

## Resumo

Começámos por medir a linearidade do magnetómetro, com a uma espira. Obtivemos  $b = (2.952 \pm 0.006) \times 10^{-3}$ , que representa um erro relativo e um desvio à exactidão de 0.2%. Os valores experimentais para o campo magnético criado por uma e duas bobinas, representavam um desvio ao valor teórico de  $\approx 3\%$ . Para o solenóide com núcleo de ar, os valores experimentais estavam de acordo com a previsão teórica. Para o núcleo de Ferro, obtivemos  $M = 14 \pm 2$ . Para a característica  $B(H)$ , obteve-se  $B_s = 1.19 \pm 0.16T$ ,  $B_r = 0.75 \pm 0.11T$ ,  $H_c = 152 \pm 20 A.m^{-1}$  e  $\mu' = 8300 \pm 3800 H.m^{-1}$

## 1 Introdução [1]

Neste trabalho laboratorial estudaremos, em primeiro lugar, o campo de indução magnética criado por circuitos de diferentes geometrias. A principal ferramenta para abordar teoricamente este problema é a Lei de Biot-Savart.

A primeira geometria que estudamos é um enrolamento circular com  $N$  espiras. Podemos aproximar esta geometria por uma espira circular percorrida por uma corrente  $Ni$ . Admitimos que está assente no plano  $xOy$ , e o ponto de interesse tem coordenadas  $P = (0, z_p, y_p)$  (consideramos apenas a distância segundo  $y$  pois o problema tem simetria em torno de  $z$ , portanto não há qualquer perda de generalização). Usando um sistema de coordenadas cilíndricas, temos  $\vec{r} = \rho \cos \theta \vec{e}_x + (y_p - \rho \sin \theta) \vec{e}_y + z_p \vec{e}_z$  e  $d\vec{\ell} = -d\ell(\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y)$ , e a Lei de Biot-Savart resulta:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{4\pi} \oint \frac{z_p \rho (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) + (\rho^2 - y_p \rho \sin \theta) \vec{e}_z}{[\rho^2 \cos^2 \theta + (y_p - \rho \sin \theta)^2 + z_p^2]^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (1)$$

Em que  $\rho$  é o raio da espira e  $\theta$  o ângulo que o vector posição do elemento da espira faz com o eixo  $xx$ .

Para  $y_p = 0$ , temos o caso particular do campo segundo o eixo da espira, para o qual o problema é simétrico e o integral resulta:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z_p^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \quad (2)$$

A segunda geometria corresponde a um sistema de bobines de Helmholtz, que corresponde a duas espiras circulares simétricas ( $S$ ,  $N$  e  $i$  iguais) paralelas e centradas no mesmo eixo, e está dimensionado de modo a  $\vec{B}$  ser o mais homogéneo possível no seu centro, condição que é garantida para uma distância entre bobines igual ao seu raio. Aplicando o princípio de sobreposição com 1 de cada bobine, teremos para o caso particular  $y_p = 0$ , em que há simetria:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ni}{2\rho} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2z_p}{\rho} \right) \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2z_p}{\rho} \right) \right]^{-\frac{3}{2}} \right\} \vec{e}_z \quad (3)$$

A terceira geometria é a do solenóide, que corresponde a um enrolamento de fio que podemos assumir, numa boa aproximação, tratar-se de um conjunto de  $N$  espiras de corrente  $i$  empilhadas, sendo  $N$  o número de voltas dado ao fio. Assim, podemos calcular o campo do solenóide como sendo a contribuição de cada espira, que podemos integrar no comprimento do solenóide se  $N$  for suficientemente grande e o fio suficientemente fino, tomando  $n$  como a densidade linear (em superfície) de corrente dada por  $n = N/\ell$ , em que  $\ell$  é o comprimento do solenóide.

