

Indução Magnética

LCET/MEFT - 2º ano, 2º Semestre - 2013/2014

Turno de Sexta-feira

Professor João Figueirinhas

Grupo D

João Lourenço (75382)/ Miguel Mora (75399)/ Miguel Levy (75516)/ Ana Almeida (75986)

09/05/2014

Resumo

Este laboratório, tinha como objectivo o estudo do campo magnético gerado por uma espira circular, bobines de Helmholtz e solenoides com núcleos de ar e de ferro, tendo-se utilizado para esse efeito um magnetómetro com sonda de efeito de Hall, sendo estes resultados comparados às previsões teóricas. Para o solenoide com núcleo de ferro obteve-se uma magnetização $M = 5925 \pm 36 (A/m)$.

Outro objectivo desta actividade, era a determinação da característica $B(H)$ do material ferromagnético, obtendo-se a permeabilidade magnética do núcleo de ferro ($\mu = 8231 \pm 108$), o campo coercivo ($H_c = 150 \pm 42$), a indução remanescente ($B_r = 1,28 \pm 0,15 T$) e a indução de saturação ($B_s = 0,84 \pm 0,10 T$).

1 Introdução

Sabe-se desde o século XIX devido à experiência de Oersted (uma agulha na vizinhança de um fio percorrido por corrente eléctrica sofre uma deflexão em relação à sua direcção inicial) que existe uma ligação entre fenómenos eléctricos e magnéticos. Surgiu então a lei de Biot-Savart que descreve o campo magnético produzido por uma distribuição de corrente:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^2} \quad (1)$$

Recorrendo a esta expressão, é nos possível calcular o campo produzido por uma bobine com n espiras (cujo centro corresponde à origem do referencial) num ponto genérico sobre o plano $z = 0$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I r_b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{y_p \sin \theta \vec{e}_x + (r_b - x_p \sin \theta) \vec{e}_y + y_p \cos \theta \vec{e}_z}{r_b^2 + x_p^2 + y_p^2 - 2x_p r_b \sin \theta} d\theta \quad (2)$$

sendo que r_b é o raio da bobine, μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo e I a corrente que atravessa a bobine.

Particularizando a equação acima para $(0,0,z)$, vem:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I r_b^2}{2(r_b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \quad (3)$$

Associando outra bobine à primeira, deixando-a a uma distância d desta e fixando, neste caso, a origem do referencial no centro do conjunto das duas bobines, obtém-se a seguinte expressão para o campo magnético:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I r_b}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(y_p - \frac{d}{2} \sin \theta) \vec{e}_x + (r_b - x_p \sin \theta) \vec{e}_y + (y_p - \frac{d}{2} \cos \theta) \vec{e}_z}{r_b^2 + x_p^2 + (y_p - \frac{d}{2})^2 - 2x_p r_b \sin \theta} + \int_0^{2\pi} \frac{(y_p + \frac{d}{2} \sin \theta) \vec{e}_x + (r_b - x_p \sin \theta) \vec{e}_y + (y_p + \frac{d}{2} \cos \theta) \vec{e}_z}{r_b^2 + x_p^2 + (y_p + \frac{d}{2})^2 - 2x_p r_b \sin \theta} d\theta \right] \quad (4)$$

Na 2ª parte do trabalho irá estudar-se o campo magnético ao longo do eixo de um solenoide. Aplicando Biot-Savart, obtém-se que o campo magnético (centro do referencial está colocado no centro do solenoide):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2} \left(\frac{l/2 - y_p}{\sqrt{(l/2 - y_p)^2 + r_s^2}} + \frac{l/2 + y_p}{\sqrt{(l/2 + y_p)^2 + r_s^2}} \right) \vec{e}_y \quad (5)$$

onde N é a densidade de espiras por unidade de comprimento, l é o comprimento do solenoide e r_s é o raio do solenoide.

Para a terceira parte do trabalho laboratorial, temos de ter em conta que os materiais podem ser classificados segundo o seu comportamento na presença de um campo magnético. Para tal, contamos com as definições de permeabilidade magnética e do vector Magnetização (\vec{M}):

$$\mu = \frac{B}{H} \quad (6)$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H \quad (7)$$

Em que B é o valor do campo de indução magnética dentro do material e H é o valor do campo magnético também dentro deste.

