

Condutividade Térmica

Maria Joana Correia, nº 62844, Pedro Carrilho, nº 63431, and Ricardo Teixeira, nº 63443

Laboratório de Complementos de Electromagnetismo e Termodinâmica

Professor Responsável: João Figueirinhas

Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica

Instituto Superior Técnico

(Dated: 07/04/2009)

Neste trabalho pretende-se determinar a condutividade térmica do alumínio pela análise do fluxo de calor numa barra, sujeita a um gradiente de temperatura, inicialmente em regime estacionário e posteriormente em regime variável. No primeiro caso obtiveram-se valores experimentais com exactidões superiores a 90%. Para a segunda parte da experiência, determinou-se o valor da condutividade com uma exactidão de 42% efectuando um ajuste pela equação do calor mantendo a posição constante e fazendo variar a temperatura em função do tempo e uma exactidão de 89% através da avaliação da equação do calor num só ponto.

I. INTRODUÇÃO

O calor pode ser transmitido entre 2 corpos de três formas distintas: a condução, a convecção e a radiação. Neste trabalho será estudado um modelo para a condução. Neste caso o material estudado é um metal e será determinada a sua condutividade térmica.

O modelo mais simples para a condução é a lei de Fourier que relaciona a densidade de fluxo de calor (\vec{j}_Q) com o gradiente da temperatura da seguinte forma:

$$\vec{j}_Q = -k\nabla T \quad (1)$$

Onde k é a condutividade térmica, que para um material isotropo e homogéneo (como o estudado) é uma constante escalar. Considerando um dado volume fechado V do material, a quantidade de calor perdida pelo interior por unidade de tempo é igual ao fluxo de \vec{j}_Q pela superfície do volume (∂V):

$$\int_{\partial V} \vec{j}_Q \cdot \vec{n} dS = -\frac{dQ_i}{dt} \quad (2)$$

Mas de acordo com o teorema da divergência e tendo em conta que dQ é proporcional à massa (m) dentro de V , ao calor específico (c) e à diferença de temperatura (dT), tem-se:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{j}_Q dV = -mc \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

Sabendo que \vec{j}_Q é dado por (1) e que a massa é o integral no volume da densidade (ρ) obtém-se:

$$\int_V \nabla^2 T dV = \int_V \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (4)$$

Como esta relação tem de ser válida para qualquer volume de material a estudar, as funções integrandas têm de ser iguais excepto num conjunto de medida nula (neste caso concreto, um conjunto ou reunião numerável de conjuntos de dimensão menor que 3), como por exemplo alguma superfície onde haja uma descontinuidade das funções. Esse não é um problema, já que esta equação será

apenas aplicada dentro do material onde se suporá que não há descontinuidades. Desta forma ficamos com a equação do calor:

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5)$$

Esta equação é muito simples e simboliza o facto da transmissão de um aumento da temperatura ao exterior estar acompanhada de um aumento temporal da temperatura no ponto considerado. Inversamente se não houver variação da temperatura ao longo do tempo isso significa que as variações nas diferenças de temperatura de ponto para ponto se anulam, ou seja, embora a diferença de temperatura entre dois pontos possa aumentar numa direcção tem de diminuir numa outra direcção (a esta situação chama-se regime estacionário). No caso unidimensional isto significa que as diferenças de temperatura entre dois quaisquer pontos são constantes. Nesse caso tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

Resolvendo esta equação fica-se com o perfil de temperaturas ao longo da direcção x , (no caso deste trabalho será a direcção da barra do metal):

$$T(x) = \frac{T_{FQ} - T_{FF}}{L} x + T_{FF} \quad (7)$$

Em que T_{FQ} e T_{FF} são as temperaturas das extremidades da barra e L o seu comprimento. Neste caso estacionário e unidimensional \vec{j}_Q é constante pelo que a quantidade de calor libertada numa dada área S centrada no ponto x e perpendicular ao eixo da barra é dada por:

$$\frac{dQ}{dt} = \|\vec{j}_Q\| S = k \frac{dT}{dx} S \quad (8)$$

Tem-se agora uma forma simples de determinar a condutividade desde que se consiga medir a quantidade de calor por unidade de tempo na barra. Uma outra forma