O resultado vem

$$B_z = \frac{\mu_0 ni}{2} \left[ \frac{z - z_p}{\sqrt{\rho^2 + (z_p - z)^2}} \right]_{z=-\ell/2}^{z=\ell/2} \quad (4)$$

Estudaremos também um solenóide com núcleo de ferro, para o qual determinaremos a magnetização (assumida uniforme) e a permeabilidade magnética do material. A magnetização resulta em correntes de magnetização dadas por  $\vec{J}'_{mag} = \nabla \times \vec{M}$  (volume) e  $\vec{J}_{mag} = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$  (superfície). Dada a condição de magnetização uniforme,  $\nabla \times \vec{M} = 0$  portanto  $|\vec{J}_{mag}| = ni_{mag} = M \Leftrightarrow Ni_{mag} = M\ell$ . Assim, a densidade de corrente em superfície que percorre o solenóide é  $nI = ni + j_{mag} = ni + M$  e o campo de indução para o solenóide de núcleo de ferro é dado por

$$B_z = \frac{\mu_0 (ni + M)}{2} \left[ \frac{z - z_p}{\sqrt{\rho^2 + (z_p - z)^2}} \right]_{z=-\ell}^{z=0} \quad (5)$$

Na segunda parte deste trabalho estudamos a característica  $B(H)$  de um material ferromagnético e fazemos uma tentativa de identificá-lo. À curva característica chamamos curva de histerese.

Os materiais ferromagnéticos distinguem-se dos materiais paramagnéticos e diamagnéticos pela tendência dos seus electrões alinharem os seus *spins*. Assim surgem, de forma espontânea, domínios, i.e. regiões da estrutura cristalina em que os electrões estão alinhados com o mesmo *spin*. Mas como há vários domínios de diferentes *spins*, sem qualquer sentido preferencial (numa amostra macroscópica de material), a resultante dos campos de indução provenientes de cada domínio anula-se. No entanto, ao impor um campo magnético exterior sobre a amostra, começará a haver uma reorientação dos *spins*, e os domínios alinhados com o campo exterior irão a crescer. Este processo de magnetização é irreversível, devido às reorientações que os domínios precisam de sofrer causarem dissipação térmica.

A magnetização começará saturar a partir de um certo valor do campo exterior, por haver cada vez menos domínios para alinhar, até que o campo de indução no interior da amostra estabiliza num valor, denominado indução de saturação  $B_s$ . Devido a o processo de magnetização ser irreversível, ao anular o campo exterior a amostra manter-se-á magnetizada, tendo o campo de indução um valor denominado indução remanescente  $B_r$ . De modo a desmagnetizar a amostra é necessário impor um campo exterior no sentido contrário àquele com que amostra foi magnetizada, de modo a reorientar os domínios. O valor de campo exterior para o qual a magnetização se volta a anular é denominado campo coercivo  $H_c$ . O material pode ser caracterizado em termos destas quantidades e de um quarta, a permeabilidade magnética incremental no início de magnetização, que corresponde aproximadamente ao declive da curva para valores pequenos do campo aplicado.

## 2 Experiência Realizada

A primeira parte prende-se com o teste da calibração e linearidade do magnetómetro (baseado no efeito de Hall) usando um conjunto circular de 320 espiras de raio  $R$  percorrido por corrente. Serão registados os valores da indução para incrementos de 0.1A (desde 0.1 A até 1.5A), pelo que estes serão ajustados a uma regressão linear com a finalidade de obter a relação entre a indução  $B$  no centro e a corrente fornecida à bobina e consequentemente efectuar-se-á uma analogia com o gráfico da função  $B(I) = 320 \frac{\mu_0 I}{2R}$ . De seguida, fornecendo uma corrente de 1A, será medido o campo de indução  $B$  (primeiramente ao longo do eixo da bobina (obtendo-se a componente segundo o eixo e normal a este) e finalmente a começar num eixo paralelo ao anterior, distanciando 2.5cm dele) desde o centro da bobina até ao local onde  $B$  corresponde a  $\frac{1}{20}$  do  $B$  inicial ( $\Delta x = 0.1cm$ ). Por fim mede-se a componente de  $B$  segundo o eixo da bobina, desde o início do plano desta, começando no centro e terminando na periferia ( $\Delta x = 0.5cm$ ).

