

Condutividade Térmica de um Metal

Laboratório de Complementos de Eletromagnetismo e Termodinâmica

MEFT 2013/2014

Débora Barreiros, 75693 — Pedro Cal, 75699 — Tiago Costa, 75970 — Nuno Rosa, 76018

Instituto Superior Técnico — Turma de sexta-feira — Grupo I

28 de Maio de 2014

Resumo

O objetivo deste trabalho experimental foi a análise da condutividade térmica do alumínio. Para tal recorreu-se ao valor do gradiente de temperatura na mesma determinado a partir de um ajuste que relacionava a temperatura ao longo da barra com as posições. O valor obtido foi de -285.8 K m^{-1} para 20 V e -183.0 K m^{-1} para 15 V. Determinou-se a condutividade térmica do alumínio, cujo valor foi $289 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ para 20 V com um desvio à exatidão de 22,1 % e de $299 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ para 15V com um desvio à exatidão de 26,3 %.

Estudou-se ainda a potência perdida ao longo do processo, e o valor obtido foi de 6,89 W para 20 V e 5,34 W para 15 V. Avaliaram-se ainda as resistências térmicas sendo que para 20 V obtiveram-se $0,32 \text{ KW}^{-1}$ para a da base, $0,46 \text{ KW}^{-1}$ para a do topo e $0,84 \text{ KW}^{-1}$ ao longo da barra. Já para 15 V os resultados foram $0,38 \text{ KW}^{-1}$ para a da base, $0,49 \text{ KW}^{-1}$ para a do topo e $0,81 \text{ KW}^{-1}$ ao longo da barra. Por fim estudou-se o regime estacionário recorrendo a dois métodos de determinar a condutividade, um pela análise da equação do calor e outro por análise de Fourier. No primeiro o valor obtido foi de $318 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ com um desvio à exatidão de 34,1 %. No segundo método o valor cifra-se nos $81 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ com um desvio à exatidão de 65,8 %.

1. INTRODUÇÃO TEÓRICA

Neste trabalho é pretendida a determinação da condutividade térmica de um metal [2]. O metal a ser testado nesta atividade será o Alumínio.

O calor (Q) é uma forma de transferência de energia entre dois sistemas que se dá essencialmente devido à diferença de temperatura entre eles. Esta troca de energia dá-se do sistema com maior temperatura para o sistema com menor temperatura até os dois sistemas se encontrarem em equilíbrio térmico.

Considere-se que o sistema é uma massa sólida. Num processo em que ocorre transferência de calor através de uma dada superfície S , a potência fornecida é dada pela quantidade de calor por unidade de tempo que atravessa essa superfície S , isto é, $P = \frac{dQ_S}{dt}$. No caso em que a temperatura se distribui uniformemente pelo corpo, esta grandeza é dada por $P = mc \frac{dT}{dt}$, em que m é a massa do corpo, c a sua condutividade térmica e T a temperatura. No caso em que a temperatura não se distribui de forma uniforme pelo corpo, a grandeza é dada por $P = - \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV$.

Para resolver o integral e chegar a uma descrição da variação de temperatura no tempo e no espaço terá que se introduzir a **Lei de Fourier**. Esta lei é descrita pela equação $\vec{J}_Q = k \nabla T$, onde k é o coeficiente de condutividade térmica dado por $[J s^{-1} m^{-1} K^{-1}]$, ∇T é o gradiente de temperatura, e \vec{J}_Q é a densidade de fluxo de calor, isto é, a quantidade de calor que na unidade de tempo atravessa a unidade de área de um material.

