

# Fresnel

LCET/MEFT - 2º ano, 2º Semestre - 2013/2014  
Turno de Sexta-feira

Professor João Figueirinhas

## Grupo D

João Lourenço (75382)/ Miguel Mora (75399)/ Miguel Levy (75516)/ Ana Almeida (75986)

30/04/2014

## Resumo

Nesta experiência, pretende-se estudar a refletância e transmitância da superfície de separação entre dois meios transparentes, homogêneos, isotrópicos e não condutores (ar e polímero) e comparar os resultados experimentais com as previsões teóricas deduzidas pelas fórmulas de Fresnel. Assim sendo, obteve-se um índice de refração  $n = 1,476$  e previsões teóricas próximas dos dados experimentais, dados pelas equações de Fresnel.

## 1 Introdução

As fórmulas de Fresnel fornecem-nos relações entre as amplitudes dos campos elétricos transmitidos ou refratados e refletidos com a amplitude do campo elétrico incidente. Sabe-se que uma onda  $\phi(z, t)$  é igual a  $F(z \pm vt)$  devido à sua periodicidade, onde  $z$  é a sua direção de propagação e  $v$  a sua velocidade. Por derivação obtemos então a equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Para ondas harmónicas (caso das ondas eletromagnéticas em estudo) a equação de onda tem como solução:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \delta) \quad (2)$$

Onde  $\phi_0$  é a amplitude da onda,  $\omega$  a frequência angular e  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda. Ao considerarmos uma superfície de separação entre dois meios com diferentes índices de refração ( $n_1$  e  $n_2$ ) não percorridos por corrente ( $\vec{J} = 0$ ), temos que não existe variação das componentes tangenciais do campo elétrico na superfície de separação devido às descontinuidades do campo. Temos portanto que para as componentes perpendiculares  $E_{0i} \perp -E_{0r} \perp = E_{0t} \perp$  e a onda incidente irá ser parte refletida e parte transmitida. Temos também que no plano de separação ( $z = 0$ ),  $\vec{k}\vec{r}$  de todas as ondas é o mesmo. Assim, e atendendo a que  $\theta_r = \theta_i$ , chegamos à lei de Snell-Descartes:

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad (3)$$

A partir desta nota-se que quando  $n_1 > n_2$ , irá existir um ângulo incidente chamado crítico ( $\theta_i = \theta_c$ ) para o qual  $\theta_t = 90^\circ$ , ou seja para o qual toda a onda incidente é refletida, não existindo transmissão desta. Este ângulo é definido como:

$$\sin(\theta_c) = \frac{n_2}{n_1} \quad (4)$$

Sabemos também, através das equações de Maxwell, que numa onda plana eletromagnética a relação entre  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$  é dada por:

$$\vec{H} = \frac{\vec{n} \times \vec{E}}{Z} \quad (5)$$

onde  $z = v\mu$  é a impedância e  $\vec{n}$  é a direção de propagação da onda. Através de manipulações algébricas conseguimos também deduzir os coeficientes de transmissão e de reflexão para cada tipo de polarização do campo elétrico. Para a polarização paralela temos os coeficientes de reflexão e de transmissão, respetivamente:

$$\rho_{1-2} = \frac{E_{0r} \parallel}{E_{0i} \parallel} = \frac{n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)}{n_2 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)} \quad (6)$$

$$\tau_{1-2} = \frac{E_{0t} \parallel}{E_{0i} \parallel} = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_2 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)} \quad (7)$$

Para a polarização perpendicular:

$$\rho_{1-2} = \frac{E_{0r} \perp}{E_{0i} \perp} = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \quad (8)$$

$$\tau_{1-2} = \frac{E_{0t} \perp}{E_{0i} \perp} = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \quad (9)$$