Na segunda parte utiliza-se um par de bobinas de Helmholtz, sendo que a estas forneceremos uma corrente de 1A. As componentes do campo serão medidas (em intervalos de 1 cm até que  $B$  corresponda a  $\frac{1}{20}$  do  $B$  inicial, inicialmente, segundo o eixo e perpendicular a este, e finalmente segundo um eixo paralelo ao anterior e distanciando de 2.5 cm. Por fim determinar-se-á a componente do campo  $B$  segundo o plano das bobinas no plano do centro do conjunto perpendicular ao eixo, desde o centro até à periferia e em incrementos de 0.5cm.

Na terceira parte fornecer-se-á, a um conjunto de solenóides, uma corrente de 1A. Para o solenóide com núcleo de ar, regista-se a componente de  $B$ , primeiramente, segundo o eixo do mesmo, do centro até à zona onde  $B = \frac{1}{20} B_0$  e, de seguida, segundo um eixo paralelo ao anterior e a uma distância de 1.5cm. Para o solenóide com núcleo de ferro, determinar-se-á a componente de  $B$  segundo o eixo, desde o topo do solenóide até que se verifique  $B = \frac{1}{10} B_0$  ( $\Delta x = 0.5cm$ ).

Por fim, montando o circuito da figura (!!!), modifica-se o auto-transformador com a finalidade de se observar a curva de histerese, ajusta-se a d.d.p. para se observar a saturação do núcleo e efectua-se medidas no sentido de determinar o campo coercivo  $H_C$ , a indução remanescente  $B_R$  e a indução de saturação  $B_S$ . O declive da curva  $B(H)$  será também determinado para  $B = 0$  e, consequentemente, estima-se a permeabilidade magnética incremental do material. Dos circuitos magnético e eléctrico envolvidos na montagem, e recorrendo às leis de Ampère, Faraday e Kirchoff, retiramos as seguintes equações:

$$H = \frac{n_1 i}{\ell} = \frac{n_1 V}{\ell R_p} \quad (6)$$

$$B = \frac{R_s C U_c}{n_2 S} \quad (7)$$

$$\mu'_r = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} = \frac{\ell R_p R_s C}{\mu_0 n_1 n_2 S} \frac{dU_c}{dV} \quad (8)$$

## 3 Tratamento de Dados e Resultados

Teste da calibração e linearidade do magnetómetro utilizando uma espira circular percorrida por corrente.

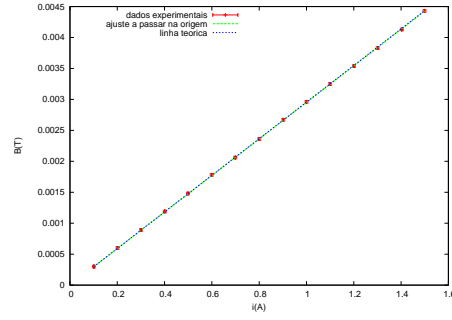


Figura 1: Ajuste a uma recta  $y = b * x$  da corrente vs indução

$b_{ajuste}$	$b_{teorico}$	Desvio à exactidão
$(2.952 \pm 0.006) \times 10^{-3}$	$2.958 \times 10^{-3}$	0.2%

Tabela 1: Resultados do ajuste a uma recta

De seguida, para  $i = 1.00 \pm 0.01A$ , com uma só bobina de 360 espiras:

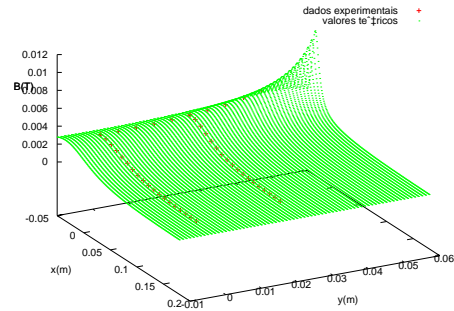


Figura 2: Representação gráfica do campo medido segundo eixo da bobine, e curva teórica, no espaço

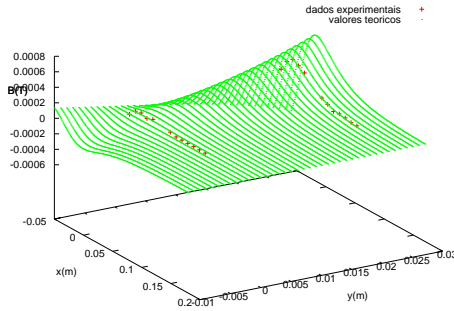


Figura 3: Representação gráfica do campo medido segundo uma normal ao eixo da bobine, e curva teórica, no espaço

A curva teórica foi obtida através do cálculo numérico do integral 1, processado por um programa de computador.

