

Lei da Indução de Faraday

Tiago Frederico, N°63422; Maria Vilelas, N°63438; Lúcia Carreira, N°63439

Nesta actividade experimental verificou-se experimentalmente a Lei de Indução de Faraday para um campo magnético variável num circuitito estático, onde se encontrou que o valor experimental para o fluxo percorrido por uma pequena bobine é $1.07 \times 10^{-3} \pm 2.14 \times 10^{-5}$ sendo o valor teórico $1.26 \times 10^{-3} \pm 2.19 \times 10^{-4} Tm^2 A^{-1}$, e para um campo magnético estático estando a pequena bobine em rotação, o valor experimental para o fluxo que a percorria foi $9.86 \times 10^{-4} \pm 3.51 \times 10^{-5}$ sendo o valor teórico $6.28 \times 10^{-4} \pm 1.22 \times 10^{-4} Tm^2$. Estudou-se também um transformador, onde se verificou que se verifica a relação $\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}$ é apenas válida quando o transformador é percorrido por sinais com baixa frequências.

Introdução

Segundo a Lei de Biot-Savart, quando uma espira é percorrida por uma corrente i , um campo magnético \vec{B} é criado. À passagem de \vec{B} por uma superfície chama-se fluxo e sabe-se que, pela Lei de Indução de Faraday, uma variação de fluxo através de uma superfície limitada origina uma força electromotriz:

$$\varepsilon^i = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (1)$$

Deve-se o sinal negativo ao facto de a corrente induzida criar um campo magnético que tende a contrariar a variação de fluxo que lhe deu origem (Lei de Lenz).

A expressão (1) pode ser encontrada a partir das equações de Maxwell:

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ao aplicar-se aos dois lados da equação anterior um integral de superfície e aplicando o Teorema de Stokes obtém-se:

$$\oint_l (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS.$$

Ao reconhecer que $\oint_l (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \varepsilon^i$ e que $\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS = \frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = \frac{d\phi}{dt}$ se obtém (1).

Esta lei será verificada de dois modos distintos na corrente actividade, sendo o campo de indução magnética uniforme (numa certa região do espaço) e gerado por um conjunto de bobines de Helmholtz.

Na primeira parte, uma bobine de dimensões reduzidas será colocada entre as bobines de Helmholtz assente num plano perpendicular ao campo de forma a garantir que o fluxo que a atravessa seja máximo. A corrente que percorre as bobines de Helmholtz é variável no tempo e sinusoidal tendo a forma $i = i_m \cos(\omega t)$. Tem-se que o fluxo que atravessa a pequena bobine é

$$\phi(t) = \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = n\vec{B}S \quad (2)$$

de onde se obtém a força electromotriz induzida

$$\varepsilon^i = -\frac{d\phi}{dt} = nBS\omega \sin(\omega t). \quad (3)$$

A partir de (4a) encontra-se a tensão entre os terminais das n espiras:

$$V_i = \pm \varepsilon^i = nBS\omega \sin(\omega t). \quad (4)$$

A partir destes resultados pode-se ainda encontrar o coeficiente de indução mútua, L_M , que actua entre as bobines de Helmholtz e a bobine pequena. Sabendo que $\phi = L_M i$, pode-se relacionar L_M com ε^i pela Lei de Indução de Faraday:

$$\varepsilon^i = -\frac{d\phi}{dt} = -L_M \frac{di}{dt}. \quad (5)$$

Comparando (4) e (5) observa-se facilmente que $L_M = nBS$.

Na segunda parte, a pequena bobine irá efectuar um movimento de rotação enquanto que o campo de indução magnética gerado pelas bobinas de Helmholtz permanece estático. Devido à rotação, vai existir um ângulo α entre \vec{B} e \vec{n} que varia em todos os instantes, considera-se por isso $\alpha = \omega t$. Repetindo o raciocínio anterior obtém-se:

$$\phi(t) = \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = n\vec{B}S \cos(\omega t); \quad (6)$$

$$\varepsilon^i = -\frac{d\phi}{dt} = nBS\omega \sin(\omega t); \quad (7)$$

$$V_i = \pm \varepsilon^i = nBS\omega \sin(\omega t). \quad (8)$$

Observa-se que as duas situações são a mesma, apesar de serem criadas de maneiras diferentes.

Na terceira e última parte vai-se estudar o funcionamento de um transformador constituído por duas bobines, L_1 e L_2 , com coeficientes de auto-indução L_{11} e L_{22} e n_1 e n_2 espiras enroladas em lados opostos do núcleo ferromagnético.

