

Condensador

LCET/MEFT - 2º ano, 2º Semestre - 2013/2014

Turno de Sexta-feira

Professor João Figueirinhas

Grupo D

João Lourenço (75382)/ Miguel Mora (75399)/ Miguel Levy (75516)/ Ana Almeida (75986)

15/05/2014

Resumo

Com este laboratório, estudou-se o processo de carga e descarga de um condensador num circuito RC, tendo sido calculada uma resistência interna do condensador $R_i = (5.03 \pm 0.09) \times 10^2 \Omega$ e uma capacidade $C = (1,008 \pm 0,002) \mu F$ para a carga e $C = (1,015 \pm 0,004) \mu F$ para a descarga, verificando-se também a conservação de energia através de W_c , W_e e W_R .

Quanto ao condensador de placas paralelas com dielétrico de acetato, foi determinada a constante dielétrica relativa (3,7), verificando-se a existência de bolhas de ar entre o dielétrico e as placas com uma espessura $d_{ar} = (6,82 \pm 0,22) \times 10^{-5} m$. Determinou-se ainda os perfis de resistência de perdas, capacidade do condensador e o ângulo de perdas em função da frequência.

1 Introdução

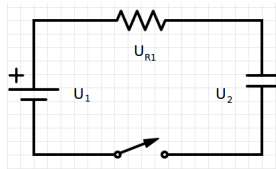
Os condensadores são dispositivos que são muito aplicados em sistemas elétricos e eletrónicos. São constituídos por duas placas condutoras separadas por um dielétrico (isolante). Numa situação ideal podem ser descritos apenas pelo valor da sua capacidade (C):

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (1)$$

Em que Q corresponde à carga (em módulo) armazenada nas placas e ΔV corresponde à diferença de potencial entre as placas. Ao aplicar-se uma diferença de potencial nas placas cria-se um campo elétrico na região do dielétrico, polarizando-o. O vector deslocamento elétrico associado a essa polarização será dado por:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2)$$

Considere-se agora um circuito RC série:



Com o interruptor fechado, o condensador irá carregar. Aplicando a KVL, ficamos com:

$$U_1 = U_2 + U_{R1} \quad (3)$$

Como a intensidade de corrente em qualquer ponto do circuito é a mesma, e sabendo que a intensidade que atravessa o condensador é dada por $i_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt}$:

$$U_1 = U_2 + R_1 C \frac{dU_2}{dt} \quad (4)$$

Resolvendo esta equação sabendo que no início o condensador estava completamente descarregado, temos que para o processo de carga:

$$U_2(t) = U_1 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (5)$$

Após o carregamento total do condensador, abriu-se novamente o interruptor. Deste modo irá iniciar-se o processo de descarregamento do condensador, em que este dissipa a sua energia armazenada na resistência. Neste caso, ao resolvermos (4) com $U_1 = 0$, temos que:

$$U_2(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

Enquanto o condensador carrega, temos que a energia fornecida ao circuito pela fonte de tensão:

$$W_{U1} = \frac{U_\infty}{R_1} \int_0^\infty U_{R1} dt \quad (7)$$

Esta será igualmente distribuída pelos elementos do circuito (metade armazenada no condensador e metade dissipada na resistência), enquanto que na descarga toda a energia do condensador será dissipada na resistência, tendo que:

$$W_{R1} = \int_0^\infty \frac{U_{R1}^2}{R_1} dt \quad (8)$$

Para determinar a energia armazenada no condensador, tem primeiro que se calcular ΔV imposta aos seus terminais, para que seja movida uma carga dq:

$$dW_c = \frac{q}{C} dq \iff W_c = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{CU_2^2}{2} \quad (9)$$

Para o condensador de placas paralelas, ao aplicar o teorema de Gauss, obtemos:

