperatura T de um corpo negro menor é o comprimento de onda λ_{max} correspondente ao poder emissivo máximo²:

$$\lambda_{max} T = b \quad (5)$$

A intensidade da radiação de um dado comprimento de onda λ emitida por um corpo negro a uma temperatura absoluta T é dada pela Lei de radiação de Planck:

$$I_{(T,\lambda)} = \frac{2h\pi c^2}{\lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)^{-1} \quad (6)$$

(em que h é a constante de Planck, k_B a constante de Boltzmann e c a velocidade da luz)

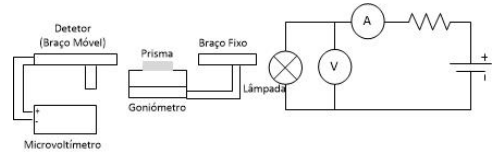
¹ $\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ é constante de Stefan

² $b = 2.8977685 \times 10^{-3} m \cdot K$ é a constante de dispersão de Wien

2 Montagem da Experiência

2.1 Lei de Planck e Lei de Wien

Na primeira parte da experiência, cujo objetivo é a obtenção do espectro de emissão de um modelo do corpo negro, o esquema da montagem está representado na figura 1.

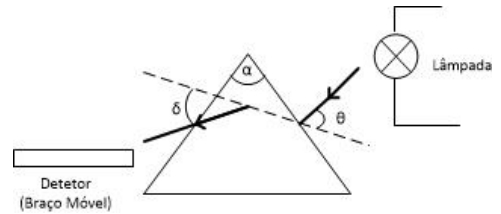


(Figura 1: Esquema da montagem da primeira parte)

O modelo de corpo negro usado para esta parte é uma lâmpada de filamento de tungsténio cuja tensão máxima é 13V, sendo, por isso, colocados um voltímetro em paralelo, e um amperímetro em série, de forma a controlar a tensão e a corrente no circuito. Além disso, uma resistência em série serve para evitar sobrecargas no circuito de alimentação.

Tem-se então um goniómetro, associado a um prisma de dispersão, composto por dois braços: o braço fixo que recebe a radiação da fonte e a faz incidir sobre o prisma e o braço móvel que recebe do prisma a radiação refratada e a faz incidir no detector. O detector da radiação utilizado é uma termopilha com resposta uniforme na gama compreendida entre os 500nm e os 2500nm, ou seja, da radiação verde à infravermelha, que funciona por efeito de Peltier devido à diferença de temperatura entre os sensores do início e do fim do detector.

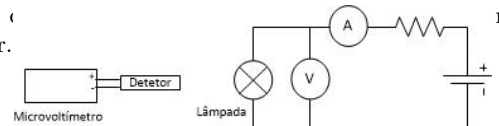
O esquema do prisma de dispersão e dos seus ângulos encontra-se na figura 2.



(Figura 2: Esquema do prisma de dispersão. Devido à geometria equilátera da base do prisma, $\alpha = 60^\circ$)

2.2 Verificação da Lei de Stefan

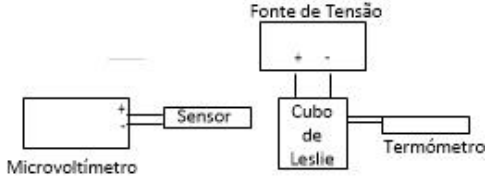
Na segunda parte da experiência, retirou-se o goniómetro e o prisma, e a radiação da lâmpada incide diretamente no detector.



(Figura 3: Esquema da montagem da segunda parte)

2.3 Cubo de Leslie

Na terceira parte da experiência utiliza-se um Cubo de *Leslie* constituído por quatro faces com diferentes revestimentos exteriores: preta, espelhada, branca e metálica. O esquema da montagem está na figura 4.



