

Equações de Fresnel

Tiago Frederico, N°63422; Maria Vilelas, N°63438; Lúcia Carreira, N°63439

Pertende-se analisar o que acontece com a radiação electromagnética quando passa para um meio com um índice de refração diferente do que aquele em que se propagava. Em particular pretendemos analisar a Reflectividade (R) e a Transmissividade(T) na superfície de refração de dois meios homogêneos isotrópicos não conductores.

Introdução

Este trabalho experimental é sobre as características de propagação de ondas electromagnéticas na separação de dois meios, sendo por isso adequando partirmos do conceito de onda electromagnética, fazendo a sua análise de acordo com as Leis de Maxwell^[1].

Uma onda electromagnética é uma perturbação que se propaga com uma certa velocidade (v), caracterizada por $u(x, y, z, t)$, em que x , y e z são as coordenadas espaciais e t a coordenada temporal, como se trata de uma onda electromagnética a perturbação corresponde a um campo eléctrico \vec{E} e um campo magnético \vec{B} .

É também importante definir frente de onda como os pontos geométricos da onda que se encontram na mesma fase. É de referir também que o período T , $u(t) = u(t + T)$ e o número de onda k , $k = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{w}{v}$ são características de ondas periódicas.

A solução para a equação de onda da onda electromagnética é, atendendo as condições fronteira.

$$\nabla^2 u = \varepsilon\mu \frac{d^2 u}{dt^2}$$

Uma vez que falamos em diferentes meios de propagação, é importante definir índice de refração, $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$, grandeza adimensional, é de referir que a velocidade de propagação depende do meio.

Vamos agora concentrar-nos num caso específico, uma onda electromagnética plana^[2] harmónica (T) e monocromática (um só Tv), que se propaga num meio Linear Homogêneo e Isótropo (LHI), onde \vec{E} é a igualdade:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \Phi)$$

Onde ϕ representa a fase, \vec{E}_0 é determinado pela condições fronteira e k é o vector de onda, com normal igual a k e a direcção segundo a frente de onda, \vec{n} .

Se olharmos agora para o conceito de vector de ondas para a forma degenerada das Leis de Maxwell temos que \vec{k} , \vec{E} e \vec{H} formam um triado directo, e \vec{E} e \vec{H} no plano da frente de onda.

Agora temos elementos suficientes para analisar a distribuição espacial de \vec{E} e \vec{B} , no plano de onda. Considera-se que uma onda electromagnética esta polarizada quando o vector determinado pelas condições fronteira $\vec{E}_0 = x\vec{i} + y\vec{j}$ e tal que $E_{0x} = E_0 \neq 0$ enquanto que $E_{y0} = 0$ (polarização

paralela), ou $E_{0y} = E_0 \neq 0$ e $E_{x0} = 0$ (polarização perpendicular).

Podemos agora passar ao estudo da energia numa onda electromagnética plana, considerando o vector de Pointing:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

No caso de um meio LHI e pelas formulas degeneradas, $\vec{S} = \frac{1}{z} \vec{E} \vec{E} \vec{n}$, onde z é a impedância eléctrica característica do meio, dada por $z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$. Como a energia magnética é $W_m = \frac{1}{2\mu} \vec{B} \vec{B}$ e a eléctrica $W_e = \frac{\varepsilon}{2} \vec{E} \vec{E} = W_m$, sobrepondo $W_{em} = \varepsilon \vec{E} \vec{E}$. Assim:

$$\vec{S} = v W_{em} \vec{n} (W_m^{-2})$$

Podemos observar \vec{S} como o fluxo de energia por unidade de tempo ou densidade de potência, tendo por isto uma grande relevância no estudo da energia.

Tendo agora definido todos os conceitos necessários à análise dos fenómenos de reflexão e refração de uma onda electromagnética incidente no plano de separação de dois meios. Analisemos os feixes:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \vec{E}_{0i} e^{i(\omega_i t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{0r} e^{i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{0t} e^{i(\omega_t t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \end{aligned} \quad (1)$$

Utilizando as leis da descontinuidade resultantes das leis de Maxwell e atendendo que estas são verdadeiras para qualquer ponto da superfície de separação dos dois meios, em qualquer instante,

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_r = \omega_t = \omega \\ k_{xi} &= k_{xr} = k_{xt} \\ k_{yi} &= k_{yr} = k_{yt} \end{aligned} \quad (2)$$

A conclusão que se pode retirar destes resultados é que os vectores de onda são complementares, assim e pela definição de k , atendendo que $k_i = k_r = \frac{\omega}{c} n$, tomando i como o ângulo que k_i faz com a normal e t o ângulo entre k_t , obtemos a famosa Lei de Snell-Descartes^[3].