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (10)$$

Sendo $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ a constante dielétrica do meio de separação, S é a área das placas e d a distância entre elas. Consideremos agora que ϵ tem parte real e imaginária, ou seja $\epsilon = \epsilon_r + j\epsilon_i$. Substituindo em (10) obtemos que a capacidade do condensador terá também parte real e imaginária $C = C_r + jC_i$. Separando (10) na parte real e imaginária, obtemos que:

$$C_r = \frac{\epsilon_r S}{d} \quad (11)$$

$$C_i = \frac{\epsilon_i S}{d} \quad (12)$$

Se utilizarmos amplitudes complexas temos que I:

$$I = \omega V C_i + j\omega V C_r \quad (13)$$

A parte imaginária obtida remete-nos para a existência de resistências internas. Deste modo teremos o mesmo circuito RC série, no entanto com uma resistência em paralelo (fruto das não idealidades dos componentes) com o condensador. Considerando-se o equivalente de Norton do circuito obteve-se para a nova corrente:

$$I = \frac{V}{R_{eq}} + j\omega V C_{eq} \quad (14)$$

Juntando (11),(12),(13) e (14), obtivemos as componentes reais e imaginárias de ϵ :

$$\epsilon_r = \frac{dC_{eq}}{S} \quad (15)$$

$$\epsilon_i = \frac{d}{\omega R_{eq} S} \quad (16)$$

Ao adicionar uma resistência em paralelo com o condensador o circuito irá ser afectado. Sabendo que a potência dissipada nas resistências é $P_{Req} = \frac{U_{2ef}^2}{R_{eq}}$ e que o condensador não dissipa potência (é ideal), ou seja $P_{total} = P_{R1} + P_{Req}$ temos:

$$R_{eq} = R_1 \frac{U_{2ef}^2}{< U_1 \cdot U_2 > - U_{2ef}^2} \quad (17)$$

Usando a lei dos nós, verificamos que a corrente que atravessa R_1 vai-se dividir e atravessar o condensador e a R_{eq} . Obtendo então a partir da lei dos nós e com alguma manipulação matemática:

$$\frac{U_{1ef}}{U_{2ef}} = \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_{eq}}\right)^2 + (\omega R_1 C_{eq})^2} \quad (18)$$

Resolvendo em ordem a C_{eq} :

$$C_{eq} = \frac{1}{\omega R_1} \sqrt{\left(\frac{U_{1ef}}{U_{2ef}}\right)^2 - \left(1 + \frac{R_1}{R_{eq}}\right)^2} \quad (19)$$

Num condensador sujeito a uma corrente alterna temos que a corrente que o atravessa deverá possuir uma diferença de fase igual a $\pi/2$. No entanto no dielétrico verifica-se que existe uma queda óhmica (pelo facto dele ser uma resistência pura) existindo assim uma componente da corrente em fase com a tensão. A este ângulo de desvio, relativamente a $\pi/2$ entre a tensão e a corrente dá-se o nome de ângulo de perdas e é dado por:

$$\delta = \text{atan} \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_r} \right) \quad (20)$$

2 Montagem e Protocolo experimental

Este trabalho é consituído por duas partes, a primeira em que se analisa o processo de carga e descarga de um condensador, sendo utilizada uma fonte de alimentação que gera uma tensão contínua que alimenta um circuito consituído por uma resistência em série com um condensador (figura 1). Por forma a obter medições (U_C), utiliza-se um sistema de aquisição de dados, que também permite regular a posição do interruptor. Desta forma, alterando a posição do interruptor estuda-se a carga (a) ou descarga (b).

Na segunda parte da experiência, analisa-se o comportamento do condensador de placas paralelas, em função da frequência. Para isso, utiliza-se um gerador de funções (modo sinusoidal) por forma a se ter uma tensão e amplitude variáveis, estando ligado a uma resistência em série com um condensador de placas paralelas (figura 2). Recorrendo ao osciloscópio obtém-se a tensão do gerador (U) e aos terminais do condensador (U_C).

I Descarga e Carga

- 1 Monte o circuito conforme a figura 1 a) (descarga):

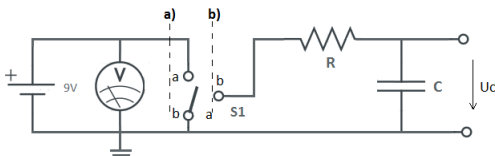


Figura 1: Circuito - parte I, em que $R = 10k\Omega$ e $C = 1\mu F$.

