

# Estudo do condensador: processos de carga e descarga num circuito RC e variação da constante dielétrica com a frequência

João Braz 69684, João Branco 69691, André Boné 69937, André Martins 70017

IST, MEFT, LCET, Prof. Dr. João Figueirinhas

## Resumo

Para um circuito RC em carga e descarga determinaram-se valores de capacidade do condensador, sendo o melhor,  $C = 1.011 \pm 0.002 \mu F$ , e estudou-se o balanço energético no circuito durante esses processos. Para um condensador desconhecido, determinou-se a capacidade,  $C = 4.9 \pm 0.2 nF$ , a parte real da permissividade elétrica do dielétrico,  $\epsilon_{re} = (9.25 \pm 0.07) \times 10^{-12} F/m$ , e constatou-se que a resistência interna,  $R_2$ , decresce, e a parte imaginária da permissividade elétrica do dielétrico,  $\epsilon_{im}$ , cresce com o aumento da frequência.

## 1 Introdução [1]

O foco de estudo nesta actividade será o de entender como actua um circuito quando lhe é adicionado um condensador. Um condensador é um elemento que armazena carga, e é fisicamente caracterizado pela sua capacidade  $C$  ( $C = \frac{Q}{V}$ ).

Numa 1ª parte, analisaremos um circuito RC, ou seja, um circuito com uma resistência e um condensador em série, com a respectiva fonte de alimentação. Podemos determinar a interdependência das tensões de cada componente pela KVL (*Kirchoff Voltage Law*). Em primeiro lugar, temos de indicar as tensões de cada:  $\epsilon$  será o valor da tensão da fonte,  $V_R = R \times i$  é a tensão na resistência e  $V_C$  é a tensão aos terminais do condensador. Ora, para colocar isto numa equação diferencial, necessitamos de escrever  $i$  de outra maneira. Neste caso, sendo que  $i = \frac{dQ}{dt}$  e que  $Q = C \times V$ , como a capacidade é constante ao longo do tempo, teremos que  $i = C \frac{dV_C}{dt}$ . Escrevendo agora a equação das tensões, teremos que  $\epsilon = V_C + RC \frac{dV_C}{dt}$ .

Para esta equação, teremos uma solução homogénea ( $V_C = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ ) e uma solução não homogénea no qual se elimina a fonte alternada ( $V_C = \epsilon$ ). Sabendo que se verifica a condição inicial  $V_C(t = 0s) = 0V$ , chegamos ao valor de  $A = -\epsilon$  e, por conseguinte, à solução final:  $V_C(t) = \epsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ . Esta equação permite-nos estudar o carregamento do condensador. É de notar que, no caso ideal, não se considera que o condensador tenha propriedades condutoras, assumimos que é um isolador perfeito. No entanto, na realidade qualquer condensador tem uma ligeira condutância, pelo que no circuito se poderá considerar uma resistência residual  $R_2$  associada ao mesmo.

Analogamente, poderemos estudar o descarregamento do condensador. Após carregarmos o condensador, se invertermos o interruptor, iniciaremos a descarga do mesmo. A equação que descreve a tensão do condensador ao longo da descarga em tudo é semelhante à da carga, pelo que, dependendo das condições iniciais,  $V_C(t) = V_{C0}e^{-\frac{t}{RC}}$ .

As quantidades energéticas envolvidas neste processo também são importantes. Neste sentido, é imperioso ter em consideração o teorema da Conservação da Energia, isto é, a quantidade de energia fornecida e dissipada são iguais. Ora, a energia fornecida é a energia proveniente do gerador de tensão. Tendo em conta que  $\delta E = P \delta t$  e que  $P = UI$ , lembrando que  $I = C \frac{dV_C}{dt} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ , teremos que o gerador fornece  $W_\epsilon = \int_0^\infty \epsilon I dt = \epsilon \int_0^\infty I dt = \frac{\epsilon^2}{R} \left[ \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}} \right]_0^\infty = \epsilon^2 C$ . Quanto à energia libertada, sabemos, por definição, que num condensador  $W_C = \frac{1}{2} CV^2$ , enquanto que na resistência, por efeito de Ohm, dissipa-se a quantidade

$$W_R = \int_0^\infty RI^2 dt = \int_0^\infty R \frac{\epsilon^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{\epsilon^2}{R} \left[ \frac{e^{-\frac{2t}{RC}}}{-\frac{2}{RC}} \right]_0^\infty = \frac{\epsilon^2 C}{2}.$$

Pelo Teorema da Conservação da Energia,  $W_\epsilon = W_R + W_C$ , fica de facto comprovado que  $W_C = \frac{1}{2} \epsilon^2 C$ .