de o fazer é estudando o regime variável, ainda no caso unidimensional. Resolvendo a equação do calor, tomando como condição inicial a solução do regime estacionário e supondo que a temperatura perto da fonte fria se mantém constante ao longo do tempo, tem-se a seguinte solução:

$$T(x, t) = T_{FF} + (T_{FQ} - T_{FF}) \frac{8}{\pi^2} S \quad (9)$$

Com S dado pela série:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)^2} e^{-\frac{k}{\rho c} \left(\frac{\pi/2+n\pi}{L} \right)^2 t} \sin \left(\frac{x}{L} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right) \right) \quad (10)$$

Assim pode obter-se k desde que se saiba a evolução temporal da temperatura num ponto da barra. Uma outra forma de determinar a condutividade é obtendo valores para a derivada no tempo e para a segunda derivada no espaço para um qualquer ponto. Sabendo isso é muito fácil calcular k a partir de (5).

II. EXPERIÊNCIA REALIZADA

O sistema em estudo é constituído por uma barra de alumínio que num extremo está em contacto com um sistema de aquecimento eléctrico e no extremo oposto a um sistema de arrefecimento a água. Ao longo da barra de alumínio estão dispostas cinco sensores resistivos bem como mais um em cada extremo. A partir de software apropriado é possível converter as tensões lidas em temperaturas. Em primeiro lugar aplica-se um tensão eficaz de 12V ao sistema de aquecimento. Aguarda-se até que o sistema tenha atingido o regime estacionário e registam-se as temperaturas nos vários pontos da barra, na fonte fria, fonte quente e a temperatura do fluido de arrefecimento à entrada e à saída. Repete-se para uma tensão eficaz de 18V.

1ª parte

Com auxílio de uma proveta e um cronómetro mede-se o caudal do sistema de arrefecimento a cada 30 minutos durante toda esta fase do trabalho laboratorial. Com os dados experimentais obtidos fazem-se regressões lineares (uma para cada tensão eficaz) em que as temperaturas são postas em função da posição na barra e a partir do declive da recta que melhor se aproxima aos dados experimentais obtem-se o gradiente de temperatura médio na barra. Este valor servirá para calcular a condutividade térmica do alumínio a partir da fórmula (8).

A potencia removida pelo fluido circulante calcula-se a partir de $m_{fluido} c_{gua} \Delta T$ e da diferença entre a poentecia eficaz e esta resulta a perda de calor.

Finalmente calculam-se as resistências térmicas da fonte quente, fonte fria e da barra, a partir de $\frac{\delta T}{P}$ em que, no caso das fontes, Δt é a variação de temperatura da fonte em questão e do ponto ca barra mais próximo.

2ª parte

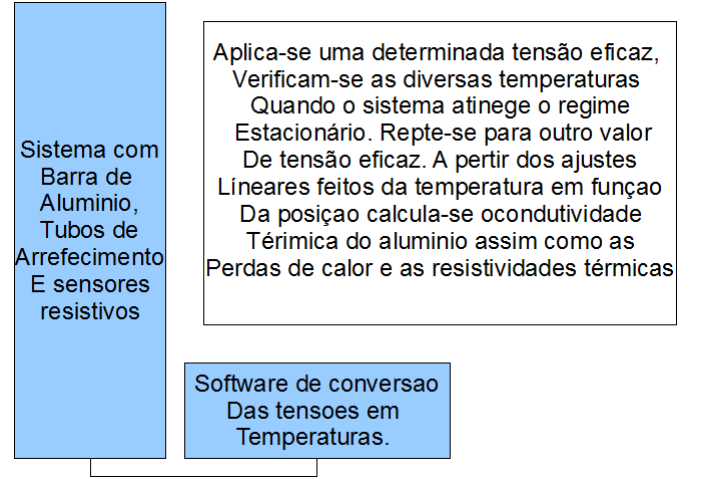


Figura 1: Determinação da condutividade térmica do alumínio em regime estacionário

Na segunda parte da experiência retira-se o contacto da barra de alumínio com a fonte quente de modo a poder-se determinar o valor da condutividade térmica em regime variável. A temperatura irá começar a diminuir gradualmente e são registados os valores das várias temperaturas (temperaturas ao longo da barra bem como temperatura da fonte quente, fonte fria, entrada e saída do fluido) em ordem ao tempo.

