

Condensador

Laboratório de Complementos de Eletromagnetismo e Termodinâmica MEFT 2013/2014

Débora Barreiros, 75693 — Pedro Cal, 75699 — Tiago Costa, 75970 — Nuno Rosa, 76018
Instituto Superior Técnico — Turma de sexta-feira — Grupo I
8 de Maio de 2014

Resumo

O objetivo deste trabalho experimental foi, em primeiro lugar, a determinação da capacidade do condensador para os processos de carga e descarga de um circuito RC série. O valor mais aproximado do real foi de $1.013 \pm 0.002 \mu\text{F}$, tendo em conta a resistência interna do voltímetro de valor $490 \pm 4 \text{ k}\Omega$. Verificou-se que os balanços energéticos na carga e na descarga do condensador correspondiam ao esperado. O segundo objetivo desta experiência foi a determinação da constante dielétrica para o interior de um condensador não ideal e a sua variação com a frequência. Chegou-se à conclusão que a parte real da constante dielétrica é $(1.237 \pm 0.004) \times 10^{-11} \text{ F/m}$ e que não varia com a frequência estando associada à capacidade do condensador, $(4.68 \pm 0.02) \times 10^{-12} \text{ nF}$, e a parte imaginária da constante dielétrica aumenta com a subida da frequência, entando associada a uma resistência de perdas. Podemos concluir que quanto maior a frequência do sinal no circuito do condensador, maiores são as perdas no condensador.

1. INTRODUÇÃO TEÓRICA

Este trabalho experimental tem por base o estudo da carga e descarga de um condensador, bem como a constante dielétrica de um material homogêneo e isotrópico [2]. Na primeira parte do trabalho pretende-se analisar a constante de tempo e a conservação energética de ambos os processos. Na segunda parte estuda-se a variação da constante dielétrica com a frequência.

A capacidade de um condensador pode ser dada por uma expressão que relaciona a diferença de potencial aos seus terminais com a carga armazenada em cada uma das suas placas isto é $C = \frac{Q}{\Delta V}$, em que C é a capacidade do condensador, Q a carga armazenada nas placas e ΔV a diferença de potencial.

Na primeira parte do procedimento experimental, em que foi analisada a carga e descarga do condensador, foi utilizado um circuito RC série. Estamos perante um circuito simples que pode ser analisado através da Lei das Malhas. Assim sendo sabemos que a corrente que percorre o condensador é a mesma que percorre a resistência e que pode portanto ser escrita em função da tensão no condensador como $I_C = C \frac{dU_C}{dt}$. Pela Lei das Malhas temos $-\epsilon + I_C R + U_C = 0 \Leftrightarrow \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{RC} - \epsilon = 0$. Estamos perante uma equação diferencial cuja solução é da forma:

$$U_C(t) = \epsilon e^{-\frac{t}{RC}} \quad (1.1)$$

para a descarga do condensador e da forma:

$$U_C(t) = \epsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (1.2)$$

para o processo de carga.

A constante de tempo característica deste circuito RC é dada por $\tau = RC$, quer no processo de carga quer no de descarga.

No processo de carga, para analisar a dissipação de energia no circuito temos que relacionar a energia fornecida pela fonte com as energias dissipada na resistência e armazenada no condensador, isto é:

$$W_{\text{bateria}} = \int_0^\infty \epsilon I_C dt \quad (1.3)$$

$$W_{\text{resistência}} = \int_0^\infty R I_C^2 dt \quad (1.4)$$

$$W_{\text{condensador}} = \int_0^\infty \frac{1}{2} C U_C^2 dt \quad (1.5)$$

Sabendo que em condições ideais o primeiro integral teria que ser a soma dos outros dois ($W_{\text{fonte}} = W_{\text{resistência}} + W_{\text{condensador}}$) podemos verificar se existem perdas de energia.

