Trabalho Sobre a Lei de Indução de Faraday

João Braz 69684, João Branco 69691, André Boné 69937, André Martins 70017

IST, MEFT, LCET, Prof. Dr. João Figueirinhas

Resumo

Confirmou-se a lei de Faraday para uma bobina em rotação, com $\frac{\varepsilon}{f} = 0.0096 \pm 0.0005V - s^{-1}$. Calculou-se $L_{M0} = 1.021 \pm 0.002mH$ entre as bobinas maiores e a mais pequena. Estudou-se o modelo de um transformador e discutiu-se a desfasagem entre as tensões do mesmo. Calculou-se ainda a constante e acoplamento $k = 1.02 \pm 0.01$

1 Introdução [1]

Ao longo da história, procurou-se relacionar campos eléctricos e magnéticos. Michael Faraday determinou experimentalmente a Lei de Indução, dada por

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$
 , $\phi = \int_{S} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$ (1)

o que significa que a variação temporal do fluxo do campo de indução magnética ϕ provoca o aparecimento de uma diferença de potencial ε , também denominada força electromotriz induzida.

Em primeiro lugar estudaremos o fenómeno de indução sobre um enrolamento em rotação na presença de um campo constante e uniforme, fornecido por uma configuração de bobines de Helmholtz.

Para determinar o valor \vec{B} do campo de indução magnética causado por uma corrente num ponto do espaço recorremos à Lei de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \tag{2}$$

Em que i é a corrente que percorre o circuito, $d\vec{\ell}$ o elemento de circuito segundo o versor com a direcção e sentido da corrente, \vec{r} o vector que parte do elemento de circuito ao ponto onde se quer determinar o campo e r o seu módulo.

A configuração das bobines de Hemlholtz está dimensionada de modo a \vec{B} ser o mais homogéneo possível no seu centro, condição que é garantida para uma distância entre bobines igual ao seu raio. Tendo isto, o módulo da indução magnética resulta

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{\rho} \frac{8}{5\sqrt{5}} \tag{3}$$

em que i_1 é a corrente que percorre as bobines, N_1 o número de espiras (igual nas duas) e ρ o raio das bobines.

Se considerarmos um enrolamento de N_2 espiras e de secção S_2 centrado com o sistem das bobines de Helmholtz, em rotação com velocidade angular ω segundo um eixo perpendicular ao das bobines e suficientemente pequeno para podermos a garantir a homogeneidade de \vec{B} quando flui através deste, então o fluxo de indução magnética é (tomando $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$):

$$\phi = N_2 |\vec{B}| S_2 \cos(\omega t) = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{\rho} \frac{8}{5\sqrt{5}} i_1 \cos(\omega t)$$
 (4)

Pela Lei de Indução de Faraday, resulta:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2 \omega}{\rho} \frac{8}{5\sqrt{5}} i_1 \sin(\omega t) \tag{5}$$

O módulo da tensão máxima aos terminais do enrolamento fica determinado em função da frequência por:

$$|V_{2max}| = |\varepsilon_{max}| = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2 i_1}{\rho} \frac{16\pi}{5\sqrt{5}} f$$
 (6)

Por outro lado, a d.d.p. total aos terminais do enrolamento é dado por

$$V_2 = Ri_2 + \frac{d\phi}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{7}$$

Considerando R (resistência ohmica do fio do enrolamento) e L_2 (coeficiente de auto-indução do enrolamento) desprezáveis, podemos obter L_M , notando que ϕ é da forma $\phi = \phi_{max} \cos(\omega t) = L_M i_1 \cos(\omega t)$, tal como $V_2 = -\varepsilon = -\varepsilon_{max} \sin(\omega t) \Rightarrow V_{2max} = -\varepsilon_{max}$. Então

$$V_2 = \frac{d\phi}{dt} \Leftrightarrow V_{2max} = \omega L_M i_1 \tag{8}$$

Em segundo lugar, estudaremos o comportamento de um transformador não-ideal, na medida em que a relação entre as tensões no primário e no secundário não será linear e independente da frequência, tal como seria por $V_1/V_2=n_1/n_2$, com uma carga R no secundário. É necesário considerar a situação não-ideal a partir de uma certa gama de frequências, gama esta que depende das características do sistema. Como tal, as tensões V_1 e V_2 são dadas por

$$\begin{cases}
V_1 = r_1 i_1 + \frac{d\phi_1}{dt} &, \quad \phi_1 = L_1 i_1 + L_M i_2 \\
V_2 = r_2 i_2 + \frac{d\phi_2}{dt} &, \quad \phi_2 = L_M i_1 + L_2 i_2
\end{cases}$$
(9)

