

Condutividade Térmica

LCET/MEFT - 2º ano, 2º Semestre - 2013/2014
Turno de Sexta-feira

Professor João Figueirinhas

Grupo D

João Lourenço (75382)/ Miguel Mora (75399)/ Miguel Levy (75516)/ Ana Almeida (75986)

18/04/2014

Resumo

Esta actividade, tem como objectivo a determinação da condutividade k de uma barra de alumínio, bem como as resistência térmica da barra e das junções com o sistema de arrefecimento e aquecimento. Para isso, vão ser estudados dois regimes: estacionário e variável. Para o primeiro regime admite-se que a variação da temperatura ao longo do tempo é nula, no segundo, considera-se esta variação e a variação da temperatura ao longo da barra. Desta forma, para o segundo regime, k é determinado numericamente e através de um modelo que exploraremos mais adiante.

1 Introdução

A energia é uma grandeza física que é capaz de atravessar as fronteiras que separam dois sistemas. Um dos mecanismos através do qual se realiza esta transferência é a condução térmica.

Ao descobrir-se este processo, também surgiu a necessidade de diferenciar os materiais tendo como base as suas diferentes capacidades de conduzir calor na presença de um gradiente de temperatura (condutividade térmica, k).

De modo a relacionar as grandezas a cima referidas com o fluxo de calor, J_Q , através da superfície de um corpo, temos a Lei de Fourier:

$$J_Q = -k \quad (1)$$

Como o fluxo de calor através da superfície é igual à variação da energia interna do corpo, encontramos a equação do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad (2)$$

Em que χ é a difusividade térmica do material, definida como:

$$\chi \equiv \frac{k}{\rho c} \quad (3)$$

Sendo ρ a massa específica do material, e c o respectivo calor específico.

Regime estacionário

Neste trabalho laboratorial, iremos analisar dois regimes de transferência de calor ao longo de uma barra de alumínio (estacionário e variável), de modo a obtermos o k da mesma. Para ambos os casos considerou-se apenas a direcção do gradiente da temperatura, tendo que $T(r, t) = T(x, t)$. Este gradiente será gerado ao colocar a referida barra em contacto com uma fonte quente e uma fonte fria (resistência e água, respetivamente).

Tratemos primeiro o regime estacionário. Neste temos que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow T(x) = mx + b \quad (4)$$

Através de (4) obtém-se o perfil de temperaturas ao longo da barra e o declive da recta obtida corresponde ao gradiente médio de temperatura ao longo desta, $\frac{dT}{dx}$.

Para calcular k , usa-se que a potência que atravessa a barra é dada por:

$$P_S = Sk \frac{\partial T}{\partial x} \Leftrightarrow k = \frac{P_S}{S \frac{\partial T}{\partial x}} \quad (5)$$

Em que S é a secção da barra utilizada. Numa situação ideal (sem perdas energéticas para o exterior) a potência fornecida pela fonte quente teria de ser igualà fornecida à fonte fria, que é igual à potência que atravessa a barra (P_S).

A potência fornecida pela fonte quente é dada por:

$$P_{FQ} = VI \quad (6)$$

A potência dissipada na fonte fria é:

$$P_{FF} = \frac{c \Delta m \Delta T}{\Delta t} \quad (7)$$

Sendo assim possível determinar a condutividade térmica da barra. Numa situação não ideal temos também que a potência dissipada ao longo da barra será dada pela diferença entre P_{FQ} e P_{FF} .

Também é possível determinar a resistência térmica da barra e das junções através de:

$$R = \frac{\Delta T}{P_S} \quad (8)$$

No caso do cálculo das resistências térmicas das junções, T_{Topo} e T_{Base} (cálculo de ΔT) obtém-se através da expressão (4).

