

基于 Haar 小波变换-DCT-SVD 的数字图像隐写模型

摘 要

随着计算机网络广泛应用，越来越多的电子资源通过网络进行传播，与此同时，版权问题不容小觑。数字水印技术是保护电子版权问题的关键技术之一。为了避免原图像被破坏，隐写术被广泛关注和使用。

针对问题一，为了建立嵌入信息“深圳杯数学建模挑战赛”的图片 SP 模型，本文采用基于 Haar 小波变换、离散余弦变换（DCT）和奇异值分解（SVD）的图像频域数字水印算法。将图像 P 转换到 YUV 彩色空间，对这三个空间矩阵做 Haar 小波变换，得到一条低频子带和三条高频子带。只选择低频子带划分窗口，对每个窗口做 DCT 变换和 SVD，将著作权信息嵌入图片，再经逆变换倒序重复上述步骤即可得到图片 SP。图片 SP 在视觉上与原图像 P 无差别，尺寸上与原图像 P 相同。对于从图片 SP 中提取著作权信息，即对图片 SP 采取 Haar 小波变换、DCT 和 SVD，从奇异值中即可得到隐藏的著作权信息。

针对问题二，为了尽可能将《中华人民共和国著作权法》（第三次修正案）中的所有文字信息嵌入附件 1 的图片中，并求出最多容纳的字数。本文通过爬虫爬出网页上的全部文字内容，并将文字转化为字码编号，即 UTF-8 编码。将其全部内容插入附件一图片中，但由于空间有限，不能将所有的文字嵌入。通过数学求解计算，得到嵌入字数理论值为 1590，由于解码过程中，部分位会发生错误造成解码不正确，嵌入字数的理论值与实际嵌入字数有一定的偏差，得到的正确的能嵌入附件一图片中的字数为 575 个字。

针对问题三，在电子图片传递的过程中，会经历被压缩或以不同的图片格式存储，或者其他几何变形等。本文通过解码，观察是否能得出隐藏的信息，若能，则可以沿用问题一的算法；反之，则不能使用。经解码得出，被压缩时依据以不同的图片格式存储时可以沿用问题一的算法。但当图片被缩放、旋转或其他几何变形时则不能。当图片被压缩时，加入噪声，遮挡图片可以直接进行复原；当图片被压缩和旋转时，都需要知道缩放比例和旋转角度才能复原；当图片被剪裁时，需要将其与原图像对比，放入相应位置才可解码。

针对问题四，若为了保护其他电子图片的著作权，我们使用问题一的算法时应要注意图像大小和嵌入信息量。图像的大小应大于 256×256 ，以避免在 SVD 中出现差错，防止信息插入失败；嵌入信息的字数应小于等于每张图片可容纳字数的最大值，若嵌入信息过多，超过每张图片可容纳字数的最大值，则嵌入信息会被截断。

关键词： Haar 小波变换 DCT SVD 图像数字水印

一、问题重述

1.1 问题背景

随着计算机网络广泛应用，越来越多的电子资源通过网络进行传播，与此同时，版权问题不容小觑。数字水印技术是保护电子版权问题的关键技术之一。但由于可见水印对电子图片著作权保护时，会破坏图片自身结构并且容易被剔除，因此，隐写术被广泛关注和使用。

隐写术为信息隐藏学的一个重要分支，历史悠久，专注于研究如何隐藏实际存在的信息。它将特定的信息嵌入信息载体而不易被察觉，被广泛地应用于版权保护、数据附加等领域。

1.2 问题提出

问题一：针对附件一的图片，建立生成嵌入信息“深圳杯数学建模挑战赛”的图片的数学模型，要求在视觉上与原图相近。将生成图片的源代码和结果图片置于附录 A，将给出提取著作权信息的源代码并置于附录 B。

问题二：使用问题一的模型和算法，最大程度地将《中华人民共和国著作权法》（第三次修正案）中的信息嵌入附件一的图片中。

问题三：在电子图片传递的过程中，出现几何变形、被压缩或以不同图片格式存储等变化，此时，问题一的算法是否可行，将如何改进。

问题四：若要保持其他电子作品的著作权，使用问题一的算法时有什么注意事项，不超过三条并说明理由。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

