SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Jure Šiljeg

PRIMJENA BRZE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE (FFT) U OBRADI SIGNALA

Seminarski rad

Zagreb, siječanj 2014.

Sažetak - U radu će se opisati kako i zašto se FFT[1] koristi u obradi signala. Pokušat ćemo dati kratak pregled Fourierove teorije o redovima te sami način spuštanja do ključnog dijela, odnosno povezanosti i transformaciji domena frekvencija $\leftrightarrow$ vrijeme u DFT-u te u konačnici opisati proces pronalaženja dobrog algoritma za testiranje rada FFT-a na pojedinim signalima.

Ključne riječi - FS[2], FT[3], DTFT[4], DFT[5], FFT[6].

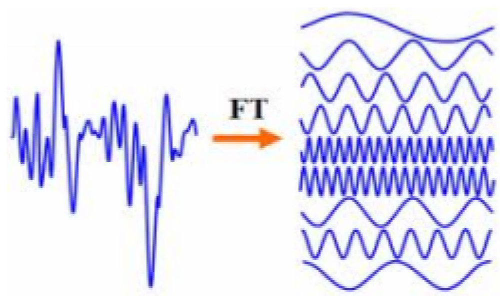
I. UVOD

DSP[7] je u stanju konvertirati signale definirane kao funkcije čija je domena vrijeme t u funkcije čija je domena frekvencija, f. Također je moguć i obratan proces pa možemo govoriti o $1-1$ korespondenciji između frekvencije i vremena u okviru promatranja domena. Prirodno je predočavati signale kao neke periodičke funkcije koje u Kartezijevom koordinatnom sustavu npr. možemo prikazati tako da apscisa predstavlja vrijeme (t), a da ordinata predstavlja amplitudu signala, ali je činjenica da nam je sama informacija o frekvencijskom spektru puno bitnija. Ovdje ćemo proučavati postupke koji nas dovode do brze i efikasne pretvorbe signala iz prirodnog (“vremenskog”) okruženja u “frekvencijsko”. Takvu konverziju upravo vrše i FT, dok ćemo mi u praksi koristiti DFT. Prirodno se uvijek pitati zašto je to tako, a odgovor na to pitanje jest taj da se pri automatskom (pritom mislimo na računala) baratanju signalima koristimo računalima koja su napravljena da rade u diskretnim vremenskim intervalima (vremenskim taktovima), te se za operativne svrhe moramo zadovoljiti time. Potom se prirodno pitati čemu to sve služi i gdje je sama

---

[1] Fast Fourier Transformation - brza Fourierova transformacija
[2] Fourier Series - Fourierovi redovi
[3] Fourier Transformation - Fourierova transformacija
[4] Descrete Time Fourier Transform - Fourierova transformacija u diskretnom vremenu
[5] Descrete Fourier Transfor - diskretna Fourierova transformacija
[6] Fast Fourier Transform - brza Fourierova transformacija
[7] Digital signal processing (digitalna manipulacija signala) jest zajedničko ime za matematičke manipulacije informacijskog signala s ciljem modificiranja i/ili poboljšavanja u nekom smislu.

primjena svega toga, a sam odgovor je na dohvat ruke. Lako je primijetiti kako se svugdje oko nas javlja potreba za analiziranjem signala, rastavljanjem nekog signala s vremenskom domenom i velikim šumom na jednostavnije i razumljivije komponente s frekvencijskom domenom gdje lako možemo očitati što tvori naš signal, a primjenu ima i u vojsci, policiji, telekomunikacijama, medicini, akustici, multimediji (MP3, JPEG), pametnim kućama i slično. Također je važno spomenuti kako vremenska domena ne nosi nikakve dodatne informacije koje ne nosi i frekvencijska domena te je, dakle, riječ samo o drukčijem zapisu istog signala. Nekakvim specijalnim Fourierovim transformacijama želimo postići ovo:



II. FS & FT

Općenito, signal je fenomen koji nosi neku informaciju, a u literaturi često možemo pročitati kako je signal $x = \{(t, x(t)) :\ t \in T\}$, gdje je $T \subset \mathbb{R}$, a $x(t) \in U$ za $R\{x(t)\} = U$ gdje kažemo kako je R zapravo trenutna vrijednost signala. Signal je periodičan i kažemo da je njegov period jednak T ukoliko vrijedi $x_p(t) = x_p(t + T)$ za svaki t. Period je definiran kao minimalna količina vremena potrebna da se uzorak iz signala počne ponavljati. Period signala je u vezi s *osnovnom frekvencijom* f_0 na način da vrijedi : $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ gdje je ω_0 u radijanima, a f_0 u Hz. Svaki periodični signal $x_p(t)$ se može reprezentirati kao beskonačna suma ortogonalnih funkcija, a kada je riječ o oscilatornim funkcijama (sinus i kosinus npr.) tada govorimo o Fourierovom redu $(\triangle)$. Dakako, najprije bi trebalo definirati Fourierov red. Neka je H Hilbertov prostor[8] i neka je $(e_j)_{j\in J}$ ortonormirana familija. Za tu familiju kažemo da je ONB unitarnog prostora X, ako je za $\forall x \in H$ familija $\{< x, e_j > e_j \; : \; j \in J\}$ sumabilna i ima sumu x. Red $x = \sum\limits_{j\in J} < x, e_j > e_j$ se zove Fourierov red vektora x. Ovdje će se ponuditi kratka skica i ideja samog dokaza za $(\triangle)$. Za početak možemo primijetiti kako želimo tvrdnju pokazati za periodičke funkcije, pa možemo BSO uzeti da se radi o periodu od 2π i promatramo funkciju na $[0,\ 2\pi]$ (ako nije taj period, treba samo uzeti pogodnu transformaciju, a jasno je da je dovoljno pokazati na samo jednom dijelu gdje je periodična i da se onda po neprekidnosti može proširiti na cijelu domenu). Definiramo skup $A := \{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin(nx) :\ n \in \mathbb{N}\}$.U slučaju da nemamo ovakve uvjete, samo bismo nekako reskalirali argumente sinusa, kosinusa, kao i ovog člana $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Za ovaj skup želimo pokazati da je ONB, pa redom treba pokazati da je ovaj skup ortogonalan, jedinične norme i da je baza. Dat ćemo primjere samo za neke stvari. Ako želimo pokazati da je skup jedinične norme, želimo da vrijedi $\|a\| = 1,\ \forall a \in A$ (budući da je riječ o jediničnoj normi, ispuštat će se korjenovanje). Možemo jednostavno provjeriti za $\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx)$, pa gledamo $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx)\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} cos^2(nx)dx = rastavimo\ kao\ cos\ dvostrukog\ kuta =$ $\frac{1}{\pi}(\frac{1}{2}2\pi\ +\ \frac{sin(2x)}{2}|_0^{2\pi}) = 1$. Na sličan način se provjeri i za ostale, dok za ortogonalnost isto nije problem osim eventualno za $< \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin(nx) >$, ali tu jednostavno koristimo formule za pretvaranje umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj i lako dobijemo da je $< a, b >= 0,\ a \neq b$ i $a, b \in A$. Sljedeće što trebamo pokazati je opširni rezultat iz teorije o Fourierovim redovima, pa ćemo samo izdvojiti bitne stavke i reći kako koristimo teorem koji kaže kako su ekvivalentne sljedeće tvrdnje i da za $(f_n) \subseteq L^2$ koji je ortonormiran skup vrijedi:

[8] Potpun, unitaran prostor (potpun ako svaki C-niz u njemu konvergira, a unitaran prostor je v.p. nad kojim je definiran skalarni produkt).

a) (f_n) je ONB u L^2 b) $(\forall f \in L^2) \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n$

c) $(\forall f \in L^2) \ \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< f, f_n >|^2$ d) $(f \perp f_n) \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f = 0$. Nama je, dakako, potrebno a) $\Leftrightarrow$ d) i onda se po još nekim teoremima može pokazati da se tvrdnja d) može identificirati s našim skupom A na način da i on postane ONB što nam i treba. Nakon što smo pokazali da je A ONB, možemo se pozvati na definiciju obične konvergencije[9] u normi u unitarnom prostoru i promatrati ovakvo nešto : $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \ / \ <\cdot, e_n>$, pa vrijedi $< x, e_n >= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < e_k, e_n >= \alpha_n$, potom uvrstimo umjesto x našu periodičku funkciju f i završili smo (e_n su, naravno, vektori baze koji odgovaraju onima iz skupa A pa samo dobili prikaz periodičke funkcije pomoću vektora iz ONB A). Najčešće formulacije formula za Fourierove redove su ove:

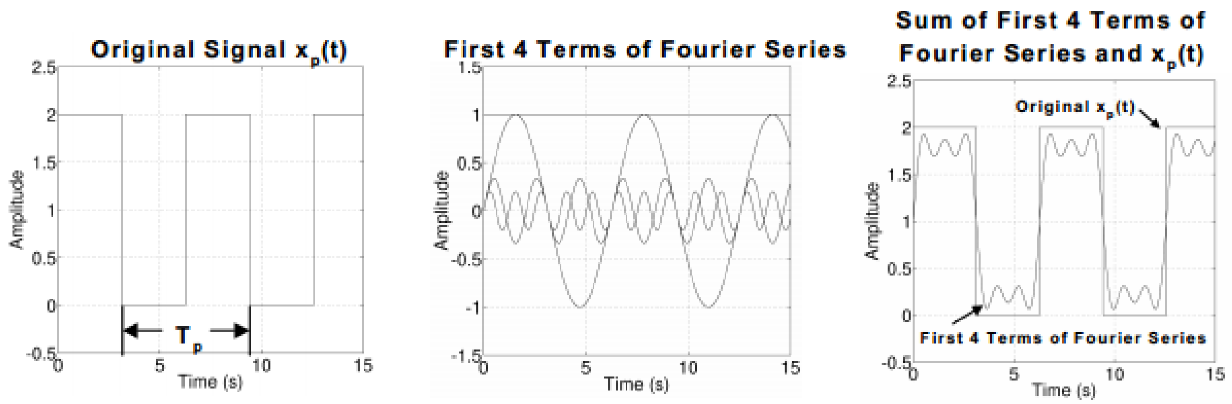
1) $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \, e^{ik\omega_0 t}$, gdje je $C_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_p(t) e^{-ik\omega_0 t} \, dt$ - eksponencijalna forma gdje je $k \in \mathbb{Z}$, a $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0}$ je period od $x_p(t)$.

2) $x_p(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| cos(k\omega_0 t + \theta_k)$ -kombinirana trigonometrijska forma gdje je C_k isti kao i u eksp. formi, a θ_k je fazni kut : $\theta_k = arctg \, (\frac{Im(C_k)}{Re(C_k)})$

3) $x_p(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(k\omega_0 t) + B_k sin(k\omega_0 t)$ - trigonometrijski oblik gdje je $A_0 = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_p(t) \, dt$, $A_k = \int_{T_p} x_p(t) cos(k\omega_0 t) \, dt$, a $B_k = \int_{T_p} x_p(t) sin(k\omega_0 t) \, dt$.

Sve 3 forme su jednake, a povezano su Eulerovom identitetom $e^{\pm i\theta} = cos(\theta) + i \, sin(\theta)$, što daje $cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, te $sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

[9] Definicija se može pogledati ovdje (1.2.5.) : http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/np-predavanja-v2.pdf



Fourierovi redovi se mogu primijeniti na periodične signale, ali se i neperiodični signali mogu napisati pomoću Fourierovih komponenti i taj proces se zove Fourierova transformacija. Pri dobivanju FT se najčešće koristi eksponencijalni oblik FS. Općenito, treba nam model za reprezentaciju neperiodičkih signala (kao npr. govora). Način na koji se tretiraju te valne forme jest da ih promatramo kao *periodički val s beskonačnim periodom*. Uz malo muke i integriranja se mogu dobiti tražene stvari[10] gdje dobijemo konačno Fourierovu transformaciju : $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt$, uz pripadnu inverznu transformaciju $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\,dt$. Fourierova transformacija nam omogućuje da računamo frekvencijsku reprezentaciju domene signala iz vremenske reprezentacije, dok nam inverzna Fourierova transformacija omogućuje da računamo vremensku reprezentaciju domene iz početne frekvencijske. Fourierova transformacija ima nekoliko svojstava kao npr. linearnost (vrlo lako se dobije iz same linearnosti integrala), a još jedna je dualnost koja se također jeftino dobije, pa ćemo je i ilustrirati ovdje (radi se o dualnosti vrijeme$\leftrightarrow$frekvecija). Ako uzmemo u obzir da vrijedi $X(\omega) \leftrightarrow x(t)$, onda lako možemo pokazati $X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\omega)$ (lako se mijenja varijabla funkcije iz vremenske u frekvencijsku i obratno) gdje je funkcija s lijeve strane ovisna o vremenu, a s desne strane o frekvenciji.