A 2ª parte da experiência prende-se com o estudo do condensador plano e com a determinação da constante dielétrica de um material L.H.I. com frequência variável. Considerando 2 placas condutoras de dimensões  $l \times h$ , a uma distância  $d$  tal que  $d \ll l, h$ , sabendo que a d.d.p. será dada por  $\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon} d = \frac{Qd}{\epsilon S}$ , a capacidade será dada por  $C = \frac{Q}{V} = \frac{Qd}{\left(\frac{Qd}{\epsilon S}\right)} = \frac{\epsilon S}{d}$ . Será nesse sentido

que estudaremos a permissividade elétrica de um dado material, neste caso o acetato, sabendo que esta é directamente proporcional a  $\epsilon_0$  sendo a constante de proporcionalidade uma grandeza  $\epsilon_r$  denominada permissividade elétrica relativa ( $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ ). O circuito agora projectado apresenta complicações, na medida em que os componentes, não sendo ideais, apresentam resistências internas que podem alterar o valor a calcular. Para isso, recorre-se ao Teorema de Thévenin para simplificar o problema, atingindo-se o valor  $R_{TH} = R_1 \frac{U_{2ef}^2}{\langle u_{1u2} \rangle - U_{2ef}^2}$  e para a capacidade equiva-

lente do circuito tem-se  $C_{eq} = \frac{1}{\omega R_1} \sqrt{\frac{U_{1ef}^2}{U_{2ef}^2} - \left(1 + \frac{R_1}{R_{eq}}\right)^2}$ . Tendo em conta que  $C_{eq} = C + 120 \times 10^{-12} F$  e que  $R_{eq} = \frac{R_C}{R_C + 10^6} 10^6 \Omega$  conseguiremos obter os valores de  $R_C$  e de  $C$ . Admitindo que o condensador não é perfeito, considera-se que a capacidade total tem uma componente real e imaginária, sendo que  $C = C_{Real} = Re(C_{total})$  e que  $C_{im} = \frac{1}{R_C \omega}$ . A permeabilidade elétrica poderá, consequentemente, ser subdividida por uma componente real,  $\epsilon = \epsilon_R - i\epsilon_I$  ( $\epsilon_R = \frac{Cd}{S}$ ) e imaginária ( $\epsilon_{im} = \frac{d}{SR_2 \omega}$ ).

## 2 Experiência Realizada

Para a 1ª parte da experiência, utilizámos um software específico no que respeita à recolha dos dados associados à carga e descarga do condensador. Inicialmente, montando o circuito da forma apropriada (figura 1), utilizando um condensador de  $1 \mu F$ , uma resistência de  $10 k\Omega$  (repetindo-se o mesmo procedimento posteriormente para passos de  $10 k\Omega$ , até aos  $60 k\Omega$ ) e uma fonte de tensão ajustada aos  $5V$ , observar-se-á o decaimento da tensão na função "oscilloscope", sendo que no programa podemos linearizar a mesma por mudança para representação logarítmica. Após a obtenção do gráfico e do respectivo declive, procede-se ao estudo das trocas de energia envolvidas neste processo. Mudando a representação da tensão para uma forma quadrática, calcula-se o integral de  $0$  a  $+\infty$  e divide-se o mesmo por  $R$  (que constitui a energia dissipada na resistência). Esta energia será

comparada à energia inicial armazenada no condensador no processo de descarga.