题目要求建立嵌入信息深圳杯数学建模挑战赛的图片 SP 模型，使之与原图 P 尽可能的相似，本文采用基于 Haar 小波变换、离散余弦变换和奇异值分解的图像频域数字水印算法。首先将封面图像 P 转化到 YUV 彩色空间，接着利用 Haar 小波变换进行低通和高通滤波，然后利用 DCT 将每个窗口矩阵经变换后得出系数矩阵，最后经过 SVD 将著作权信息嵌入图片，再经逆变换倒序重复上述步骤即得到图片 SP。对于从图片 SP 中提取著作权信息，即对图片 SP 采取 Haar 小波变换、DCT 和 SVD，即得到奇异值中隐藏的著作权信息。

2.2 问题二的分析

题目要求尽可能将《中华人民共和国著作权法》（第三次修正案）中的所有文字信息嵌入附件 1 的图片中，最多能嵌入多少个字。先用爬虫爬出网页上全部的文字内容，将文字转化为字码编号。将其全部内容插入附件一图片中，由于直接插入出错，即不能将所有的文字嵌入。通过数学求解计算，可得到嵌入字数的理论值，

但由于解码时字符编码出现问题导致解码不成功，即嵌入字数的理论值与实际嵌入字数有一定偏差。

2.3 问题三的分析

在电子图片传递的过程中，可能会被压缩或以不同的图片格式存储，或者其他几何变形等。本文通过解码，观察是否能得出隐藏的信息，若能，则可以沿用问题一的算法；反之，则不能使用。经解码得出，被压缩时以及以不同的图片格式存储时可以沿用问题一的算法；但当图片被缩放、旋转或其他几何变形时不能使用问题一中的算法。当图片被压缩时，加入噪声，遮挡图片可以直接进行复原；当图片被压缩和旋转时，都需要知道缩放比例和旋转角度才能复原；当图片被剪裁时，需要将其与原图像对比，放入相应位置才可解码。

2.4 问题四的分析

若要保持其他电子图片的著作权，我们使用问题一的算法时应要注意图像的大小应大于 256×256 ，以避免在 SVD 中出现差错，防止信息插入失败；嵌入信息的字数应小于等于每张图片可容纳字数的最大值，若嵌入信息过多，超过每张图片可容纳字数的最大值，则嵌入信息会被截断。

三、模型假设

- 1、假设问题二中嵌入的信息都为中文字符。
- 2、假设问题三当图片被压缩和旋转时，已知缩放比例和旋转角度。
- 3、假设去掉一些微不足道的细节系数并不影响对重构图像的理解。

四、符号说明

符号	说明
S	奇异值矩阵
U	正交矩阵
V	正交矩阵
r	矩阵 A 的秩
N	输入图像的宽度
lf	滤波器的长度

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

水印可分为变换域和空间域方法；其中空间域技术工作在像素值上，变换技术使用离散余弦变换（DCT）将像素值转换为频带（系数）值，并进行水印嵌入的过程，从而在图像中产生更多的影响到一个区域的值。在大多数相关工作中，水印信

号被仔细地插入到给定图像的某些指定块中。数字信号处理技术中应用较为广泛的变换有离散余弦变换（DCT）、离散傅里叶变换（DFT）、离散小波变换（DWT）、奇异值分解（SVD）。DCT 将图像划分为具有不同显著性的部分或频谱子带。

5.1.1 模型的建立

离散小波变换（DWT）

离散小波变换是对基本小波的尺度和平移进行离散化。在图像处理中，常采用二进小波作为小波变换函数，即使用 2 的整数次幂进行划分。小波分解的意义在于能够在不同尺度上分解图像矩阵，不同尺度的选择可以根据不同的图像来确定。由于其良好的多分辨率分析、能量压缩特性，以及与压缩标准的兼容性，对噪声和压缩攻击具有良好的鲁棒性。