[10] Vrlo važno je spomenuti da se cijeli proces može vidjeti na stranicama 167-170. na ovom linku (u literaturi se teorem zna spominjati kao Fourierov) : https://ece.uwaterloo.ca/~ece342/ece342_chap06.pdf

Dokaz :

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(x)e^{i\omega x}\,dx$, pa vrijedi $2\pi x(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(x)e^{-i\omega t}\,dt$, ali uočimo da je ova posljednja jednakost upravo Fourierova transformacija od $X(x)$. Sada jednostavno zamijenimo $t\to\omega$ i dobili smo što treba.

II. DTFT & DFT

DSP zahtijeva vremenski diskretne signale, pa moramo kontinuirani (FT) prebaciti za početak u vremenski diskretan (DTFT). To možemo ostvariti tako što množimo, za početak, kontinuirani (neprekidni) signal s Diracovom [11] delta funkcijom (preciznije, distribucijom). Promatramo uzorkovanu verziju, $x_s(t)$, neprekidnog signala, $x(t)$: $x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nT_s)$, gdje je T_s period uzorkovanja. Želimo raditi Fourierovu transformaciju ovog signala $x_s(t)$, pa to radimo po definiciji :

$X_s(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nT_s)e^{-i\omega t}\,dt$. Ovo izgleda poprilično zastrašujuće, ali ovo možemo pojednostavniti pomoću svojstava Fourierove ransformacije i funkcije impulsa δ. Poznato je kako je Fourierova transformacija linearni operator (jednostavno slijedi iz linearnosti integrala), pa možemo zapisati da je $X_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t-nT_s)e^{-i\omega t}\,dt$ i potom koristimo svojstvo filtriranja Diracove distribucije koje glasi $\int_{-\infty}^{+\infty}v(t)\delta(t-\zeta)\,dt=v(\zeta)$. To se jednostavno dokaže (budući da bi mi htjeli imati da je naš $v(t)=x(t)e^{-i\omega t}$), a za $x(t)$ znamo da je neprekidni signal kao i funkcija $e^{-i\omega t}$ (umnožak neprekidnih je neprekidna funkcija). Neka je $a>0$. Promatramo ovakvo nešto : $\lim_{a\to 0}\int_{\xi-\frac{a}{2}}^{\xi+\frac{a}{2}}\frac{1}{a}v(t)dt$. Primijetimo da smijemo napraviti

---

[11] Više o tome se može pročitati ovdje : http://en.wikipedia.org/wiki/Dirac_delta_function