O ângulo de Brewster ( $\theta_B$ ) é o ângulo de incidência para o qual os raios refletidos e refratados são perpendiculares entre si, ou seja é o ângulo para o qual a componente paralela da onda eletromagnética não reflete. Este ângulo é dado por:

$$\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1} \quad (10)$$

Tendo em conta o guia da experiência, deduziram-se as seguintes fórmulas para a transmitância e refletância, respetivamente:

$$T_{1-2} = \frac{n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i)} (\tau_{1-2})^2 \quad (11)$$

$$R_{1-2} = (\rho_{1-2})^2 \quad (12)$$

Podem-se, no entanto, reescrever as fórmulas em cima

de modo a que dependam apenas do ângulo de incidência ( $\theta_i$ ). Para isso fazemos uso do facto de que  $\cos(\theta_t) = \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2 \sin(\theta_i)^2}$ . De modo a calcularem-se os quocientes das potências, utilizaram-se as fórmulas que estavam presentes no procedimento tendo, para a incidência do laser na parte curva (A):

$$\frac{P_r}{P_i} = T_{ar-polimero}(\theta_i = 0) \times R_{polimero-ar}(\theta_i) \times T_{polimero-ar}(\theta_i = 0) \quad (13)$$

$$\frac{P_t}{P_i} = T_{ar-polimero}(0) \times T_{polimero-ar}(\theta_i) \quad (14)$$

Para a incidência do laser na parte plana (B):

$$\frac{P_r}{P_i} = R_{ar-polimero}(\theta_i) \quad (15)$$

$$\frac{P_t}{P_i} = T_{ar-polimero}(\theta_i) \times T_{polimero-ar}(0) \quad (16)$$

## 2 Montagem e Procotocolo experimental

Esta experiência consiste num goniómetro no centro do qual se encontra um prisma semi-cilindrico transparente. Acoplado ao braço fixo tem-se um laser e ao braço móvel o detector de radiação visível, cujo valor é dado no multímetro. O braço móvel, permite o ajuste do ângulo de de incidência da luz na superfície de separação entre o ar e o prisma.

Tem-se ainda, um filtro que permite apenas certos ângulos de polarização, esta lente polarizadora é ajustável e encontra-se acoplado ao laser (polarização paralela - horizontal, polarização perpendicular - vertical). Para a a medição da fracção desviada do feixe incidente, coloca-se um detector de radiação à frente do laser.

Esta montagem, permite o estudo da transição de um meio mais refrigente (polímero) para o menos (ar), ou a situação contrária, dependendo da posição do polímero.

De notar, que a intensidade de radiação captada pelo detector é proporcional à potência, o que permite a análise das equações de Fresnel a partir dos quocientes de intensidade dos feixes.

### I - Polarização paralela

1. Faça a montagem da figura 1:

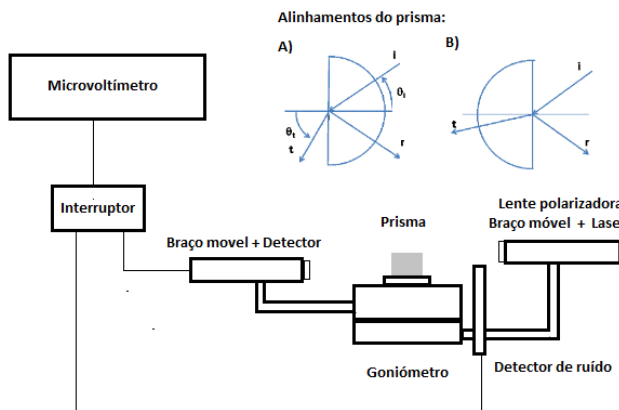


Figura 1: Montagem experimental.

2. Alinhe o semicilindro com o feixe, de modo a que o feixe incidente na face plana seja perfeitamente perpendicular;

3. Ajuste a lente polarizadora para polarização paralela (horizontal);
4. Com o laser ligado, aguarde até que a temperatura de funcionamento do laser seja estável;
5. Com o goniómetro ajustado por forma ao feixe incidir sobre a superfície cilíndrica do prisma (Alinhamento A):

- i Com o braço móvel do goniómetro, alinhe o detector para ângulos de incidência ( $\theta_i$ ) de  $0^\circ$  a  $85^\circ$  (incrementos de  $5^\circ$ );
- ii Registe as intensidades referentes aos feixes dos ângulos reflectido e transmitido, bem como o ruído;
- iii Identifique o ângulo de Brewster e o ângulo crítico;
- iv Calcule os índice de refração (10) e (4).