### Bobines de Helmholtz

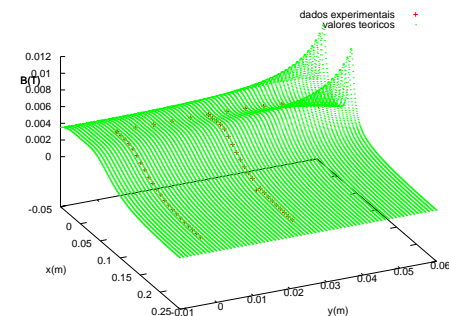


Figura 4: Representação gráfica do campo medido segundo eixo das bobines, e curva teórica, no espaço

$\Delta U_C(B)$ (mV)	$\Delta U_R(H)$ (mV)
$160 \pm 20$	$98 \pm 20$

Usamos as equações 6 a 8, em conjunto com as características do transformador que obtivemos, para obter os valores apresentados na seguinte tabela

$B_s$ (T)	$B_r$ (T)	$H_c$ (A/m)	$\mu'$ (H/m)
$1.19 \pm 0.16$	$0.75 \pm 0.11$	$152 \pm 20$	$(8.3 \pm 3.8) \times 10^3$

## 4 Análise de resultados, críticas e conclusões

Na **primeira parte** da experiência, verificou-se que o magnetômetro estava calibrado e a funcionar linearmente ensaiando a experiência com uma bobine.

O ajuste do campo, no centro da bobine, segundo a direção do seu eixo, à corrente, resultou, com um  $\chi^2 \approx 2$ , num declive  $m = (2.952 \pm 0.006) \times 10^{-3}$ , que representa um erro relativo e um desvio à exactidão de  $\approx 0.2\%$ , ambos. A concordância do modelo teórico com a experiência é evidenciada graficamente pelas retas teórica e de ajuste praticamente sobrepostas e quantitativamente pelos declives muito próximos e ainda pelo fato da distância da reta de ajuste aos pontos estar coberta por todos os erros.

Para a representação gráfica do campo, segundo a direção do eixo da bobine, calculou-se a média dos desvios à exactidão [2] dos pontos que resultou em  $\approx 3\%$  para os pontos do eixo central,  $\approx 4\%$  para os pontos do eixo paralelo ao eixo central e  $\approx 2\%$  para os pontos do plano da bobine. Considerou-se como valor exato do campo num ponto o resultado do integral numérico relativo a esse ponto, o que, como se verá, pode não ser um bom procedimento. Este estudo permitiu mais uma vez confirmar que o magnetômetro funcionou corretamente por comparação com o plano teórico.

Uma análise do campo, segundo a direção normal ao eixo da bobine, permitiu mostrar que os resultados foram incoerentes com a exactidão considerada, assim apresentam-se dois argumentos justificativos. Primeiro, a existência de ruído [3] electro-magnético e o fato do campo segundo a direção normal ao eixo da bobine ser muito inferior àquele segundo a direção do eixo da mesma. Assim, lembrando que a precisão do magnetômetro é fixa, a menores valores de campo estão associados menos alargamentos significativos [4] e consequentemente é possível que o ruído surja como um fator determinante à falta de qualidade das medições e portanto dos resultados. Segundo, o fato do integral numérico ser um resultado não exato já que houve discretização do espaço, ou seja uma aproximação. Percebe-se que para valores pequenos do campo os erros causados por estes motivos estejam na origem das diferenças entre os dados experimentais e o plano teórico. Ainda assim, a representação gráfica do campo, segundo a direção normal ao eixo da bobine, serviu novamente de certificação ao funcionamento do magnetômetro, já que o comportamento observado para o campo segue claramente a previsão teórica.

Note-se que o campo exibe uma simetria radial em relação ao plano da bobine pelo que é natural e suficiente que se faça apenas o estudo do campo de um dos lados desse plano e segundo algumas normais, paralelas ao eixo da bobine e ainda segundo alguns raios do eixo da bobine.