### 3 Tratamento de Dados e Resultados

#### Descarga do condensador

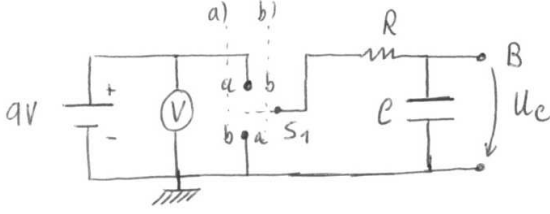


Figura 1: Esquema do circuito eléctrico

De seguida far-se-á o estudo inverso, isto é, da carga do condensador. Utilizam-se neste passo a mesma capacidade, tensão e valores de resistências adoptados anteriormente. Através da opção "oscilloscope", determina-se o valor final da tensão no condensador, para de seguida ser representado o logaritmo da tensão em função do tempo (sendo esperado que dê uma recta). Após a obtenção do gráfico da mesma, do respectivo declive e a comparação do mesmo com o obtido inicialmente aquando da descarga do condensador, serão novamente estudadas as trocas energéticas envolvidas. A diferença de tensões  $U_C(t = \infty) - U_C(t)$  é alterada para uma forma quadrática, de modo a determinar o valor dos integrais da mesma função em ordem ao tempo. O integral da potência fornecida pela bateria ( $\epsilon \times I$ ), em ordem ao tempo, será consequentemente comparado com as energias dissipada na resistência -  $\int_0^\infty R \times I^2 dt$  - e armazenada no condensador -  $\int_0^\infty \frac{CU^2}{2} dt$ .

Na 2ª parte, como já foi mencionado, pretende-se determinar a constante dieléctrica de um material L.H.I., bem como a sua variação com a frequência. A representação deste circuito é diferente (figura 2), na medida em que, para além de uma resistência  $R_1$  variável fornecida, as perdas do condensador serão auxiliariamente representadas por uma resistência  $R_2$ . O condensador de placas paralelas terá no seu interior um dieléctrico polimérico de espessura conhecida e estará ligado a um gerador que fornecerá uma tensão com um pico de 8V, para uma frequência inicial de 200 Hz (nesta secção usar-se-ão também frequências de 500Hz, 1kHz, 2kHz, 5kHz, 10kHz, 20kHz, 50kHz, 100kHz, 200kHz, 500kHz). Para estes sucessivos valores, regista-se o valor de  $R_1$  para quando a tensão do pico se torna metade da inicial. A representação da tensão em função do tempo obtida digitalmente no osciloscópio será registada num ficheiro, que será usado num programa de análise de dados para calcular os valores eficazes das tensões do canal Y1, Y2 e do produto das tensões dois 2 canais. Por fim, obtendo-se  $R_2$  e C para as várias frequências, representam-se estas grandezas graficamente como função da frequência, bem como do valor da permitividade eléctrica do meio  $\epsilon$  (como função complexa, tendo parte real e imaginária).

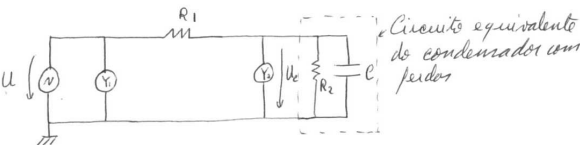


Figura 2: Esquema do circuito eléctrico

V/V	R/kΩ	$m_{descarga}$ ( $(\ln(U_c)/ms)$ )
4.97 ± 0.01	9.98 ± 0.01	-0.1030 ± 0.0001
4.89 ± 0.01	19.95 ± 0.01	-0.0520 ± 0.0001
4.89 ± 0.01	30.05 ± 0.01	-0.0353 ± 0.0001
4.72 ± 0.01	39.84 ± 0.01	-0.0269 ± 0.0001
4.61 ± 0.01	49.82 ± 0.01	-0.0219 ± 0.0001
4.54 ± 0.01	60.20 ± 0.01	-0.0186 ± 0.0001

$W_C/\mu J$	$W_R/\mu J$	$\frac{W_C}{W_R}$	E.R./%
12.35 ± 0.05	12.8 ± 0.7	0.96 ± 0.01	1
11.96 ± 0.05	12.732 ± 0.006	0.939 ± 0.004	0.5
11.96 ± 0.05	10.849 ± 0.004	1.102 ± 0.005	0.4
11.14 ± 0.05	9.990 ± 0.003	1.115 ± 0.005	0.4
10.63 ± 0.05	9.474 ± 0.002	1.122 ± 0.005	0.5
10.31 ± 0.05	8.937 ± 0.001	1.153 ± 0.005	0.5

Tabela 1: Tensão imposta,  $m_{descarga} = \text{declive da reta de ajuste a } \ln[U_C(t)]$ , energia dissipada no condensador e resistência para o respectivo valor de R. (E.R. é o erro relativo de  $\frac{W_C}{W_R}$ )

O erro do declive foi considerado como sendo a menor divisão do algoritmo apresentado pelo computador.