- 2 Ligue a fonte de tensão e com auxilio do voltímetro imponha uma tensão de 5V;
- 3 Execute o programa e inicie a recolha de dados;
- 4 Mude a representação de dados para $\ln(U_C)$;
- 5 Obtenha a regressão linear $\ln(U_C)(t)$;
- 6 Mude a representação de dados para $\ln(U_C)^2$;
- 7 Calcule, através do programa em uso, $\int_0^\infty U_C^2$;
- 8 Compare o valor da energia armazenada no início do processo de descarga ($t = 0$), dada pela expressão (9) e a energia dissipada na resistência durante o processo (8);
- 9 Repita os passos 3-8 para $R = 20\Omega, 30\Omega, 40\Omega, 50\Omega$ e 60Ω .
- 10 Faça as alterações necessárias, obtendo o circuito 1 b) (carga), com $R = 10k\Omega$;
- 11 Com a fonte de tensão a 5V e utilizando o programa anterior, meça $U_C(\infty)$;
- 12 Realize a recolha de dados;
- 13 Obtenha $[U_C(\infty) - U_C(t)](t)$;
- 14 Faça $\ln[U_C(\infty) - U_C(t)](t)$, obtendo a representação gráfica;
- 15 Represente $[U_C(\infty) - U_C(t)](t)$ e $[U_C(\infty) - U_C(t)]^2(t)$;
- 16 Obtenha $\int_0^\infty [U_C(\infty) - U_C(t)]dt$ e $\int_0^\infty [U_C(\infty) - U_C(t)]^2 dt$;
- 17 Compare a energia fornecida pela bateria no processo de carga (7), com a energia dissipada na resistência 8 e a armazenada no condensador (9);
- 18 Repita os passos 12-17 para $R = 20\Omega, 30\Omega, 40\Omega, 50\Omega$ e 60Ω .

II Condensador placas paralelas

- 1 Monte o circuito conforme a figura 2:

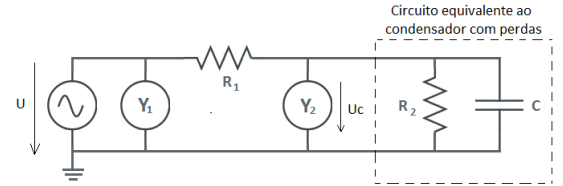


Figura 2: Circuito - parte II

- 2 Ligue o osciloscópio digital e o gerador;
- 3 Ajuste o gerador (modo sinusoidal) por forma a se obter um sinal de frequência $f = 200Hz$ e amplitude máxima de $U = 8V$;
- 4 Ajuste o valor de R_1 de modo a que a amplitude máxima de U_C seja cerca de 4V;
- 5 Registe o valor de R_1 ;
- 6 Guarde no ficheiro "dados.dat" as evoluções temporais das tensões U e U_C .
- 7 Recorrendo a "dados.dat", calcule U_{ef} , U_{Cef} e $< U \cdot U_C >$;
- 8 Repita os passos anteriores para $f = 500Hz, 1kHz, 2kHz, 5kHz, 10kHz, 20kHz, 50kHz, 100kHz, 200kHz$ e $500kHz$;
- 9 Determine para cada frequência R_2 , C e ϵ ;
- 10 Represente graficamente R_2 , C e a parte real e imaginária de ϵ como funções da frequência utilizando uma escala logarítmica para as frequências.

3 Análise de Resultados

3.1 Descarga e Carga

Analizando o circuito, aplicando as leis de Kirchhoff é possível determinar a resistência interna R_i do condensador, vindo:

$$U_C(t=0) = \epsilon \frac{R_i}{R + R_i} \quad (21)$$

Desta forma, variou-se a resistência R , mantendo-se a tensão imposta pela fonte $\epsilon = (8,30 \pm 0,01)V$, registando-se a tensão no instante inicial $U_C(t=0)$, obtendo-se:

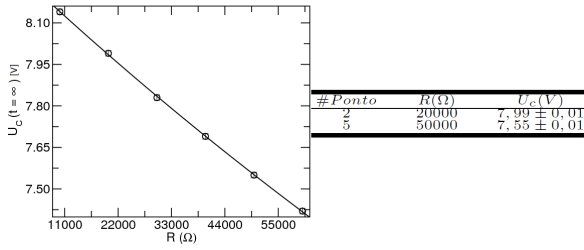


Gráfico 1: Ajuste $[U_c(t=0)](R)$ segundo (21) em que $\epsilon = (8,30 \pm 0,01)V$, obtendo-se $R_i = (5,03 \pm 0,09) \times 10^2 \Omega$.