2 Montagem e Protocolo experimental

Nesta experiência, recorre-se a bobines de diferentes tipos percorridas por correntes contínuas que originam o aparecimento de campos de indução magnética, sendo possível determinar a direcção e intensidade destes campos em diferentes pontos e representá-los.

Para medir o campo de indução magnética, utiliza-se um magnetómetro acoplado a um detector com uma sonda de efeito Hall que produz uma tensão proporcional à intensidade da componente do campo de indução segundo o eixo da sonda.

Na determinação da característica $B(H)$ de um material ferromagnético utiliza-se um transformador de alimentação obtendo-se a característica do material do seu núcleo.

I - Espira circular

- (4) 1 Monte o circuito de acordo com a figura 1:

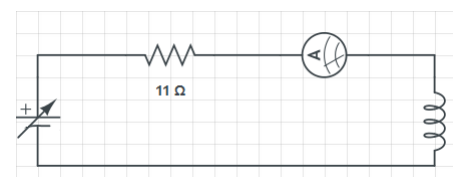


Figura 1: Montagem experimental - Parte I.

- 2 Ligue o magnetómetro e calibre-o para campo nulo;
- 3 Coloque a ponta da sonda no centro de uma bobine de Helmholtz (eixo sonda//eixo bobine);

- 4 Aplique uma corrente de $0.1A - 1.5A$ (incrementos de $0.1A$) à bobine e registre o valor do magnetômetro;
- 5 Represente graficamente $B(I)$, obtendo uma regressão linear;
- 6 Ajuste a fonte de alimentação da bobine de modo a esta ser percorrida por $I = 1A$;
- 7 Registre o valor do magnetômetro ao longo do eixo da bobine desde o centro até $\frac{I_0}{20}$ (intervalos de $1cm$) para a componente tangencial;
- 8 Repita o passo anterior para a componente normal;
- 9 Repita as medidas anteriores para eixo//eixo bobine a uma distância de $2.5cm$;
- 10 Coloque a ponta de prova no centro da bobine e desloque-a em intervalos de $0.5cm$ até à sua periferia, registrando a componente tangencial do campo.
- 11 Represente graficamente $B(z)$;

II - Bobine de Helmholtz

- 1 Com duas bobinas de Helmholtz ligadas ($I = 1A$) e considerando a origem o ponto médio entre as duas bobinas, realize os passos I.7 - I.11.

III - Solenoide

- 1 Alimente o solenoide com núcleo de ar com uma corrente de $I = 1A$;
- 2 Registre o valor do magnetômetro ao longo do eixo do solenoide desde o centro até $\frac{I_0}{20}$ (intervalos de $1cm$) para a componente tangencial;
- 3 Repita o ponto anterior mas deslocando-se segundo um eixo paralelo afastado de $1.5cm$;
- 4 Coloque a ponta de prova ao longo do eixo do solenoide e desloque-a em intervalos de $0.5cm$ até que $I = \frac{I_0}{10}$.
- 5 Represente graficamente $B(z)$;

IV - Característica $B(H)$

- 1 Monte o circuito da figura 2:

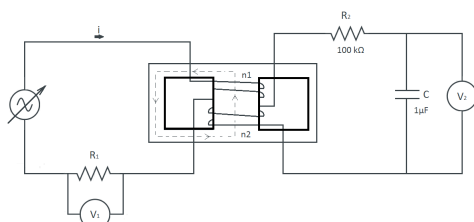


Figura 2: Montagem experimental - Parte II.

- 2 Regule o auto-transformador até observar a curva de histerese;
- 3 Ajuste a tensão de modo a observar a saturação do núcleo e efectue as medições que lhe permitirão determinar o campo coercivo (H_c), a indução remanescete (Br) e a indução de saturação (B_s):

$$B = \frac{R_2 C}{n_2 s} V_B \quad (8)$$

$$H = \frac{n_1}{l R_1} V_H \quad (9)$$

- 4 Determine o declive da curva $B(H)$ para $B=0$ e estime a permeabilidade magnética incremental do material a indução nula.