6. Repita o procedimento anterior com o feixe a incidir sobre a superfície plana do prisma (Alinhamento B), sendo que apenas é possível a determinação do ângulo de Brewster;
7. Calcule a fracção entre a potência reflectida e a potência incidente  $\frac{P_r}{P_i}(\theta_i)$  para os dois alinhamentos;
8. Calcule a fracção entre a potência transmitida e a potência incidente  $\frac{P_t}{P_i}(\theta_i)$  para os dois alinhamentos;
9. Represente  $\frac{P_r}{P_i}(\theta_i)$  e  $\frac{P_t}{P_i}(\theta_i)$ , conjuntamente com as previsões teóricas dadas pelas expressões indicadas na introdução;

### II - Polarização perpendicular

1. Ajuste a lente polarizadora para polarização perpendicular (vertical);
2. Repita o procedimento anterior, com os ajustes necessários (não determinar ângulo crítico, de Brewster e índices de refração).
3. Retire o prisma e registe a potência do feixe incidente;

## 3 Análise de Resultados

### 3.1 Polarização Paralela

#### I - Face Curva (Alinhamento A)

Foram medidos os valores de intensidade do feixe transmitido ( $T$ ) e refletido ( $R$ ) e as respetivas medidas de referência (ruído) dadas pelo sensor colocado à frente do polarizador. Para estimar a intensidade utilizou-se a seguinte expressão:

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2I_{ruído}} \quad (17)$$

(Em que  $I_1$  corresponde à primeira medição da intensidade do feixe e  $I_2$  à segunda medição)

Estes resultados, serão explorados mais adiante.

Para esta face, foi ainda possível medir-se o ângulo de Brewster, que consiste no ângulo para o qual a luz não polarizada passa a ser refletida com polarização perpendicular ao plano que contém os restantes feixes. Determinou-se, ainda, o ângulo crítico, ângulo para o qual o feixe refratado desaparece e toda a luz passa a ser refletida.

Para maior rigor, o ângulo foi medido à direita e à esquerda, vindo:

$\theta_B^- (^{\circ})$	$\theta_B^+ (^{\circ})$	$\theta_C^- (^{\circ})$	$\theta_C^+ (^{\circ})$
$326,3 \pm 0,01$	$326,07 \pm 0,01$	$134,23 \pm 0,01$	$135,59 \pm 0,01$

**Tabela 1:** Ângulo de Crítico ( $\theta_C$ ) e ângulo de Brewster ( $\theta_B$ ) determinado experimentalmente em polarização paralela e segundo o alinhamento A.

## II - Face Plana (Alinhamento B)

Para a face plana, alinhamento B, determinou-se o ângulo de Brewster, vindo:

$\theta_B^- (^{\circ})$	$\theta_B^+ (^{\circ})$
$123,37 \pm 0,01$	$123,23 \pm 0,01$

**Tabela 2:** Ângulo de Brewster ( $\theta_B$ ) determinado experimentalmente em polarização paralela e segundo o alinhamento B.

## III - Índices de refração ( $n$ )

Com o ângulo de Brewster e ângulo crítico medidos para o alinhamento A, calculou-se o índice de refração através de 10 e 4, vindo:

$n_B^-$	$n_B^+$	$n_{Bmed}$
$1,4994 \pm 0,0003$	$1,4865 \pm 0,0003$	$1,4930 \pm 0,0007$
$n_C^-$	$n_C^+$	$n_{Cmed}$
$1,3956 \pm 0,0002$	$1,4290 \pm 0,0003$	$1,4123 \pm 0,0170$

**Tabela 3:** Índice de refração calculado através do ângulo de Brewster à direita e à esquerda e média dos dois.

Para o ângulo de Brewster obtido para o alinhamento B, calculou-se:

$n^-$	$n^+$	$n_{med}$
$1,5183 \pm 0,0006$	$1,5264 \pm 0,0006$	$1,5224 \pm 0,0046$

**Tabela 3:** Índice de refração calculado através do ângulo de Brewster à direita e à esquerda e média dos dois.

## 3.2 Polarização Perpendicular

Com o feixe polarizado perpendicularmente recolheram-se, novamente, as intensidades dos feixes transmitido (T), refletido (R) e as respetivas o ruído, tanto para o alinhamento A como para o alinhamento B.