I) Carga

A partir do resultado R_i , é possível calcular $R_{eq} = R||R_i = \frac{RR_i}{R+R_i}$. Tendo em conta a expressão (6), fazendo o seu logaritmo, obtém-se:

$$\ln(U_C(t)) = -\ln(U_0) - \frac{t}{RC} \quad (22)$$

Fazendo $-\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{RC}$, e como se recolheu o declive de (22) em função de R , pode fazer-se um ajuste linear, obtendo-se C .

R(kΩ)	$-\frac{1}{\tau}(s^{-1})$
10,0 ± 0,2	-0,101 ± 0,001
20,0 ± 0,2	-0,051 ± 0,001
30,0 ± 0,2	-0,036 ± 0,001
40,0 ± 0,2	-0,027 ± 0,001
50,0 ± 0,2	-0,022 ± 0,001
60,0 ± 0,2	-0,018 ± 0,001

Tabela 1: Valores de $-\tau$ (declive de $U_C(t)$) provenientes do sistema de aquisição.

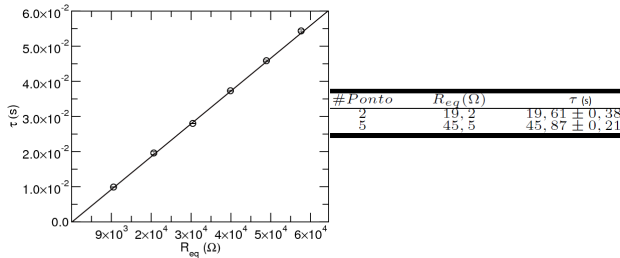


Gráfico 2: Ajuste τ , segundo $y = mx + b$, onde $m = (1,004 \pm 0,004) \times 10^{-6}$ e $b = 0,0001 \pm 0,0001$

Deste ajuste retira-se que o declive ($m = (1,004 \pm 0,004)\mu$) que corresponde a $C = (1,004 \pm 0,004)\mu F$, cujo intervalo de erro cobre o valor teórico ($C_{teor} = 1\mu F$).

Para se verificar a conservação de energia, tendo-se $U_C(t)^2$, aplicou-se (9), por forma a ter a energia no condensador. Para se obter a energia na resistência utilizou-se (8), sendo o integral de $U_0(t)^2$ obtido através do programa. Para a energia da fonte aplicou-se (7).

R(kΩ)	U_c(∞)[V]	∫ v(t)[V.ms]	∫ v(t)^2[V.ms]
10,0 ± 0,2	8,14 ± 0,01	80,6 ± 0,1	339 ± 1
20,0 ± 0,2	7,99 ± 0,01	151 ± 1	624 ± 1
30,0 ± 0,2	7,83 ± 0,01	218 ± 1	842 ± 1
40,0 ± 0,2	7,69 ± 0,01	281 ± 1	1072 ± 1
50,0 ± 0,2	7,55 ± 0,01	340 ± 1	1275 ± 1
60,0 ± 0,2	7,42 ± 0,01	390 ± 1	1458 ± 1

Tabela 2: Valores provenientes do sistema de aquisição, necessários ao cálculo das energias W_e , W_c e W_R .