3 Análise de Resultados

3.1 Espira Circular

Mediu-se a componente tangencial do campo magnético no centro da espira, fazendo-se variar a intensidade de corrente. Era de esperar obter uma regressão linear concordante com a expressão:

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2r} \quad (10)$$

De acordo com a expressão 10 o declive previsto seria $m = 2.9568$, tendo-se obtido o seguinte gráfico:

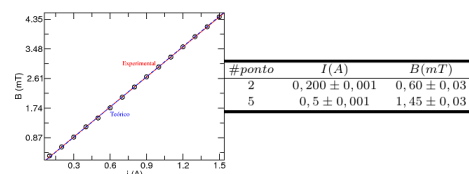


Gráfico 1: Pontos experimentais $B(I)$ no centro de uma espira circular, ajustados segundo $y = mx + b$, em que $m = 2.94 \pm 0.02$ e $b = 0.010.02$, bem como expressão teórica 10

Fixando a corrente $I = 1A$, mediu-se a componente do campo magnético tangencial e normal.

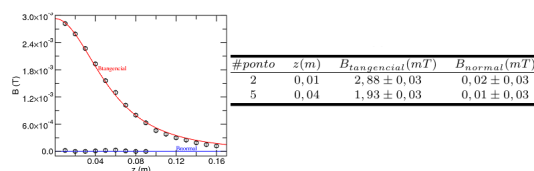


Gráfico 2: Pontos experimentais $B_t(z)$ e $B_n(z)$ ao longo do eixo da espira, bem como as expressões teóricas (3) e $B_n(z) = 0$

A partir do gráfico 2, é possível verificar que os valores experimentais são consistentes com os teóricos.

Realizou-se o mesmo procedimento, mas para o eixo paralelo ao eixo da bobine, impondo-se uma distância entre estes de $d = 2.5cm$. Assim utilizou-se a equação 2, para $(0, 2.5, z_p)$, tendo-se variado z , vindo:

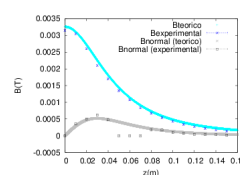


Gráfico 3: Pontos experimentais $B_t(z)$ e $B_n(z)$ ao longo do eixo paralelo, bem como as expressões teóricas provenientes do cálculo numérico de (2).

Mediu-se, ainda, a componente segundo o eixo central para diferentes posições (z) ao longo deste. Os resultados obtidos apresentam-se conjuntamente com os resultados teóricos provenientes da integração numérica da expressão (2):

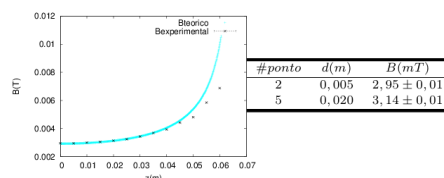


Gráfico 4: Pontos experimentais $B_t(z)$ ao longo do eixo central, bem como a expressão teórica (2).

3.2 Bobine de Helmholtz

Para as duas bobinas ligadas, realizou-se o mesmo procedimento, obtendo-se:

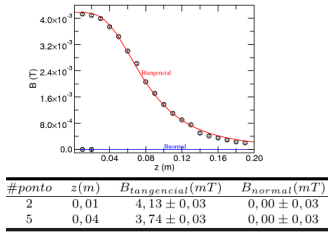


Gráfico 5: Pontos experimentais $B_t(z)$ e $B_n(z)$ ao longo do eixo central das bobinas de Helmholtz, bem como as expressões teóricas (4) e $B_n(z) = 0$

É de notar que esta distância é medida relativamente ao ponto médio entre as duas bobinas.

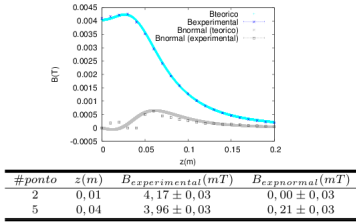


Gráfico 6: Pontos experimentais $B_t(z)$ e $B_n(z)$ ao longo do eixo paralelo ao eixo central das bobinas de Helmholtz, bem como o resultado numérico da integração de (4).