Posto isto, retirou-se o semicilindro e mediu-se a intensidade (total) do feixe emitido, obtendo-se os seguintes resultados:

Polarização	$I(A)$	$I_{ruído}(A)$	$I_{incidente}(A)$
Paralela	$2,00 \times 10^{-4}$	$4,60 \times 10^{-5}$	4,35
Perpendicular	$2,30 \times 10^{-4}$	$4,40 \times 10^{-5}$	5,23

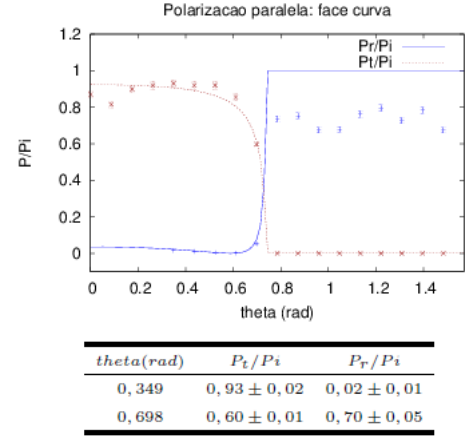
**Tabela 4:** Intensidade total do feixe incidente com polarização paralela e perpendicular.

## 3.3 Fórmulas de Fresnel

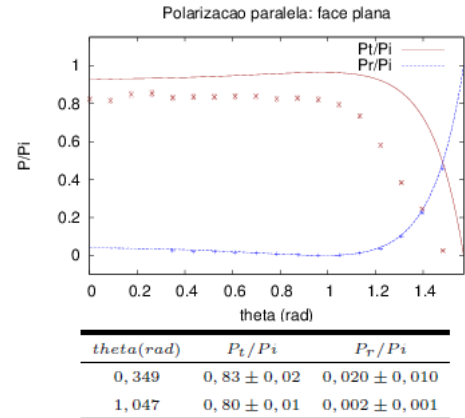
Antes de mais com os valores de todos os índice de refração fez-se uma média, obtendo-se:

$$n = 1,476$$

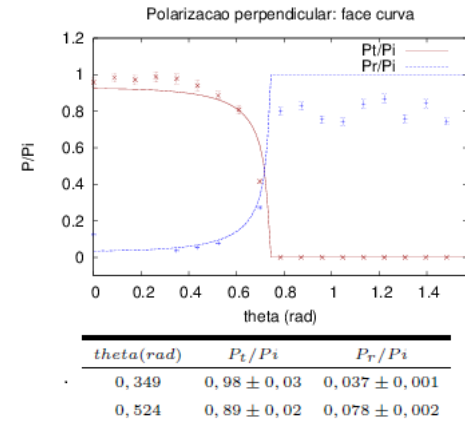
Assim, sabendo que o detetor produz uma corrente proporcional à potência, calcularam-se as frações das potências transmitida ( $P_t/P_i = T$ ) e refletida ( $P_r/P_i = R$ ) para todos os casos. Estes resultados estão presentes nos gráficos abaixo, bem como as suas curvas teóricas dadas pelas fórmulas de Fresnel ( $n_a = 1$  e  $n_p = n = 1,476$ ). Para os ângulos superiores ao ângulo crítico, as fórmulas de Fresnel foram prolongadas de acordo com significado físico, isto é para  $\theta > \theta_C$  não há feixe refratado ( $\frac{P_t}{P_i} = 0$ ) e o feixe refletido é máximo e constante ( $\frac{P_r}{P_i} = 1$ ).



