라그랑주 승수법(Largrange multiplier method)

프랑스의 수학자 라그랑주가 고안.
제약조건이 있는 최적화 문제를 풀기위한 방법으로,
최적점을 찾는것이 아닌 최적해의 필요조건을 찾는방법

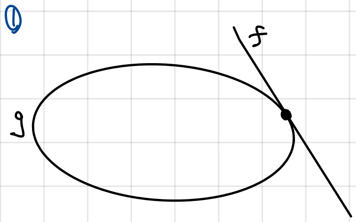
기본 가정

"제약조건 g를 만족하는 f의 최솟값/최댓값은 f와 g가 접하는 지점에 존재할수도 있다"

전개

$f(x,y)$의 gradient vector는 $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 라고 한다

두 함수 f와 g가 접하는 지점에서 ∇f와 g의 접선벡터의 내적은 0
즉, $\boxed{\nabla f = \lambda \nabla g}$ 가 성립한다 …①



라그랑주 함수 L은 다음과 같다

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c) \quad \cdots ②$$

(제약조건 g가 n개인 경우)

$$L(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) = f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (g_i(x,y) - c_i)$$

①이 성립하는 점 (x,y)를 찾기위해 ②를 편미분하면

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{aligned}\right] \cdots ③$$

위 두 식이 0이 되는 지점에서

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$ 가 성립하므로 $\nabla f = \lambda \nabla g$ 가 성립.

즉, ③이 0이 되는 지점 (x,y)는 f와 g가 접하는 지점으로
제약조건 g를 만족하는 함수 f의 최적점(최대/최소)이 될 가능성이 있다.