Na **segunda parte** da experiência, determinou-se o campo gerado pelas bobines de Helmholtz.

Uma análise quantitativa do campo, segundo a direção do eixo e da normal ao eixo da bobine, evidencia uma situação semelhante à observada para o teste de calibração e linearidade

Figura 5: Representação gráfica do campo medido segundo uma normal ao eixo das bobines, e curva teórica, no espaço

Mais uma vez, a curva teórica foi obtida através do cálculo numérico do integral 1, processado pelo programa de computador mencionado anteriormente.

### Solenóides

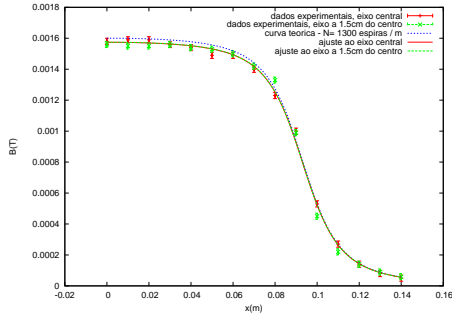


Figura 6: Representação gráfica do campo medido segundo eixo do solenóide, e num eixo paralelo, a 1.5cm, num solenóide com núcleo de ar. Ajustes a 4

	$N_{medido}$	$N_{eixo central}$	$N_{eixo 1.5cm}$
	1300	$1278 \pm 8$	$1280 \pm 10$
$\chi^2$	-	$7 \times 10^{-10}$	$1.3 \times 10^{-9}$

Tabela 2: Resultados do ajuste, em espiras por metro

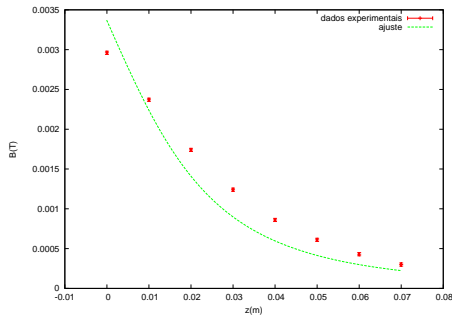


Figura 7: Representação gráfica do campo medido segundo uma normal ao eixo do solenóide com núcleo de Ferro, e ajuste a  $i$

O resultado do ajuste foi  $i = 3.6 \pm 0.2$ , com  $\chi^2 = 7.4 \times 10^{-8}$ . Impondo  $I = 1A$ , tiramos de 5 que  $M = 14 \pm 2$

### Característica $B(H)$

Através de medições feitas no osciloscópio obtivemos as seguintes tensões

$U_C(B_s)$ (mV)	$U_C(B_r)$ (mV)	$U_R(H_c)$ (mV)
$444 \pm 12$	$282 \pm 8$	$360 \pm 40$

do magnetómetro. A média dos desvios à exatidão dos pontos segundo a direção do eixo da bobine resultou em  $\approx 2\%$  para os pontos do eixo central,  $\approx 8\%$  para os pontos do eixo paralelo ao eixo central e  $\approx 3\%$  para os pontos do plano, perpendicular ao eixo das bobines, no centro do conjunto.

Segundo a direção normal ao eixo da bobine estimou-se na mesma uma média dos desvios à exactidão elevada, pelas mesmas razões. Foi curioso no entanto que para o eixo paralelo ao eixo central, excluindo os dois pontos mais perto do centro do conjunto, essa estimativa reduziu-se para  $\approx 3\%$ , que indica que na região dos restantes pontos o integral numérico terá significado. A razão dos dois pontos mais perto do centro do conjunto estarem muito distantes da previsão teórica reside talvez em ter-se considerado as bobines como espiras filiformes e existirem pequenas alterações à geometria ideal da montagem que alteram sensivelmente o campo.

Este último fator, do desalinhamento das bobines, é aliás uma fonte de erro comum a todos os resultados com respeito às bobines de Helmholtz.

Por comparação das representações gráficas das componentes do campo, segundo a direção do eixo das bobines e segundo a sua normal, com os respetivos planos teóricos, parece aceitável que as observações e os resultados são os esperados.