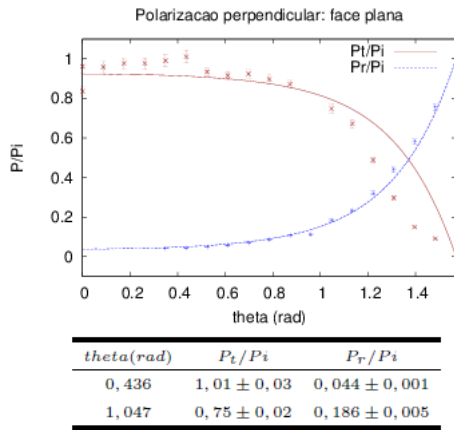
**Gráfico 1:** Representação dos pontos experimentais  $\frac{P_t}{P_i}(\theta)$  e  $\frac{P_r}{P_i}(\theta)$  com as respectivas previsões teóricas, segundo as fórmulas de Fresnel, para a polarização paralela para o alinhamento A.



**Gráfico 2:** Representação dos pontos experimentais  $\frac{P_t}{P_i}(\theta)$  e  $\frac{P_r}{P_i}(\theta)$  com as respectivas previsões teóricas, segundo as fórmulas de Fresnel, para a polarização paralela para o alinhamento B.



**Gráfico 3:** Representação dos pontos experimentais  $\frac{P_t}{P_i}(\theta)$  e  $\frac{P_r}{P_i}(\theta)$  com as respectivas previsões teóricas, segundo as fórmulas de Fresnel, para a polarização perpendicular para o alinhamento A.



**Gráfico 4:** Representação dos pontos experimentais  $\frac{P_t}{P_i}(\theta)$  e  $\frac{P_r}{P_i}(\theta)$  com as respectivas previsões teóricas, segundo as fórmulas de Fresnel, para a polarização perpendicular para o alinhamento B.

## 4 Conclusões

Com o objectivo de estimar o índice de refração do acrílico, material de que era feito o semicilindro, estimou-se o ângulo de Brewster e o ângulo crítico. De forma a minimizar o erro na estimativa destes ângulos, mediu-se um valor máximo e um valor mínimo do ângulo para o qual as condições que definem o ângulo de Brewster (mínimo da reflectância) ou o ângulo crítico (inexistência de feixe transmitido) se verificavam. Obviamente que estes ângulos na realidade são únicos, pelo que isto não deveria ser necessário. No entanto, a verificação das condições é uma questão subjectiva e com limitações que introduzem então este erro na medição destes ângulos. O valor médio obtido foi  $n_{acrílico} = 1.476 \pm 0.05$ . Embora este valor seja próximo do teórico ( $n_{teórico} = 1.49$ ), nota-se que o erro é considerável, ou seja, que se verificou uma grande dispersão de resultados (sendo que o responsável pelo valor de erro foi o calculado através do ângulo crítico).

Adicionalmente, analisou-se a transmitância e a reflectância para quatro situações distintas. A análise de cada uma encontrar-se-á dividida numa análise da transmitância, e numa da reflectância. É de notar que as primeiras medições para todas as situações são apenas para a transmitância visto que o aparelho de medição para ângulos perto de zero bloqueava o feixe reflectido.

Para o caso da polarização paralela incidente na face curva, podemos reparar que os pontos experimentais referentes à transmitância se ajustam à curva teórica, à excepção dos dois primeiros pontos, que se podem considerar erros de medição. Por outro lado, a curva teórica referente à reflexão afasta-se dos pontos obtidos para ângulos superiores a 0.79 rad. É de notar que se verifica (tanto experimental como teoricamente) o desaparecimento brusco do feixe transmitido e, conseqüentemente, o aumento da intensidade do feixe reflectido. Este ângulo a partir do qual o feixe transmitido se extingue é, exactamente, o ângulo crítico. Contudo, o valor obtido para este ângulo é ligeiramente menor do que 0.8 rad enquanto se pode reparar pela curva teórica que deveria ter sido menor, explicando o desvio encontrado no cálculo do índice de refração. É também de notar que, ao analisar a curva da intensidade do feixe reflectido, existe um valor de ângulo de incidência para o qual esta é mínima. Esse ângulo corresponde ao ângulo de Brewster, cuja medição fornece também uma estimativa do índice de refração. Embora também haja um desvio entre o valor para o ângulo de Brewster medido e o teórico, este provocou um menor desvio na obtenção de  $n$ .