Regime variável

Neste caso, isolou-se o sistema barra+FF da resistência eléctrica, o que faz com que esta deixe de fornecer calor e ficamos com a equação do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (9)$$

Para calcular a solução desta equação realizou-se uma análise de Fourier, em que se supôs várias condições iniciais:

$$T(x, 0) = T_{base} + \frac{(T_{topo} - T_{base})x}{L} \quad (10)$$

(variação linear da temperatura ao longo da barra em $t=0$)

$$J_Q(x=L)=0 \quad (11)$$

(Fluxo de calor nulo no final da barra)

$$T(0,t)=T_{base} \quad (12)$$

(Temperatura da base constante ao longo do tempo)

Tendo estas condições iniciais, a solução de 9 é:

$$T(x,t)=T_{base}+(T_{topo}-T_{base})\frac{8}{\pi^2}d \quad (13)$$

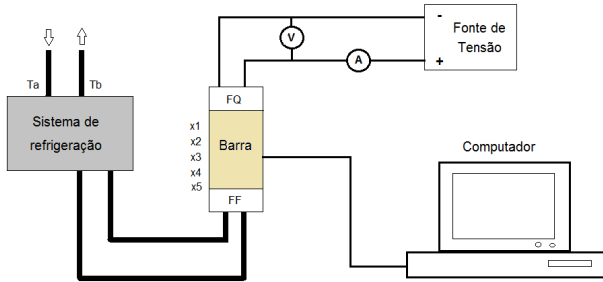
Em que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^2} e^{-\chi \left(\frac{\pi}{2+n\pi} \right)^2 t} \sin \left(\frac{x}{L} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right) \quad (14)$$

2 Montagem e Proctocolo experimental

I - Regime estacionário

1. Comece por montar o circuito conforme o esquema abaixo:



Esquema 1: Montagem experimental.

2. Imponha uma tensão de cerca de 16V;
3. Ligue o computador e utilize o programa *Shortcut to Temp* que regista as temperaturas em várias posições da barra ($x = 1, 3.5, 6, 8.5$ e $11cm$), bem como a temperatura da fonte quente e da fonte fria, e ainda a temperatura da água à entrada e à saída;
4. Quando as temperaturas estiverem aproximadamente constantes (diferença menor que $0,5^\circ C$), registe os seus valores;
5. Com os valores das temperaturas ao longo da barra, e sabendo as posições em que estas são medidas, faça um ajuste $T(x)$ segundo (4);
6. Com o valor do ajuste calcule k a partir da expressão 5 considerando $\dot{P}_s = P_{FF}$ e $P_s = \dot{P}_{FQ}$;
7. Calcule a potência dissipada;
8. Calcule o valor das resistências térmicas da barra de alumínio e das junções da barra com o sistema de aquecimento e arrefecimento, a partir de (8);
9. Imponha uma tensão de cerca de 21V;
10. Repita os passos 4 - 8.

II - Regime variável

1. Estando o sistema no estado estacionário, abra o programa *shortcut to XVI32*;
2. Liberte os elasticos associados ao cilindro, levante a fonte quente separando-a do restante do cilindro através de uma placa isolante, simultaneamente desligue a fonte de tensão e inicie o programa;
3. Salve os dados obtidos num ficheiro .dat;
4. Faça um ajuste da variação temporal da temperatura, segundo o modelo descrito pela expressão (13);
5. Através do ajuste anterior obtenha k .
6. Calcule, numericamente, k a partir da equação do calor (9);

3 Análise de Resultados

3.1 Regime estacionário

Antes de mais, é necessário ter em conta algumas grandezas utilizadas no decorrer do trabalho:

$S_{barra}(m^2)$	4×10^{-4}
$L_{barra}(m)$	0,12
$k_{Al}(w/(m.K))$	237
$\rho_{Al}(kg/m^3)$	2697
$c_{Al}(J/(kg.K))$	900
$c_{H_2O}(J/(kg.K))$	4186

Tabela 1: Grandezas constantes ao longo do trabalho experimental, em que S = secção da barra, L = comprimento da barra, k = condutividade, c = calor específico e ρ = massa específica.

Para o regime estacionário a barra de alumínio está em contacto com dois blocos de cobre nas suas extremidades, sendo um a fonte quente e o outro a fonte fria.

Este sistema encontra-se isolado e através de sensores é possível obter, através do *software* a temperatura em 5 posições distintas na barra, bem como as temperaturas na *FF* e *FQ* e ainda à entrada e saída do sistema de refrigeração (T_a e T_b).