Por sua vez, no processo de descarga, como a fonte de tensão não fornece energia, temos simplesmente que a energia dissipada na resistência tem de ser a mesma que a dissipada no

condensador, ou seja, $W_{\text{resistência}} = W_{\text{condensador}}$.

De notar que as resistências R consideradas em todas as formulas anteriores correspondem à resistência de *Thévenin* do circuito vista dos terminais do condensador. Idealmente essa resistência deveria ser apenas a que foi implementada no circuito RC, no entanto verificar-se à que podem existir desvios a essa resistência na presença de outros componentes elétricos.

Na segunda parte do procedimento experimental pretende-se analisar a constante dielétrica de uma folha de acetato existente entre duas placas de um condensador plano. A capacidade deste condensador é dada por $C = \frac{\epsilon S}{d}$.

Idealmente, considerando que o condensador não apresenta perdas poderíamos utilizar a expressão descrita acima, e através de ajuste obteríamos o valor de ϵ , comparando-o com o real (considerando $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ em que ϵ_r é a permissividade relativa do acetato). Porém isto não ocorre, ou seja temos que adicionar em paralelo com o condensador uma resistência de perdas que terá que ser contabilizada na análise do circuito. Com a adição desta nova resistência somos forçados a determinar o valor de uma resistência equivalente resultante da resistência existente e da resistência de perdas, bem como uma capacidade equivalente proveniente da existência de um "condensador" de capacidade conhecida associado ao osciloscópio. Assim, podemos relacionar esta resistência e capacidade equivalente com a tensão eficaz proveniente da fonte e aos terminais do condensador do seguinte modo:

$$R_{eq} = R_1 \frac{U_{C_{ef}}^2}{< U \cdot U_C > - U_{C_{ef}}^2} \quad (1.6)$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\omega R_1} \sqrt{\frac{U_{ef}^2}{U_{C_{ef}}^2} - \left(1 + \frac{R_1}{R_{eq}}\right)^2} \quad (1.7)$$

Sabemos ainda que $C_{eq} = C + C_{osc}$ logo podemos determinar o valor de C . No entanto como o condensador não é ideal podemos escrever $C = C_{real} + C_{imag}$. Daqui sai que $C_{real} = C$ e que $C_{imag} = \frac{1}{R_2 \omega}$. A partir destes valores podemos determinar então $\epsilon = \epsilon_{real} + \epsilon_{imag}$ para várias frequências em que $\epsilon_{real} = \frac{Cd}{S}$ e $\epsilon_{imag} = \frac{d}{SR_2 \omega}$.

2. MONTAGEM DA EXPERIÊNCIA [1]

Para o estudo da carga e descarga do condensador, utilizou-se a montagem ilustrada no diagrama de blocos da figura 1.

No caso do estudo da descarga define-se inicialmente a tensão gerada pela fonte e o valor da resistência aplicada. Através de um programa computacional procede-se à análise

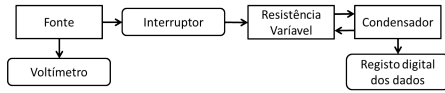


Figura 1: Montagem do estudo do circuito RC

gráfica da evolução temporal da tensão aos terminais do condensador. Tal como já foi referido na introdução, quando estudamos a descarga estamos perante uma exponencial negativa, pelo que por forma a obter a constante de tempo temos que estudar o logaritmo da função, de modo a obter uma recta e analisar o declive da mesma. De notar que para evitar a presença de desvios significativos no valor do declive procede-se a um reajuste na escala de tempo. Para estudar as variações de energia estudam-se ainda os gráficos de U_C e U_C^2 e efectuam-se os integrais dos mesmos. Por fim retira-se o valor da energia inicial para podermos obter a expressão geral da tensão aos terminais do condensador. Este procedimento é efectuado para mais 5 valores de resistência diferentes.