Usando, então o integral e aplicando o teorema da divergência na equação da Lei de Fourier temos que resulta a *Equação de Calor*, em que $\chi = \frac{k}{\rho c}$ é a difusividade e $\nabla^2 T$ o Laplaciano da temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \nabla^2 T \quad (1.1)$$

Analise-se primeiramente o regime estacionário da equação de calor (um caso particular). Considera-se que a temperatura apenas depende da posição em que se encontra na barra e não depende do tempo, ou seja, $T(\vec{r}, t) \equiv T(\vec{r})$. E considerando-se apenas uma variação unidimensional, utiliza-se apenas uma coordenada, isto é, $T(\vec{r}) \equiv T(x)$.

$$\nabla^2 T = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dT}{dx} = c_1 \Leftrightarrow T = c_1 x + c_2 \quad (1.2)$$

Pelo que a variação da temperatura ao longo da barra é

linear para um regime estacionário. No caso de uma barra de secção S isolada lateralmente tem-se que a potência que flui na barra:

$$P_S = S |\vec{J}_Q| \Leftrightarrow k = \frac{P_S}{S \left| \frac{dT}{dx} \right|} \quad (1.3)$$

Analise-se agora o regime variável, tem-se mais uma vez que se trata de uma variação unidimensional, mas, já a contar com o tempo, isto é, $T(\vec{r}, t) \equiv T(x, t)$. Para resolver a Equação do Calor (eq. 1.1) é necessário a definição de condições fronteira e condições iniciais. tratando-se de uma barra de comprimento l , $x \in [0, l]$.

$$\left. \begin{aligned} T(0, t) &= T_2, \\ \left| \vec{J}_Q \right| &= -k \frac{\partial}{\partial x} T(l, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Condições Fronteira} \quad (1.4)$$

$$T(x, 0) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{l} x \quad \text{Condição Inicial} \quad (1.5)$$

Com estas condições obtém-se a equação que descreve $T(x, t)$.

$$T(x, t) = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{8}{\pi^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\chi \left(\frac{\pi + n\pi}{2} \right)^2 t} \times \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \left(\frac{x}{2} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right) \quad (1.6)$$

2. MONTAGEM DA EXPERIÊNCIA

Esta experiência envolve duas partes, estudo em regime estacionário e em regime variável. Porém, apesar de se tratarem de métodos diferentes, as montagens são as mesmas para cada parte, tirando algumas nuances.

A montagem [1] consiste numa barra metálica de alumínio isolada lateralmente. Esta barra tem 4 cm^2 de secção e 12 cm de comprimento. Num dos extremos desta barra encontra-se um sistema de aquecimento elétrico (resistência) e no extremo oposto encontra-se um sistema de circulação de água. A temperatura ao longo da barra é lida por sensores. Um programa presente num computador do laboratório, converte estas medições em temperatura.

2.1. Regime Estacionário

No regime estacionário não se consideram as variações de temperatura temporais. Nesta parte aplica-se uma tensão no sistema de aquecimento, e, enquanto o programa de computador recolhe os dados de temperatura para diferentes comprimentos de barra, procede-se à medição do caudal de água (fluido de arrefecimento) de 30 em 30 minutos, até a temperatura se estabilizar para cada comprimento de barra x . Este foi o procedimento para duas tensões distintas, 15 V e 20 V.

Para determinar a potência da fonte quente, isto é, no extremo da barra onde se encontra o sistema de aquecimento, uma vez que se trata de uma resistência elétrica, usa-se a fórmula da potência elétrica em que $P = UI$, sendo que U é a tensão aos terminais da resistência e I a intensidade de corrente que nela passa, medida no amperímetro.

O programa de computador vai fazer a média entre 100 medições consecutivas de cada vez para cada x da barra e fará um gráfico com esses pontos médios consecutivos. Considerou-se que a temperatura estabilizou quanto o gráfico obtido no programa para cada x foi linear e praticamente horizontal.

A montagem, tal como a indicação dos pontos onde as temperaturas foram medidas encontra-se no diagrama de blocos da figura 1.

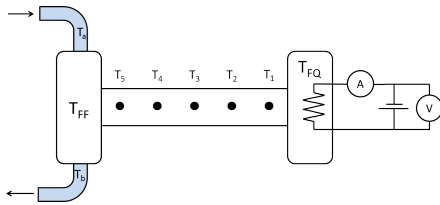


Figura 1. Diagrama de blocos da montagem para o estudo de regime estacionário

Foi depois efetuado o gráfico do gradiente de temperatura ao longo da barra (∇T), a determinação de k da barra de alumínio, a determinação da potência perdida para o exterior do sistema, a determinação da resistência térmica nas junções entre os extremos da barra e os sistemas de aquecimento e arrefecimento.