Assim, esperou-se até as temperaturas estabilizarem e retiram-se os seguintes valores:

x				
$x_1(cm)$	$x_2(cm)$	$x_3(cm)$	$x_4(cm)$	$x_5(cm)$
1,0	3,5	6,0	8,5	11,0
$V = 16,57 \pm 0,01V$				
$T_1(^{\circ}C)$	$T_2(^{\circ}C)$	$T_3(^{\circ}C)$	$T_4(^{\circ}C)$	$T_5(^{\circ}C)$
$58,68 \pm 0,11$	$53,58 \pm 0,08$	$47,69 \pm 0,07$	$41,87 \pm 0,05$	$37,71 \pm 0,11$
$V = 21,02 \pm 0,01V$				
$T_1(^{\circ}C)$	$T_2(^{\circ}C)$	$T_3(^{\circ}C)$	$T_4(^{\circ}C)$	$T_5(^{\circ}C)$
$80,12 \pm 0,08$	$72,60 \pm 0,10$	$63,51 \pm 0,10$	$53,50 \pm 0,07$	$46,25 \pm 0,14$

Tabela 2: Valores de temperatura ao longo da barra para dois valores de tensão: $V = 16,57 \pm 0,01V$ e $V = 21,02 \pm 0,01V$

Com os valores da tabela 2, realizaram-se dois ajustes $T(x) = mx + b$ (um para cada valor de tensão), a partir do qual se retirou m que corresponde $\frac{\partial T}{\partial x}$ (gradiente de temperatura medido na barra), vindo:

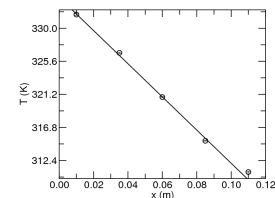


Figura 1: Ajuste $T(x) = m_1x + b_1$, para $V_1 = 16,57 \pm 0,01V$, em que $m_1 = -220 \pm 1$ e $b_1 = 334,11 \pm 0,08$.

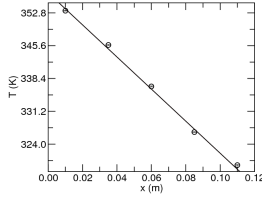


Figura 2: Ajuste $T(x) = m_2x + b_2$, para $V_2 = 21,02 \pm 0,01V$, em que $m_2 = -352 \pm 1$ e $b_2 = 357,19 \pm 0,08$.

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\partial T}{\partial x_1} = -220 \pm 1 \\ m_2 &= \frac{\partial T}{\partial x_2} = -352 \pm 1 \end{aligned}$$

Tabela 3: Valores dos gradientes de temperatura para $V_1 = 16,57 \pm 0,01V$ e $V_2 = 21,02 \pm 0,01V$

Durante a actividade foi escolhido um caudal baixo e este foi monitorizado ao longo da experincia por forma a se manter constante, sendo a P_{FF} calculada pela expressão (7) e a P_{FQ} dada por (6).

$V = 16,57 \pm 0,01V$			
$\phi(kg/s)$	$T_a(^{\circ}C)$	$T_b(^{\circ}C)$	$P_{FF}(W)$
$(1,20 \pm 0,04) \times 10^{-3}$	21,90	25,40	17,5
$I(A)$	$P_{FQ}(W)$	$P_{diss}(W)$	
$1,43 \pm 0,02$	$23,7 \pm 0,3$	$6,17 \pm 3,54$	
$V = 21,02 \pm 0,01V$			
$\phi(kg/s)$	$T_a(^{\circ}C)$	$T_b(^{\circ}C)$	$P_{FF}(W)$
$(1,19 \pm 0,04) \times 10^{-3}$	$22,71 \pm 0,08$	$28,19 \pm 0,63$	$27,2 \pm 4,5$
$I(A)$	$P_{FQ}(W)$	$P_{diss}(W)$	
$1,82 \pm 0,01$	$38,3 \pm 0,2$	$11,03 \pm 4,75$	

Tabela 4: Valores necessários para o cálculo da potência da fonte fria, quente e dissipada, para os dois valores de tensão.

