哈尔滨工业大学（威海）

推免生数值分析
上机实验报告
（2022 级）

姓名：王[illegible].

学号：180170217.

指导教师：陈　　　忠

数值实验一

上机时间： 4月15日 **地点：** 宿舍

1.实验题目：用递推公式求积分，求解函数值。

2.实验目的：熟悉编程语言，用循环语句编译迭代过程；观察实验数据，分析误差；理解递推计算的稳定性问题。

3. 上机求解

考虑函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 对于任意的 x, $0\le f(x)\le 1/2$.计算函数值

方案（1）：$f(1.2\times10^{-5})=$ 0.49999973297490l

又由于 $\cos x=1-2\sin^2(x/2)$，重新计算函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$ 的函数值

方案（2）：$f(1.2\times10^{-5})=$ 0.4999999999400

分析哪种结果更好。

方案(2)的结果更好，方案(1)计算过程中出现相近数相减，导致有效数字损失很大。

结果分析：以计算机 long 精度计算为例，方案（1）的计算过程如下：

$$\cos(1.2\times10^{-5})=0.9999999999$$
$$1-\cos(1.2\times10^{-5})=0.0000000001=10^{-10}$$
$$(1.2\times10^{-5})^2=1.44\times10^{-10}$$
$$f(1.2\times10^{-10})=\frac{10^{-10}}{1.44\times10^{-10}}=0.6944...$$

同时，方案（2）的计算过程如下：

$$1.2\times10^{-5}/2= 0.000006$$
$$\sin(1.2\times10^{-5}/2)= 5.9999999999964\times10^{-6}$$
$$\frac{\sin(x/2)}{x/2}= 0.99999999999999400$$
$$f(1.2\times10^{-5})=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2= 0.499...$$

说明我们在计算过程中要避免：相近数相减损失有效数字。

题目 3. 用递推公式求解积分：

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{a+x}dx,\ \ n = 0,1,\cdots,10$$

其中 a 为参数，分别为 a=0.05 及 a=15.注意到

$$I_n + aI_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + ax^{n-1}}{a+x}dx = \int_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n},\ \ n = 0,1,\cdots,10$$

所以有两种方案：

方案（1）：$I_n = -aI_{n-1} + \frac{1}{n},\ \ n = 1,2,\cdots,10$

方案（2）：$I_{n-1} = \frac{1}{a}\left(-I_n + \frac{1}{n}\right),\ \ n = 10,9,\cdots,0$

请根据表中给出的初始值，利用循环语句。计算其它的积分值。

n	方案（1）		方案（2）	
	a=0.05	a=15	a=0.05	a=15
0	3.04452	0.06454	0.926986×10^{13}	0.0645385
1	0.847774	0.03190	-0.463493×10^{12}	0.0319222
2	0.4576113	0.02150	0.231747×10^{11}	0.0211673
3	0.310453	0.010833	-0.115873×10^{10}	0.0158245
4	0.234477	0.087500	0.579366×10^{8}	0.0126326
5	0.188276	-1.12500	-0.289683×10^{7}	0.0105112
6	0.157253	16.8542	0.144841×10^{6}	0.00899932
7	0.134994	-252.670	7241.94	0.00786736
8	0.118250	3790.2	362.222	0.00698963
9	0.105200	-56852.43	-18.0	0.00626667 ~~0.00698963~~
10	0.0947400	852786.60	0.10000	0.00600

a=0.05 | a=15

-7241.94 | 0.00786736

362.222 | 0.00698963

~~17.7778~~

-18.0 | 0.0069

结果分析： 比较用方案（1）和方案（2）方法得到的结果。

方案(1) |a|<1时误差随着迭代次数增加而减小，|a|>1时误差增大

方案(2) |a|>1时误差随着迭代次数增加而减小，|a|<1时误差增大.

