

1 Analiza ogrzewania w budynkach

1.1 Wstęp

Celem projektu jest analiza przepływu ciepła w pomieszczeniach oparta na równaniu ciepła. Jest to cząstkowe równanie różniczkowe pozwalające precyzyjnie opisać rozkład temperatury w czasie i przestrzeni w zależności między innymi od źródła ciepła oraz strat związanych z temperaturą na zewnątrz. W szczególności interesuje nas, jak różne strategie ogrzewania wpływają na oszczędność energii oraz komfort cieplny.

1.2 Model matematyczny

Przyjęliśmy model przewodnictwa cieplnego opisany równaniem różniczkowym:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + \frac{P}{\rho A c} \Theta(x, u) \quad (1)$$

gdzie:

- $u(x, t)$ – temperatura w punkcie x w czasie t ,
- α – współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- P – moc grzejnika,
- ρ – gęstość powietrza,
- A – powierzchnia,
- c – ciepło właściwe.
- $\Theta(x, u)$ to indykator tego, czy w danym miejscu mamy grzejnik

$$u = T_{out}(t), x \in W_i, t > 0, \quad W_i = \text{okno} \quad (2)$$

$$\nabla u \cdot n = 0, x \in \mathcal{W}_i, t > 0, \quad \mathcal{W}_i = \text{ściana} \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4)$$

Dodatkowo, rozważamy funkcję zliczającą oddane ciepło

$$\Psi(t) = \int_0^t \int_{\Omega} f(x, u(x, s)) dx ds \quad (5)$$

1.3 Model numeryczny

Zastosujemy następujący model numeryczny:

$$u_{i,j,k} = u_{i,j,k} + \frac{h_t}{h_x^2} (u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k} - 4u_{i,j,k}) \text{ jeśli } (x_i, y_j) \notin \partial\Omega \quad (6)$$

Jeśli znajdujemy się akurat na brzegu naszego prostokąta, wzór wygląda podobnie ale pomijamy element którego nie jesteśmy w stanie otrzymać tzn gdy jesteśmy na lewej krawędzi, nie jesteśmy w stanie przejść do wyrazu o 1 mniejszego bo taki nie istnieje więc pomijamy ten wyraz we wzorze.

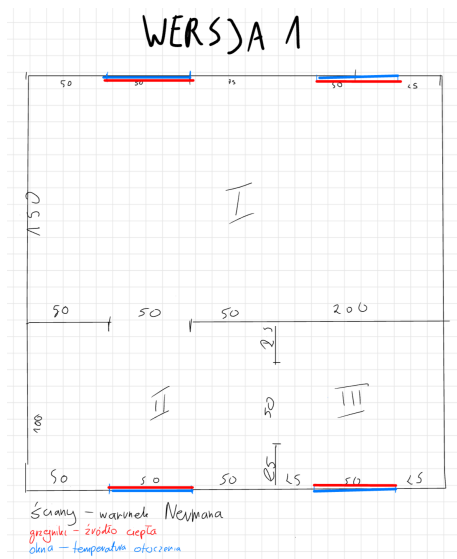
1.4 Założenia

Do analizy rozkładu ciepła potrzebujemy kilku istotnych założeń:

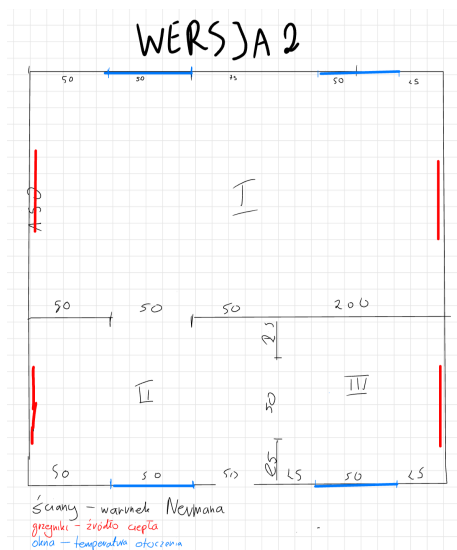
- Temperatura na oknie wynosi tyle samo, co temperatura zewnętrzna.
- Rozkład dobowy temperatur podzielimy na 3 poziomy: chłodno (między 8°C a 15°C), zimno (0°C do 8°C) i bardzo zimno (-10°C do 0°C). Dokładne dane zostaną wygenerowane pliku typu .txt, gdzie znajdą się te temperatury wyrażone w stopniach Celsjusza (w późniejszym kodzie przeliczamy je na Kelwiny) oraz podziałka godzinowa (24h podzielone na przedziały o długości 3 minuty).
- Ściany izolują temperaturę – temperatura na nich wynosi tyle samo co temperatura obok nich.
- Wszystkie grzejniki w analizowanym mieszkaniu mają moc 800 W.
- Za komfortową temperaturę przyjmujemy 21°C .
- Stosujemy termostaty – po osiągnięciu pewnej temperatury ogrzewanie wyłącza się. Mierzmy temperaturę w jednym punkcie w centrum pomieszczenia. Gdy temperatura w tym punkcie osiągnie 21°C , grzejniki w pomieszczeniu wyłączą się automatycznie. Gdy temperatura spadnie – włączą się ponownie.
- Drzwi w pomieszczeniu są otwarte i mają grubość dwóch kratk w podziałce – po jednej na każde z pomieszczeń, które łączą. Temperatury z pomieszczenia X oraz pomieszczenia Y na sąsiadujących kratkach uśredniamy.
- Drzwi oraz okna są fragmentami ścian, natomiast grzejniki znajdują się obok nich, w pomieszczeniu.
- Ciepło właściwe powietrza wynosi $c = 1005 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ [źródło: Wikipedia].
- Gęstość powietrza wynosi $\rho = 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, [źródło: Wikipedia].