Ao aplicar-se uma corrente a uma das bobines, vai-se criar um campo magnético \vec{B} e portanto um fluxo de campo magnético que percorre o núcleo do transformador. Uma vez que ϕ através e uma superfície fechada é nulo,

$$(\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) = 0$$

e assumindo que não há perdas de fluxo ao longo do transformador ($\mu_{material}$ muito superior a μ_0). Isto implica que num dado instante todas as secções do núcleo são atravessadas pelo mesmo fluxo ϕ .

Pode-se então relacionar através da Lei de Indução de Faraday, para um transformador ideal, a tensão entre os terminais de uma bobine e o seu número de espiras: $V_i \simeq n_i \frac{d\phi}{dt}$. Obtém-se então a seguinte relação:

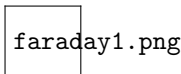
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (9)$$

Uma vez que a tensão que percorre o enrolamento primário é sinusoidal, é possível trabalhar com a sua amplitude complexa:

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{L_M}{L_{11}} \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_{22}}{R}(1 - k^2)} = k \sqrt{\frac{L_{22}}{L_{11}}} \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_{22}}{R}(1 - k^2)} \quad (10)$$

onde k é o coeficiente de acoplamento magnético. A partir de (10) obtém-se (9) nos casos em que $k \simeq 1$, $R \rightarrow \infty$ ou para frequências ω muito baixas.

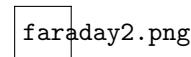
Experiência Realizada



Esquema 1. Montagem para o estudo do circuito estático face a um campo magnético variável.

Legenda:

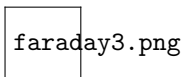
- 1 - Gerador de tensão alternada sinusoidal;
- 2 - Voltímetro;
- 3 - Resistência exterior de 10Ω;
- 4 - Pequena bobina rotativa;
- 5 - Bobinas de Helmholtz.



Esquema 2. Montagem para o estudo do circuito com bobine em rotação para um campo manético variável.

Legenda:

- 1 - Fonte de tensão contínua;
- 2 - Amperímetro;
- 3 - Bobinas de Helmholtz;
- 4 - Voltímetro;
- 5 - Pequena bobina rotativa.



Esquema 3. Montagem utilizada para estudar um tranformador.

Legenda:

- 1 - Gerador de tensão alternada sinusoidal;
- 2 - Voltímetro;
- 3 - Enrolamento primário do transformador: bobina com 600 espiras;
- 4 - Enrolamento secundário: bobina com 72 espiras.

Na parte inicial da experiência monta-se o circuito do Esquema 1. Aplica-se às Bobinas de Helmholtz uma tensão sinusoidal, com frequências de 100Hz e incrementos de 1kHz desde 1kHz até 15kHz, de modo a que a amplitude máxima

da corrente que passa no circuito seja de 50mA. Ajusta-se a bobina pequena de modo a que o seu eixo coincida com o eixo das Bobinas de Helmholtz. Mede-se no osciloscópio (com as opções adequadas: cursores e programa de medição de fase) a amplitude máxima da tensão nos terminais da bobina pequena e a sua diferença de fase em relação à tensão nos terminais das bobinas de Helmholtz. Se a tensão for de tal modo pequena que não se consiga fazer a leitura aumenta-se a resistência exterior para 20 ou 30Ω.

Na segunda parte parte utiliza-se a montagem descrita no Esquema 2. Ajusta-se a tensão no gerador de modo a que a corrente que percorre as bobinas de Helmholtz seja de 500mA e liga-se o gerador que põe a bobina pequena em rotação variando a sua velocidade angular. Fazem-se medições da tensão nos terminais da bobina pequena para 10 valores diferentes de frequência de rotação.

Na terceira parte monta-se o circuito do Esquema 3. Com o gerador, aplica-se uma tensão alternada sinusoidal com frequências de 50, 100, 500, 1000 e 2500Hz aos terminais do enrolamento primário do transformador. Varia-se a amplitude máxima da tensão disponibilizada pelo gerador até 15V e medem-se as amplitudes máximas da tensão nos terminais do enrolamento primário, nos terminais da resistência ligada ao enrolamento secundário e a diferença de fase entre os dois sinais.