Para o caso da carga do condensador temos que alterar o interruptor para que inicialmente o condensador se encontre desligado e posteriormente venha progressivamente a carregar. Como a expressão não nos dá directamente a exponencial negativa, temos que no programa definir uma nova função dada pelo valor da tensão aos terminais do condensador estabilizada, menos os valores obtidos directamente, isto é definimos uma função v que é dada por: $v = U_\infty - U_C$. O procedimento a partir daqui é em tudo idêntico ao anterior no qual retiramos o declive a partir da aplicação do logaritmo, bem como analisamos os integrais de U_C e U_C^2 . Novamente é importante ter cuidado com o alcance da escala de tempo pois pode produzir flutuações se não for bem escolhida. Neste caso temos ainda que considerar a escolha correcta do valor de U_∞ , pois se não for bem escolhido o gráfico final não será uma recta.

Para a segunda parte da experiência, o esquema utilizado pode ser estudado na figura 2.

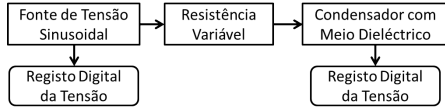


Figura 2: Montagem do estudo do condensador não ideal

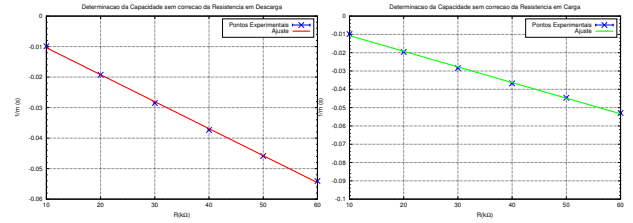
Nesta parte do procedimento experimental é utilizada uma fonte de tensão sinusoidal, cuja frequência é definida para 200 Hz, bem como se define um valor para a tensão eficaz fornecida pelo gerador. Todos estes dados são medidos com recurso a um programa de computador. Posteriormente ajusta-se a tensão eficaz aos terminais do condensador de modo a que seja aproximadamente metade da tensão eficaz registada para o gerador. Este ajuste é efectuado a partir de uma resistência variável. Por fim com recurso a um programa de computador é possível retirar os valores de U , U_C , $\langle U \cdot U_C \rangle$ e U_C^2 . Repete-se depois o procedimento para outros 10 valores de frequência distintos.

3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

3.1. Capacidade do Condensador com Resistência Não Corrigida

Para determinar a capacidade do condensador procedeu-se ao ajuste dos pontos $(\frac{1}{m}, R)$, para a situação de descarga do condensador. O gráfico obtido está na figura 3a.

Os parâmetros do ajuste a este ajuste foram C que é o



(a) Ajuste de uma reta $(\frac{1}{m} = -C \cdot R + b)$ aos inversos dos declives em função da resistência do circuito na situação de descarga

(b) Ajuste de uma reta $(\frac{1}{m} = -C \cdot R + b)$ aos inversos dos declives em função da resistência do circuito na situação de carga

Figura 3: Ajustes à carga e descarga sem resistência

declive da reta e que corresponde à capacidade, e b que corresponde à ordenada na origem (tabela I).

Parâmetro	Valor	D.Prec.	D.Exat.
C (μF)	0.88 ± 0.01	1.14%	12%
b (ms)	1.5 ± 0.4	26.7%	—

Tabela I: Parâmetros de ajuste para obter a capacidade do condensador a partir da sua descarga, fazendo variar a resistência R .

Por outro lado, para a situação de carga podemos fazer o mesmo tratamento de dados, obtendo-se o gráfico da figura 3b.

Os parâmetros do ajuste a este ajuste foram C que é o declive da reta e que corresponde à capacidade, e b que corresponde à ordenada na origem (tabela II).

Parâmetro	Valor	D.Prec.	D.Exat.
C (μF)	0.85 ± 0.02	2.4%	15%
b (ms)	2.1 ± 0.6	28.6%	—

Tabela II: Parâmetros de ajuste para obter a capacidade do condensador a partir da sua carga, fazendo variar a resistência R .