由于其良好的性能，DWT 被广泛地应用于图像处理中。它可以将一幅图像分解为一个低频子带 LL 和三个高频子带 HL，LH，HH，这个过程可以重复进行进一步分解。低频子带是图像的轮廓系数带，具有非常好的稳定性，在水印提取中起着重要作用。高频子带是细节子带，它反映了原始图像的边缘、轮廓、纹理等信息。

离散余弦变换（DCT）

离散余弦变换（DCT）是可分离的变换，其变换核为余弦函数。DCT 除了具有一般的正交变换性质外，它的变换阵的基向量能很好地描述人类语音信号和图像信号的相关特征。因此，在对语音信号、图像信号的变换中，DCT 变换被认为是一种准最佳变换。

DCT 有很强的信息集中能力。对于大多数自然图像，DCT 可以将大部分信息放在更少的系数上，提高了编码效率。由于 DCT 在抗 JPEG 压缩方面具有很大的优势，因此在数字水印中起着重要应用。

利用 DCT 变换可以很好地将空间域数据变换到频率域数据，通过 IDCT 逆变换可以将频率域数据变换回空间域数据。下面的方程表示 DCT 公式 1 和 2。方程给出了相应的二维 DCT 逆变换。

对于 $N \times N$ 图像矩阵，其二维 DCT 可表示为：

$$F(u, v) = c(u)c(v) \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j) \cos \left[\frac{(i+0.5)\pi}{N} u \right] \cos \left[\frac{(j+0.5)\pi}{N} v \right] \quad (1)$$

二维离散余弦逆变换（IDCT）可以定义为：

$$f(i, j) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} c(u)c(v) F(u, v) \cos \left[\frac{(i+0.5)\pi}{N} u \right] \cos \left[\frac{(j+0.5)\pi}{N} v \right] \quad (2)$$

其中，

$$c(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, u \neq 0 \end{cases}, c(v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}}, v = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}}, v \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$f(i, j)$ 表示位置 (i, j) 的像素值的强度，系数值为 $F(u, v)$ ，其中频域位置 (u, v) ，输入图像宽度用 N 表示，频域矩阵左上角的系数表示图像频域的 DC 值。剩下的部分是 AC 值，每个点的 AC 绝对值表示能量的体积。使用 DCT 将图像转换成频域。

奇异值分解 (SVD)

奇异值分解在某些方面与对称矩阵或 Hermite 矩阵基于特征向量的对角化类似。然而这两种矩阵分解尽管有其相关性，但还是有明显的不同。谱分析的基础是对称阵特征向量的分解，而奇异值分解则是谱分析理论在任意矩阵上的推广。

$$A = USV^T \quad (4)$$

其中 U 和 V 是正交矩阵， $S = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ 是奇异值矩阵， $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} (i = 1, 2, \dots, r)$ ， r 是 A 的秩。

SVD 在图像变换特别是数字水印技术起着重要作用。矩阵的奇异值表征了矩阵数据的分布特征，具有很好的稳定性，奇异值的轻微变化不会影响图像的视觉效果。此外，SVD 对图像矩阵的大小没有限制。

5.1.2 模型的求解

为了将“深圳杯数学建模挑战赛”信息嵌入图片 P 中，并对信息进行隐写，本文采取基于 Haar 小波变换、离散余弦变换和奇异值分解的图像频域数字水印算法^[1]。其中数字水印的嵌入模型是将信息嵌入到经过离散小波变换和离散余弦变换后提取的奇异值中，实现著作权信息隐写，得到隐藏图像 SP。数字水印的提取模型是对于隐藏图像 SP 进行同样的频域变换后，将分解后的奇异值中的著作权信息提取出来，再进行逆变换还原出封面图像。