De seguida escolhe-se uma das temperaturas T1 a T5 e traça-se a sua variação temporal efectuando-se o ajuste à expressão 10 de forma a determinar a condutividade. Por fim compara-se com o valor obtido para esta grandeza no regime estacionário.

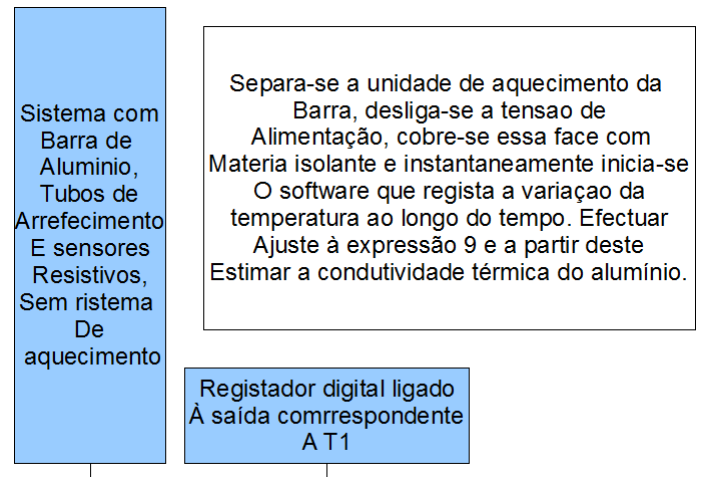


Figura 2: Determinação da condutividade térmica do alumínio em regime variável

III. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Aqui se apresentam os dados recolhidos neste trabalho tal como os gráficos necessários.

A. Regime Estacionário

| Tabela 1a | | | T (K) | d(m) |
|---------------------|--------|-------|--------|-------|
| P (W) | 12.95 | FQ | 326.23 | — |
| V (V) | 12.33 | FF | 297.53 | — |
| I (A) | 1.05 | H2O a | 295.98 | — |
| dT/dx (K/m) | 148.27 | H2O b | 295.27 | — |
| k (W/m.K) | 218.29 | 1 | 317.47 | 0.01 |
| P_{remov} (W) | 7.48 | 2 | 314.82 | 0.035 |
| Perdas de calor (J) | 5.47 | 3 | 311.03 | 0.06 |
| RT_{FQ} K/W | 0.52 | 4 | 306.72 | 0.085 |
| RT_{barra} K/W | 1.37 | 5 | 302.98 | 0.11 |
| RT_{FF} K/W | 0.32 | | | |
| Precisão (%) | 73.43 | | | |
| Exactidão (%) | 92.11 | | | |

Dados para tensão da fonte aprox. 12 V

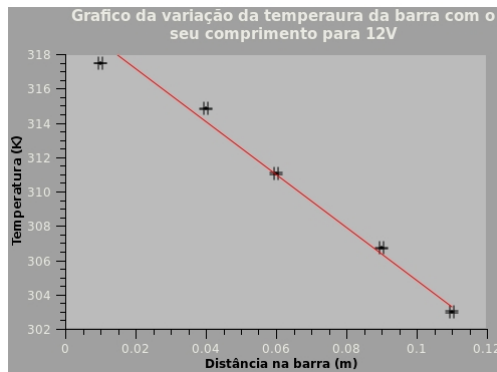


Figura 3: Determinação de $\frac{dT}{dx}$ para V=12 V

| Tabela 1b | | | T (K) | d(m) |
|---------------------|--------|-------|--------|------|
| P (W) | 27.15 | FQ | 358.38 | — |
| V (V) | 17.86 | FF | 300.8 | — |
| I (A) | 1.52 | H2O a | 297.1 | — |
| dT/dx (K/m) | 296.89 | H2O b | 295.62 | — |
| k (W/m.K) | 228.6 | 1 | 340.38 | 0.01 |
| P_{remov} (W) | 15.55 | 2 | 334.49 | 0.04 |
| Perdas de calor (J) | 11.6 | 3 | 326.29 | 0.06 |
| RT_{FQ} K/W | 0.53 | 4 | 317.64 | 0.09 |
| RT_{barra} K/W | 1.31 | 5 | 311.69 | 0.11 |
| RT_{FF} K/W | 0.28 | | | |
| Precisão (%) | 86.39 | | | |
| Exactidão (%) | 96.45 | | | |