3.2. Capacidade do condensador com Resistência corrigida

Chegou-se à conclusão de que estes valores de capacidade se encontram longe do esperado, pelo que será necessária a inclusão de uma resistência de perdas calculada a partir da expressão de ajuste,

$$U(t = \infty) = \frac{\epsilon}{R + R_i} \quad (3.1)$$

em que $U(t = \infty)$ é a tensão estável para a situação de carga do condensador, ϵ é a tensão fornecida pela fonte de tensão do circuito e R_i é uma resistência parasita em paralelo com o condensador e que representa a sua resistência de perdas.

Esta determinação da resistência R_i foi feita através de um ajuste da expressão (3.1) aos pontos $(U(t = \infty), R)$, que está no gráfico da figura 4.

Os parâmetros do ajuste a este ajuste foram ϵ , que corresponde à tensão da fonte de tensão, e R_i que corresponde à resistência de perdas (tabela III).

Esta correção considera que a nova resistência do circuito, equivalente aos terminais do condensador é dada por,

$$R_{eq} = \frac{R \cdot R_i}{R + R_i} \quad (3.2)$$

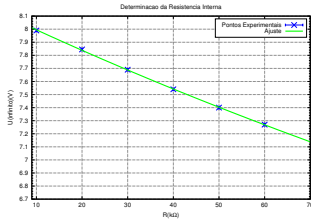


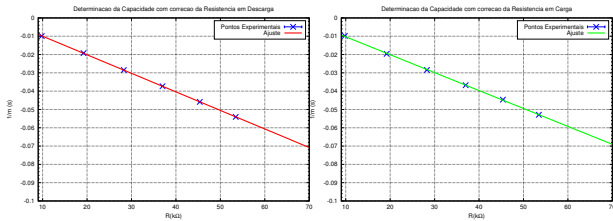
Figura 4: Ajuste da expressão da correção da resistência equivalente do circuito

Parâmetro	Valor	D.Prec.
R_i (kΩ)	490 ± 4	0.82%
ϵ (V)	8.158 ± 0.005	0.06%

Tabela III: Parâmetros de ajuste da equação de correção da resistência equivalente do circuito

Utilizando esta nova resistência podemos fazer um novo ajuste do inverso do declive obtido experimentalmente para o logaritmo de U_C em relação à nova resistência R_{eq} .

Para a descarga obtemos o gráfico da figura 5a.



(a) Ajuste de uma reta ($\frac{1}{m} = -C \cdot R_{eq} + b$) aos inversos dos declives em função da resistência equivalente do circuito na situação de descarga

(b) Ajuste de uma reta ($\frac{1}{m} = -C \cdot R + b$) aos inversos dos declives em função da resistência do circuito na situação de carga

Figura 5: Ajustes com resistência

Os parâmetros obtidos foram os da tabela IV.

Parâmetro	Valor	D.Prec.	D.Exat.
C (μF)	1.013 ± 0.002	0.2%	1.3%
b (ms)	0.13 ± 0.08	61.5%	—

Tabela IV: Parâmetros de ajuste para obter a capacidade do condensador a partir da sua descarga, fazendo variar a resistência R_{eq} .

Para a carga, o ajuste obtido está no gráfico da figura 5b. Os parâmetros obtidos foram os da tabela V.

Parâmetro	Valor	D.Prec.	D.Exat.
C (μF)	0.979 ± 0.008	0.8%	2.1%
b (ms)	0.5 ± 0.3	60%	—

Tabela V: Parâmetros de ajuste para obter a capacidade do condensador a partir da sua carga, fazendo variar a resistência R .

3.3. Balanço energético no condensador

Pretende-se comparar $W_{\text{resistência}}$ e $W_{\text{condensador}}$ para o processo de descarga. Estas energias já têm em conta a resistência equivalente corrigida no circuito. A tabela que contém esses valores calculados é a tabela VI.