$\lim_{a \to 0} \frac{1}{a} V(t)|_{\xi - \frac{a}{2}}^{\xi + \frac{a}{2}} = \lim_{a \to 0} \frac{V(\xi + \frac{a}{2}) - V(\xi - \frac{a}{2})}{a}$, gdje smo uveli samo oznaku $\int_{\xi - \frac{a}{2}}^{\xi + \frac{a}{2}} v(t)dt =: V(t)$ $(\bullet)$. Budući da je razlika između prvog pribrojnika u brojniku i drugog pribrojnika u brojniku jednaka a, možemo pisati na malo praktičniji i korisniji način ovu stvar. Naime gornji izraz je jednak $\lim_{a \to 0} \frac{V(\xi + a) - V(\xi)}{a} = V'(\xi)$ (definicija derivacije). Sada je jasno da obzirom na oznaku $(\bullet)$ imamo kako je $V'(\xi) = v(\xi)$ što je upravo ono što želimo[12]. U našem slučaju vrijedi i da je $\xi = nT_s$, što znači da imamo $X_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) e^{-i\omega n T_s}$. Ako sada napravimo zamjenu $x(nT_s) \leftrightarrow x[n]$ (što efektivno znači da umjesto da gledamo cijeli kontinuirani signal gledamo ga sada po točkama - diskretiziramo ga). Također je važno napomenuti kako se u literaturi najčešće piše $x(t)$ ako se misli na *kontinuirani* (neprekinuti) signal obzirom na kontinuiranu varijablu t (najčešće vrijeme), a ako vrijeme nije kontinuirano već ima vrijednosti $0, T, 2T, ..., nT$ i sl., pišemo $x(nT)$, $n = 0, 1, 2, ...$ što onda zovemo *diskretni signal*, a simbolima pišemo $x[n]$ (često se piše i $x[n] = x[nT]$, a i često se prešutno pretpostavlja da je riječ o $T = 1$). Također možemo zamijeniti $\omega T_s = \Omega$ ($\Omega = \frac{2\pi T_s}{T}$) , pa imamo konačno relaciju za DTFT:

$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-in\Omega}$. Lako se vidi da je $X(\Omega)$ zapravo periodička s periodom 2π (to naprosto slijedi iz definicije i činjenice da je $e^{-in2\pi} = cos(2\pi n) - i\, sin(2\pi n) = 1$). Također, postoji i formula za inverznu DTFT[13] : $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{in\Omega} d\Omega$ (primijetiti da je $X(\Omega)$ neprekidna, dok je $x[n]$ diskretna). Napokon smo spremni za DFT. Dvije stvari moramo napraviti da DTFT napravimo prikladim za DSP:

1) moramo ograničiti broj točaka u vremenskoj domeni (neka ih bude N)

---

[12] Dokaz se može vidjeti ovdje : http://www.youtube.com/watch?v=2QaRZ7u-BgM

[13] Ovdje se može pročitati na koji način doći od signala nad kojim je upravo napravljena DFT do originalnog signala pomoću IDTFT : http://maxim.ece.illinois.edu/teaching/fall08/lec10.pdf

2) moramo uzorkovati frekvencijsku domenu da je napravimo diskretnom Reduciramo prvo vremensku domenu na konačno točaka, pa sada, u skladu s DTFT, imamo $X(\Omega) = \sum_{n=o}^{N-1} x[n]e^{-in\Omega}$. Sada moramo i frekvencijsku domenu "smanjiti" tako da gledamo samo N točaka (da budemo u skladu s vremenskom domenom). Budući da je $X(\Omega)$ periodična s periodom od 2π, možemo napraviti jednaku mrežu na ovaj način : $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$, pa sada imamo $X(\frac{2\pi k}{N}) = \sum_{n=o}^{N-1} x[n]e^{-in\frac{2\pi k}{N}}$, gdje nam vrijedi $k = 0, 1, 2, ..., N-1$. Sada, obzirom da je jedina varijabla u izrazu $X(\frac{2\pi k}{N})$ naš k (ostalo je već fiksirano unutar sume), onda ćemo njega zamijeniti kao što smo i gore napravili (stvar notacije u elektrotehnici, uglavnom) : $X[k] = \sum_{n=o}^{N-1} x[n]e^{-in\frac{2\pi k}{N}}$ i dobiti, konačno, DFT. Uz DFT ide i inverzna DFT (IDFT) u ovakvom obliku : $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=o}^{N-1} X[k]e^{in\frac{2\pi k}{N}}$, za $n = 0, 1, 2, ..., N-1$. Dakle, DFT transformira vremensku domenu u frekvencijsku, dok inverzna DFT radi obratno. DFT i inverzni DFT zajedno zovemo DFT par. Također, DFT par se može primijeniti na DSP jer cijelo vrijeme imamo konačne brojeve u igri (k, n $= 0, 1, 2, ..., N-1$). Međutim, javlja nam se i zanimljivi *twiddle* faktor (rotacijski faktor) kojeg označavamo s $W_N = e^{-i2\pi/N}$. Sada se sljedeće prirodno pitati, koliko je naš DFT, zapravo brz u ovakvom zapisu? Kada bi matrično formuirali zapis DFT-a vidjeli bi sljedeću stvar (uz pretpostavku da smo našu DFT zapisali kao $X[k] = \sum_{n=o}^{N-1} x[n]W_N{}^{nk}$ uz odgovarajuće n, k) :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Iz ovakve formulacije je vidljivo kako imamo N^2 kompleksnih množenja, $N(N-1)$ kompleksnih zbrajanja, te $2N^2$ računanja vrijednosti sinusa i kosinusa, a zahvaljujući osobinama od W_N, taj broj možemo svesti na N računanja.

