哈尔滨工业大学（威海）

推免生数值分析
上机实验报告
（2022级）

姓名：________________.

学号：________________.

指导教师：陈　　　忠

数值实验一

上机时间：__________________地点：__________________

1.实验题目：用递推公式求积分，求解函数值。

2.实验目的：熟悉编程语言，用循环语句编译迭代过程；观察实验数据，分析误差；理解递推计算的稳定性问题。

3. 上机求解

考虑函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 对于任意的 x, $0\le f(x)\le 1/2$.计算函数值

方案（1）： $f(1.2\times10^{-5})=$

又由于 $\cos x=1-2\sin^2(x/2)$，重新计算函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$ 的函数值

方案（2）： $f(1.2\times10^{-5})=$

分析哪种结果更好。

结果分析：以计算机 long 精度计算为例，方案（1）的计算过程如下：

$$\cos(1.2\times10^{-5})=0.9999999999$$

$$1-\cos(1.2\times10^{-5})=0.0000000001=10^{-10}$$

$$(1.2\times10^{-5})^2=1.44\times10^{-10}$$

$$f(1.2\times10^{-10})=\frac{10^{-10}}{1.44\times10^{-10}}=0.6944...$$

同时，方案（2）的计算过程如下：

$$1.2\times10^{-5}/2=$$

$$\sin(1.2\times10^{-5}/2)=$$

$$\frac{\sin(x/2)}{x/2}=$$

$$f(1.2\times10^{-5})=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=$$

说明我们在计算过程中要避免：

题目 3. 用递推公式求解积分：

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x} dx,\ \ n = 0,1,\cdots,10$$

其中 a 为参数，分别为 a=0.05 及 a=15.注意到

$$I_n + aI_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + ax^{n-1}}{a+x} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n},\ \ n = 0,1,\cdots,10$$

所以有两种方案：

方案（1）：$I_n = -aI_{n-1} + \frac{1}{n},\ \ n = 1,2,\cdots,10$

方案（2）：$I_{n-1} = \frac{1}{a}\left(-I_n + \frac{1}{n}\right),\ \ n = 10,9,\cdots,0$

请根据表中给出的初始值，利用循环语句。计算其它的积分值。

n	方案（1）		方案（2）	
	a=0.05	a=15	a=0.05	a=15
0	3.04452	0.06454		
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10			0.10000	0.00600

结果分析：比较用方案（1）和方案（2）方法得到的结果。

不管哪种方案，都需要输入初始数据I_0（或I_{10}）。由于计算机存储数据时具有舍入误差或者计算初始数据时具有误差，计算机实际开始计算的初始值为$\tilde{I}_0$（或$\tilde{I}_{10}$）.记$e_n=\left|I_n-\tilde{I}_n\right|$.对于方案（1），我们有

$$e_n=\left|I_n-\tilde{I}_n\right|=|a|\left|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}\right|=|a|e_{n-1}=...=|a|^n e_0$$

所以$|a|$为每次迭代误差的放大或缩小系数，当$|a|>1$时，误差会越来越大；当$|a|<1$时，误差会越来越小。同理，对于方案（2），我们有

$$e_{n-1}=\left|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}\right|=\left|\frac{1}{a}\right|\left|I_n-\tilde{I}_n\right|=\left|\frac{1}{a}\right|e_n=...=\left|\frac{1}{a}\right|^i e_{n+i-1}$$

所以，与方案（1）截然相反，当$|a|>1$时，误差会越来越小；当$|a|<1$时，误差会越来越大。

4.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

数值实验二

上机时间：____________**地点：**__________________

1.实验题目：求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} -0.002 & 2 & 2 \\ 1 & 0.78125 & 0 \\ 3.996 & 5.5625 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.3816 \\ 7.4178 \end{pmatrix}$$