(Figura 4: Esquema da montagem da terceira parte)

3 Dados Experimentais

3.1 Lei de Planck e Lei de Wien

Efectuou-se a montagem da figura 1 apresentada anteriormente. De seguida, alinhouno-se o goniómetro. Para tal, foi necessário em primeiro lugar colocar a máscara com fenda vertical sobre a lente de saída de radiação, rodar a plataforma onde está colocado o prisma e medir o ângulo θ_1 para o qual o feixe refletido pela face do prisma coincide com o feixe nela incidente. Depois, sem a máscara, rodar essa mesma plataforma no sentido anti-horário, observar o espectro num alvo (a parede) e registar o ângulo θ_2 correspondente ao desvio mínimo³. Fixou-se a posição angular do prisma e calculou-se o ângulo θ de incidência da radiação no prisma efetuando a diferença $\theta = \theta_1 - \theta_2$. Obteve-se o seguinte valor:

θ (°)	43.3 ± 0.4
--------------	----------------

Ajustou-se a tensão da fonte para 12V. Retiraram-se as coberturas do braço do detetor e da sua entrada. Rodou-se este braço até que nele incidisse a radiação verde e registou-se este ângulo δ' . Colocaram-se novamente ambas as coberturas, ligou-se o microvôltímetro, e anulou-se a sua leitura. Retirou-se agora a cobertura da entrada, mediu-se o valor indicado no microvôltímetro, e colocou-se novamente a cobertura. Fizeram-se mais duas medições, tendo o cuidado de verificar que com a cobertura colocada o valor indicado no microvôltímetro não ultrapassava os $3\mu V$. Rodou-se então o braço do detetor em intervalos angulares de $20'$ e $40'$ de modo a obter medições para 20 posições angulares δ' diferentes, registando-se para cada uma três valores de tensão lidos no microvôltímetro, cuja média corresponde ao valor V . Efectuaram-se medições numa maior densidade perto do máximo de intensidade luminosa, por forma a encontrar a sua posição angular.

Repetiu-se este procedimento para tensões da fonte de 9V e 6V. Para cada tensão V_f , registou-se a intensidade de corrente I que percorre a lâmpada e calculou-se a resistência R pela lei de Ohm:

$$R = \frac{V_f}{I} \quad (7)$$

A temperatura T do filamento foi obtida por interpolação linear da tabela **tab2.pdf**⁴ do valor de $\frac{R}{R_0}$, em que $R_0 = 0.4911$ é o conhecido para a temperatura $T = 292.35K$. Obtiveram-se as seguintes temperaturas:

V_f (V)	T (K)
12.02 ± 0.01	2404 ± 12
9.00 ± 0.01	2130 ± 13
5.97 ± 0.01	1877 ± 16

(Tabela 1: Valores das temperaturas de trabalho para as diferentes tensões da fonte)

No final, o docente removeu o prisma de dispersão, e mediu-se o ângulo γ correspondente ao alinhamento direto entre os braços do goniómetro, tendo-se obtido o seguinte valor:

γ (°)	274.00 ± 0.01
--------------	-------------------

Os valores angulares δ que se utilizaram na análise subsequente dos resultados foram obtidos através da diferença $\delta = \gamma - \delta'$.

Para cada valor de δ , obteve-se um valor de índice de refração n , dado pela seguinte expressão:

$$n = \sqrt{(\sin^2 \theta) + \left(\frac{\sin(\delta - \theta + \alpha) + \cos \alpha \sin \theta}{\sin \alpha} \right)^2} \quad (8)$$