Esta resistência térmica foi calculada segundo a equação 2.1, onde 1 e 2 indicam duas superfícies diferentes e P_S é a potência que flui entre esses dois pontos.

$$R_{termica,1,2} = \frac{T_1 - T_2}{P_S} \quad (2.1)$$

2.2. Regime Variável

No caso de regime variável, foram feitas duas alterações em relação ao regime estacionário.

Primeiramente, já não existe um sistema de aquecimento, pois este foi isolado e a barra ficou apenas em contacto com o sistema de arrefecimento. O diagrama de blocos da figura 2 ilustra a alteração na montagem e os pontos onde as temperaturas são registadas.

Como esta parte se realizou posteriormente ao estudo em regime estacionário, a barra já possuía um gradiente de temperatura.

A segunda alteração foi na leitura dos resultados. O programa de computador continuou a recolher as medições, mas fez apenas a média entre 10 valores consecutivos de cada vez e introduziu este ponto médio num gráfico a tempo real. Desta

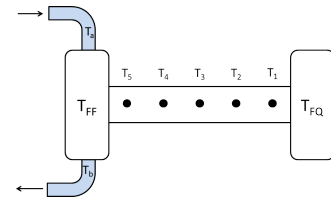


Figura 2. Diagrama de blocos da montagem para estudo em regime variável

vez, interessaram todos os valores que o computador recolheu, desde o início da desativação da fonte quente.

Foi então possível, ajustar a variação de temperatura no tempo e no espaço à equação teórica 1.6, de onde se retirará a grandeza k .

3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

3.1. Regime Estacionário

1. Determinação do gradiente de temperatura médio da barra

Na primeira parte da experiência determinou-se o gradiente de temperatura numa barra de alumínio. Esta determinação foi efetuada para duas tensões provenientes do gerador nomeadamente 19,90 V e 15,87 V. Procedeu-se do mesmo modo em ambos os casos, isto é recolheram-se os valores das temperaturas em diferentes pontos da barra e quando estes se encontravam estáveis foi então possível efetuar os ajustes que podem ser observados na figura 3.

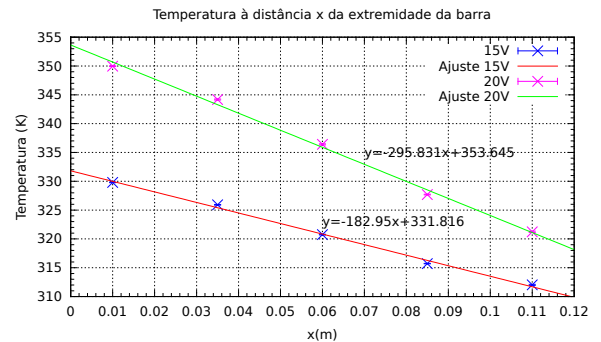


Figura 3. Relação entre a temperatura e distância na barra de alumínio para 20 V

As duas retas de ajuste ilustram a relação entre os pontos encontrados sendo o declive para 20 V dado por $(-29 \pm 1) \times 10 \text{ Km}^{-1}$ enquanto que para 15 V é de $(-183 \pm 6) \text{ Km}^{-1}$. Para 20 V a ordenada na origem é de $353.6 \pm 0.8 \text{ K}$ e para 15V foi de $331.8 \pm 0.4 \text{ K}$.

Em ambos os casos foram ainda retirados valores de intensidade de corrente e de tensão essenciais para as partes seguintes do procedimento experimental. Todos os valores assim como os erros podem ser observados na tabela I.

$U_{\text{fonte}} \text{ (V)}$	$U_{\text{medida}} \text{ (V)}$	$I_{\text{medida}} \text{ (A)}$
20	$19,90 \pm 0,01$	$1,72 \pm 0,01$
15	$15,87 \pm 0,01$	$1,38 \pm 0,01$

Tabela I. Valores de tensão e corrente registados no regime estacionário

2. Determinação da condutividade térmica do alumínio

A partir dos dados retirados anteriormente, nomeadamente os dois declives encontrados bem como os valores de tensão e intensidade de corrente medidos, podemos determinar o valor da potência fornecida ao circuito P_Q e deste modo obter a condutividade térmica através da expressão 1.3.