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(t) \quad (3)$$

Vamos a partir de agora utilizar apenas meios não magnéticos, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, as descontinuidades delimitam as amplitudes, funcionando como condições fronteira:

$$\begin{aligned} E_{yr} &= E_{yt} = E_{zr} = E_{zt} = 0 \\ H_{xr} &= H_{xt} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Que vamos obter:

$$\begin{aligned} E_{xr} &= E_{xi} \frac{\eta_1 \cos(i) - \eta_2 \cos(t)}{\eta_1 \cos(i) + \eta_2 \cos(t)} = -E_{xi} \frac{\sin(i-t)}{\sin(i+t)} \\ E_{xt} &= E_{xi} \frac{2\eta_1 \cos(i)}{\eta_1 \cos(i) + \eta_2 \cos(t)} = E_{xi} \frac{2\sin(t)\cos(i)}{\sin(i+t)} \end{aligned} \quad (5)$$

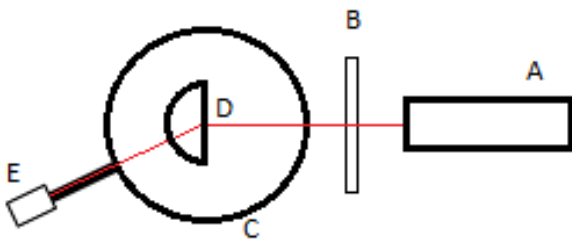
Imaginemos agora outra situação, em que o campo eléctrico tem um direcção muito semelhante à direcção da normal com a superfície de separação dos dois meios, tal que, $\cos(i) \simeq 1$ e $\sin(i) \simeq i$. Apartir desde resultado e com as equações (?), resultam as equações da transmitância e reflectância. Chegamos assim, à parte principal deste trabalho experimental, as equações de Fresnel. Estas apresentam algumas relações entre as amplitudes. Assim os coeficientes de reflectância (R) e transmitância (T) de uma onda:

$$\begin{aligned} R &= \frac{I_r \cos(r)}{I_i \cos(i)} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2} \\ T &= \frac{I_t \cos(t)}{I_i \cos(i)} = \frac{|E_t|^2 \cos(t) Z_1}{|E_i|^2 \cos(i) Z_2} \end{aligned} \quad (6)$$

Pode observar-se que estas equações estão de acordo com a conservação de energia, $R + T = 0$.

Experiência Realizada

Esquema de Montagem



Legenda:

A - Laser ($\lambda = 632.8\text{nm}$)

B - Detector do Feixe Incidente

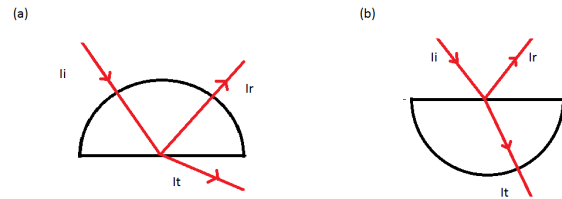
C - Goniómetro

D - Polímero

E - Detector dos Feixes Transmitido e Reflectido

No início deste trabalho experimental deve-se ligar o laser e aguardar cerca de quinze minutos para que este atinja a temperatura óptima de funcionamento.

A primeira parte da experiência utiliza-se um polarizador de forma a que o raio incidente apresente uma polarização paralela. Registando-se, inicialmente, o valor da intensidade do feixe incidente, passando depois para o registo das intensidades dos feixes transmitido e reflectido. Os ângulos desses registos devem-se localizar no intervalo de 0° a 85° e os passos de 5 em 5 graus. Estas medições são realizadas com o feixe oriundo do meio mais refringente (a), e repetindo as mesmas medidas agora oriundo proveniente do meio menos refringente.



A segunda parte da experiência é igual à primeira mas o polarizador tem de estar alinhado de modo a que a polarização seja perpendicular.