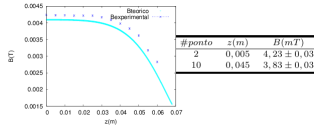


Gráfico 7: Pontos experimentais $B_t(z)$ ao longo do eixo central das bobinas de Helmholtz, bem como a expressão teórica (4).

3.3 Solenoide

Inicialmente estimou-se a densidade de espiras por metro no solenoide com núcleo de ar e com núcleo de ferro, vindo:

Núcleo	$N(m^{-1})$
Ar	1263 ± 33
Ferro	1500 ± 75

Tabela 1: Valores da densidade de espiras por metro no solenoide com núcleo de ar e com núcleo de ferro.

Posto isto, mediu-se a componente do campo magnético segundo o eixo do solenoide com núcleo de ar, obtendo-se

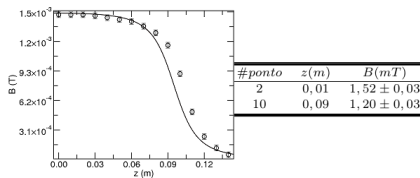


Gráfico 8: Pontos experimentais $B(z)$ segundo o eixo do solenoide, bem como a expressão teórica (5)

Repetiu-se o procedimento, mas para uma distância ao eixo central de $d = 1.5cm$, obtendo-se o seguinte conjunto de pontos:

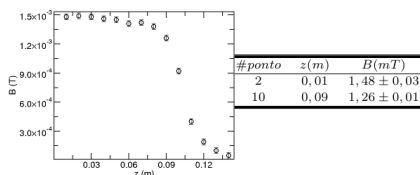


Gráfico 9: Pontos experimentais $B(z)$ para uma distância ao eixo central do solenoide de $1.5cm$

Para o solenoide com núcleo de ferro, mediu-se a componente do campo magnético segundo o eixo (B_z) à superfície do solenoide.

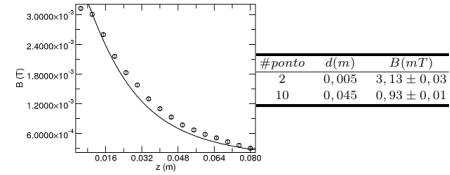


Gráfico 10: Pontos experimentais $B(z)$ para o solenoide com núcleo de ferro, e expressão teórica (5).

A partir das equações 6 e 7, obteve-se a permeabilidade magnética e o vector de Magnetização, vindo:

μ_r	5.05 ± 0.20
M	$5925 \pm 36(A/m)$

Tabela 2: Valores da permeabilidade magnética e vector de Magnetização.

3.4 Característica $B(H)$

Para finalizar, utilizando a segunda montagem, determinou-se o número de espiras interiores através da expressão:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (11)$$

Obtendo-se:

$$n_1 = 1291 \pm 50 \quad n_2 = 45 \pm 3$$

De seguida, regulou-se a tensão de modo a observar no osciloscópio a curva de histerese. Do osciloscópio, retirou-se as tensões necessárias ao cálculo do campo coercivo, da indução remanescente e da indução de saturação, assim como a permeabilidade incremental do material a indução nula (declive de $B(H)$ para $B = 0$).

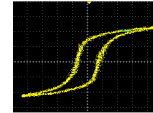


Figura 3: Imagem retirada do osciloscópio a partir da qual se retirou as tensões necessárias ao cálculo de H_c , B_s e B_r .

Grandeza	Valor	Unidades
V_{H_c}	$0,365 \pm 0,092$	V
H_c	150 ± 42	A/m
V_{B_s}	$0,460 \pm 0,024$	V
B_s	1.28 ± 0.15	T
V_{B_r}	$0,288 \pm 0,016$	V
B_r	0.84 ± 0.10	T
ΔV_B	1.44 ± 0.01	
ΔV_H	8231 ± 108	
μ_r		

Tabela 2: Valores das tensões retiradas do osciloscópio e estimativa do declive $B(H)$ para $B = 0$ através de dois pontos, bem como H_c , B_r , B_s e μ_r calculados pelas expressões 9, 8 e 6.