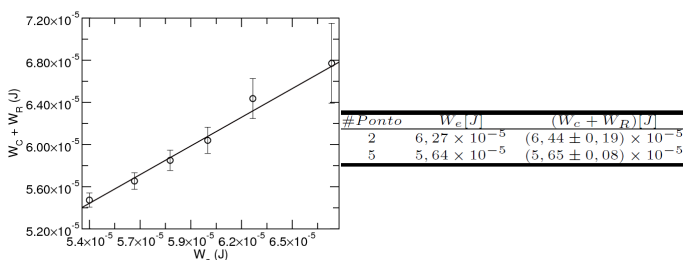


Gráfico 3: Ajuste $[W_c + W_R](W_e)$, segundo $y = mx + b$ em que $m = 1,008 \pm 0,007$ e $b = 0$

O declive encontra-se muito próximo do teórico ($m = 1$) que traduz a conservação da energia.

II) Descarga

Para a descarga, realizou-se um procedimento análogo, ao descrito anteriormente, tendo-se retirado o declive do ajuste da expressão 22, vindo:

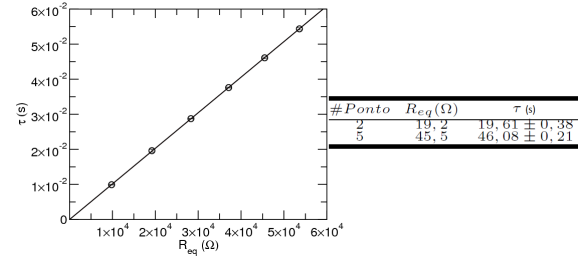


Gráfico 4: Ajuste $\frac{1}{\tau}(R_{eq})$, segundo $y = mx + b$, onde $m = (1,015 \pm 0,004) \times 10^{-6}$ e $b = (-0,150 \pm 1,00) \times 10^{-4}$

Daqui retira-se $C = m$, vindo $C = (1,015 \pm 0,004)\mu F$, que se encontra um pouco desviado do valor teórico. Novamente, utilizando o programa, calcula-se:

R(kΩ)	U_c(0)[V]	U_c(0)^2[V]	∫ U_c(t)^2[V.ms]
10,0 ± 0,2	8,13 ± 0,01	66,0969 ± 0,1626	338 ± 1
20,0 ± 0,2	7,97 ± 0,01	63,5209 ± 0,1594	620 ± 1
30,0 ± 0,2	7,68 ± 0,01	58,9824 ± 0,1536	842 ± 1
40,0 ± 0,2	7,57 ± 0,01	57,3049 ± 0,1514	1070 ± 1
50,0 ± 0,2	7,46 ± 0,01	55,6516 ± 0,1492	1275 ± 1
60,0 ± 0,2	7,21 ± 0,01	51,9841 ± 0,1442	1401 ± 1

Tabela 3: Valores provenientes do sistema de aquisição, necessários ao cálculo das energias W_c e W_R .

Utilizando (8) calcula-se a energia na resistência e 9 a energia no condensador, sendo esperado um declive de 1 para $W_C(W_R)$, vindo:

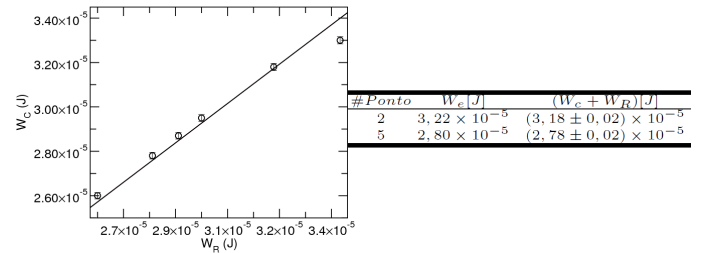


Gráfico 5: Ajuste $W_C(W_R)$ segundo $y = mx + b$, sendo $m = 0,985 \pm 0,002$ e $b = 0$.

3.2 Condensador placas paralelas

Para a segunda parte, tem-se um condensador de placas paralelas, sendo a sua área $S = (0,0525 \pm 0,001)m^2$ e a distância entre elas (espessura folha de acetato) é $d = 1 \times 10^{-4}$.

Utilizando o software que permite a geração de funções com uma dada frequência, ajustou-se R_1 de modo a que a tensão regulada no gerador tenha uma amplitude duas vezes superior à tensão nos terminais do condensador, retirando-se U_{1ef} , U_{2ef} e $< U_{1ef} \cdot U_{2ef} >$.