R_{eq} (kΩ)	$W_{\text{condensador}}$ (J)	$W_{\text{resistência}}$ (J)	$\frac{W_{\text{resistência}}}{W_{\text{condensador}}}$
9.8 ± 2	$(3.192 \pm 0.008) \times 10^5$	$(3.33 \pm 0.07) \times 10^5$	0.96 ± 0.02
19.2 ± 3	$(3.073 \pm 0.008) \times 10^5$	$(3.13 \pm 0.06) \times 10^5$	0.98 ± 0.02
28.3 ± 5	$(2.957 \pm 0.008) \times 10^5$	$(2.93 \pm 0.05) \times 10^5$	1.01 ± 0.02
36.9 ± 6	$(2.843 \pm 0.008) \times 10^5$	$(2.87 \pm 0.05) \times 10^5$	0.99 ± 0.02
45.4 ± 7	$(2.684 \pm 0.007) \times 10^5$	$(2.70 \pm 0.05) \times 10^5$	1.00 ± 0.02
53.5 ± 9	$(2.599 \pm 0.007) \times 10^5$	$(2.62 \pm 0.04) \times 10^5$	0.99 ± 0.02

Tabela VI: Balanço energético para a descarga

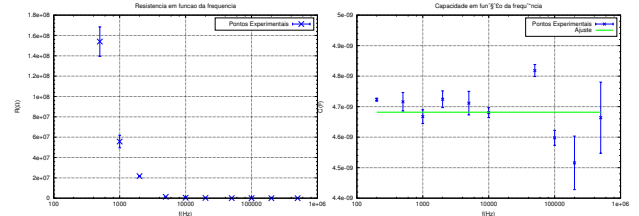
Por outro lado, para o processo de carga pretende-se comparar a soma de $W_{\text{resistência}}$ com $W_{\text{condensador}}$ e a energia dispendida pela fonte de tensão $W_{\text{resistência}}$ e W_{bateria} . Mais uma vez, estas energias já têm em conta a resistência equivalente corrigida no circuito. A tabela que contém esses valores calculados é a tabela VII.

R_{eq} (kΩ)	W_{bateria} (J)	$W_{\text{resistência}}$ (J)	$W_{\text{condensador}}$ (J)	$\frac{W_{\text{bat}}}{W_{\text{res}} + W_{\text{cond}}}$
9.8 ± 2	$(6.53 \pm 0.09) \times 10^5$	$(3.39 \pm 0.01) \times 10^5$	$(3.190 \pm 0.008) \times 10^5$	0.99 ± 0.02
19.2 ± 3	$(6.11 \pm 0.05) \times 10^5$	$(3.133 \pm 0.005) \times 10^5$	$(3.077 \pm 0.008) \times 10^5$	0.98 ± 0.01
28.3 ± 5	$(5.79 \pm 0.03) \times 10^5$	$(2.872 \pm 0.004) \times 10^5$	$(2.957 \pm 0.008) \times 10^5$	0.994 ± 0.008
36.9 ± 6	$(5.52 \pm 0.03) \times 10^5$	$(2.782 \pm 0.003) \times 10^5$	$(2.843 \pm 0.008) \times 10^5$	0.982 ± 0.007
45.4 ± 7	$(5.37 \pm 0.02) \times 10^5$	$(2.691 \pm 0.002) \times 10^5$	$(2.738 \pm 0.007) \times 10^5$	0.988 ± 0.006
53.5 ± 9	$(5.18 \pm 0.02) \times 10^5$	$(2.609 \pm 0.002) \times 10^5$	$(2.643 \pm 0.007) \times 10^5$	0.987 ± 0.006

Tabela VII: Balanço energético para a carga

3.4. Constante dielétrica de um meio LHI

Através das fórmulas da introdução teórica foi possível determinar o valor de R_C e C_C para as diferentes frequências. A resistência de perdas calculada está representada em função da frequência do sinal de entrada na figura 6a.