Resultados Obtidos

Ângulo de Brewster

\angle incidente	n polímero
$51^\circ 43'$	1,27

Polarização Paralela

Para a)

i	fracção I_i para I_r	I_r	fracção I_i para I_t	I_t
0°	-	-	0,04	0,16
5°	-	-	0,04	0,12
10°	-	-	0,05	0,18
15°	-	-	0,06	0,22
20°	0,04	0	0,06	0,22
25°	0,04	0	0,06	0,18
30°	0,04	0	0,05	0,16
35°	0,04	0	0,04	0,15
40°	0,04	0,01	0,04	0,11
45°	0,06	0,19	0,04	0

Para b)

i	fracção I_i para I_r	I_r	fracção I_i para I_t	I_t
0°	-	-	0,03	0,13
5°	-	-	0,03	0,13
10°	-	-	0,03	0,12
15°	-	-	0,03	0,12
20°	0,03	0,01	0,03	0,13
25°	0,03	0	0,03	0,13
30°	0,03	0	0,03	0,14
35°	0,03	0	0,03	0,14
40°	0,03	0	0,03	0,14
45°	0,03	0	0,03	0,13
50°	0,03	0	0,03	0,13
55°	0,03	0	0,03	0,12
60°	0,03	0	0,03	0,12
65°	0,04	0	0,04	0,13
70°	0,04	0,01	0,03	0,08
75°	0,03	0,03	0,03	0,06
80°	0,03	0,07	0,03	0,03
85°	0,03	0,13	0,03	0,01

Polarização Perpendicular Para a)

i	fraccao I_i para I_r	I_r	fraccao I_i para I_t	I_t
0°	-	-	0,05	0,19
5°	-	-	0,04	0,12
10°	-	-	0,04	0,13
15°	-	-	0,03	0,13
20°	0,03	0,01	0,03	0,12
25°	0,03	0,01	0,03	0,13
30°	0,03	0,01	0,03	0,12
35°	0,04	0,02	0,04	0,16
40°	0,04	0,05	0,04	0,09
45°	0,03	0,12	0,03	0

Para b)

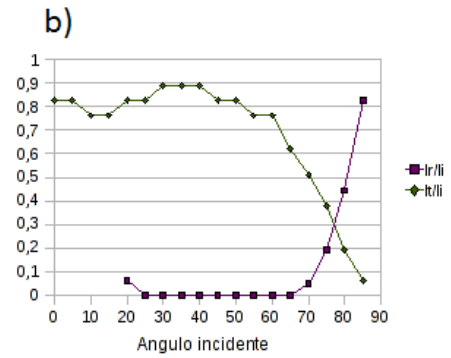
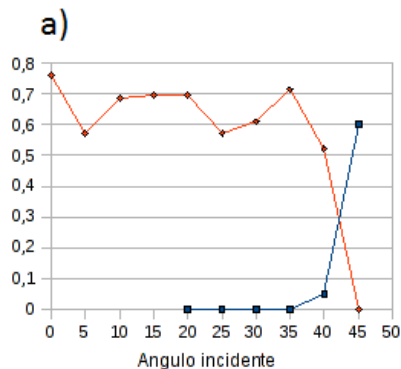
i	fraccao I_i para I_r	I_r	fraccao I_i para I_t	I_t
0°	-	-	0,03	0,13
5°	-	-	0,03	0,13
$1^\circ 0$	-	-	0,03	0,12
15°	-	-	0,03	0,12
20°	0,03	0,01	0,03	0,13
25°	0,03	0,01	0,03	0,13
30°	0,03	0,01	0,03	0,14
35°	0,03	0,01	0,03	0,14
40°	0,03	0,01	0,03	0,14
45°	0,03	0,01	0,03	0,13
50°	0,03	0,02	0,03	0,13
55°	0,03	0,02	0,03	0,12
60°	0,03	0,03	0,03	0,12
65°	0,04	0,03	0,04	0,13
70°	0,04	0,05	0,03	0,08
75°	0,03	0,06	0,03	0,06
80°	0,03	0,09	0,03	0,03
85°	0,03	0,12	0,03	0,01

Análise de Resultados

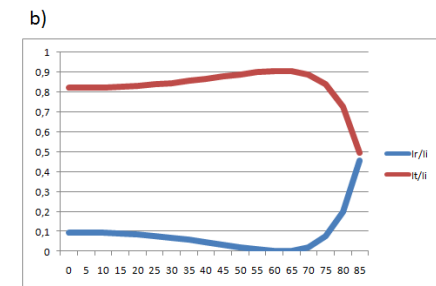
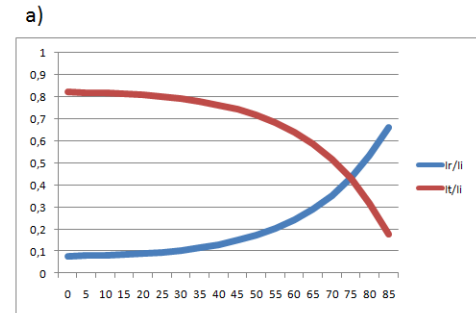
Devido às flutuações do laser, próprio seu funcionamento, as medições apresentam uma grande incerteza. Outro aspecto a referir é o facto de o número de mediadas para a) ser reduzido, isto deve-se, como seria de esperar pela existência de ângulo crítico ($i \simeq 45^\circ$).