Admitindo que o transformador é bem desenhado, tal que as resistências ohmicas r_i dos fios dos enrolamentos 1 e 2 são desprezáveis face aos coeficientes de indução e à frequência do sinal, podemos escrever:

$$\begin{cases}
V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{di_2}{dt} \\
V_2 = L_M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}
\end{cases}$$
(10)

Para obter a evolução do módulo e da fase de V_2 em relação a V_1 com o avanço da frequência, sendo a fonte uma tensão sinusoidal simples, recorre-se às amplitudes complexas dos sinais. Apoiamo-nos também no facto de que, devido à carga R, $V_2 = -Ri_2$. A relação entre as amplitudes complexas $\overline{V_2}$ e $\overline{V_1}$ é assim dada por:

$$\frac{\overline{V_2}}{\overline{V_1}} = \frac{L_M}{L_1} \left(1 + j\omega L_2 \, \frac{1 - k^2}{R} \right)^{-1} \quad , \quad k^2 = \frac{L_M^2}{L_1 L_2} \tag{11}$$

O que resulta em evoluções do módulo e da fase (δ) em função de ω dadas por:

$$\left| \frac{V_{2max}}{V_{1max}} \right| = \frac{L_M}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega L_2 \frac{1 - k^2}{R}\right)^2}}$$
 (12)

$$\delta = -\arctan\left(\omega L_2 \frac{1 - k^2}{R}\right) \tag{13}$$

2 Experiência Realizada

Para a primeira parte da experiência, será verificada a Lei de Indução de Faraday. Para tal, utilizar-se-à um conjunto de bobinas de Helmholtz, que gerará um campo magnético estático e uniforme. Inserido no centro das mesmas estará uma bobine de dimensões reduzidas que, concretizando um movimento de rotação perpendicular ao campo, alterará o fluxo magnético do mesmo, gerando corrente induzida.

Numa primeira fase, será aplicada uma corrente de 800 mA nas bobinas de Helmholtz, sendo que será variada a velocidade da bobina menor, pelo que se registará, para cada velocidade, a tensão e frequência correspondente. Numa segunda fase, estudaremos a indução, desta vez mantendo constante a velocidade da bobina pequena e alterando, com passos de 150 mA, a corrente nas bobinas de Helmholtz (desde 300 mA até 1.5 A).

Para a segunda parte da experiência, será estudado um transformador, montando um circuito com uma fonte de tensão alternada, uma resistência, um enrolamento primário (de 600 espiras) e secundário (72 espiras).

Numa primeira fase, registar-se-ão as amplitudes máximas da tensão aplicada ao enrolamento primário do transformador V_1 e da tensão de saída do transformador V_2 que se encontra aplicada na resistência (R = 10Ω), pelo que se regula o gerador para produzir uma tensão de frequências de 50, 100, 500, 1000 e 2500 Hz, variando a amplitude da tensão máxima, de 1V até 9V (em passos de 1V). Será também observada a diferença de fase entre as 2 tensões, para uma tensão máxima de 9V. Numa segunda fase,mantendo a tensão máxima com amplitude de 9V, registar-se-ão as tensões aos terminais de V_1 e V_2 , por variação sucessiva da frequência da tensão do gerador (100Hz, 160Hz, 250Hz, 400Hz, 650Hz, 1kHz, 1.6kHz, 2.5Hz, 4kHz, 6kHz, 10kHz). A resistência R é retirada do enrolamento secundário, quando f=10kHz, altura em que se registará não só V_1 e V_2 , mas também a diferença de fase entre ambas as tensões.

Também relativamente à parte do transformador, utilizar-seá um medidor de inductâncias para determinar no laboratório os coeficientes de auto-indução, tanto do enrolamento primário como secundário.