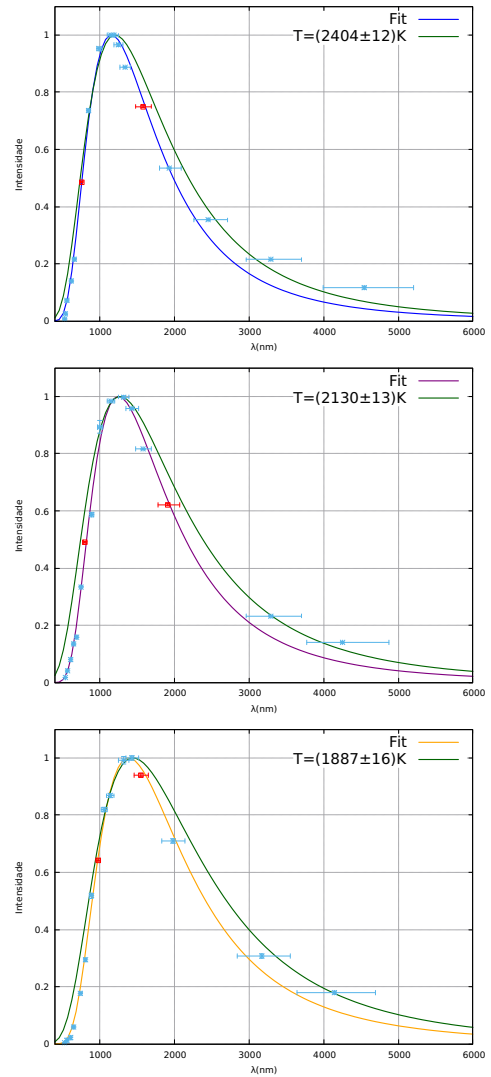
Para cada valor de índice de refração n , efetuou-se uma interpolação linear dos valores da tabela **tab1.jpg**⁴ referente à curva de dispersão do prisma utilizado para obter os vários comprimentos de onda λ correspondentes.

Na figura 5 apresentam-se os valores da intensidade luminosa, obtidos a partir da normalização dos valores de tensão medidos anteriormente, como função do comprimento de onda da radiação incidente - $I(\lambda)$ -, para as três temperaturas diferentes. A estes pontos ajustou-se equação (6).

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{(\lambda - c_1)^5} \left(e^{\frac{hc}{k_B T(\lambda - c_1)}} - 1 \right)^{-1} \frac{1}{d} \quad (9)$$

onde d é uma constante de normalização dada por:

$$d = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \left(e^{\frac{hc}{k_B b}} - 1 \right)^{-1} \quad (10)$$



(Figura 5: Intensidade luminosa em função do comprimento de onda. A vermelho indicam-se os pontos (756nm, 0.485) e (1583nm, 0.750) no primeiro gráfico, (801nm, 0.492) e (1915nm, 0.623) no segundo gráfico e (980nm, 0.643) e (1549nm, 0.940) no terceiro gráfico. A azul, roxo e amarelo, representam-se os ajustes da equação (9) pelo método dos mínimos quadrados para as diferentes temperaturas, e a verde as curvas teóricas respetivas.)

³Cada uma destas medições foi efetuada separadamente pelos quatro elementos do grupo, tendo-se considerado a média entre eles.

⁴Tabela disponibilizada pelo docente na página da cadeira

Obtiveram-se os seguintes parâmetros de ajuste:

	$T = 2404K$	$T = 2130K$	$T = 1877K$
c_1 (nm)	143 ± 22	149 ± 24	123 ± 24

(Tabela 2: Parâmetros resultantes do ajuste da equação (9) aos pontos dos diferentes gráficos da figura 5)

Para as diferentes temperaturas, obtiveram-se os seguintes valores para o comprimento de onda correspondente ao máximo de intensidade luminosa:

	$T = 2404K$	$T = 2130K$	$T = 1877K$
λ_{max} (nm)	1148 ± 53	1319 ± 70	1433 ± 87

(Tabela 3: Comprimentos de onda correspondente ao máximo da intensidade luminosa, para as diferentes temperaturas)

3.2 Lei de Stefan

Efetuu-se agora a montagem da figura 3, e mediu-se a intensidade da radiação emitida para diferentes valores de tensão da lâmpada. Obtiveram-se os seguintes resultados:

V_f (V)	V (mV)
11.98 ± 0.01	6.91 ± 0.01
10.99 ± 0.01	6.07 ± 0.01
9.95 ± 0.01	5.16 ± 0.01
9.00 ± 0.01	4.35 ± 0.01
7.99 ± 0.01	3.55 ± 0.01
7.02 ± 0.01	2.86 ± 0.01
5.99 ± 0.01	2.16 ± 0.01
5.02 ± 0.01	1.56 ± 0.01
3.995 ± 0.001	1.03 ± 0.01
2.897 ± 0.001	0.57 ± 0.01

(Tabela 4: Comprimentos de onda correspondente ao máximo da intensidade luminosa, para as diferentes temperaturas)