4 Conclusões

Inicialmente, foi estudado o campo magnético na presença de uma bobine (conjunto de espiras) quando percorrido por corrente. Em primeiro lugar, foi realizada uma calibração onde se estudou a relação entre o campo magnético e a intensidade de corrente. Ora, os pontos experimentais obtidos e a previsão teórica são extremamente próximos (quase coincidentes) pelo que podemos afirmar que a calibração foi realizada com êxito e comprovada a relação linear entre o campo magnético e a intensidade de corrente (tal como o bom funcionamento do magnetómetro).

Doravante, o ideal seria ter mantido a intensidade de corrente fixa mas as variações da fonte não permitiram que tal acontecesse. Contudo, embora este valor varie consoante a etapa da experiência, existiu um esforço no sentido de o

manter fixo, e como tal assume-se a constância da intensidade de corrente no decorrer da experiência.

Os dados obtidos do estudo do campo magnético ao longo do eixo de simetria da bobine ajustam-se de forma muito coerente com a previsão teórica. Contudo, os ligeiros desvios existentes podem ser devidos a uma ligeira inclinação do enrolamento face ao plano onde se movimentava a sonda, ou possivelmente de uma ligeira inclinação da sonda face ao eixo, o que se verificou que produzia uma variação significativa na leitura. Através da análise da geometria das linhas de campo magnético para o presente caso, podemos afirmar que no eixo de simetria a componente normal será idêntica em todas as direcções pelo que resultará uma componente normal nula (em outras palavras, a curvatura das linhas de campo -responsável pela componente normal- pode ser caracterizada por um raio que varia de tal forma que se verifica infinito no eixo central da bobine e, assim, estas linhas de campo podem-se considerar rectas, sem componente normal).

Os resultados quando se repetiu a etapa anterior para um eixo paralelo ao central ajustam-se também coerentemente com os resultados previstos, sendo que os desvios são explicados pelos motivos apresentados acima. Esta análise serviu, no entanto, para comprovar que a inexistência da componente normal do campo magnético é uma singularidade do eixo de simetria da bobine e não uma característica uniforme do campo. É de referir que os valores de campo magnético medidos nesta etapa são superiores aos medidos na etapa anterior.

Concluindo a análise de uma bobine única, analisou-se a variação do campo no eixo que une o centro da bobine à mesma. Através da comparação com a previsão teórica, é notório que os valores mais afastados do centro são menores do que o esperado. Isto é explicado pelo facto de se ter aproximado a montagem real a uma espira circular única de espessura desprezável. Assim, a aproximação à espira expõe essa aproximação através da interferência entre as diferentes espiras. Contudo, através da análise dos resultados obtidos podemos verificar que o campo é crescente com a proximidade à espira (devido a uma maior densidade de linhas de campo), o que valida a nota efectuada no parágrafo anterior.

Nesta etapa da experiência, foi estudado o campo magnético produzido por um par de bobines de *Helmholtz*. Exceptuando a calibração, foram realizados o estudo dos mesmos casos do que na etapa anterior. No estudo realizado sobre o eixo de simetria, podemos reparar que o decaimento do campo magnético é muito mais acentuado ao passar a posição de uma das bobines, assim como a inexistência da componente normal. Este segundo facto partilha da explicação anterior, onde dada a simetria em causa existirá uma compensação de todas as componentes normais, resultando no seu anulamento. A quase-constância do campo magnético entre as duas bobines vem do facto da maioria das linhas de campo circundarem ambas as bobines, apresentando o que seria uma uniformidade do campo magnético no seu interior. A variação observada resulta do facto desta aproximação de duas bobines separadas a um solenóide ser algo grosseira, visto existirem linhas de campo que circundam uma só bobine.