3 Tratamento de Dados e Resultados

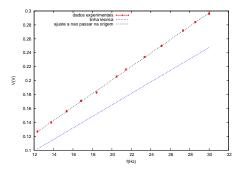


Figura 1: Ajuste a uma recta y=a+b*x da amplitude da força electromotriz vs frequência

Os resultados do ajuste foram:

b(Vs)	a(V)	$b_{teor}\left(Vs\right)$	
0.0096 ± 0.0005	0.008 ± 0.001	0.00825 ± 0.00003	

Tabela 1: Resultados do ajuste a uma recta

O valor b_{teor} é calculado a partir da equação 6. O resultado experimental apresenta uma erro relativo $\approx 5\%$ e um desvio à exactidão $\approx 16\%$.

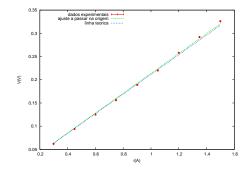


Figura 2: Ajuste a uma recta y = a + b * x da amplitude da tensão (V) vs amplitude da corrente (i)

$b(\Omega)$	a(V)
0.2138 ± 0.0003	0

Tabela 2: Resultados do ajuste a uma recta

A partir da expressão (8) tira-se o valor $L_{M0}=1.021\pm0.002mH$, que apresenta um erro relativo de $\approx0.2\%$ desvio à exactidão de 1.03% em relação ao valor teórico $L_{M,teor}=1.0105mH$.

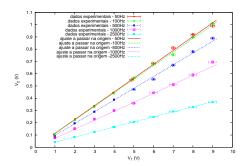


Figura 3: Ajuste a uma recta y = b * x da tensão aplicada (V_2) vs tensão gerada (V_1)

f(Hz)	declive b	erro relativo de b (%)
50 ± 1	0.1127 ± 0.0005	≈ 0.4
100 ± 1	0.1109 ± 0.0005	≈ 0.5
500 ± 1	0.0961 ± 0.0004	≈ 0.4
1000 ± 1	0.0733 ± 0.0003	≈ 0.4
2500 ± 1	0.0413 ± 0.0002	≈ 0.5

	f(Hz)	$\left \Delta\phi\right (rad)$	erro relativo do $ \Delta \phi $ (%)	$\frac{\frac{n_2}{n_1}}{declive}$
	50 ± 1	0 ± 0.01	∞	1.064 ± 0.005
ĺ	100 ± 1	0.11 ± 0.01	≈ 9	1.082 ± 0.005
	500 ± 1	0.41 ± 0.03	≈ 7	1.248 ± 0.005
	1000 ± 1	0.73 ± 0.03	≈ 4	1.637 ± 0.007
	2500 ± 1	1.10 ± 0.03	≈ 3	2.906 ± 0.014

Tabela 3: Resultados do ajuste a uma recta

Onde o erro da diferença de fases $(\Delta \phi)$ foi calculado a partir dos valores dos extremos do intervalo da posição dos cursores onde era aceitável estar o mínimo ou máximo de uma onda, $n_2 = 72$, $n_1 = 600$ e $\frac{n_2}{n_1} = 0.12$

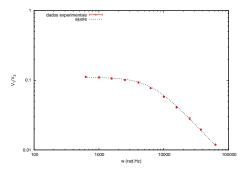


Figura 4: Ajuste à equação (12) do quociente v_{2_m}/v_{1_m} vs ω , representado na escala logarítmica.

L_m/L_{11}	$\left \frac{L_{22}}{R} \left(1 - k^2 \right) \right \left(s.rad^{-1} \right)$
0.1104 ± 0.0008	$(1.53 \pm 0.02) \times 10^{-4}$

Tabela 4: Resultados do ajuste à expressão (12

Em conjunto com o indutómetro, foram medidos e calculados os seguintes valores:

L_{11} (mH)	$L_{22} (\mathrm{mH})$	$L_M \text{ (mH)}$	k
887 ± 1	10.398 ± 0.001	97.9 ± 0.8	1.02 ± 0.01
$\approx 0.1\%$	$\approx 0.01\%$	$\approx 0.8\%$	$\approx 1\%$

Tabela 5: Tabela de resultados. Em cima os valores, em baixo os erros relativos

O erro do L_{11} e do L_{22} foram calculados como a menor divisão da escala do indutómetro.