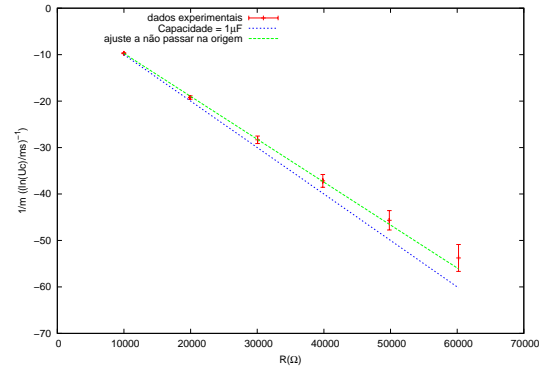


Figura 3: Ajuste a uma recta de  $1/m$  vs  $R$ . [2] [3]

Para verificar o valor da capacidade do condensador, utilizámos os dados obtidos no ajuste acima. Como o declive obtido se refere à representação gráfica de  $\ln[U_c(t = \infty) - U_c(t)] = -\frac{\ln(t)}{RC} + \ln(U_c(t = \infty))$ , este devia ser igual a  $-\frac{1}{RC}$

$y_0/mF\Omega$	$-C(\mu F)$	$declive/\mu F$	E.R./%	D.E./%
-0.5 ± 0.2	-1	-0.92 ± 0.02	2	8

Tabela 2: Resultados do Ajuste

#### Carga do condensador

R/kΩ	$U_{C\infty}/V$	$U_{C0}/V$	$m_{carga}$
9.98	4.99 ± 0.01	4.97 ± 0.01	-0.1010 ± 0.0001
19.95	4.90 ± 0.01	4.89 ± 0.01	-0.0510 ± 0.0001
30.05	4.80 ± 0.01	4.89 ± 0.01	-0.0351 ± 0.0001
39.84	4.71 ± 0.01	4.72 ± 0.01	-0.0269 ± 0.0001
49.82	4.63 ± 0.01	4.61 ± 0.01	-0.0216 ± 0.0001
60.20	4.54 ± 0.01	4.54 ± 0.01	-0.0188 ± 0.0001

$\frac{m_{descarga}}{m_{carga}}$	erro relativo %
$1.020 \pm 0.002$	$\approx 0.2$
$1.020 \pm 0.002$	$\approx 0.2$
$1.006 \pm 0.003$	$\approx 0.3$
$1.000 \pm 0.004$	$\approx 0.4$
$1.014 \pm 0.005$	$\approx 0.5$
$0.989 \pm 0.005$	$\approx 0.5$

Tabela 3: Tensão aos terminais do condensador ( $t = \infty$ ),  $m_{carga} = \text{declive da reta } \ln[U_C(\infty) - U_C(0)]$  e quociente de declives (carga e descarga) para a respectiva resistência R

Mais uma vez o erro do declive foi considerado como sendo a menor divisão do algarismo apresentado pelo computador.