Através de 17 e 19, calculou-se a resistência e capacidade equivalentes do conjunto. Por análise do circuito, calculou-se a resistência R_c do condensador sabendo que $R_{eq} = (R_c||1M\Omega)$ e a capacidade C_C do condensador sabendo que $C_{eq} = C_C + 150pF$, vindo:

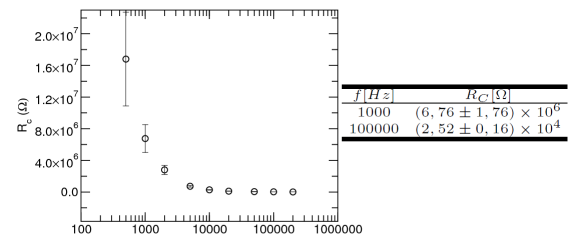


Gráfico 6: $R_c(f)$

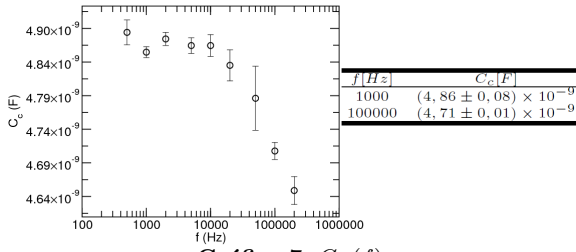


Gráfico 7: $C_C(f)$.

Para calcular a parte real e imaginária de ϵ , recorreu-se a 15 e 16.

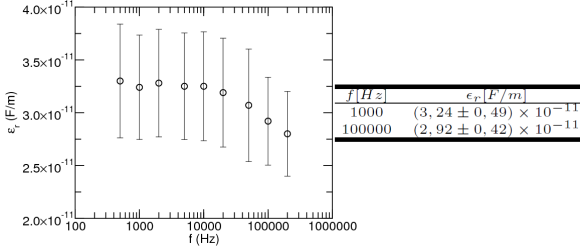


Gráfico 8: $\epsilon_r(f)$

Ajustando-se ϵ_r , obteve-se uma constante dielétrica relativa de 3,7.

Uma vez que este valor se encontra afastado do teórico ($\approx 2,5$), fez-se um novo ajuste admitindo que existia uma camada de ar, segundo:

$$C_C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d_{ar} \epsilon_r + d} \quad (23)$$

Daqui retirou-se $d_{ar} = (6,82 \pm 0,22) \times 10^{-5} m$.

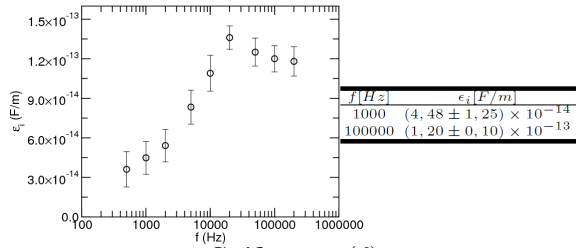


Gráfico 9: $\epsilon_i(f)$

Para o ângulo de perda, obteve-se:

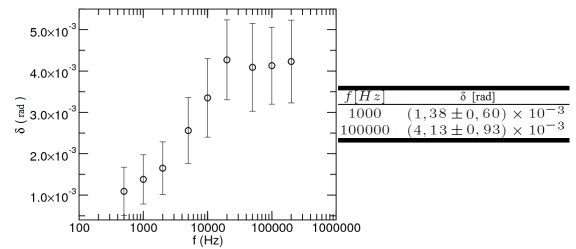


Gráfico 10: $\delta(f)$

4 Conclusão

Na primeira secção da experiência, analisou-se a carga e descarga de um condensador. É necessário referir que a resistência interna do condensador e da montagem não é, de forma alguma, desprezável e é necessário estimá-la e calcular a sua resistência equivalente de forma a obter resultados mais fidedignos. Visto que estas duas resistências (interna e a variável) se associam em paralelo, apenas caso se verificasse um valor extremamente mais elevado de resistência interna seria possível não a incluir nos cálculos (visto que na associação em paralelo de resistências a de menor valor é a dominante). Desta forma, foi-nos possível obter a variação da constante de tempo do condensador ($\tau = RC$) com a resistência -que nos permite obter um valor experimental para a capacidade do condensador- e ainda fazer