3.3 Cubo de Leslie

Efetuu-se a montagem da figura 4 e estudou-se a emissividade das diversas faces do cubo. Ligou-se a fonte de tensão e esperou-se que a temperatura T das faces do cubo estabilizasse, tendo-se registado este valor. De seguida, mediu-se a intensidade da radiação emitida por cada face do cubo. Consideraram-se duas temperaturas distintas, tendo-se obtidos os seguintes resultados:

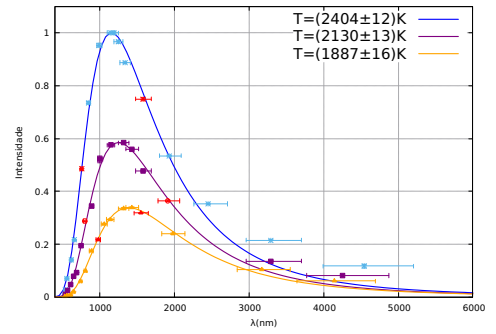
Face	$T = (90 \pm 1)^\circ C$	$T = (69 \pm 1)^\circ C$
V_{Preta} (mV)	12.43 ± 0.01	7.07 ± 0.01
$V_{Espelhada}$ (mV)	0.66 ± 0.01	0.26 ± 0.01
V_{Branca} (mV)	12.46 ± 0.01	6.96 ± 0.01
$V_{Metálica}$ (mV)	3.46 ± 0.01	1.82 ± 0.01

(Tabela 5: Intensidade da radiação emitida por cada face do cubo, para diferentes temperaturas)

4 Discussão dos Resultados

4.1 Lei de Planck e Lei de Wien. Eficiência da lâmpada

Relativamente à primeira parte da experiência, efectuou-se o ajuste experimental dos dados obtidos à lei de Planck. Todavia, verificou-se que os dados apresentavam uma translação em relação ao máximo, fruto de um erro sistemático existente na experiência. Por conseguinte, efectuou-se um ajuste do tipo $x - c_1$, verificando-se uma muito melhor aproximação dos dados experimentais ao fit efectuado, existindo concordância a nível do máximo em relação a previsão teórica (tal como foi apresentado na secção anterior) e apenas começando a verificar-se desvios significativos a partir de cerca de $3000nm$. É possível ver a sobreposição dos gráficos para as diversas temperaturas consideradas na figura 6:



(Figura 6: Intensidade luminosa em função do comprimento de onda para as três temperaturas diferentes, normalizados de acordo com o máximo da mais elevada. A vermelho indicam-se os pontos ($756nm, 0.485$) e ($1583nm, 0.750$) no gráfico azul, ($801nm, 0.287$) e ($1915nm, 0.363$) no gráfico roxo, e ($980nm, 0.217$) e ($1549nm, 0.318$) no gráfico amarelo.)

Relativamente à eficiência da lâmpada, esta foi tomada mediante a integração numérica das curvas obtidas para a Lei de Planck para cada diferente temperatura, tendo-se utilizado o método dos trapézios. Para estimar o erro inerente ao método, integrou-se o erro também mediante o método dos trapézios, obtendo por conseguinte um majorante válido. Assim, foi possível obter os seguintes resultados, tendo em conta que o valor teórico ϵ_t foi previsto pelo software **Mathematica**:

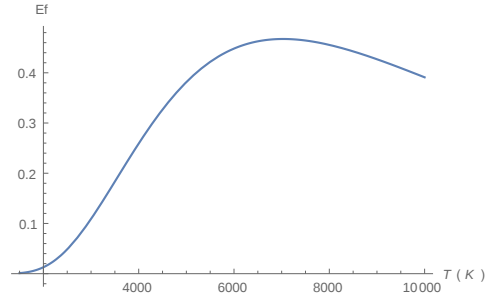
	$T = 2404K$	$T = 2130K$	$T = 1877K$
I_{total}	17.7 ± 0.12	10.4 ± 0.08	6.2 ± 0.1
$I_{visível}$	0.502 ± 0.005	0.171 ± 0.004	0.048 ± 0.004
ϵ (%)	2.92 ± 0.02	1.64 ± 0.04	0.78 ± 0.06
ϵ_t (%)	3.9	1.95	0.84