$W_\varepsilon/\mu J$	$W_R/\mu J$	$W_C/\mu J$	$\frac{W_\varepsilon}{W_R+W_C}$	E.R./%
$24.8 \pm 0.6$	$12.5 \pm 0.1$	$12.5 \pm 0.7$	$1.0 \pm 0.1$	10
$23.4 \pm 0.3$	$11.73 \pm 0.05$	$12.0 \pm 0.7$	$0.99 \pm 0.04$	4
$21.4 \pm 0.2$	$10.52 \pm 0.03$	$11.5 \pm 0.7$	$0.97 \pm 0.04$	4
$20.3 \pm 0.2$	$10.04 \pm 0.03$	$11.1 \pm 0.6$	$0.96 \pm 0.04$	4
$19.4 \pm 0.1$	$9.60 \pm 0.02$	$10.7 \pm 0.6$	$0.96 \pm 0.04$	4
$17.8 \pm 0.1$	$9.00 \pm 0.02$	$10.3 \pm 0.6$	$0.92 \pm 0.04$	4

Tabela 4: Energia fornecida pela bateria, energia dissipada na resistência e no condensador, quociente entre energias fornecida e dissipada totais. (E.R. é o erro relativo de  $\frac{W_\varepsilon}{W_R+W_C}$ )

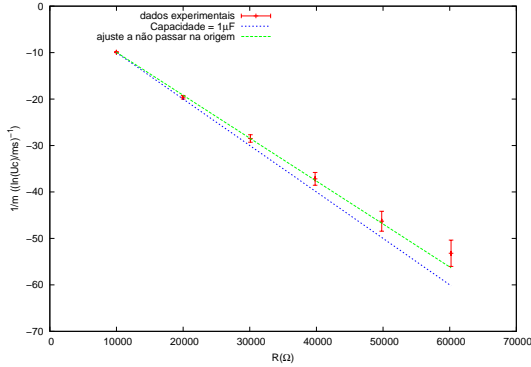


Figura 4: Ajuste a uma recta de  $1/m$  vs  $R$

$y_0/\text{mF}\Omega$	$-C(\mu F)$	$\text{declive}/\mu F$	E.R./%	D.E./%
$0.01 \pm 0.03$	-1	$-0.92 \pm 0.02$	2	8

Tabela 5: Resultados do Ajuste

### Modelos Corrigidos para a carga e descarga

Como foi mencionado, nem sempre se pode considerar um condensador como ideal, isto é, um isolador perfeito. Pode-se analisar o circuito de uma outra maneira de modo a estimar o valor da resistência interna do condensador  $R_C$  e os novos valores da capacidade. Através do teorema de Thèvenin, obtem-se:  $U_C(t = \infty) = \varepsilon/(1 + R/R_C)$ . Fazendo um ajuste dos pontos a essa função, determina-se  $R_C$ . De seguida, calculam-se as resistência equivalentes vistas do condensador e fazem-se as regressões lineares de  $(1/\text{declive})$  em função das mesmas, levando assim em conta a resistência parasita do condensador.

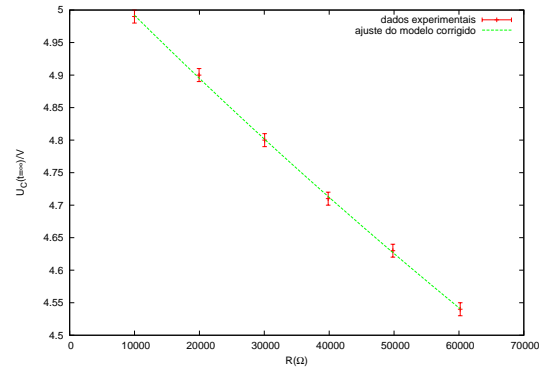


Figura 5: Ajuste à Resistência interna do Condensador

$\varepsilon/V$	$R_C/k\Omega$
5.09	$495 \pm 14$

Tabela 6: Resultados do Ajuste à Resistência interna do Condensador

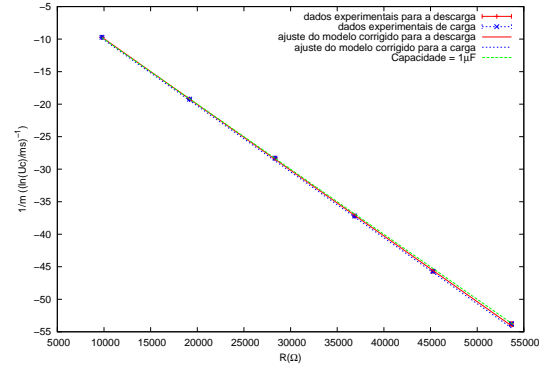


Figura 6: Ajuste ao modelo corrigido para a carga e descarga

$C_{carga}/\mu F$	$C_{descarga}/\mu F$	$y_{0descarga}/\text{mF}\Omega$	$y_{0carga}/\text{mF}\Omega$
$1.014 \pm 0.002$	$1.011 \pm 0.002$	$0.18 \pm 0.03$	$0.01 \pm 0.03$

Tabela 7: Resultados do Ajuste ao modelo corrigido para a descarga

Tanto para  $C_{carga}$  e  $C_{descarga}$ , obtemos um erro relativo de  $\approx 0.2\%$  e um desvio à exactidão de 1%.