(a) Resistências de perdas no condensador obtidas através dos dados experimentais em função da frequência

(b) Capacidades do condensador obtidas através dos dados experimentais em função da frequência

Figura 6: Plots da Resistência e Capacidade

A capacidade do condensador não ideal calculada, por sua vez, está representada também em função da frequência na figura 6b. Como a capacidade é invariante fez-se um ajuste a uma constante por forma a determinar um único valor para essa capacidade.

Por ajuste, chegamos à conclusão que a capacidade é de (4.68 ± 0.02) nF.

Calculando a constante dielétrica correspondente à capacidade calculada chega-se à conclusão de que é bastante próxima à do vácuo $(8.88 \pm 0.05) \times 10^{-12}$ F/m, o que invalida o modelo adoptado de que o condensador apenas tem acetato como dielétrico. Surge então a necessidade de calcular a espessura de ar que está no condensador (através da lei das capacidades em série). Obteve-se um valor de $81 \pm 3 \mu m$.

Assim, pode proceder-se ao cálculo da parte real da permissividade, que foi representada no gráfico da figura 7a, em função da frequência. Como também é constante com a frequência, foi ajustada uma reta de declive nulo, para determinar um valor médio desta grandeza.

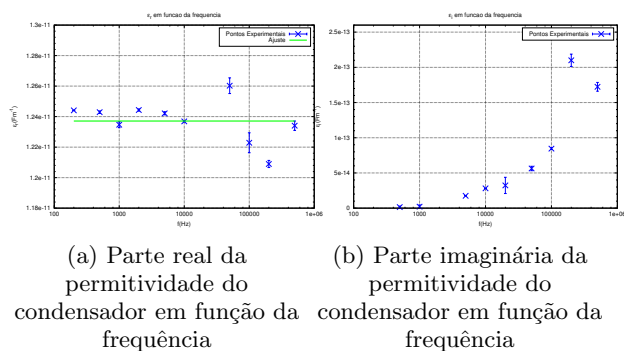


Figura 7: Plots das permitividades real e imaginária do condensador

A permitividade que melhor se ajustou ao gráfico acima foi $(1.237 \pm 0.004) \times 10^{-11}$ F/m.

Por sua vez, a parte imaginária calculada foi representada no gráfico 7b, também como função da frequência.

4. ANÁLISE, CRÍTICAS E CONCLUSÃO

Os resultados experimentais associados a esta experiência foram bons no que diz respeito à carga e descarga do condensador, mas piores relativamente à determinação da constante dielétrica do condensador não ideal analisado.

Pela análise dos parâmetros obtidos nas tabelas I e II, podemos ver que a capacidade obtida para o condensador é a mesma para o caso da carga e descarga do mesmo. Isto quer dizer que a constante de tempo para o circuito é efetivamente uma constante. No entanto os valores obtidos para a capacidade, $0.85 \pm 0.02 \mu\text{F}$ e $0.88 \pm 0.01 \mu\text{F}$, encontram-se longe do valor esperado de $1 \mu\text{F}$. Estes desvios à exatidão são explicados pela facto de o condensador do circuito não ser ideal. De facto, a presença de uma resistência parasita no circuito, considerada em paralelo com o condensador faz diminuir a resistência equivalente considerada para a constante de tempo do circuito. A resistência de perdas do circuito foi determinada com uma elevada precisão através do ajuste aos pontos do gráfico 4. Desse ajuste saiu também a força eletromotriz da fonte de alimentação do circuito. O desvio à exatidão desse parâmetro de ajuste foi de 0.15%, o que garante a fiabilidade dos valores extraídos desse mesmo ajuste. Tendo em conta esta nova correção, obteve-se um valor para a capacidade do condensador muito mais próxima do seu valor real, indicado pelo fabricante, novamente de valores parecidos para a carga e a descarga, como seria de esperar. Os valores obtidos foram de $1.013 \pm 0.002 \mu\text{F}$ e $0.979 \pm 0.008 \mu\text{F}$, para a descarga e carga respetivamente. Os baixos desvios à exatidão são explicados pela presença da resistência de perdas, pelo que a correção feita ao modelo teórico foi bem aplicada.