Para o caso da polarização paralela incidente na face plana, nota-se que os pontos medidos referentes ao feixe

reflectido se ajustam perfeitamente à curva teórica. Contudo, o mesmo já não acontece com os pontos obtidos para a intensidade do feixe transmitido. Neste caso, embora se verifique uma tendência idêntica à da curva teórica, os pontos encontram-se deslocados, no sentido em que apresentam sistematicamente valores menores do que o esperado. Neste caso também é possível ver que existe um mínimo de reflectância pelo que se pode obter o ângulo de Brewster à semelhança do caso anterior. Similarmente, nota-se também que existe um desvio entre o resultado obtido e o estimado pela curva.

Em referência à situação em que a polarização era perpendicular e incidia na face curva, é de referir que os pontos relativos à intensidade do feixe transmitidos se ajustam bem à curva teórica. Por outro lado, para ângulos superiores ao ângulo crítico, os pontos referentes ao feixe reflectido se afastam da previsão teórica. Tal como para o caso da polarização paralela, existe um ângulo crítico. Contudo, devido a um lapso este não foi medido. No entanto, ao se calcular o índice de refração para o valor do ângulo crítico enquanto o valor médio entre a última medição com feixe transmitido e a primeira em que este é nulo, obtém-se um índice de refração perto do teórico. Por outro lado, ao analisar a curva da reflectância, nota-se que esta não tem um valor para o qual é mínima, sendo que tem uma tendência a aumentar sem um momento em que diminui antes. Assim, não existe ângulo de Brewster para esta situação.

Por último, analisando o caso da incidência da luz polarizada perpendicularmente na face plana, idênticamente à situação da polarização paralela incidente também nesta face, os pontos obtidos para o feixe reflectido ajustam-se extremamente bem à curva teórica enquanto os referentes ao feixe transmitido não tanto. Também de forma semelhante, podemos reparar que não existe ângulo crítico para esta situação. Por outro lado, analogamente à outra situação da polarização perpendicular, notamos que não existe também ângulo de Brewster.

Analisando todas as situações, repara-se que apenas existe ângulo de Brewster para a polarização paralela. Por outro lado, é também de referir que apenas se verifica a existência de um ângulo crítico para a incidência sobre a face curva. Assim, podemos assertar que a situação que nos fornece mais informação corresponde à luz polarizada paralelamente (de forma a existir ângulo de Brewster) a incidir sobre a face curva (obrigando à existência de um ângulo crítico), ao passo que a que nos fornece menos informação é exactamente a incidência de luz polarizada perpendicularmente sobre a face plana, visto que não possui nenhum desses ângulos.

É de notar que existe sempre alguns pontos que não se ajustam bem à curva teórica o que indica que pode existir um problema com a montagem que provoque estes desvios, como a presença de impurezas no interior do semicilindro. Além disso, é de reparar que ora os pontos experimentais referentes ao feixe reflectido se ajustam bem e os referentes ao feixe transmitido se afastam ora se verifica o oposto. Isto significa que os pontos que sofrem desvios são exactamente os afectados pela face curva do semicilindro (feixe transmitido quando a incidência é feita sobre a face plana e feixe reflectido quando a incidência é feita sobre a face curva). Desta forma podemos inferir que o problema não é o referido anteriormente, mas sim algo que afecte unicamente a face curva. Nomeadamente, o facto da face curva não corresponder a uma curva perfeita e ter pequenos vértices angulosos (entre outros, como, por exemplo, a face estar mal polida) pode ser a explicação para os desvios sentidos.

## 5 Referências

- FIGUEIRINHAS, João. "Protocolos dos trabalhos práticos de Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica", 2014 IST