### Constante dielétrica de um material L.H.I.

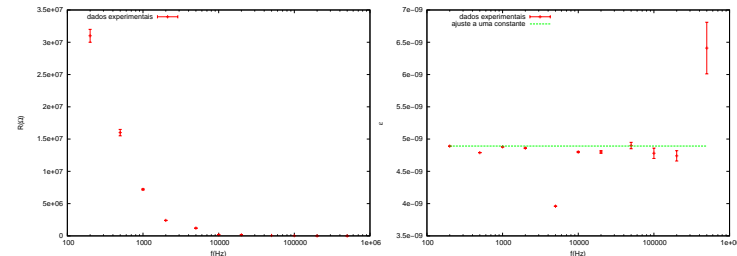


Figura 7: Representação gráfica de  $R_C$  vs  $f$  Figura 8: Representação gráfica de  $C$  vs  $f$

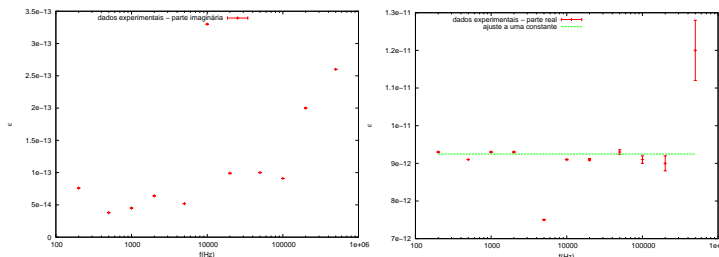


Figura 9: Representação gráfica de  $\epsilon_{im}$  vs  $f$  [4]

Figura 10: Representação gráfica de  $\epsilon_{re}$  vs  $f$

	$C/\text{nF}$	$\epsilon_{Re}/Fm^{-1}$
Valores	$4.9 \pm 0.2$	$(9.25 \pm 0.07) \times 10^{-12}$
Erro Relativo/%	4	0.8

Tabela 8: Resultados do Ajuste -  $y = a$  para as figuras 8 e 10

## 4 Análise de Resultados, críticas e conclusões [5]

Na **primeira parte da experiência**, durante o processo de **descarga**, verificou-se que a energia armazenada no condensador no início do processo,  $W_C$ , foi superior à energia dissipada na resistência,  $W_R$ , para as 4 maiores resistências utilizadas. Investigou-se se esta situação já não era esperada caso o condensador não descarregasse totalmente e nem a toda a energia que este armazenava fosse dissipada na resistência. Testou-se a hipótese para algumas medidas, entre as quais  $R = 39.84k\Omega$ ,  $V = 4.72V$ , com  $C = 1\mu F$ , que levaram a  $W_C(t = range = 110ms) \approx 10^{-29}$ , valor desprezável de energia que levou a rejeitar o proposto. Além do mais, considerou-se que existem resistências internas dos elementos do circuito, como a do condensador. Por outro lado, para as 2 menores resistências utilizadas calculou-se que  $W_R$  foi superior a  $W_C$ . Sabe-se por conservação da energia que este resultado é falso. Também se notou que as diferenças entre essas energias são muito inferiores neste caso, quando comparadas com o caso anterior. Este resultado pode ter tido origem numa medida de tensão inicial,  $U_C(0)$ , seja ligeiramente diferente da medida.