uma análise da conservação da energia. Quanto aos valores de capacidade obtidos, estes foram ($C = 1.015 \pm 0.004$) μF e ($C = 1.004 \pm 0.004$) μF , para a descarga e carga respectivamente. Atendendo a que o valor teórico para o condensador é $C = 1 \mu F$, os desvios à exactidão foram bastante diminutos (1.4% para a descarga e 0.4% para a carga), podendo afirmar que os resultados foram obtidos com grande exactidão. Contudo, apenas para a análise da descarga se verifica que o valor teórico está coberto pelo intervalo de erro, pelo que é possível que o erro tenha sido subestimado. Quanto à análise energética, é necessário analisar a carga e a descarga separadamente. Na análise referente à descarga, é necessário analisar a energia armazenada no condensador W_c e a energia dissipada por efeito de Joule na resistência W_r . Assim, sendo que após a descarga a energia armazenada no condensador é nula, e se deve verificar a conservação de energia, devia existir uma relação linear de declive 1 entre W_c e W_r por relação à resistência equivalente. O valor do declive encontrado afasta-se ligeiramente de 1, sendo $0.985 \pm .002$. Isto significa que se dissipou mais energia do que a que estava inicialmente armazenada durante o processo da descarga. Este desvio pode advir de um pequeno desvio entre o valor obtido para a resistência equivalente e o valor real de resistência sentido pelo circuito, ou por uma medição da carga inicial menor do que a devida. Por outro lado, analisando a carga, parte da energia será, na mesma, dissipada na resistência e, a restante (teoricamente em iguais proporções) será usada para carregar o condensador. Assim, é necessário contabilizar a energia retirada da fonte W_e . Assim, também devido à conservação de energia, $W_e = W_c + W_r$. Contudo, o declive afastou-se também ligeiramente do valor teórico de 1, obtendo-se 1.008 ± 0.007 .

Na segunda etapa da experiência, foi analisado um condensador de placas paralelas. A permitividade eléctrica relativa média obtida foi $\epsilon_r = 1.04$. Ora, sendo que o valor suposto para o material do dielétrico do condensador é 3.7, este valor é extremamente afastado do suposto. Contudo, nota-se que é bastante próximo do valor do ar pelo que pode existir uma camada de ar no condensador devido a um mau isolamento na sua fabricação. Assim, podemos assumir que existe uma associação em série da capacidade do acetato e da camada de ar. Desta forma, é possível estimar a espessura da camada de ar através da fórmula de associação em série de condensadores. Então, o valor obtido foi $d = (68 \pm 2) \mu m$, valor não desprezável quando comparado com o valor da espessura da folha de acetato, $100 \mu m$.

Podemos também verificar que a resistência de perdas decai com a frequência (na realidade, decai exponencialmente com esta). Contudo, atentando no primeiro e último valor nota-se que ambos estes são negativos. Isto deve-se ao facto de se ter atingido o limite de funcionamento da montagem, ou seja, os medições para frequências inferiores a 200 Hz ou superiores a 500 kHz. Contudo, é de notar que o decaimento desta resistência com a frequência leva a uma maior passagem de corrente pelo condensador e a um aumento da capacidade imaginária do condensador. Assim, visto que ϵ_i aumenta com a frequência e ϵ_r diminui, o ângulo de perda também sofrerá um aumento com a frequência, resultando numa maior dissipação de energia.

A análise de ϵ_r leva-nos a dizer que este decresce com a frequência. Contudo, o valor médio obtido para esta grandeza relativa foi de $\epsilon_r = 3.55 \pm 0.55$, o que é um valor próximo do valor esperado para o acetato. O alto valor de erro para esta grandeza vem do facto de se assumir constante com a frequência para se realizar a análise ao valor médio.

5 Referências

- FIGUEIRINHAS, João. "Protocolos dos trabalhos práticos de Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica", 2014 IST