（精确解 $x = (1.92730, -0.698496, 0.900423)^T$）

2.实验目的：能够应用 Gauss 列主元素消元法、LU 分解法求解线性方程组的数值解。

3.程序流程图：

Gauss 列主元消去法：	LU 分解法：

4.实验结果：

（1）Gauss 列主元素消元法：

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

（2）LU 分解：

$$L = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

5.结果分析：比较用不同方法得到的结果的区别。

6.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

数值实验三

上机时间：____________地点：__________________

1.实验题目：应用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组：

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

取初始值 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，精确到 10^{-5}。（$\boldsymbol{x} = \left(\mathbf{0.99555, 0.95725, 0.79110}\right)^T$）

2.实验目的：能够应用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组，分析方法的收敛性。

3.程序流程图：

Jacobi 迭代法：	Gauss-Seidel 迭代法：

4.实验结果：

数值方法	方程的数值解	迭代次数 n

5.结果分析：（比较两种方法的收敛性）

6.思考题：1、实验的难点、遇到的问题及解决方案。

2、如何判定迭代终止？

数值实验四

上机时间：____________**地点：**__________________

1.实验题目：构造 5 次、10 次 Lagrange 插值多项式、Hermit 插值多项式和三次样条插值多项式（自然边界条件）逼近函数 $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

2.实验目的：能够对给定的数据构造 Lagrange 插值多项式、Hermit 插值多项式和三次样条插值多项式

3.程序流程图：

4.实验结果：

数值方法	逼近函数
Lagrange 插值多项式	
Hermit 插值多项式	
三次样条插值多项式	

5. **结果分析：**（画出原函数与三种方法得到的逼近函数图象）

图像粘贴处

6. **练习题：观测得一个二次多项式 $p_2(x)$ 的值如下表。表中 $p_2(x)$ 的某一个数值有错误，试找出并校正它。**

x	-2	-1	0	1	2
$p_2(x)$	3	1	1	6	15

数值实验五

上机时间：____________**地点：**__________________

1.实验题目：对给定的数据分别求出 3 次、4 次多项式的曲线拟合；再根据数据曲线形状，求出不同形式的曲线拟合，并用图示出数据曲线及拟合的曲线。

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.0
y	1.0	0.41	0.50	0.61	0.91	2.02	2.46

2.实验目的：对于给定的数据作出较好的曲线拟合

3.程序流程图：

4.实验结果：

- 3 次拟合多项式：____
- 4 次拟合多项式：____

图像粘贴处

5.结果分析：

6.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

数值实验六

上机时间：____________**地点：**__________________

1.实验题目：用复合求积公式和 Romberg 公式计算定积分 $\int_1^3 \frac{100}{x^2}\sin\frac{10}{x}dx$.

（$\int_1^3 (\frac{10}{x})^2 \sin\frac{10}{x}dx \approx -1.426014$）误差界为 $\varepsilon = 10^{-5}$.

2.实验目的：会应用数值方法求得给定的定积分。

3.程序流程图：

4.实验结果：

N	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$	$T_{i,4}$	…
1					
2					
3					
4					
…					

5.结果分析：

6.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

数值实验七

上机时间：____________**地点：**__________________

1.实验题目：用迭代法求方程 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根（真解 $x=1,-0.5\pm0.5i$），要求 $\varepsilon<10^{-4}$.

2.实验目的：能够应用二分法、Newton 法、割线法求解非线性方程的数值解。

3.初值的选取：请画出函数 $f(x)=2x^3-x-1, x\in[-10,10]$ 的图像。

图像粘贴处

选取解区间：____________________**选取初值：**____________________

4.程序流程图：

5.实验结果：

	二分法	Newton 迭代	割线法
x_0			
x_1			
x_2			
x_3			
......			
x_n			
n			
近似收敛阶 r			

请用下面公式计算一个近似收敛阶：$r(n) \approx \dfrac{\log\left(\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right)}{\log\left(\dfrac{x_{n+3}-x_{n+2}}{x_{n+2}-x_{n+1}}\right)}$

5.结果分析：（1、简要说明初值的选取对迭代法和结果的影响。2、比较不同方法得到的结果的好坏。）

6.思考题：如果要求解方程的复根，应该怎么处理？