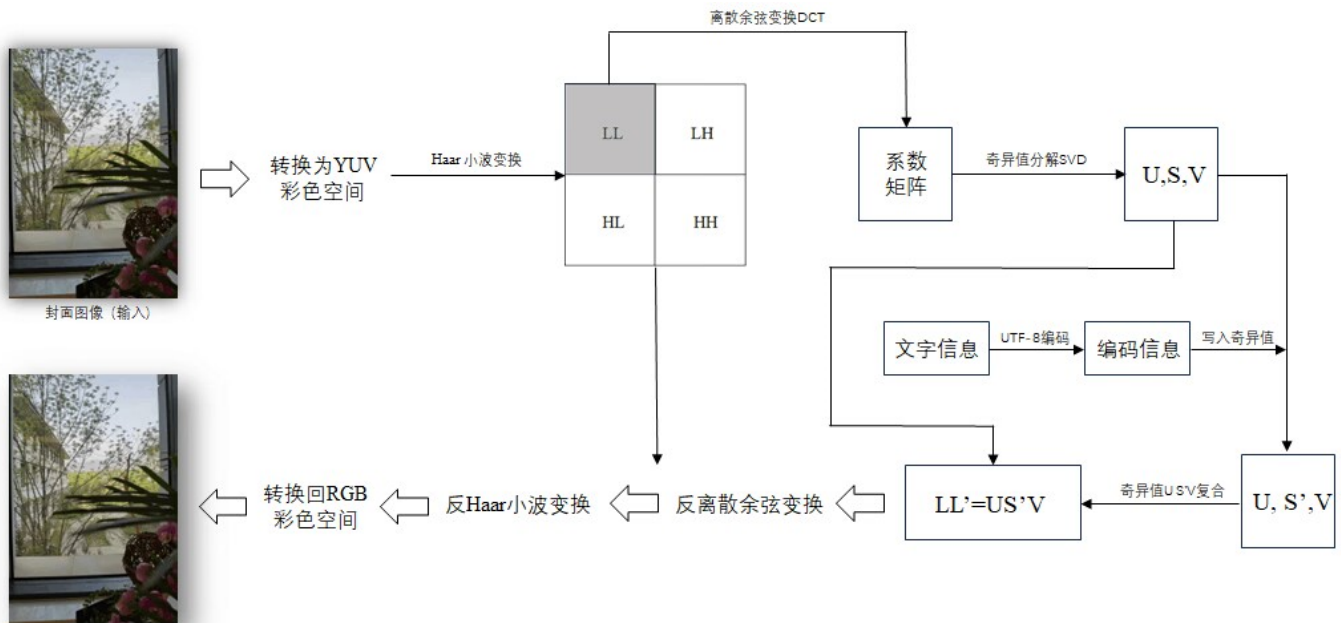


图1 水印嵌入流程图

(1) 建立生成嵌入信息图片 SP 模型

将封面图像 P 转换到 YUV 空间， P 的大小为 1280×1896 。虽然日常生活中接触得比较多的是 RGB 色彩空间，但是还有另一种比较常用的色彩空间是 YUV。RGB 色彩空间更适合图像采集和显示，YUV 空间对于编码和存储等工作效果较好。对三个空间矩阵 Y 、 U 、 V 分别进行下列变换。

Step1: Haar 小波变换

将封面图像，即原图像 P ，从水平和竖直两个方向进行低通和高通滤波，水平和竖直方向先后不影响。低频子带是图像的轮廓系数子带，具有非常好的稳定性，在水印提取中起着重要作用。高频子带是细节子带，它反映了原始图像的边缘、轮廓、纹理等信息。对于许多信号，低频成分相当重要，它常常蕴含着信号的特征，而高频成分则给出信号的细节或差别。人的话音如果去掉高频成分，听起来与以前可能不同，但仍能知道所说的内容；如果去掉足够的低频成分，则听到的是一些没有意义的声音。因此，我们将信息隐藏在低频子带中，以增加图片的鲁棒性。

由于近似系数作为数组返回，其大小取决于 X 。设 $sx = \text{size}(X)$ ， lf 为分解过滤器的长度。将 DWT 扩展模式设置为周期化，则输出的大小为 $\text{ceil}(sx/2)$ ，因此，在小波变换的过程中，图像的大小发生了改变，此时图像的大小为 640×948 。