Polarização Paralela

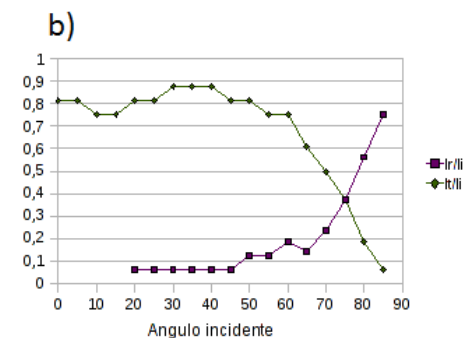
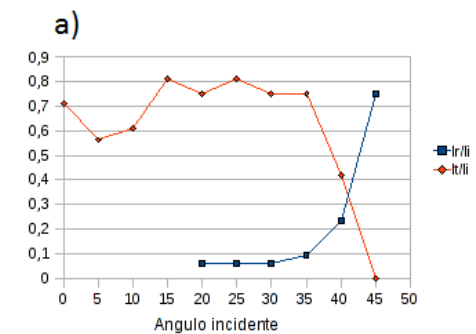
-Dados Experimentais



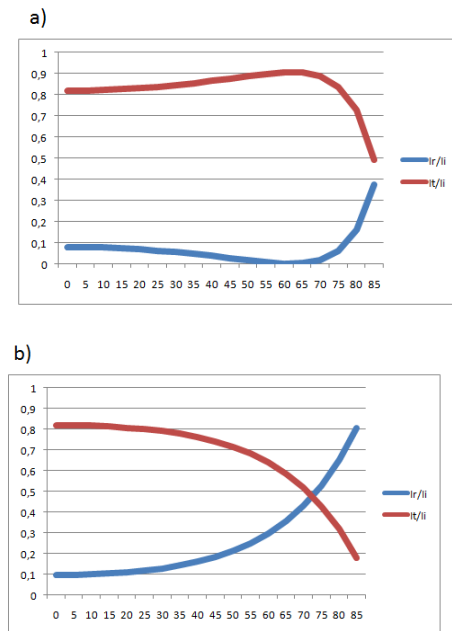
-Dados Teóricos



Polarização Perpendicular -Dados Experimentais



-Dados Teóricos



Apartir da análise dos gráficos dos dados experimentais e comparando-os com os teóricos, pode ver-se que à uma correspondência entre os valores experimentais e as previsões teóricas. Os valores em falta, para além daqueles que correspondem aos ângulos superiores ao ângulo crítico, devem-se à estrutura de construção da experiência.

Conclusão e Crítica

Este relatório tem uma parte experimental com muito pouco rigor. Esta falta de rigornas se deve apenas, como referido anteriormente, às flutuações do laser, mas também ao aparelho, que tinha um número de casas decimais de confiança bastante baixo, o que poderia corresponder também ao fenómeno de bombardeamento do laser.

Outra possível fonte de erros será a falta de varias medições para fazer um melhor trabalho estatístico, mas seria algo impossível de se por em prática neste trabalho experimental devido à sua extensão. O facto da construção da experiência, no modo como o polímero está fixo ao goniómetro, impedindo por vezes o feixe incidente de chegar ao polímero, batendo nos parafusos ou nos clip's, ou então, por vezes bloqueia o feixe transmitido. Somando a isto, o interruptor para alternar o sinal do detectores tinha um mau contacto do cabo coaxial proveniente do detector do feixe incidente. Devido a termos muitas medições com valores de I_i errados, os nossos dados eram inutilizáveis, usamos por isso os dados de outro grupo.

Conclui-mo que, embora a experiência tenha sido bem sucedida, e houve uma aceitação do modelo teórico, existem alguns aspectos que podiam melhorar, como o modo de fixação do polímero ao goniómetro e o interruptor, de modo a diminuir os erros deste trabalho.

Referências

[1] Figueirinhas, João, Apontamentos das aulas teóricas, 2009.