Također, može se promatrati i matrični zapis IDFT pa lako dobijemo :

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

Najdesnija matrica na ovoj slici (V_N) je vrlo slična najdesnijoj matrici na slici iznad (V_N^{-1}). Međusobno su i povezani relacijom $V_N^{-1} = \frac{1}{N} V_N^*$, pa se vidi da vrijedi

$V_N V_N^{-1} = NI_N$, odnosno vrijedi da je DFT ortogonalna transformacija! Također je jednostavno formulirati pojedina svojstva matrice V_N, pa tako vidimo da vrijedi:

a) $V_N^{kn} = V_N^{k(n+N)} = V_N^{(k+N)n}$ b) $V_N^{\tau} = V_N$ c) $V_N^{k(N-n)} = V_N^{-kn} = (V_N^{kn})^*$ d) $V_N^2 = e^{\frac{-4\pi i}{N}} = e^{\frac{-2\pi i}{\frac{N}{2}}} = V_{\frac{N}{2}}$.

Ova posljednja činjenica će nam i biti najkorisnija za razlaganje DFT_N na dvije $DFT_{\frac{N}{2}}$, no prirodno je i očekivati da je naš N oblika $N = 2^q,\ q \in \mathbb{N}$, pa da možemo raditi uopće operaciju d). Gore smo komentirali broj operacija u općenitom slučaju što je donekle i prihvatljivo za male brojeve N, dok nipošto nije mudro na ovaj način računati iole veće vrijednosti od N koje se u praksi i koriste. Sam broj operacija se može smanjiti ako koristimo neka svojstva rotacijskih faktora W_N. O tome ćemo više govoriti u sljedećem ulomku.