Com os valores dos gradientes de temperaturas, presentes na tabela 3, e sabendo que k (condutividade) é dado pela expressão (5), e recorrendo às potências presentes na tabela 4, calculou-se k para as duas tensões impostas:

$V = 16,57 \pm 0,01V$	
$k_{FF}(W/(m.K))$	$k_{FQ}(W/(m.K))$
199 ± 48	269 ± 3
$V = 21,02 \pm 0,01V$	
$k_{FF}(W/(m.K))$	$k_{FQ}(W/(m.K))$
193 ± 46	271 ± 1

Tabela 5: Valores de k calculados com a potência da fonte fria e quente, para os dois valores de tensão.

Uma vez que, não se realizou nenhuma medição por forma a contabilizar as perdas de potência na fonte quente, decidiu-se considerar para as duas tensões, o k_{FF} , como o mais fidedigno, embora este apresente um erro grande, que pode ter sido sobreestimado. Este erro apesar de ser elevado, permite que k contenha $k_{teorico} = 237W/(m.K)$, para os dois casos.

3.2 Resistência térmica

Para se obter a resistência térmica da barra recorreu-se à expressão (8), sendo a temperatura no topo e na base provenientes dos ajustes da figura 1 e 2, vindo:

$V = 16,57 \pm 0,01V$			
$T_{topo}(K)$	$T_{base}(K)$	$T_{FF}(K)$	$T_{FQ}(K)$
$334,11 \pm 0,10$	$307,71 \pm 0,10$	$301,15 \pm 0,08$	$337,45 \pm 0,60$
$R_{topo}(K.W^{-1})$	$R_{base}(K.W^{-1})$	$R_{barra}(K.W^{-1})$	
$0,19 \pm 0,04$	$0,37 \pm 0,07$	$1,51 \pm 0,27$	
$V = 21,02 \pm 0,01V$			
$T_{topo}(K)$	$T_{base}(K)$	$T_{FF}(K)$	$T_{FQ}(K)$
$357,19 \pm 0,10$	$314,95 \pm 0,10$	$306,15 \pm 0,12$	$362,85 \pm 0,87$
$R_{topo}(K.W^{-1})$	$R_{base}(K.W^{-1})$	$R_{barra}(K.W^{-1})$	
$0,21 \pm 0,04$	$0,32 \pm 0,05$	$1,55 \pm 0,26$	

Tabela 6: Valores de k calculados com a potência da fonte fria e quente, para os dois valores de tensão.

3.3 Regime variável

Nesta fase, separou-se a fonte quente do resto do sistema, colocando-se uma placa de esferovite na superfície de separação.

Posto isto, e através do *software* utilizado foram retirados diversos valores de temperatura ao longo do tempo. Estes dados foram guardados e recorrendo-se ao *fitteia* realizou-se um ajuste, para a temperatura medida em x_3 , segundo o modelo dado pela expressão (13), obtendo-se:

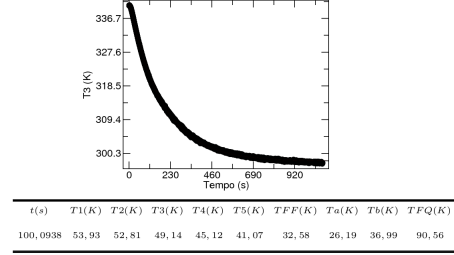


Figura 3: Ajuste $T_3(t)$ para o modelo dado pela expressão, com $\chi = (3.177 \pm 0.001) \times 10^{-5}$, $T_{base} = 298.18 \pm 0.01$ e $T_{topo} = 372.32 \pm 0.01$. (13).

Com o valor de χ , obteve-se k a partir de (3), vindo:

$$k_{modelo} = 77.12 \pm 0.24(W/(m.K))$$

Como este valor não está próximo do esperado e tem por base as permissas (10 -12), utilizou-se a expressão do calor (9) e resolveu-se numericamente. Para isso, utilizou-se $t = 100.0938s$ ajustando-se $T(x)$ segundo $ax^2 + bx + c$. Por forma a que os resultados fossem mais fiáveis, utilizou-se o instante antes e depois, realizando-se 3 gráficos:

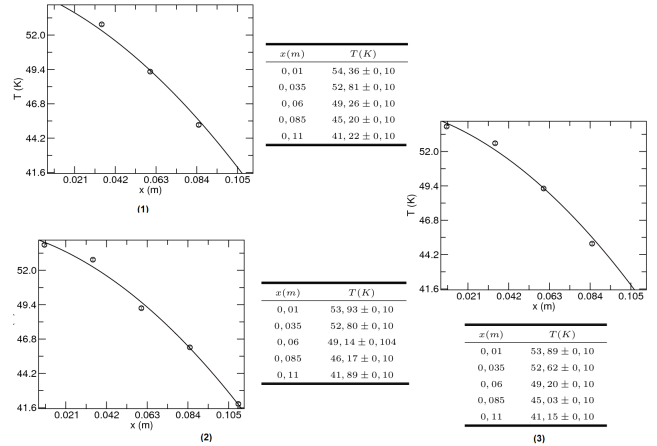


Figura 4: Ajuste $T(x)$ segundo $ax^2 + bx + c$, em que $a_1 = -606.95 \pm 42.76$, $a_2 = -640.51 \pm 42.76$ e $a_3 = -681.71 \pm 42.76$.

Fixando o $x = x_3$, e ajustando $T_3(t)$ a $mx + b$, obtém-se $m = \frac{\partial T}{\partial t}$, vindo:

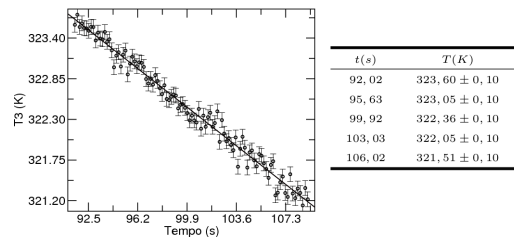


Figura 5: Ajuste de $T_3(t)$ segundo $m_3x + b_3$, em que $m_3 = -0.14 \pm 0.02$ e $b_3 = 336.6 \pm 0.2$.

Sabendo que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2a = \frac{2a_1 + 2a_2 + 2a_3}{3} = -1286$ e tendo $\frac{\partial T}{\partial t} = m_3$, é possível a partir de 9 obter χ e com 3 determinar k , vindo:

$\frac{\partial T}{\partial t}$	$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x}$	$\chi (m^2/s)$	$k_{num} \left(\frac{w}{(m.K)} \right)$
$-0,14 \pm 0,02$	$-1286 \pm 42,76$	$(1,10 \pm 0,10) \times 10^{-4}$	267 ± 25

Tabela 7: Valor de k calculado a partir de χ , obtido através de (9).

4 Conclusão e Crítica

Inicialmente foi estudada a situação em que se verifica um regime estacionário, para duas tensões diferentes (leia-se, para duas potências de fonte quente distintas). Para tal, procedeu-se à recolha da temperatura em vários pontos da barra, representou-se graficamente a temperatura pela posição e fez-se a regressão linear. É possível verificar que os pontos se ajustam bastante bem a uma recta, visto até que os parâmetros retirados do *fitteia* não possuem grande erro, o que corrobora a asserção de que a obtenção dos resultados foi realmente feita num regime estacionário. Obteve-se a resistência térmica da barra e das junções das suas extremidades, bem como a condutividade térmica da barra. Como seria de esperar, todos estes valores foram coerentes para as duas tensões para as quais se realizou a experiência, pelo que é possível admitir que não ocorreram erros pontuais de relevância. Contudo, a experiência foi baseado em alguns pressupostos, como não existirem perdas de calor da fonte quente para a fonte fria. Desta forma, obviamente, a potência fornecida à barra (potência da fonte quente) devia ser totalmente transferida para a fonte fria (o sistema de arrefecimento). Ora, a observação dos dois valores obtidos rapidamente prova este pressuposto errado, mostrando haver uma diferença significativa (não é possível desprezar a potência dissipada). Desta forma, foi necessário escolher que valor de potência seria utilizado para a obtenção das grandezas desejadas. Por um lado, a potência da fonte quente fornecia-nos um pequeno erro nas grandezas mas apenas porque desprezava a violação do pressuposto. Por outro lado, utilizar a potência da fonte fria leva a um erro imenso devido ao erro da leitura da temperatura ser significativo quando a diferença de temperatura não é tão elevada. Contudo, decidiu-se por utilizar a potência da fonte fria visto, embora produzir um erro muito grande, confere significado físico aos valores obtidos. Ou seja, caso se tivesse escolhido utilizar a potência da fonte quente, os resultados seriam apresentados com erros sem qualquer significado e por isso, não poderíamos retirar qualquer tipo de informação à cerca da experiência. Desta forma, podemos confiar nos resultados obtidos, embora que sem qualquer tipo de precisão numérica. Posto tudo isto, os valores de condutividade térmica estavam longe do teórico mas compreendiam este no intervalo de erro. A razão para o desvio à exactidão que se verifica deve-se à questão da dissipação da potência.