(Tabela 6: Eficiência para diferentes temperaturas)

= De facto, foi possível obter o valor da eficiência em função da temperatura ajustando a equação seguinte, onde a função f se refere à intensidade luminosa em função da lei de Planck

$$\epsilon = \frac{\int_{370nm}^{750nm} f(\lambda, T) d\lambda}{\int_0^\infty f(\lambda, T) d\lambda} \quad (11)$$

Assim, obteve-se um gráfico para a eficiência em função da temperatura, apresentado na figura 7:

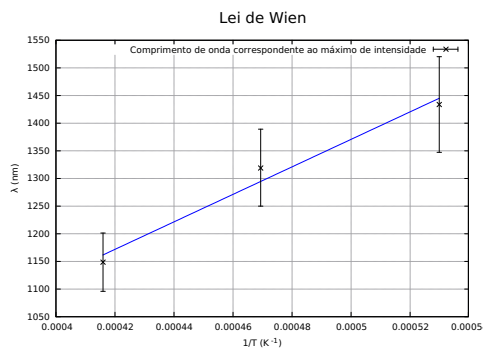


(Figura 7: Gráfico da eficiência da lâmpada como função da temperatura do seu filamento, obtido com o software **Mathematica**)

Verificou-se que o máximo ocorreu a $T = 7138K$, com um valor de $\epsilon = 48.3\%$ pelo que nos encontramos assim aquando da realização da experiência num domínio de eficiências muito baixo. Além disso, notamos que quanto menor a temperatura, maior a concordância entre o valor teórico e o valor experimental. Devemos no entanto realçar que existe ainda uma diferença significativa entre a eficiência de um corpo negro e a da lâmpada, que resulta naturalmente de esta não ser exactamente um corpo negro bem como de ruído inerente à realização da experiência - esta não foi feita na ausência total de luz ambiente, por exemplo.

Analiseemos os valores da tabela 3. Representa-se no gráfico da figura 8 o comprimento de onda correspondente ao máximo de intensidade λ_{max} em função do inverso da temperatura. A estes pontos ajustou-se a seguinte reta, relacionada com a lei de Wien (5):

$$\lambda_{max} (T^{-1}) = (\beta T^{-1} + \alpha) \times 10^9 \quad (12)$$



(Figura 8: Gráfico da verificação experimental da lei de Wien. A azul representa-se o ajuste da equação (12) pelo método dos mínimos quadrados)

Obtiveram-se os seguintes parâmetros de ajuste:

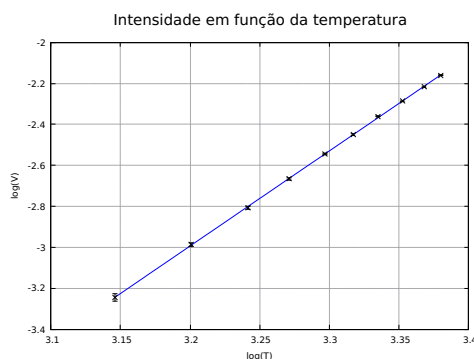
α (m)	$(1 \pm 2) \times 10^{-7}$
β (m · K)	$(2.5 \pm 0.4) \times 10^{-3}$

Obteve-se então um valor para a constante de dispersão de Wien que apresenta um desvio à exactidão de 14% e um desvio à precisão de 15%. Devemos realçar que, apesar da boa qualidade do valor obtido, esta poderia ser largamente melhorada utilizando um maior número de temperaturas e comprimentos de onda a partir dos quais obter esta constante - de facto, apenas foram estudados 3 pares (λ, T) .