As bobines de Helmholtz geram um campo com uma distribuição espacial interessante. Na zona central o campo é, em muito boa aproximação, uniforme. Há uma simetria em relação aos eixos das bobines, à normal a esse eixo que atravessa o centro do conjunto e ainda aos planos coincidente com as tangentes às bobines diagonalmente opostas entre si. Mais uma vez o estudo espacial efetuado sobre o campo foi suficiente para o conhecer nos espaços simétricos aos estudados. Verificou-se que a intensidade do campo, segundo a direção do eixo, é máxima nos planos das bobines, conforme se esperava.

Apesar de serem relações alheias, foi possível concluir o mesmo que as seguintes observações e resultados permitem. [5]

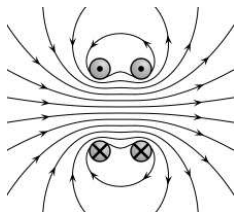


Figura 8: Linhas de campo num plano transversal aos planos das bobines de Helmholtz.

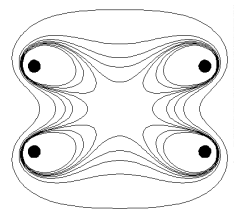


Figura 9: Contornos ilustrativos da intensidade do campo num plano transversal aos planos das bobines de Helmholtz. No in-

terior da octo-forma o campo é suposto não se desviar mais do que 1% do seu valor central.

Na **terceira parte** da experiência, determinou-se o campo gerado por solenóides, um com núcleo de ar e outro com núcleo de ferro, segundo a direção do seu eixo.

Para o solenoide com núcleo de ar obtiveram-se ajustes aos dados do campo no eixo central e no eixo paralelo ao mesmo com  $\chi^2/ndf \approx 7 \times 10^{-10}$  e  $\chi^2/ndf \approx 1 \times 10^{-9}$  respetivamente e resultaram  $N = 1278 \pm 8$  espiras/m e  $N = 1280 \pm 10$  espiras/m respetivamente, com desvios à exactidão reduzidos, mas não cobertos pelo erro. Graficamente observa-se a sobreposição dos dados, curva teórica e ajustes ao modelo teórico, com exceção feita à região interior do solenoide, onde a curva teórica exhibe-se superior aos restantes. Verificou-se que o campo é aproximadamente constante no espaço central conforme previsto para o solenoide infinito, para o qual o campo é uniforme em todo o espaço interior ao solenoide. Confirmou-se que o ponto de inflexão do campo coincide com a extremidade do solenoide, o que está de acordo com o modelo teórico.

Tal como para as partes da experiência anteriores, os resultados da terceira parte são afetados pela **falta de rigor no posicionamento da sonda** e pelo **ruído** aquando da aquisição de dados, no entanto a orientação da sonda influencia mais.

Na **quarta parte** da experiência, determinou-se a característica  $B(H)$  para um material ferromagnético. Numa primeira análise dos resultados, somos levados a dizer que o material se trata de uma liga Fe-Si, já que três das quantidades características estão próximas, dentro do erro, das características desse material. No entanto, a discrepância de  $H_c$  é notória. Atribuímos esta discrepância à possibilidade de a amostra ter uma percentagem de impurezas adicionais que não é desprezável. Esta quantidade de impurezas causará uma maior resistência à reorientação dos domínios do que a liga causaria caso fosse pura (dentro do possível), e portanto é preciso aplicar um campo maior para anular a magnetização. Por outro lado, pode estar relacionado com a maneira como foi determinado experimentalmente o declive, já que o critério foi procurar o declive máximo.

## Referências

- [1] André Martins *et al.* Notas das aulas teóricas de Laboratório de Complementos de Termodinâmica e Electromagnetismo do Prof. Dr. João Luís Maia Figueirinhas, 2012.
- [2] Wikipedia. Porcentagem - Wikipedia, the free encyclopedia, 2012.
- [3] Wikipedia. Noise - Wikipedia, the free encyclopedia, 2012.
- [4] Wikipedia. Significand - Wikipedia, the free encyclopedia, 2012.
- [5] Wikipedia. Helmholtz coil - Wikipedia, the free encyclopedia, 2012.