Assim os valores obtidos para a potência P_Q e para a condutividade térmica do alumínio podem ser observados na tabela II.

U_{fonte} (V)	$K_{\text{Alumínio}}$ ($\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$)	Potência (W)
20	$(2.9 \pm 0.1) \times 10^2$	$34,2 \pm 0,2$
15	$(3.0 \pm 0.2) \times 10^2$	$21,9 \pm 0,2$

Tabela II. Valor da condutividade do alumínio e da potência fornecida

3. Determinação do calor perdido

Ao longo da experiência foram sendo registados os valores do caudal do fluido, por forma a garantir que a experiência decorria sempre em situações idênticas, bem como permitir o cálculo da potência da fonte fria e deste modo calcular o calor perdido. Assim tomando os valores do caudal determinados e as temperaturas registadas nos pontos anteriores, podemos determinar a potência da fonte fria e deste modo o calor de perdas. Assim os resultados obtidos encontram-se na tabela III.

U_{fonte} (V)	Caudal (m^3s^{-1})	P_{FF} (W)	P_{Perdas} (W)
20	$(9,8 \pm 0,9) \times 10^{-4}$	27 ± 4	7 ± 4
15	$(1,0 \pm 0,1) \times 10^{-3}$	17 ± 2	5 ± 2

Tabela III. Determinação da potência de perdas no regime estacionário

4. Determinação das resistências térmicas da barra de alumínio

Na última parte da análise da condutividade térmica do alumínio em regime estacionário pretende-se analisar os valores das resistências térmicas da barra de alumínio em contato com as fontes quentes e frias, bem como a resistência térmica ao longo da barra. Uma vez que a potência da fonte fria carecia de precisão recorreu-se em ambos os casos à potência da fonte quente de tal modo que os resultados obtidos podem ser observados na tabela IV.

U_{fonte} (V)	R_{topo} (KW^{-1})	R_{base} (KW^{-1})	R_{barra} (KW^{-1})
20	$0,46 \pm 0,05$	$0,32 \pm 0,01$	$0,84 \pm 0,02$
15	$0,49 \pm 0,04$	$0,38 \pm 0,01$	$0,81 \pm 0,01$

Tabela IV. Resistências térmicas na barra de alumínio

3.2. Regime Variável

Nesta segunda parte do trabalho laboratorial pretendemos igualmente analisar a condutividade da barra de alumínio porém considerando uma nova geometria do sistema: neste caso a barra já não se encontra em contacto com a fonte quente.

Irão ser estudados dois métodos de aproximar o valor da condutividade do alumínio, tomando num caso a equação do calor e no outro utilizando análise de Fourier. De facto, utilizando um programa bastante semelhante ao utilizado na primeira parte registamos os valores das temperaturas em intervalos mais pequenos sendo que estes ficam registados num ficheiro, o que possibilitou a obtenção do ajuste que se encontra na figura 4.

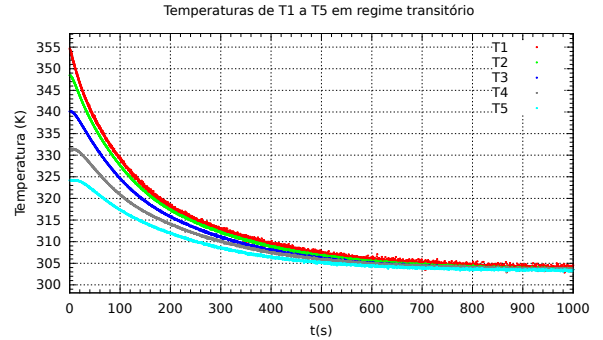


Figura 4. Temperatura ao longo do tempo para vários pontos da barra

Seleccionando o ponto de maior declive da curva de ajuste central foi possível obter um novo ajuste desta feita tendo em conta a análise de Fourier que pode ser analisado na figura 5.