Dos resultados anteriores tiramos $\left|\frac{L_{22}}{R}\left(1-k^2\right)\right|=(5\pm2)\times 10^{-5}s.rad^{-1}$

4 Análise de resultados, críticas e conclusões

Na **primeira parte** da experiência confirmou-se a Lei da Indução de Faraday para uma bobine em rotação emersa num campo magnético constante. A regressão linear da força eletromotriz, EMF, em função da frequência f adequa-se aos dados. No entanto, nota-se que o ajuste difere da previsão teórica. De facto, o declive da recta experimental $b=0.0096\pm0.0005$ Vs, apresenta um erro relativo de $\approx 5\%$ e um desvio à exactidão de $\approx 16\%$ quando comparado com o declive obt
do teoricamente $b_{teor} = 0.00825 \pm 0.00003$ Vs. O erro relativo não cobre o desvio à precisão. Por um lado, esta discrepância pode ter sido causada pelas vibrações da montagem (especificamente do enrolamento de teste, que vão incrementar a variação do fluxo e que podem introduzir alterações na configuração do sistema), já que os erros experimentais são desprezáveis relatiavemente a essa diferença, como se confirma pelo pequeno erro relativo. Por outro lado o campo magnético é só aproximadamente uniforme na região ocupada pela espira, contudo este facto dificilmente explica os resultados obtidos já que, quanto muito, esta situação justificaria valores inferiores ao esperado, e por sua vez a aproximação é muito boa.

O coeficiente de indução mútua, L_{M0} , calculado a partir da regressão linear da tensão da bobine pequena, V_1 , em função da

corrente que a atravessa, i, resultou em $L_{M0} = (1.021 \pm 0.002) \times 10^{-3} H$ que representa um erro relativo de $\approx 0.2\%$ e um desvio à exactidão de $\approx 1\%$. Apesar do erro relativo não cobrir o desvio à exactidão, os dois valores são muito próximos e é possível que os erros experimentais tenham sido subestimados, problema que explicaria também as discrepâncias entre os declives de V(f). Mais, considerando novamente a hipótese de terem havido alterações da geometria e posição da bobine, este resultado fica na prática justificado.

Notamos também que o ajuste da tensão aos terminais do enrolamento em função da frequência de rotação resulta numa ordenada na origem diferente de zero e que não podemos desprezar. Este resultado é justificado pela possível existência de fontes de campos de indução variáveis na vizinhança do enrolamento, que podem causar um fluxo variável através do enrolamento mesmo que este não esteja em rotação. Por outro lado, estes campos poderão ter contribuido positivamente para o fluxo total sem terem sido contabilizados teoricamente e portanto medimos um valor superior ao previsto, sendo mais uma justificação para a discrepância entre os declives teóricos e experimentais. Notamos que este factor não afecta tanto a determinação do coeficiente de indução mútua, visto que o ajuste é feito em função da intensidade imposta nas bobines de Helmholtz, portanto a contribuição dos campos exteriores será constante e não contribuirá para o declive obtido. Este comportamento era esperado, já que o coeficiente de indução mútua trata-se efectivamente de uma relação entre cada par de circuitos.

Na segunda parte da experiência estudaram-se alguns aspetos básicos do transformador. O declive das regressões lineares da tensão máxima aplicada à resistência, V_2 , em função da tensão máxima gerada pelo gerador, V_1 , diminui com o aumento da frequência. Assim, a razão $(n_2/n_1)/declive$ é muito próxima de 1 para as baixas frequências e cada vez maior para frequências mais elevadas. Isto acontece porque para frequências mais altas a aproximação do transformador ideal, $n2/n1 \approx V_2/V_1$, que não dissipa potência, i. e., $V_1i_1 = V_2i_i$, deixa de ser válida e, como se confirma pela relação exacta entre a tensão aplicada à resistência e a tensão gerada pelo gerador dada pela equação 12, a razão $|V_2/V_1|$ diminui quando aumenta a frequência.