Analisando o eixo paralelo, podemos manter a aproximação a um solenóide de forma a explicar a igualdade do módulo do campo quando comparado com o sentido sobre o eixo, a sua quase-constância e, a inexistência de componente normal. Contudo, isto verifica-se apenas até ao ponto onde se passa a posição de uma bobine, onde se nota um pico de intensidade. A proximidade com a bobine faz com que sejam significativas a influência das linhas de campo que circundam apenas essa bobine, justificando o pico medido. Com o sucessivo afastamento, a densidade de linhas de campo irá diminuir, tal como a sua curvatura e, além disso, a influência das linhas de campo que circundam apenas uma bobine torna-se desprezável. Assim, explica-se a

diminuição de tanto a componente normal como tangencial do campo magnético.

Quanto ao estudo do eixo perpendicular, nota-se numa fase inicial a uniformidade do campo que valida a aproximação a um solenóide. Contudo, em pontos mais afastados do eixo central das bobines, esta aproximação deixa de ser válida e a componente tangencial do campo diminui, até devido à curvatura das linhas de campo que circundam uma só bobine.

Seguidamente, foi analisado o campo na presença de um solenóide com núcleo de ar. Podemos observar que o campo se manteve aproximadamente constante enquanto a sonda não se encontrava suficientemente perto das extremidades. Assim, podemos deduzir que um solenóide com comprimento suficiente gera, pelo menos numa pequena região, uma zona de campo magnético uniforme. No caso limite, assumindo um solenóide infinito, o raio de todas as linhas de campo presentes dentro do solenóide era idêntico e infinito, pelo que todas as linhas de campo eram horizontais e a sua densidade uniforme. É de notar que os valores medidos no centro do solenóide e junto às espiras são aproximadamente idênticos (podendo a diferença ser explicada por uma inclinação sistemática da sonda), pelo que podemos afirmar que o solenóide tinha um comprimento suficiente para se poder considerar uma aproximação de um solenóide infinito. No entanto, tratando-se este de um solenóide real com comprimento finito, perto das extremidades e depois destas existirá uma dispersão das linhas de campo e, por conseguinte, uma diminuição na sua densidade. A semelhança entre o decaimento no eixo e na recta paralela ao eixo leva-nos a crer que as linhas de campo mantêm-se quase paralelas mesmo fora do solenóide, pelo menos para uma região próxima deste.

Para o caso do solenóide com núcleo de ferro, foi realizado um ajuste que nos devolveu um valor magnetização $M = 5925 \pm 36(A/m)$, resultando num $\mu_r = 5.05 \pm 0.20$. Ora, sabemos que este valor não ter qualquer tipo de significado para um material ferromagnético. A razão para o valor desprovido de qualquer significado de μ_r e para o mau ajuste dos pontos experimentais à curva de ajuste vem do facto de se ter assumido uma premissa (que a magnetização dentro do solenóide era constante) que se prova inadmissível.

Por último, a análise aos resultados obtidos para a etapa do auto-transformador não foi esclarecedora sobre o material de que este era feito. Embora os valores de campo remanescente ($B_r = (0.84 \pm 0.10)T$) e de campo de saturação ($B_s = (1.28 \pm 0.15)T$) sejam coerentes com os valores apresentados para uma mistura de Ferro e Silício a 4% de Silício, os restantes valores, de H coercivo ($H_c = (150 \pm 42)A/m$) e μ relativo ($\mu_r = 8231 \pm 108$) não se adequem à mistura previamente mencionada, sendo que para tal os valores seriam $H_c = 40A/m$ e $\mu_r = 500$. Contudo, embora o valor de H_c não se adequa a nenhum dos valores apresentados na tabela, o valor encontrado para μ_r adequa-se a uma mistura de Ferro e Níquel a 22% de Níquel. Existem várias aproximações que são cometidas nestes cálculos, como a tratar μ_r numa certa região enquanto linear, e aproximar o comprimento das linhas de campo auxiliar a um valor único. Estas duas aproximações afectam, respectivamente, o valor de μ_r e o valor de H_c pelo que podem estar na origem da discrepância destes valores. Assim, ao ignorarmos os valores obtidos por considerarmos as aproximações demasiado grosseiras, podemos afirmar que o material de que o núcleo do auto-transformador é composto é uma liga de Ferro com uma baixa percentagem (8%) de Silício.

5 Referências

- FIGUEIRINHAS, João. "Protocolos dos trabalhos práticos de Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica", 2014 IST