Resultados Obtidos

| f(Hz) | V _{2pp} (V) | V _{1pp} (V) | fase(°) |
|-----------|----------------------|----------------------|---------|
| 100 | 0,98 | 0,06 | 94 |
| 1000 | 0,23 | 0,15 | 89 |
| 1996 | 0,12 | 0,16 | 92 |
| 3001 | 0,08 | 0,15 | 87,8 |
| 4072 | 0,06 | 0,15 | 89 |
| 5007 | 0,1 | 0,31 | 90 |
| 5,95E+003 | 0,03 | 0,1 | 86 |
| 6,95E+003 | 0,03 | 0,14 | 88 |
| 7,02E+003 | 0,03 | 0,14 | 90 |
| 7,93E+003 | 0,03 | 0,14 | 85 |
| 8,95E+003 | 0,03 | 0,14 | 88 |
| 1,03E+004 | 0,02 | 0,15 | 95 |
| 1,09E+004 | 0,03 | 0,23 | 89 |
| 1,19E+004 | 0,03 | 0,24 | 89 |
| 1,29E+004 | 0,03 | 0,24 | 85 |
| 1,40E+004 | 0,03 | 0,23 | 87 |
| 1,50E+004 | 0,02 | 0,23 | 90 |

Tabela 1. Dados obtidos para o campo de indução magnética oscilante.

$$e_{fase} = 5^\circ$$

| T(ms) | f(Hz) | V _{1pp} (V) | eT(ms) |
|-------|-------|----------------------|--------|
| 129 | 7,72 | 53 | 0,25 |
| 80,5 | 12,4 | 85 | 0,25 |
| 56,5 | 17,7 | 117 | 0,25 |
| 50,2 | 19,9 | 135 | 0,25 |
| 43 | 23,2 | 161 | 0,25 |
| 44,2 | 22,6 | 153 | 0,25 |
| 52,2 | 19,1 | 129 | 0,25 |
| 55,8 | 17,9 | 122 | 0,25 |
| 73,4 | 13,6 | 94 | 0,25 |
| 558 | 1,79 | 30 | 0,25 |

Tabela 2. Dados obtidos para campo de indução magnética estático.

| | f(Hz) | V ₂ (V) | V ₁ (V) | fase(°) |
|---------|-------|--------------------|--------------------|---------|
| 100 Hz | 93 | 3,49 | 0,39 | 187 |
| | 93 | 7,24 | 0,82 | 186 |
| | 93 | 14 | 1,59 | 187 |
| | 93 | 9,72 | 1,1 | 184 |
| | 93 | 15,1 | 1,71 | 187 |
| 500 Hz | 504 | 14,8 | 1,48 | 204 |
| | 504 | 13,2 | 1,3 | 206 |
| | 504 | 11,1 | 1,11 | 204 |
| | 504 | 7,36 | 0,74 | 201 |
| | 504 | 5,36 | 0,53 | 201 |
| 1000 Hz | 1027 | 2,81 | 0,23 | 212 |
| | 1027 | 3,77 | 0,31 | 221 |
| | 1027 | 6,91 | 0,56 | 219 |
| | 1027 | 11,2 | 0,92 | 221 |
| | 1027 | 14,7 | 1,19 | 222 |
| 2500 Hz | 2506 | 3,98 | 0,186 | 245 |
| | 2506 | 8,11 | 0,379 | 234 |
| | 2506 | 9,29 | 0,427 | 238 |
| | 2506 | 10,4 | 0,489 | 240 |
| | 2506 | 15,1 | 0,713 | 241 |

Tabela 3. Dados obtidos para a análise do funcionamento do transformador.

| n _p | r _p (cm) | n _g | r _g (cm) |
|----------------|---------------------|----------------|---------------------|
| 600 | 1.25 | 320 | 6.75 |

Tabela 4. Dados obtidos para os raios e o número de espiras das bobines utilizadas (g - bobines de Helmholtz, p - bobine pequena).

Análise de Resultados

Para a primeira parte da experiência, onde se estudou o comportamento do circuito face a um campo de indução magnética oscilante, encontrou-se o seguinte gráfico:

I.png

Gráfico II. $\frac{V_1}{i}(\omega)$ para o campo de indução magnética oscilante.

A partir do declive do gráfico II pode-se verificar a Lei de Indução de Faraday. Observa-se que o declive experimental é $1.07 \times 10^{-3} \pm 2.14 \times 10^{-5}$ e através de (2), onde

$\vec{B} = \frac{8\mu_0}{5\sqrt{5}} \frac{n_g}{r_g} I = KI$, encontra-se o valor teórico para o declive: $nSK = 1.26 \times 10^{-3} \pm 2.19 \times 10^{-4} Tm^2 A^{-1}$. Apesar do valor experimental não se encontrar dentro do intervalo de erro do valor teórico, o seu valor desvia-se aproximadamente do valor teórico 15%, o que evidencia a Lei de Indução de Faraday. Seria suposto que a ordenada na origem fosse zero, contudo é negativa. Isto pode-se justificar tendo em conta a existência de erros sistemáticos que influenciem a medição de V .