Dados para tensão da fonte aprox. 18 V

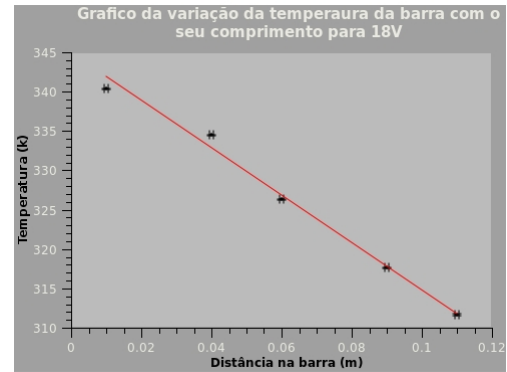


Figura 4: Determinação de $\frac{dT}{dx}$ para V=18 V

| Tabela 1c |
|--------------|
| Caudal (g/s) |
| 2.50E+00 |
| 2.54E+00 |
| 2.47E+00 |
| <Caudal> |
| 2.50E+00 |

Medidas sucessivas do caudal

| Tabela 1d | |
|------------------------|-----------------------|
| Instrumentos de medida | Incertezas de leitura |
| Régua (m) | 0 |
| Programa conversor V-T | variável |
| Voltímetro (V) | 0.01 |
| Amperímetro (A) | 0.01 |
| Cronómetro (s) | 0.2 |
| Proveta (mL) | 0.5 |

B. Regime Variável

Os dados do gráfico seguinte são demasiado extensos para serem aqui incluídos.

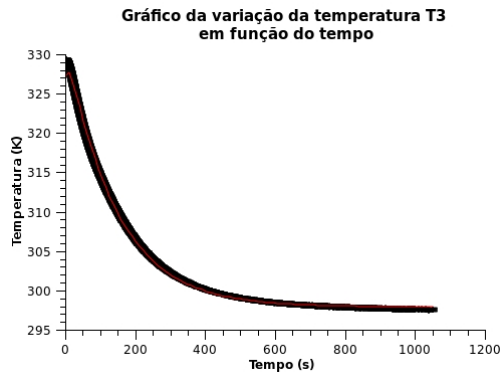


Figura 5: Gráfico de T3 em função de t

| Tabela 2a | | | | |
|--------------|-----------|-------|-------|-------------|
| | tempo (s) | | | Posição (m) |
| | 23.94 | 13.25 | 18.73 | |
| T1 (°C) | 61.59 | 65.46 | 63.34 | 0.01 |
| T2 (°C) | 58.61 | 61.74 | 60.12 | 0.04 |
| T3 (°C) | 53.01 | 55.03 | 54.01 | 0.06 |
| T4 (°C) | 46.09 | 46.97 | 46.6 | 0.09 |
| T5 (°C) | 40.1 | 40.46 | 40.32 | 0.11 |
| delta T (K) | 1.03 | 1 | | |
| média dT (K) | 1.01 | | | |
| média dt (s) | 5.34 | | | |
| dT/dt (K/s) | 0.19 | | | |

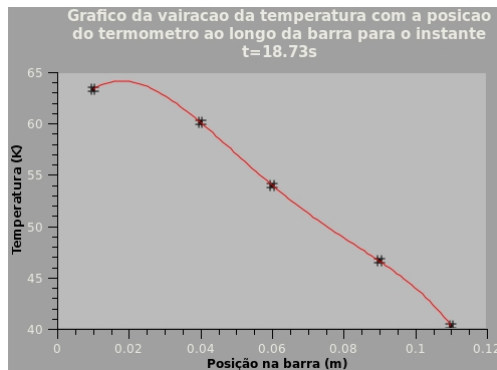


Figura 6: Interpolação polinomial da temperatura em função de x para um dado t de modo a calcular $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2171 \text{ K m}^{-1}$