图 2 Haar 小波变换输出图像与原图像 P 对比

Haar 小波变换输出的图像为低频子带信息，它反映了图像的轮廓子带系数，具有非常好的稳定性，用于之后的水印提取。图 2 为原图与 Haar 小波变换输出图像的对比，可以看出 Haar 小波输出图像为原图像 P 的轮廓。

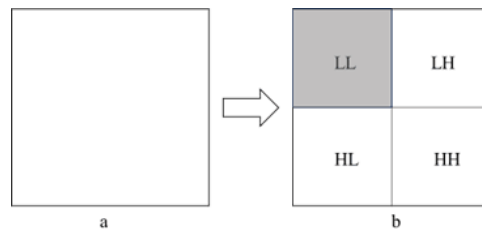


图 3 Haar 小波变换

通过水平和竖直方向进行低通和高通的滤波处理，用图像表述如图 3 表示。其中，a 表示原图像，表示小波处理过后的结果。LL 表示低频子带，LH 表示水平方向的细节，HL 表示竖直方向的细节，HH 表示对角线方向的细节。其中，一级分解得到的高频子带是图像最精细的细节刻画，隐秘信息的嵌入会破坏图像的精细结构。

Step2: 离散余弦变换 (DCT) [2]

离散余弦变换将空间数据域转换为频域数据，即输入每一个窗口矩阵，最终输出一个系数矩阵。将小波变换后滤除的低频数据 LL 做图像卷积，卷积核大小为 4×4 ，再对每一个窗口分别做离散余弦变换。输入大小为 640×948 的 LL 矩阵，输出离散余弦变换后的系数矩阵，大小仍为 640×948 。

Step3: 奇异值分解 (SVD) 并进行信息隐写

将上一步得出来的矩阵进行奇异值分解，其中， U 、 V 为正交矩阵， S 为奇异值，对奇异值插入信息，即将“深圳杯数学建模挑战赛”信息转化为 UTF-8 编码，在每个窗口插入一段编码，得到新的奇异值 S_1 。

Step4: 输出隐藏图像

对修改后的低频奇异值矩阵进行重新合成。利用新的奇异值 S_1 ，对 S_1 、 V 、 D 进行复原，结合其他小波子带，先利用逆 DCT，后利用逆小波变换，再将其转化

为 RGB 空间，最后输出隐藏图像。



图 4 原图像 P



图 5 嵌入信息图像 SP

将著作权信息隐写于图片后，根据图 4 和图 5 的对比，在视觉上与原图 P 相近，在尺寸上，嵌入信息的图像 SP 的大小与原图像相同。

(2) 在图片 SP 中提取著作权信息

为了在图片 SP 中提取著作权信息，本文将依旧沿用加密的部分步骤，得到奇异值中隐藏的著作权信息。将图片 SP 转换到 YUV 空间，对三个空间矩阵进行变换。通过 Haar 小波变换，在水平和竖直方向进行低通和高通的滤波，得到一条低频子带和三条高频子带。经过 DCT 变换，对低频信息做卷积变换，将其划分为多个窗口，经过变换，得到最终系数矩阵。最后进行奇异值分解，得到奇异值，提取出隐藏的著作权信息。从图片 SP 中提取著作权信息的流程图如图 6 所示。

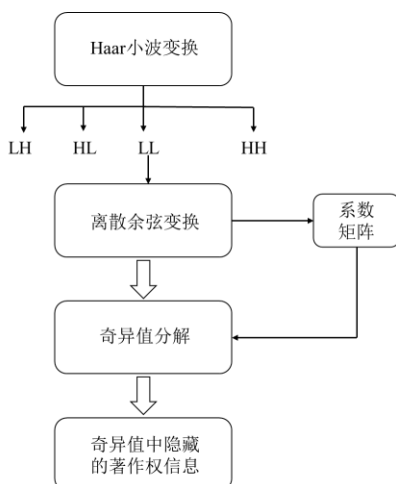


图 6 提取著作权信息流程图

5.2 问题二模型的建立与求解

为了尽可能将《中华人民共和国著作权法》（第三次修正案）中所有的文字信息嵌入附件一中，并求出最多的嵌入字数。本文通过加码和解码，计算出嵌入字符的理论值和实际值。

首先通过爬虫爬出网页上全部的文字内容，由于汉字在计算机内不能识别，所以将汉字转化为字码编号，即 UTF-8 编码。将其作为内容插入图片中，先加码后解码。若将其全部插入，由于插入文字过多，出现报错现象，即不能将所有的文字嵌入。