A regressão linear de  $1/m_{descarga}$  como função da resistência permitiu determinar a capacidade do condensador,  $C = (9.2 \pm 0.2) \times 10^{-7}F$ , com um erro relativo de  $\approx 2\%$  e um desvio à exatidão de  $\approx 8\%$ . O erro relativo não cobre o desvio à exatidão, em parte porque se considerou o condensador ideal quando na realidade o modelo correto para o comportamento do componente é um condensador ideal em paralelo com uma resistência, mas também porque há uma tolerância da capacidade do condensador utilizado, usualmente 5% do valor indicado pelo fabricante, que não foi tida em conta.

Durante o processo de **carga**, os declives,  $m_{carga}$ , foram praticamente iguais aos declives de descarga,  $m_{descarga}$  para os mesmos valores de  $R$ . Lembrando que esses declives são simétricos da constante de tempo do circuito,  $1/RC$ , verifica-se que a constante de tempo do circuito RC é característica deste e é a mesma para a carga e a descarga do condensador. Ainda se determinou a capacidade do condensador com valor, erro relativo

e portanto também desvio à exatidão igual à capacidade anteriormente determinada. A incoerência dos resultados deve-se à mesma razão, o modelo não considera a existência de uma resistência parasita. Relativamente ao balanço energético durante este processo, confirmou-se que a energia fornecida pela bateria durante o processo de carga,  $W_e$ , foi sempre inferior à soma das energias dissipada pela resistência,  $W_R$  e armazenada no condensador,  $W_C$ . Este resultado era esperado tendo em conta as perdas energéticas existentes devido às resistências internas dos componentes, nomeadamente, do condensador. Associado à determinação da razão  $W_e/(W_C + W_R)$  estão também as incertezas dos integrais numéricos, das resistências e de  $U_c(\text{inf})$ . O fato dos dois balanços energéticos evidenciarem perdas de energia do condensador mostra que é mais correto considerar o modelo do condensador não ideal.

Para transpor a inexactidão com que se encontrou os resultados, trataram-se os dados com base no **modelo corrigido** para o condensador. Identificou-se uma resistência interna e considerou-se o modelo não ideal, onde a essa resistência se encontra em paralelo com um condensador ideal. Das regressões lineares de  $(1/m_{carga\&descarga})$  como função da resistência equivalente, determinaram-se  $C_{carga} = 1.014 \pm 0.002\mu F$  e  $C_{descarga} = 1.011 \pm 0.002\mu F$ , ambos com erros relativos de  $\approx 0.2\%$  e desvios à exatidão de  $\approx 1\%$ . O erro relativo continua a não cobrir os desvios à exatidão, contudo neste caso a diferença é muito menor por comparação com o modelo do condensador ideal. A pequena distância entre as duas frações fica explicada por exemplo pela incerteza associada à capacidade tabelada pelo fabricante, ou pelo ajuste não considerar a incerteza da resistência equivalente. É manifesto que este modelo teórico corrigido adequa-se melhor às evidências experimentais, não só pelo reduzido desvio à exatidão, como também pela sobreposição da curva de ajuste à curva teórica e destas aos pontos experimentais.

Na **segunda parte da experiência**, determinou-se e representou-se a resistência parasita do condensador,  $R_2$ , em função da frequência, utilizando uma escala logarítmica. Ficou claro que  $R_2$  decresce com a frequência na gama considerada. Tratou-se da mesma forma a capacidade do condensador, o que permitiu concluir que  $C = 4.9 \pm 0.2nF$  nessa gama de frequências, com um erro relativo de 4%. O mesmo se concluiu sobre a parte real da permissividade elétrica,  $\epsilon_{re} = (9.25 \pm 0.07) \times 10^{-12}F/m$ , com um erro relativo de  $\approx 1\%$ . Já a parte imaginária,  $\epsilon_{im}$ , cresce com a frequência, comportamento que leva a concluir que as perdas energéticas aumentam quando aumenta a frequência.

## Referências

- [1] Notas das aulas teóricas de Laboratório de Complementos de Termodinâmica e Electromagnetismo do Prof. Dr. João Luís Maia Figueirinhas, 2012.
- [2] Fittea.
- [3] Gnuplot.
- [4] Philip Hofmann. Solid state physics: An introduction, outubro de 2008.
- [5] Permittivity - wikipedia, the free encyclopedia.