IV. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na primeira experiência determinou-se inicialmente o gradiente médio para cada tensão aplicada. Os valores foram $-148,27 \pm 40 \text{ K m}^{-1}$ para $V=12 \text{ V}$ e $-296,89 \pm 40 \text{ K m}^{-1}$ para 18 V . Estes valores da incerteza foram

obtidos por análise dos declives da rectas que uniam os pontos mais afastados de ambas as rectas de ajuste (figura 1 e 2). O valor calculado para a condutividade foi em média de $223 \pm 59 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ sendo que para a primeira tensão (12 V) foi de $218 \pm 59 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e para a segunda (18 V) foi de $228 \pm 31 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ de acordo com a tabela 1a e 1b. Por análise de ambas as referidas tabelas, conclui-se que as perdas de energia calculadas foram 5,47 J e 11,2 J para $V=12 \text{ V}$ e 18 V respectivamente. Para as resistências térmicas obteve-se (em pares para 12 e 18 V) 0,52 K/W e 0,53 K/W na junção da fonte quente, 0,28 K/W e 0,32 K/W na fonte fria e 1,37 K/W e 1,31 K/W para a barra de alumínio.

Na segunda experiência obteve-se um valor de $99,9 \pm 0,2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (uma exactidão de 42%) para a condutividade pelo ajuste a (9) (figura 3) e usando um segundo método escolhendo um instante determinado desta forma mantendo-se o tempo constante, obtém-se um valor de $211 \pm 0,14 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ (exactidão de 89%) para o valor da condutividade térmica determinada a partir do gráfico da variação da temperatura em função da posição ao longo da barra (figura 4).

V. CONCLUSÃO

Na experiência do regime estacionário foi possível verificar que o perfil da barra está de acordo com (7), sendo portanto possível determinar a condutividade com sucesso, visto que tem um desvio à exactidão de apenas 6%, em média. Esta diferença do valor esperado deve-se provavelmente ao facto de não haver total isolamento na barra. Isto pode ter aumentado o valor absoluto do declive, diminuindo assim o valor calculado de k. No que toca às perdas de calor, os valores observados devem-se muito provavelmente a erros na medição das temperaturas, como tinha sido referido pelo docente. Por outro lado pode acontecer que o isolamento da região da fonte fria seja inferior ao da restante barra, fazendo com que o calor não fosse transmitido à água e se perdesse para outras regiões. Na determinação das resistências térmicas observou-se um comportamento previsível já que esses valores se mantiveram constantes independentemente da potência fornecida.

Na segunda experiência, os resultados foram consideravelmente piores. Primeiramente o ajuste à solução da equação do calor dada por (9) foi bem sucedido, no entanto o valor obtido para a condutividade é aproximadamente metade daquele esperado. Embora fosse prevista alguma diferença do valor esperado, essa diferença deveria ser devida ao facto de se supor que a temperatura perto da fonte fria era sempre constante, o que efectivamente não acontece. Mas essa suposição não alteraria assim tanto o resultado, pelo que se pode aqui inferir que houve enganos no registo da fórmula na aula teórica e visto não ter sido possível ao grupo a resolução da equação do calor para as condições iniciais dadas, não houve forma de verificar ou corrigir esses possíveis

enganos. Quanto ao outro metodo, o resultado foi aparentemente melhor já que está muito mais próximo do esperado. No entanto este resultado varia de forma relevante se se alterar o ponto onde se calculam as derivadas. Isto pode dever-se ao ruído relativamente elevado nos sensores, já que para pontos muito diferentes daquele aqui escolhido (mais perto da região de estabilização) a derivada no tempo tem um erro muito maior, por vezes de ordem de grandeza igual ao próprio valor determinado para k . Dessa forma o valor dessa derivada não é de confiança quando calculado nesses pontos e portanto tornam-se aceitáveis estas variações no resultado obtido

para k .

VI. BIBLIOGRAFIA

- [1] <http://www.mathphysics.com/pde/HEderiv.html>
- [2] Notas das aulas teoricas
- [3] http://www.ciul.ul.pt/~figuei/conductividade //_termica.pdf