理论值计算

根据上一问得知，原图像 P 经过 Haar 小波变换后，大小从 1280×1896 转变为 640×948。本文将 640×948 的图像划分为若干个 4×4 的窗口。

$$\text{窗口数} = 160 \times 237 = 37920 \tag{5}$$

由于一个窗口可以容纳一个字节，所以字节数等于窗口数

$$\text{字节数} = \frac{\text{窗口数}}{8} = \frac{37920}{8} = 4740 \tag{6}$$

依据中文字符与字节的换算关系

$$1 \text{ 个中文字符} = 3 \text{ 字节} \tag{7}$$

根据数学换算关系，最多嵌入的中文字符数

$$\text{最多嵌入的中文字符数} = \frac{4770}{3} = 1590 \tag{8}$$

实际值计算

第八条 著作权人和与著作权有关的权利人可以授权著作权集体管理组织行使著作权或者与著作权有关的权利。依法设立的著作权集体管理组织是非营利法人，被授权后可以以自己的名义为著作权人和与著作权有关的权利人主张权利，并可以作为当事人进行涉及著作权或者与著作权有关的权利的诉讼、仲裁、调解活动。

著作权集体管理组织根据授权向使用者收取使用费。使用费的收取标准由著作权集体管理组织和使用者代表协商确定，协商不成的，可以向国家著作权主管部门申请裁决，对裁决不服的，可以向人民法院提起诉讼；当事人也可以直接向人民法院提起诉讼。

著作权集体管理组织应当将使用费的收取和转付、管理费的提取和使用、使用费的未分配部分等总体情况定期向社会公布，并应当建立权利信息查询系统，供权利人和使用者查询。国家著作权主管部门应当依法对著作权集体管理组织进行监督、管理。

著作权集体管理组织的设立方式、权利义务、使用费的收取和分配，以及对其监督和管理等由国务院另行规定。

第二章 著作权

第一节 著作权人及其权利

第九条 著作权人包括：

（一）作者；

（二）其他依照本法享有著作权的自然人、法人或者非法人组织。

图 7 理想嵌入信息部分截图

第八条 著作权人和与著作权有关的权利人可以授权著作权集体管理组织行使著作或者与著作有关的权利。依法设立的著作权集体管理组织是非营利法人，被授权后可以以自己的名义为著作权人和与著作权有关的权利人主张权利，并可以作为当事人进行涉及著作权或者与著作权有关的权利的诉讼、仲裁、调解活动。

著作权集体管理组织根据授权向使用者收取使用费。使用费的收取由著作权集体管理组织和使用者代表协商确定，协商不成的，可以向国家著作权主管部门申请裁决，裁决不服的，可以向人民法院提起诉讼；当事人也可以直接向人民法院提起诉讼。

著作权集体管理组织应将使用费的收取和转付、许可费的提取和使用、使用费的未分配部分等总体情况定期向社会公布，并当建立权利信息查询系统，权利人和使用者查询。国家著作权主管部门应当依法对著作权集体管理组织进行监督、管理。