Ainda se verificou o comportamento da desfasagem, $|\Delta\phi|$, das tensões V_1 e V_2 com o secundário em vazio e ligado a uma resistência de carga. Tendo em conta que o desfasamento é dado pela equação (13) entende-se que com o circuito aberto a resistência equivalente é infinita e a diferença de fase é nula. Com uma resistência, pôde constatar-se novamente que, não só a tensão é inferior, como a diferença de fase aumenta com a frequência, conforme esperado, e apesar de não se ter confirmado, torna-se evidente que para frequências muito elevadas $|\Delta\phi|=\pi/2$.

A física deste fenómeno pode ser explicada apoiando-nos na Lei de Indução de Faraday e por um dos seus corolários, a Lei de Lenz. Ao aplicar a tensão alternada ao primário surge um fluxo no transformador, devido à passagem de corrente alternada pelo enrolamento do primário. Este fluxo será também alternado e, admitindo que não há fugas das linha de campo e que as perdas no material são desprezáveis (o que podemos admitir num transformador bem construido, tal como explicitaremos mais adiante), o fluxo do campo de indução será igual ao longo do circuito magnético.

Para frequências baixas a variação das grandezas do sistema será pequena, portanto, pela Lei de Lenz, a corrente gerada no secundário, que será no sentido de contrariar essa mudança, será pequena, tal como o respectivo contra-fluxo, e poderemos considerá-lo desprezável. Nestas condições, apenas precisamos de considerar o fluxo proveniente do primário e podemos usar a relação linear entre as tensões, independente da frequência, tal como verificámos experimentalmente.

No entanto, com o aumento da frequência da tensão imposta no primário, a variação do fluxo torna-se mais acentuada e o contra-fluxo do secundário torna-se significativo. Por outro lado, a fonte de tensão mantém-se constante com o aumento da frequência, e é possivel provar que isto implica que o fluxo proveniente do primário irá diminuir. Portanto, com o aumento da frequência, tanto o fluxo no circuito magnético diminui como a amplitude da sua variação é atenuada. Isto significa que a tensão no secundário terá necessariamente de decair, tal como verificámos experimentalmente.

Quantitativamente, este efeito é descrito pela Lei de Faraday, visto que a corrente que gera o conra-fluxo resulta da f.e.m. induzida, e implica que, para o caso de sinais sinusoidais, o contra-fluxo estará desfasado de 90° do fluxo magnético. Então o fluxo resultante no secundário terá uma diferença de fase em relação ao fluxo gerado no secundário, e sabendo que o contra-fluxo aumenta com o aumento da frequência, esta diferença de fase evoluirá da mesma maneira, que foi precisamente o que determinámos experimentalmente.

Dadas as considerações feitas, tornam-se evidentes as observações efectuadas ao retirar a carga do secundário: o circuito fica aberto por isso, apesar de haver f.e.m., não há corrente e por isso não há contra-fluxo, independentemente da frequência imposta, deixando por isso de haver atenuação da amplitude da tensão no secundário e diferença de fase.

Alternativamente, podiamos determinar a resposta forçada da tensão do secundário à tensão imposta no primário, recorrendo à expressão da razão das amplitudes complexas dada pela equação 11 e fazer uma interpretação do resultado. Obtém-se

$$V_2(t) = \frac{L_M}{L_1} \frac{V_{10}}{1 + \left(\omega L_2 \frac{1 - k^2}{R}\right)^2} \left[\cos(\omega t) + \left(\omega L_2 \frac{1 - k^2}{R}\right) \sin(\omega t) \right]$$
(14)

Nesta função podemos identificar todas as características da evolução da tensão descritas acima: o decaimento da amplitude total com a frequência; dentro dos parêntesis rectos, um termo cuja amplitude não depende da frequência (componente da tensão causada pelo fluxo proveniente do primário) e um termo cuja amplitude aumenta com a frequência (componente da tensão causada pelo contra-fluxo proveniente do secundário), que causará o avanço da diferença de fase. Fazendo $R \to \infty$, o segundo termo desaparece e deixa de haver dependência da amplitude na frequência.