Pode-se também encontrar o coeficiente de indução mútua que teoricamente é encontrado por

$$nSK = 1.26 \times 10^{-3} \pm 2.19 \times 10^{-4} Tm^2 A^{-1}.$$

| f(Hz) | fase(°) | L _M (H) |
|-----------|---------|---|
| 100 | 94 | $1.14 \times 10^{-3} \pm 9.52 \times 10^{-5}$ |
| 1000 | 89 | $1.0 \times 10^{-3} \pm 1.26 \times 10^{-5}$ |
| 1996 | 92 | $1.02 \times 10^{-3} \pm 2.34 \times 10^{-5}$ |
| 3001 | 87.8 | $1.01 \times 10^{-3} \pm 2.92 \times 10^{-5}$ |
| 4072 | 89 | $1.04 \times 10^{-3} \pm 3.66 \times 10^{-5}$ |
| 5007 | 90 | $1.05 \times 10^{-3} \pm 4.39 \times 10^{-5}$ |
| 5,95E+003 | 86 | $1.03 \times 10^{-3} \pm 4.82 \times 10^{-5}$ |
| 6,95E+003 | 88 | $0.97 \times 10^{-3} \pm 4.91 \times 10^{-5}$ |
| 7,02E+003 | 90 | $1.0 \times 10^{-3} \pm 5.73 \times 10^{-5}$ |
| 7,93E+003 | 85 | $0.97 \times 10^{-3} \pm 6.20 \times 10^{-5}$ |
| 8,95E+003 | 88 | $0.93 \times 10^{-3} \pm 6.74 \times 10^{-5}$ |
| 1,03E+004 | 95 | $1.04 \times 10^{-3} \pm 7.91 \times 10^{-5}$ |
| 1,09E+004 | 89 | $1.04 \times 10^{-3} \pm 8.70 \times 10^{-5}$ |
| 1,19E+004 | 89 | $1.07 \times 10^{-3} \pm 9.77 \times 10^{-5}$ |
| 1,29E+004 | 85 | $1.11 \times 10^{-3} \pm 1.03 \times 10^{-4}$ |
| 1,40E+004 | 87 | $1.10 \times 10^{-3} \pm 1.08 \times 10^{-4}$ |
| 1,50E+004 | 90 | $1.03 \times 10^{-3} \pm 9.45 \times 10^{-5}$ |

Tabela 4. Variação de L_M com a frequência.

Relativamente ao coeficiente de auto indução calculado experimentalmente, este pode ser calculado através de (5) tendo em conta de $dt = 2\pi f$. Os valores encontrados encontram-se muito próximos do valor teórico, estando o desvio máximo por volta dos 25%. Mais uma vez se confirma a Lei de Indução de Faraday. Observa-se também que a diferença de fase entre os dois sinais tem uma diferença que anda por volta dos 90°, como seria de esperar uma vez que se tem $V \propto \sin(\omega t)$ e $i \propto \cos(\omega t)$.

Na segunda parte da experiência, o campo encontrava-se estático enquanto que a pequena bobine efectuava um movimento de rotação.

II.png

Gráfico III. $\frac{V_1}{i}(\omega)$ para o campo de indução magnética estático.

Tal como no caso anterior, pode-se verificar a Lei de Indução de Faraday analisando o declive do gráfico. Sabendo que $i = 0.5A$ e, recorrendo novamente a (2), encontra-se $nS\vec{B} = nSKi = 6.28 \times 10^{-4} \pm 1.22 \times 10^{-4} Tm^2$ enquanto que o valor experimental é $9.86 \times 10^{-4} \pm 3.51 \times 10^{-5}$. Este último apresenta um desvio à exactidão de aproximadamente 36% e o valor experimental não se encontra dentro do intervalo do erro experimental contudo, tal como no caso anterior, ao ter-se em conta a existência

de erros sistemáticos na medição de V , pode-se justificar o desvio e evidenciar a Lei de Indução de Faraday.