著作权集体管理组织的设立方式、权利义务、使用费的提取和分配，以及对其监督和救济等由国务院另行规定。

第二章 著作权

第一节 著作权人及其权利

第九条 著作权人包括

(一) 作者；

(二) 其他依照本法享有著作权的自然人、法人或者非法人组织。

图 8 实际嵌入信息部分截图



由图 7 和图 8 可知，实际嵌入信息与理想嵌入信息有一定的偏差，出现字符错误的现象。

原因在于，解码过程中，部分位会发生错误造成解码不正确，嵌入字数的理论值与实际嵌入字数有一定的偏差，得到的正确的能嵌入附件一的图片中的字数为 575 个字。

5.3 问题三模型的建立与求解

在电子图片传递的过程中，图片可能会被压缩或以不同的图片格式存储，或其他几何变形等。本文通过解码的方式测试在种种变换时，电子图片是否能够沿用问题 1 的算法，结果如表 1 所示。

表 1 电子图片传递过程中算法是否适用

攻击	图像	是否通过
缩放		不通过
旋转		不通过

裁剪

不通过



压缩

通过



5.3.1 模型的改进

问题一中的算法模型在电子传递时，只有被压缩时依然可行，在剪裁、旋转、缩放等变形时，问题一中的算法无法适用。因此，本文对于问题一的算法加以改进。

对于裁剪图片：

将裁剪后的图片与原图片相对比，得出裁剪后图片在原图片中的位置，初始化一个与原图片大小相同的空矩阵，将裁剪后的图片放入原图片相同的位置，即可进行解码。

对于缩放图片和旋转图片：

缩放图片和旋转图片都需知道缩放比例或旋转角度才能进行复原。

对于压缩图片：

压缩图片通过加入噪声遮挡图片，可以直接进行复原。

在电子传递时，经过压缩、剪裁、旋转等变形，嵌入信息会随之发生改变。

为了保证嵌入信息的正确性和完整性，可写入最多文字信息的大小为图片的长和宽除以 2，再相乘，然后除以窗口的面积，再除以 1000（单位为 kb）。

在做完 DCT 变换后，先扁平化矩阵，打乱顺序，再重新重塑回原来形状，然后做 SVD，其他步骤不变，解密效果会略微好于未打乱顺序的情况。

5.4 问题四模型的建立与求解

若要保护其他电子图片的著作权，我们使用问题一的算法时应要注意图像的大小应大于 256×256 ，以避免在 SVD 中出现差错，防止信息插入失败；嵌入信息的字数应小于等于每张图片可容纳字数的最大值，若嵌入信息过多，超过每张图片可容纳字数的最大值，则嵌入信息会被截断。

注意点：

- 1、图像的大小应大于 256×256 ；
- 2、嵌入信息的字数应不大于每张图片可容纳字数最大值。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的优点

- 1、DWT 具有局部化性质，可以分析信号的奇异点；可以实现图像压缩。
- 2、Haar 小波变换通过选取合适的滤波器，可以极大的减小或去除所提取得不同特征之间的相关性。
- 3、Haar 小波变换具有“变焦”特性，在低频段可用高频率分辨率和低时间分辨率（宽分析窗口）；在高频段，可用低频率分辨率和高时间分辨率（窄分析窗口）。
- 4、SVD 简单，易于操作执行。

6.2 模型的缺点

- 1、DWT 存在系数混淆问题，即低频系数的改变会影响到所有高频系数。
- 2、DWT 计算复杂度较高。
- 3、Haar 小波变换在一维时所具有的优异特性并不能简单推广到二维或更高维。

6.3 模型的推广

图像频域数字水印算法未来的研究方向主要有 4 个：

- 1、算法可以扩展到彩色图像和音视频的版权保护。
- 2、增强水印算法的安全性。通过将 GAT 与其他方法相结合，可以设计出更加安全的加密方案。
- 3、为了增加算法的水印容量，可以对宿主图像进行冗余小波变换。
- 4、通过分块 SVD 可以得到宿主图像和水印图像的奇异值，可以提高水印算法的鲁棒性。

七、参考文献

- [1]Zhang, L., Wei, D. Dual DCT-DWT-SVD digital watermarking algorithm based on particle swarm optimization. *Multimed Tools Appl* 78, 28003–28023 (2019).
- [2]Alomoush, W., Khashan, O.A., Alrosan, A. et al. Digital image watermarking using discrete cosine transformation based linear modulation. *J Cloud Comp* 12, 96 (2023).