A diferença de potência dissipada no secundário entre as situações ideal e não-ideal encontra-se na energia magnetostática por unidade de tempo do campo responsável pelo contrafluxo. Notamos também que as principais formas de dissipação de energia no transformador dão-se através das correntes de eddy no material e da reorientação dos domínios pelo ciclo de histerese. Estas dissipações são minimizadas, respectivamente, construindo transformadores por empilhamento de várias lâminas do material, usando um material ferromagnético mole, i.e. que tenha uma curva de histerese pequena.

Por um lado, o ajuste do quociente entre as amplitudes máximas das tensões V_2 e V_1 , V_{2m}/V_{1m} , em função da frequência

utilizando uma escala logarítmica para ambos os eixos resultou em $L_M/L_{11} = 0.1104 \pm 0.0008$ e $|L22(1-k^2)/R| = (1.53 \pm 0.02) \times$ $10^{-4} s/rad$, ambos com um erro relativo de $\approx 1\%$ cada. Por outro lado, determinou-se diretamente $L_{11} = 0.887 \pm 0.001 H$ com um erro relativo de $\approx 0.1\%$ e $L_{22} = (1.0398 \pm 0.0001) \times 10^{-2} H$ com um erro relativo de $\approx 0.01\%$. Claramente que as incertezas experimentais foram subestimadas. Através destes resultados calcularam-se $L_M = (9.79 \pm 0.08) \times 10^{-2}$ com um erro relativo de $\approx 0.8\%$ e a constante de acoplamento do circuito, $k = 1.02 \pm 0.01$, com um erro relativo de $\approx 1\%$, erros esses excessivamente otimistas. O simples facto de k ter resultado superior a 1 e o erro não cobrir esse valor é prova da subestimação dos erros. Finalmente, destas estimativas foi calculado outro valor para $|L_{22}(1-k^2)/R| = (5 \pm 2) \times 10^{-5} s/rad$, com um erro relativo = 40%. Esta incerteza relativa explica-se simplesmente pelo erro associado à constante de acoplamento que figurou no termo $(1-k^2)$.

Não se conhece a exatidão de nenhum destes resultados, contudo notou-se que à uma discrepância entre os valores ajustado e calculado de $|L_{22}(1-k^2)/R|$. Crê-se que o parâmetro de ajuste é mais significativo que o calculado, por um lado porque não se caiu no erro de substimar abusivamente as incertezas experimentais, por outro porque notámos que o indutómetro não consegue estabilizar o valor lido (inerente ao instrumento), indo este diminuindo durante o tempo que for feita a leitura. Desconhecendo este facto, esperámos que os valor lido estabilizasse, tendo registado a medida só depois de o docente avisar o grupo de que o valor não iria estabilizar. Portanto as indutâncias registadas são menores do que a realidade, o que pode ter acabado por se reflectir nestes resultados na medida em que, de facto, menores valores de L_1 e L_2 conduzem a maiores valores do parâmetro em cauxo

No geral, os resultados permitiram confirmar as previsões teóricas, apesar das aproximações feitas nomeadamente, a resistência interna das bobines de Helmholtz ser nula e a sua espessura desprezável. Ainda as características da montagem, a posição, alinhamento, alterações à geometria e vibração do elementos da mesma são fontes de erro com um contributo que não pode ser ignorado. Assinala-se ainda que alguns erros foram subavaliados, em particular os da determinação direta de L_{11} e L_{22} , tendo contribuido para resultados excessivamente otimistas e com desvios elevados a valores com maior significado.

Concluindo, verificou-se a lei da indução de Faraday, determinou-se o fator de geometria do circuito e o coeficiente de indução mútua entre as bobines de Helmholtz e a pequena bobine, estudou-se a trasformador, concretamente a validade da aproximação $n_2/n_1 \approx V_2/V_1$, que se verificou para baixas frequências apenas, analisou-se a evolução da diferença de fase entre as tensões do secundário e do primário e o modelo para o transformador em regime linear, também confirmado. Por último determinou-se a constante de acoplamento magnético do transformador, cuja coerência coma realidade foi posta em causa por comparações feitas entre resultados ajustados e calculados.

Referências

[1] A. Martins. Notas das aulas teóricas de Laboratório de Complementos de Termodinâmica e Electromagnetismo do Prof. Dr. João Luís Maia Figueirinhas, 2012.