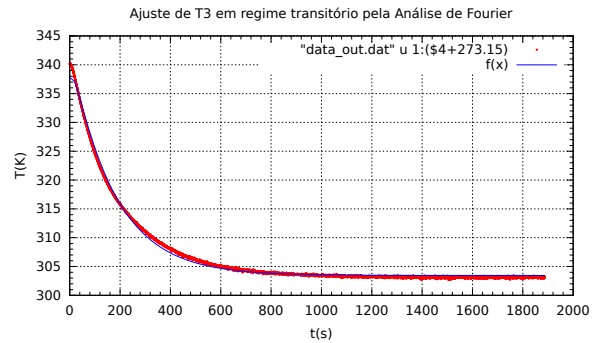


Figura 5. Estudo do regime variável através de Análise de Fourier

A partir deste ajuste foi possível retirar o valor de $\chi = (3,375 \pm 0,005) \times 10^{-8}$, o que levou a um valor de condutividade para o alumínio de $81,01 \pm 0,01 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$.

No regime variável foi ainda estudada a resolução pela equação do calor, no qual era necessário analisar a variação da temperatura com a posição, bem como a variação da temperatura com o tempo, que podem ser observados nas figuras 6 e 7 respetivamente.

A partir dos ajustes foi possível retirar o valor do termo quadrático da primeira $a = (-5 \pm 2) \times 10^2 \text{ Km}^{-2}$ e o declive da segunda $m = (-0,124 \pm 0,003) \text{ Ks}^{-1}$ que possibilitaram a determinação do valor da condutividade do alumínio, $k = (3,2 \pm 0,9) \times 10^2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Foi ainda obtido uma representação, a três dimensões, da curva teórica, prevista para o alumínio da equação 1.6. Este gráfico pode ser observado na figura 8.

Como se pode observar na figura, a curva teórica corresponde aproximadamente às curvas correspondentes à variação da temperatura nos diferentes pontos da barra o que leva a crer uma boa aproximação dos resultados experimentais.