Na terceira e última parte estudou-se um transformador. Recorrendo à tabela 3, pode-se verificar a igualdade dada pela expressão (9), onde n_1 é o número de espiras do enrolamento primário (600 espiras) e n_2 é o do enrolamento secundário (72 espiras), ao analisar-se o declive do gráfico de V_2 em função de V_1 para diferentes frequências.

$$\frac{n_1}{n_2} = 8.33$$

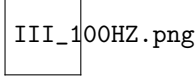


Gráfico III.1. V_2 em função de V_1 para uma frequência de 100Hz.

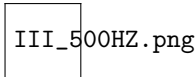


Gráfico III.2. V_2 em função de V_1 para uma frequência de 500Hz.

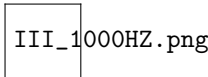


Gráfico III.3. V_2 em função de V_1 para uma frequência de 1000Hz.

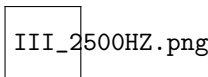


Gráfico III.4. V_2 em função de V_1 para uma frequência de 2500Hz.

| f(Hz) | $\frac{V_1}{V_2}$ | $\frac{V_1}{V_2} / \frac{n_1}{n_2}$ |
|-------|-------------------|-------------------------------------|
| 100 | 8.79 | 1.06 |
| 500 | 10.04 | 1.21 |
| 1000 | 12.35 | 1.48 |
| 2500 | 21.07 | 2.53 |

Tabela 5. Variação de $\frac{V_1}{V_2}$ com a frequência.

Ao observar-se a tabela 5, verifica-se que para $f=100\text{Hz}$ a expressão (9) é válida, apenas com um desvio aproximadamente de 6%. Ao aumentar-se a frequência, tal não se verifica. Esta aproximação deixa de ser válida uma vez que V_2 começa a diminuir relativamente a V_1 fazendo assim que $\frac{V_1}{V_2}$ aumente relativamente a $\frac{n_1}{n_2}$. Analisando as diferenças de fase da tabela 3, observa-se que o desfasamento entre \bar{V}_1 e \bar{V}_2 , as amplitudes complexas de V_1 e V_2 , vai aumentando. Observando (10), constata-se que para frequências maiores a parte imaginária da expressão se torna mais relevante, justificando assim o maior desfasamento das duas amplitudes para frequências elevadas do que para baixas.

Se se retirar a resistência que está ligada ao enrolamento secundário, isso equivale a ter uma resistência infinita (o circuito está aberto) e o termo imaginário de (10) deixa de ser relevante. Assim, obtêm-se apenas sinais reais e a expressão (9) é válida.

Conclusão e Crítica

Na primeira parte da experiência (campo magnético oscilante), os valores experimentais encontrados estão muito próximos dos valores teóricos. Apesar de existir um ligeiro afastamento entre ambos os valores, foi possível verificar a Lei de Indução de Faraday que é dada pela expressão (1). Os erros existentes estão relacionados com erros sistemáticos relacionados com a montagem em si, por exemplo, no gráfico I1 a ordenada na origem negativa pode estar relacionada com o facto de a bobine pequena não estar perfeitamente alinhada com as bobines de Helmholtz, isto é, a bobine pequena poderia não estar assente num plano perpendicular ao campo, originando assim a diminuição da variação de fluxo implicando a variação de tensão produzida. Relativamente à diferença de fase entre i e V , verificou-se perfeitamente que esta é de 90° como é indicado pela teoria.

Na segunda parte (campo magnético estático), mais uma vez foi possível verificar experimentalmente a Lei de Indução de Faraday. Ao contrário do que aconteceu no caso anterior, a ordenada na origem não é negativa. Isto significa que a justificação dada é válida uma vez que aqui a bobine se encontra em rotação. Assim, esta parte da experiência foi apenas influenciada por erros de medição de valores enquanto que na anterior, além dos erros de medição, também existem erros relacionados com a montagem.

Comparando ambos os valores obtidos experimentalmente, pode-se concluir que os dois casos, apesar de distintos, originam forças electromotrizas idênticas, como foi referido anteriormente.

Na terceira e última parte (estudo do transformador) verificou-se a relação (9) para baixas frequências. Para frequências elevadas a relação já não é válida, V_2 diminui muito face a V_1 e a diferença de fase entre as amplitudes complexas dos dois sinais aumenta, tal como era esperado pela expressão (10).

Pode-se então concluir que a expressão (9) é válida apenas para sinais com baixas frequências para materiais ferromagnéticos com $\mu \gg \mu_0$.

Referências

- [1] Cheng, David, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison-Wesley, 1989.
- [2] Figueirinhas, João, *Apontamentos das aulas teóricas*, 2009.