III. FFT

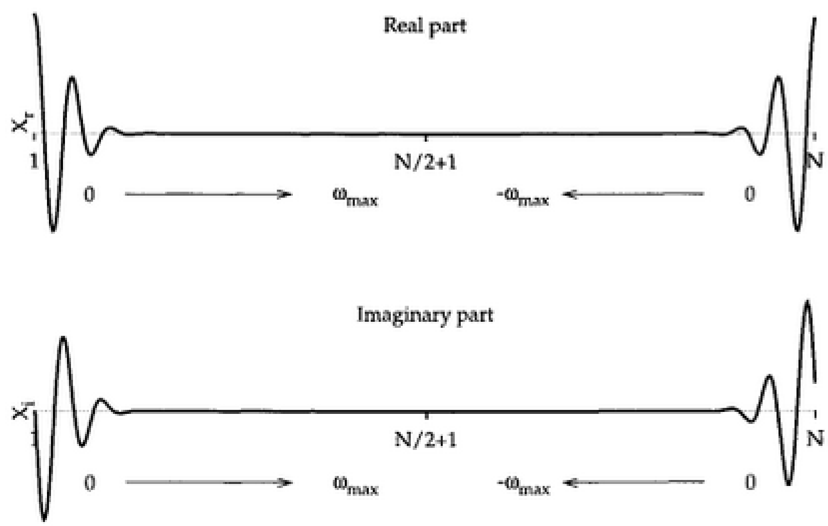
U osnovi, ako želimo poboljšati (ubrzati) DFT i dobiti FFT (generičko ime za metodu koje se koristi kada uspijemo smanjiti kompleksnost u računanju DFT-a), trebamo dodatno istražiti još 2 svojstva rotacijskog faktora. Prvo svojstvo je *svojstvo simetrije* koje kaže da $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$. Dokazati je jednostavno, samo raspišemo i iskoristimo Eulerovu identitetu. Sljedeće svojstvo je *svojstvo periodičnosti* gdje vrijedi $W_N^{k+N} = W_N^k$ (na vrlo sličan način se može dobiti pomoću Eulerove identitete opet). Ova 2 svojstva nam direktno ne pomažu za ono što ćemo ovdje demonstrirati, ali sugeriraju da bi se mogao smanjiti broj operacija ukoliko uzmemo u obzir da je rotacijski faktor periodičan i simetričan (postoje FFT algoritmi koji zapravo i koriste ova 2 svojstva). Jedan način da razbijemo transformaciju u 2 reda jest taj da promatramo odvojeno parne i neparne sekvence. Zapišemo $X_N(k) = \sum_{r=o}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{(2r)k} + \sum_{r=o}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$, potom možemo (jer vrijedi $W_N^{(2r+1)k} = W_N^{(2r)k} \cdot W_N^{k}$ i jer W_N^{k} ne ovisi o r) zapisati gornji izraz $X_N(k) = \sum_{r=o}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{(2r)k} + W_N^{k} \sum_{r=o}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r)k}$, iskoristimo svojstvo $W_N^{2} = W_{\frac{N}{2}}$ i dobijemo konačno $X_N(k) = \sum_{r=o}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^{k} \sum_{r=o}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk}$. Što smo ovime postigli? Postigli smo da imamo $2(\frac{N}{2})^2$ množenja (sjetimo se da su u računalu množenja "skupa") kod dijelova gdje su sume i još dodatnih $N/2$ kod faktora koji množi drugu sumu. Pitamo se kolika je ušteda? Pa, ilustrirajmo primjer koji se javlja u praksi. Uzmimo neka je $N = 1024$. Imamo $2(\frac{N}{2})^2 + \frac{N}{2}$ množenja što je jednako 524800 množenja, a trebali bismo ih imati $N^2 = 1\ 048\ 576$ gdje je ušteda, dakle, $523\ 776$ množenja! Naravno, za veće N- ove su ove razlike još (brojčano) i ozbiljnije, dok postotak sugerira uštedu od oko 50%. FFT algoritam ne bi trebao stvarati probleme prilikom implementacije (rekurzija), ali postoje već dosta dobri gotovi alati za to (primjerice u MATLAB-u)[14].

IV. PRAKTIČNA PRIMJENA

Konačno, dolazimo i do same primjene FFT-a u obradi signala. U dosadašnjem dijelu su namjerno ispušteni neki detalji koje ćemo sada spomenuti. Spomenuli smo kako želimo prikazati frekvencijsku domenu jer nam je to od koristi, ali, DFT izbacuje (općenito) kompleksne brojeve, pa možda nije u početku odmah najjasnije što s njima raditi

[14] Najčešće korištena verzija FFT algoritma je Cooley-Tukeyjeva iz 1965. godine, a sam kod u preferiranom programskom jeziku se može pogledati ovdje : http://rosettacode.org/wiki/Fast_Fourier_transform

zapravo kada ovo sve i izračunamo. Odnosno, pitamo se kako povezati te kompleksne vrijednosti sa stvarnim frekvencijama? Za realan i diskretan vremenski signal[15] (kakve ćemo najčešće promatrati za potrebe ovog seminara), rezultat FFT-a je kompleksni niz koji sadrži po N realnih (X_r) i imaginarnih (X_i) dijelova. Jasno je, realni dio je parna funkcija (zbog kosinusa), a imaginarni dio neparna funkcija (zbog sinusa)[16], a od ostalih svojstava se može izdvojiti, recimo, da vrijedi i $x\ paran \leftrightarrow X\ paran$, $x\ realan\ i\ paran \leftrightarrow X\ realan\ i\ paran$ i slično[17]. Također vrijedi : $X_{r,k} = X_{r,\,N-k}$, $k = 1, ..., N-1$ te $X_{i,k} = -X_{r,\,N-k}$, $k = 1, ..., N-1$ [18]. Upraksi nam je ovo najbitnija tvrdnja. U točki $\frac{N}{2}+1$ se nalazi ω_{max} što odgovara Nyquistu (vidi niže), zapravo. Nakon ω_{max} se pojavljuju Fourierovi spektri za negativne frekvencije :



Zbog prethodnih formula, očito je kako trebamo gledati samo prvih $\frac{N}{2}+1$ točaka, a odbaciti negativne frekvencije i njih kasnije rekonstruirati iz početno izračunatih nenegativnih ukoliko je potrebno.