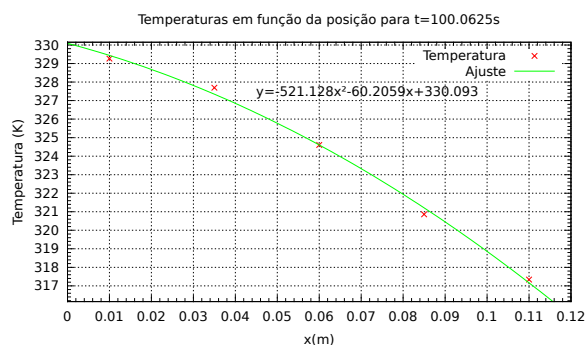


Figura 6. Variação da temperatura com a posição

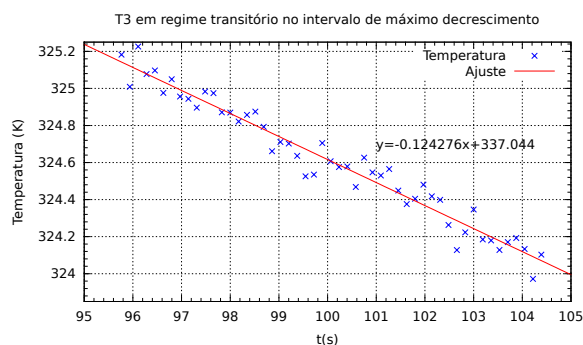


Figura 7. Variação da temperatura com o tempo

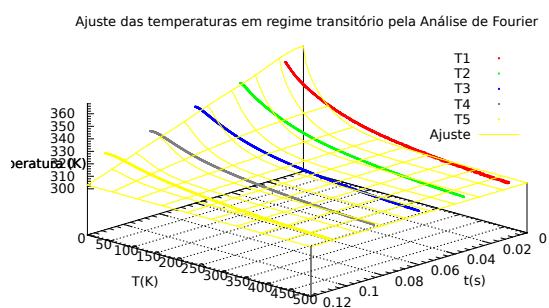


Figura 8. Variação da temperatura com o tempo e com a posição

4. ANÁLISE, CRÍTICAS E CONCLUSÃO

Os resultados obtidos apesar de não corresponderem na totalidade aos valores teóricos na sua maioria são uma boa aproximação dos mesmos. De facto, ao longo da experiência utilizaram-se diferentes métodos por forma a determinar a condutividade térmica de um metal, neste caso do alumínio. Assim na primeira parte, em regime estacionário, o valor obtido foi de $(2.9 \pm 0.1) \times 10^2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ para 20 V enquanto para 15 V o valor foi de $(3.0 \pm 0.2) \times 10^2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Como podemos verificar os valores encontram-se um pouco afastados do valor tabelado para o alumínio que é de $237 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ a 27°C . De facto para 20 V temos um desvio à exatidão de 22,1 % e um desvio à precisão de 4,3 %, enquanto para 15 V o valor do desvio à exatidão se cifra nos 26,3 % e do desvio à precisão é 4,1 %.

O declive do gráfico da figura 3 é maior para uma temperatura da fonte quente mais alta (20V), uma vez que a diferença de temperatura entre a base e o topo é maior, o que provoca uma maior variação da temperatura ao longo da barra. A ordenada na origem, ou seja, para a posição da fonte quente é também maior para essa tensão de 20V, verificando-se ainda assim um pouco abaixo do valor real, devido à quebra de temperatura provocada pela resistência térmica entre a fonte quente e a barra. Efetivamente os valores reais não se encontram cobertos pelo erro, ou seja o valor experimental encontra-se bastante afastado do valor teórico. No entanto uma vez que as temperaturas foram medidas através de um software que transforma a tensão em temperaturas e uma vez que a determinação do gradiente é efetuada a partir de um ajuste das mesmas em função da distâncias, somos levados a crer que a possibilidade de erro humano é diminuta. Porém existem diversas outras fontes de erro a considerar nomeadamente a existência de perdas de potência determinadas pelo grupo (a potência medida na fonte fria foi menor que a medida na fonte quente), bem como a possibilidade da barra não ser homogênea e ter originado esta disparidade. Por outro lado o próprio modelo utilizado não traduz fielmente o comportamento da temperatura ao longo da barra. Por fim podemos ainda salientar o facto de termos tomado como base para a realização da experiência que o valor da condutividade permanecia constante ao longo da experiência o que não se verifica. Durante o regime estacionário foram ainda determinadas as resistências térmicas ao longo da barra, cujos valores se encontram na tabela IV e como podemos verificar a flutuação não foi muito elevada como seria de esperar sendo a resistência da barra superior às restantes corroborando as expectativas teóricas.

Por fim, foi analisado o regime transitório, no qual se utilizaram mais dois métodos de determinação da condutividade térmica do alumínio, um no qual se recorria à análise de Fourier e um outro no qual era estudada a equação de calor. Em ambos os casos pretendia-se calcular o valor de χ essencial no cálculo da densidade. Assim para o primeiro método o valor obtido foi de $81,01 \pm 0,01 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ o que revela um desvio à exatidão de 65,8 % e um desvio à precisão de 0,01 %. Para o segundo método o valor obtido encontrado foi de $(3.2 \pm 0.9) \times 10^2 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ com um desvio à exatidão de 34,1 % e um desvio à precisão de 31,2 %. Assim podemos verificar que os valores encontrados com os métodos do regime variável ainda se afastam mais dos valores esperados, o que pode ser facilmente explicado. De facto para além dos possíveis erros já discutidos anteriormente, no estudo do regime variável ambos os métodos têm por base a equação do calor direta ou indiretamente e sabe-se que esta equação foi a primeira a traduzir a transmissão de calor numa barra e que não traduz perfeitamente a realidade. Assim é natural que os resultados fossem mais distantes do real neste segundo ponto. Porém mesmo considerando a equação do calor como válida, a sua resolução impõe que a temperatura num dos extremos da barra seja mantida constante, o que pela análise do software que registou as temperaturas sabemos não ser verdade.

Conclui-se então que a determinação da condutividade térmica do alumínio é mais eficaz numa barra de alumínio cujo fluxo de calor se traduz num regime estacionário, e a uma maior temperatura da fonte quente. De facto o desvio à exatidão foi menor para a condutividade calculada em regime estacionário com a fonte de tensão alimentada a 20V.