1.5 Aspekty techniczne

Analizujemy dwa różne umiejscowienia grzejnika. Analizowana przestrzeń wygląda następująco w tych dwóch przypadkach:



Rysunek 1: Grzejniki pod oknem



Rysunek 2: Grzejniki na innych ścianach

Spójrzmy teraz na indeksy, jakie mają okna, drzwi i grzejniki w poszczególnych pomieszczeniach oraz jakie indeksy macierzy całego mieszkania miałyby narożniki pomieszczeń:

pokój	wymiary	drzwi	okna	grzejniki 1	grzejniki 2	dwie macierze (KxK)
I	$m=250$ $n=150$	$(\frac{m}{5}, \frac{2n}{5}-1)$	$(m-1-\frac{m}{5}, \frac{m}{5}-1)$ $(m-1-\frac{m}{5}, n-1-\frac{n}{5})$	$(m-1-\frac{13}{4}m, m-1-\frac{11}{2}n)$ $(m-1-\frac{9}{5}m, m-1-\frac{9}{5}n)$	$(\frac{1}{5}m+km: k \in \{1 \dots \frac{n}{5}\})$ $(\frac{1}{5}n)m-1+km: k \in \{1 \dots \frac{n}{5}\})$	k^2-k $\frac{n}{5}k$
II	$m=150$ $n=100$	$I \rightarrow II$ $(n-1-\frac{2}{5}n, n-1-\frac{2}{5}n)$ $II \rightarrow III$ $(m-\frac{2}{5}m+km: k \in \{1 \dots \frac{n}{5}\})$	$(\frac{m}{5}, \frac{2}{5}n-1)$	$(\frac{2}{5}m, \frac{2}{5}n-1)$	$(\frac{1}{4}m+km: k \in \{1 \dots \frac{n}{5}\})$	$\frac{2}{5}k(k-1)$ $\frac{2}{5}n(k-1)+\frac{2}{5}k-1$
III	$m=100$ $n=100$	$(m-\frac{2}{5}m+1+km: k \in \{0, \frac{n}{5}-1\})$	$(\frac{m}{4}, \frac{2}{5}n-1)$	$(\frac{5}{4}m, \frac{2}{5}n-1)$	$(\frac{1}{4}m+1)m-1+km: k \in \{1 \dots \frac{n}{5}\})$	$\frac{2}{5}k(k-1)+\frac{2}{5}k$ $\frac{2}{5}k^2-1$

Rysunek 3: tabela wymiarów

Wszystkie z tych indeksów to składowe spłaszczonej macierzy o odpowiednich wymiarach gdzie kolejne miejsca to wartości idące wierszami od lewego dolnego rogu do prawego górnego naszej macierzy.

Wizualizacje przeprowadzane są przy zastosowaniu kroku $h_t = 3min$, co przy podzieleniu całej doby daje nam 480 części. Na szkicach mieszkania podane są wyniki w centymetrach, w rozważaniach na 1 kratkę podziałki przypadają 2 cm i rozważamy nasze mieszkanie jako kwadrat $[0,50] \times [0,50]$ czyli krok $h_x = 0.5$, co zapewnia nam stabilność rozwiązania.

1.6 Problemy

Przeprowadziliśmy szczegółowe symulacje dla różnych scenariuszy, analizując zmiany temperatury w funkcji czasu i miejsca.

1.6.1 Gdzie najlepiej ustawić grzejniki?

Popularnym rozwiązaniem jest zlokalizowanie ich pod oknami. Poddamy analizie efektywność takiego rozwiązania. Porównamy również to, czy temperatura rozkłada się równomiernie oraz jakie straty ciepła ponosimy w zależności od tego, gdzie ustawimy źródła ciepła.

Wykonaliśmy po dwie symulacje dla każdego poziomu temperatury: w pierwszej grzejnik znajdował się pod oknem, w drugiej na przeciwległej ścianie.

W każdym tym przypadku możemy zauważyć, że gdy umieszczamy grzejnik pod oknem, w pewnym momencie wyłącza się on, rozkład temperatury jest też bardziej równomierny.

Gdy patrzymy na przypadki, gdzie grzejniki są na prostopadłych ścianach do okien, widzimy jak rozchodzi się ciepło wokół grzejnika oraz zimno od okna. Temperatura jest mało równomierna.

Wizualizacje znajdują się w plikach repozytorium.

1.6.2 Czy opłaca się zakręcać grzejniki wychodząc z domu?

Wydawać by się mogło, że kiedy opuszczamy pomieszczenie, możemy ogrzewać je w mniejszym stopniu i zaoszczędzić. W tym czasie jednak temperatura spadnie i kiedy wrócimy, będziemy chcieli dogrzać pokój na nowo do komfortowej temperatury. Przetestujemy, czy takie rozwiązanie przynosi oszczędność względem sytuacji, kiedy utrzymujemy stałą temperaturę pomieszczenia.

Dla temperatury z zakresu "chłodno", przy wyłączaniu grzejnika na 6 godzin w ciągu dnia tzn od 10:00 do 16:00, zużywamy około 71 procent energii, którą zużylibyśmy zostawiając włączone kaloryfery.

Gdy temperatura to "zimno", jest to około 80 procent, natomiast dla temperatur z zakresu "bardzo zimno" mamy już 92 procent energii użytej gdybyśmy grzejników nie wyłączali.

Możemy zatem wnioskować, że na podstawie naszych badań, bardziej opłaca się wyłączać grzejniki gdy opuszczamy dom, chociaż przy bardzo niskich temperaturach nie jest to wielka oszczędność.