4.2 Lei de Stefan

Analisemos os valores da tabela 4. Para cada tensão da fonte, foi possível o valor da temperatura T do filamento correspondente, pelo método utilizado anteriormente, com o auxílio da tabela [tab2.pdf](#). Na figura 9 representa-se o gráfico do logaritmo dos valores detetados pelo sensor como função do logaritmo da temperatura, aos quais se ajustou a seguinte equação, relacionada com a lei de Stefan (3):

$$\log(V) = \alpha \log(T) + \beta \quad (13)$$



(Figura 9: Gráfico da verificação experimental da lei de Stefan. A azul representa-se o ajuste da equação (13) pelo método dos mínimos quadrados)

Obtiveram-se os seguintes parâmetros de ajuste:

α	4.64 ± 0.02
β	-17.84 ± 0.05

Obteve-se então como expoente na lei de Stefan o valor $\alpha = 4.64 \pm 0.02$. De facto, notamos que existe uma discrepância acentuada entre este valor e o expectável teórico, verificando-se um desvio à exactidão de 16% e um desvio à precisão de 4.3%. Poderíamos erroneamente considerar que tal resulta do facto de não se tratar de um corpo negro - todavia, isto deveria reflectir-se na constante multiplicativa relativa à emissividade e, por conseguinte, apesar de influir de certo modo, nunca alteraria de forma tão significativa o valor do expoente. De facto, este valor é lógico tendo em conta que não existia um isolamento perfeito - a saber, sobre o detector incidiriam naturalmente radiações provenientes dos membros do grupo na sala, dos dispositivos electrónicos que com eles estavam, entre outras. Logo, é natural que o valor do expoente seja

superior porque a radiação detectada foi de facto superior àquela que seria suposto incidir sobre o detector. Devemos ainda notar que os gráficos experimentais para a intensidade em função do comprimento de onda apresentam um declive superior ao teórico. Partindo do pressuposto que a emissividade da fonte de radiação se manteve constante, tal resultaria unicamente de uma variação no expoente - evidenciado agora nesta parte da experiência.

4.3 Cubo de Leslie

Quanto aos resultados da tabela 5, sabemos que, quanto maior for o valor de intensidade verificado, de acordo com o Teorema de Kirchhoff, mais elevada será a emissividade da face à qual pertence esse valor - sendo que esta será por conseguinte uma melhor emissora de radiação, absorvendo também uma maior quantidade da radiação que sobre ela incide. Assim, pela análise dos resultados, facilmente se depreende que a face com a maior emissividade será a face negra, tal como esperado, e que a de menor emissividade (melhor reflectora) será a espelhada. Todavia, no tocante às restantes faces, notamos uma discrepância - a branca apresenta um valor quase idêntico ao da face negra, enquanto que a metálica se comporta como esperado e apresenta um valor demarcadamente inferior. Isto é facilmente explicável - uma face metálica reflecte a radiação visível. Todavia, nada sabemos quanto à emissividade do material que a constitui no tocante a quaisquer outros comprimentos de onda. Ora, considerando que a zona visível do espectro constituiu uma ínfima parte da emissão da lâmpada - e não aquela para a qual possui o seu máximo de intensidade de emissão - podemos concluir que o material de que esta face é constituída é reflectivo na zona do visível mas possui uma muito elevada emissividade para outras zonas, nomeadamente a do infravermelho. Tal como antecipado, notamos igualmente que quão maior for a temperatura, maior será a intensidade da radiação emitida.

5 Conclusões

Após efectuar a experiência é possível constatar que existem diversos erros associados à execução da própria e que não são elimináveis - interpolação linear dos dados da tabela dos índices de refração, ruído electromagnético de fundo, a sensibilidade do aparelho de medição que flutua entre diversos valores de diferença de potencial, entre outros - e que comprometem a qualidade das medições efectuadas, não sendo inteiramente suprimidos pela execução de diversas medidas para cada valor estudado. Todavia, é de notar que os resultados em si se encontram razoáveis, verificando-se que na primeira parte após a translação efectuada existe uma concordância razoável entre os máximos teóricos e experimentais; um valor para a constante de Wien que se encontra dentro da incerteza experimental; um expoente para a Lei de Stefan-Boltzmann razoável tendo em conta as limitações da aproximação efectuada e, por fim, os resultados previstos teoricamente para o cubo de Leslie verificam-se experimentalmente.

Bibliografia

- [1] Guia de objetivos do trabalho, Professor João Figueirinhas
- [2] Apontamentos das aulas teóricas
- [3] Thermal Radiation System, PASCO scientific