Feita essa correção ao modelo teórico, foram calculados os balanços energéticos associados aos processos de carga e descarga no condensador.

Podemos ver que para a descarga do condensador, a energia dissipada por efeito de Joule nas resistências foi ligeiramente superior à energia dissipada no condensador, o que não seria de esperar. No entanto os erros para todas as resistências, excepto a primeira, do quociente entre as duas energias abrangiram sempre o valor 1, pelo que se pode assumir a conservação de energia, no processo de descarga, ainda que se possa assumir a presença de erros sistemáticos (que fazem com que a

energia na resistência prevaleça sobre a do condensador). Isto implica que não existam componentes desconhecidos no circuito para além da resistência de perdas do condensador, já contabilizada nos cálculos.

Por outro lado, para o processo de carga verifica-se que a energia armazenada na bateria é sempre ligeiramente superior à soma das energias dissipadas nas resistências e armazenada no condensador. Isto pode estar associado às perdas energéticas ao longo do circuito. No entanto essas perdas não são muito significativas uma vez que todos os valores do quociente entre as energias da bateria e a da resistência e condensador, são bastante próximos do valor unitário. Conclui-se então que a conservação de energia neste sistema está assegurada.

As fontes de erro para esta primeira fase da experiência foram a escolha do intervalo de tempo, no processo de carga, que poderá ter afetado o cálculo do integral do quadrado da tensão ao longo do tempo, e do declive do logaritmo da tensão ao longo do tempo.

Relativamente à segunda parte da experiência, podemos concluir, por observação dos gráficos da figura 6, que o condensador não ideal é composto pelo paralelo de uma capacidade com uma resistência de perdas. Conclui-se que essa capacidade é constante com a alteração da frequência e foi determinada com um desvio à precisão de 0.42%, o que é bastante positivo tendo em conta os pontos obtidos. Verificou-se alguma inconstância nos pontos experimentais (desvios de 0.1nF) e um aumento dos erros associados à capacidade à medida que a frequência do sinal aumenta. Por outro lado, a resistência de perdas calculada para cada frequência já não pode ser considerada constante verificando-se a diminuição de uma ordem de grandeza nas primeiras medições de frequência. Então, à medida que a frequência do sinal de entrada aumenta, a resistência de perdas associada ao condensador diminui.

Calculou-se a permitividade do condensador tendo em conta a existência de uma camada de ar no seu interior, cujo valor calculado de cerca de $80 \mu\text{m}$, ou seja cerca de 80% da espessura do acetato, o que parece ser uma grandeza plausível, tendo em conta a dimensão do condensador.

Por outro lado, como a capacidade do condensador está associada à parte real da sua permitividade, verifica-se, pelo gráfico da figura 7, que também é constante (apesar de alguma dispersão dos dados experimentais). Como a parte imaginária da permitividade elétrica é proporcional ao inverso da resistência de perdas, podemos ver que à medida que a frequência do sinal de entrada aumenta a permitividade aumenta também.

Conclui-se então que à medida que a frequência aumenta, a constante dielétrica do condensador aumenta também.

Os erros associados a esta experiência podem ter vindo do ajuste da resistência do circuito feita para controlar a tensão, que poderá ter afetado os valores medidos para cada uma das frequências. Alguns valores de frequências tiveram de ser rejeitados devido à incoerência dos resultados obtidos (resistências negativas e valores com ordens de grandeza absurdas, obtidos para frequências muito baixas, em que o circuito se comporta de maneira pouco previsível).

Os resultados obtidos não foram por isso muito fiáveis, o que nos leva a questionar os valores obtidos tanto para a capacidade do condensador, como para as permitividades obtidas.

Como melhoria para esta experiência propõe-se que se desloque o intervalo de frequências do sinal de entrada do circuito do condensador de placas paralelas, para frequências maiores, para que o circuito se comporte aproximadamente da forma descrita teoricamente.