Posteriormente, estudou-se o regime variável. Aqui, cortou-se a alimentação da fonte quente e isolou-se a barra, estudando a variação da temperatura. Primeiramente, verificou-se que depois de se cortar a alimentação da fonte quente ainda se verificou uma subida de temperatura da fonte quente. Isto, que significaria que algo existiria de errado, é na realidade inevitável visto que é a lateral do cilindro de cobre (fonte quente) que é aquecida e o sensor se encontra

na base. Ora, sabe-se que o regime estacionário previamente estudado implicava um fluxo de calor, entre a lateral aquecida e a base da fonte quente, e posteriormente a base da barra. Além disso, sabe-se que um fluxo de calor implica um gradiente de temperatura. Ora, ao se isolar a fonte quente, interrompe-se também o fluxo e obriga-se a homogeneização da temperatura, ou seja, vai desaparecer o gradiente de temperatura entre a lateral (mais quente) e a base que irá aquecer.

Do ajuste dos pontos obtidos resultou um valor de condutividade térmica extremamente mais baixo do que o esperado (cerca de três vezes menor do que o teórico), o que suscita discussão. Ora, na realidade, este valor provém da violação do pressuposto de que a temperatura da base se mantém constante. Isto seria verificado caso a fonte fria se comportasse como um reservatório de calor mas tal não se verificou. Contudo, analisando as implicações do pressuposto, o nosso modelo assume que a temperatura da base é constante e assume como valor da temperatura da base a temperatura final. Assim, é directo compreender que a situação real sentiu uma variação de temperatura por unidade de comprimento menor do que a assumida pelo modelo. Assim, como se verifica pela equação do calor, a condutividade térmica é inversamente proporcional à variação de temperatura por comprimento, pelo que se retira sem dificuldades que o valor da condutividade térmica do modelo irá ser menor do que a real.

Além dessa análise, foi feita uma outra que consiste em encontrar os valores através da escolha de um número de pontos e o cálculo das derivadas através desses pontos. Contudo, isto é um método muito simplista e susceptível a erros. Ora, utilizando um número diminuto de pontos para generalizar pode levar a erros devido a variações instantâneas da temperatura fora do esperado. Assim, verificou-se que o valor obtido se afasta do valor teórico, embora não tanto quanto o valor proveniente da análise através do modelo.

É necessário referir que a maior parte do erro associado ao cálculo da fonte fria na parte inicial da experiência é devido ao erro da temperatura fornecido pelo programa fornecido. Foi-nos também chamado à atenção da possibilidade de existir um erro no algoritmo que o programa utiliza para converter as tensões de entrada em temperaturas, o que causaria um erro adicional. Além disso, os sensores de tensão para a conversão da temperatura da fonte fria encontram-se em contacto directo com a água, o que pode produzir ruído, até porque não se trabalhou com água destilada mas sim água que possui iões dissolvidos que podem conduzir corrente, alterando os valores lidos pelos sensores. Adicionalmente, caso a experiência fosse melhor isolada, seria possível a obtenção de valores de condutividade térmica mais fiáveis visto que os modelos utilizados o assumem enquanto pressuposto.

5 Referências

- FIGUEIRINHAS, João. "Protocolos dos trabalhos práticos de Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica", 2014 IST
- WIKIPEDIA, "Condutividade térmica", http://pt.wikipedia.org/wiki/Condutividade_t%C3%A9rmica (Abril de 2014)
- WIKIPEDIA, "Alumínio", <http://es.wikipedia.org/wiki/Aluminio> (Abril de 2014)