---

[15] Za signal kažemo da je realan i diskretan ukoliko su elementi sekvence koja predstavljaja diskretni signal *realni* brojevi.

[16] Ovo vrijedi zbog samog zapisa rotacijskog (twiddle) faktora u trigonometrijskom obliku gdje se uz realni dio javljaju kosinusi koji su parne funkcije, a uz imaginarni dio se javljaju sinusi što su neparne funkcije.

[17] Dokaz pojedinih tvrdnji se može vidjeti ovdje : http://www.dsprelated.com/dspbooks/mdft/Symmetry.html

[18] Dokaz tvrdnje se pogledati može ovdje : http://www.dsprelated.com/dspbooks/mdft/Conjugation_Reversal.html

Za određenu frekvenciju kojom se uzimaju uzorci (f_s), maksimalna frekvencija signala koja se može točno prikazati, a da se ne javljaju nikakva odstupanja (aliasi) se naziva Nyquistova frekvencija i ona je jednaka $f_s/2$ [19]. Zato za realne signale gledamo samo početnih $0-\frac{f_s}{2}$ Hz, dok za kompleksni gledamo od $-\frac{f_s}{2}$ do $\frac{f_s}{2}$. Mi želimo dobiti amplitude frekvencija (a naš X je kompleksan) jer će nam one sugerirati koliko se pojedinog signala nalazi na određenoj frekvenciji. Odnosno, "oštri rubovi" na y-osi će sugerirati koje frekvencije trebamo gledati na x-osi (samo stvar prikaza i zapisa). Ustvari, y-os je dosta nebitna jer se tu mogu prikazivati i spektri snage/dB/amplituda (sve opet mahom stvari iz elektrotehnike). Jedino zanimljivo pitanje još ostaje kako "podesiti" frekvencijsku domenu da odgovara stvarnim frekvencijama? To radimo tako da gledamo frekvencijsku udaljenost među uzorcima, $\Delta f = \frac{f_s}{N}$, gdje maksimalna jedinstvena frekvencija treba odgovarati Nyquistovoj frekvenciji (ograničenju/limitu) $f_{max} = \frac{f_s}{2}$.

V. ZAKLJUČAK

U ovom kratkom seminaru smo nastojali razviti potrebnu teoriju za raščlanjivanje vremenski diskretiziranih signala, pokazali osnovne ideje i motive transformiranja s vremenske u frekvencijsku domenu, dotakli se ključnih matematičkih problema koji se javljaju pri samom transformiranju te pokušali dočarati kako se te stvari u praksi rade. Ključni dio je bio doći od Fourierovih redova preko Fourierove transformacije do diskretne Fourierove transformacije koju smo potom ubrzali i dobili brzu Fourierovu transformaciju koja efikasno obavlja posao razlaganja "divljeg" vremenskog signala u jasni frekvencijski

[19] Dokaz tvrdnje i nešto o samoj Nyquistovoj frekvenciji pročitati ovdje : http://laris.fesb.hr/digitalno_vodjenje/text_2-4.htm

transformiranja signala je u praksi daleko jednostavnija (na trenutke i privlačnija) od introdukcije preciznog matematičkog aparata koji daje podlogu za takvo nešto i koja povezuje sve komponente u smislenu cjelinu i, u konačnici, konkretizira to u ovakav seminarski rad.

VI. LITERATURA

Prof.dr.sc. Hrvoje Babić : Signali i sustavi, Zagreb 1996.

Attila Felinger : Data Analysis and Signal Processing in Chromatography, Volume 21 (Data Handling in Science and Technology) , Elsevier Science B.V., 1998.

Mehmet Akhan/Keith Larson :The frequency domain (Instructor's guide, lecture 4), University of Hertfordshire

H. Šikić : Bilješke s predavanja iz kolegija Fourierovi redovi, 2012./2013.