不管哪种方案，都需要输入初始数据 I_0（或 I_{10}）。由于计算机存储数据时具有舍入误差或者计算初始数据时具有误差，计算机实际开始计算的初始值为 $\tilde{I}_0$（或 $\tilde{I}_{10}$）.记 $e_n=\left|I_n-\tilde{I}_n\right|$.对于方案（1），我们有

$$e_n=\left|I_n-\tilde{I}_n\right|=|a|\left|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}\right|=|a|e_{n-1}=\ldots=|a|^n e_0$$

所以 $|a|$ 为每次迭代误差的放大或缩小系数，当 $|a|>1$ 时，误差会越来越大；当 $|a|<1$ 时，误差会越来越小。同理，对于方案（2），我们有

$$e_{n-1}=\left|I_{n-1}-\tilde{I}_{n-1}\right|=\left|\frac{1}{a}\right|\left|I_n-\tilde{I}_n\right|=\left|\frac{1}{a}\right|e_n=\ldots=\left|\frac{1}{a}\right|^i e_{n+i-1}$$

所以，与方案（1）截然相反，当 $|a|>1$ 时，误差会越来越小；当 $|a|<1$ 时，误差会越来越大。

4.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

实验的难点主要是有效数字在计算中的损失变化，迭代停止条件与输出结果的控制与形式.

数值实验二

上机时间： 4月12日 **地点：** 宿舍

1.实验题目： 求解线性方程组

$$\begin{pmatrix} -0.002 & 2 & 2 \\ 1 & 0.78125 & 0 \\ 3.996 & 5.5625 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.3816 \\ 7.4178 \end{pmatrix}$$

（精确解 $x = (1.92730, -0.698496, 0.900423)^T$）

2.实验目的： 能够应用Gauss列主元素消元法、LU分解法求解线性方程组的数值解。

3.程序流程图：

Gauss 列主元消去法：	LU 分解法：
定义 A、b ↓ 找max$\lvert a_{i1}\rvert$得 i ↓ i 行与 1行交换得 A' b' ↓ A'进行 Gauss消去得 $A^{(1)}$、$b^{(1)}$ ↓ 两次消元后得 $A^{(2)}$ $b^{(2)}$ ↓ 迭代求解 x_1, x_2, x_3	定义 A、b ↓ 由A构造 L、U（Doolittle法） ↓ 迭代求解 $Ly=b$ 得 y ↓ 迭代求解 $Ux=y$ 得 x、x_1, x_2, x_3

4.实验结果：

（1）Gauss 列主元素消元法：

$$A^{(n-1)}=\begin{pmatrix} 3.996 & 5.5625 & 4 \\ 0 & 2.0027848 & 2.002002 \\ 0 & 0 & -0.39047247 \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} 1.9273 \\ -0.698496 \\ 0.9004233 \end{pmatrix}$$

（2）LU 分解：

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -500 & 1 & 0 \\ -1998 & 3.9984382 & 1 \end{pmatrix},U=\begin{pmatrix} -0.002 & 2 & 2 \\ 0 & 1000.78125 & 1000 \\ 0 & 0 & 1.5628025 \end{pmatrix},y=\begin{pmatrix} 0.4 \\ 2013.836 \\ 1.4581311 \end{pmatrix},x=\begin{pmatrix} 1.9273 \\ -0.698496 \\ 0.9004233 \end{pmatrix}$$

5.结果分析：比较用不同方法得到的结果的区别。

Gauss 法与 LU 法（Doolittle）得到的结果相同。

LU法与Gauss法都是直接求解方程组的解，没有截断误差。LU法最后多须解方程组 $\begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$ 两次求解可能会叠加之前变形的误差。而Gauss法在对角线上元素为较小数时也会产生很大误差

6.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

Gauss法实验中要实现系数矩阵 A 与 b 同时的变换。

因此将矩阵变换视为矩阵乘法 $P^{(n)}A^{(n-1)}$ 求出 $P^{(n)}$，则

b 相应变换也可视为 $b^{(n)}=P^{(n)}b^{(n-1)}$。

数值实验三

上机时间： 4月13日 **地点：** 宿舍

1.实验题目：应用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组：

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

取初始值 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，精确到10^{-5}。（$\boldsymbol{x = (0.99555, 0.95725, 0.79110)^T}$）

2.实验目的：能够应用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解线性方程组，分析方法的收敛性。

3.程序流程图：

Jacobi 迭代法：	Gauss-Seidel 迭代法：
定义 A、b ↓ 分解A为 L、D、U ↓ $B_J = I - D^{-1}A$ $x^{(i+1)} = -B_J x^{(i)} + D^{-1}b$ 迭代求解 迭代终止： $\|x^{i+1} - x^{i}\| < 10^{-5}$	定义 A、b ↓ 分解A为 L、D、U ↓ $B_G = (L+D)^{-1}U$ $x^{(i+1)} = -B_G x^{(i)} + (D+L)^{-1}b$ 迭代求解

4.实验结果：

数值方法	方程的数值解	迭代次数 n
Jacobi	$x = \begin{bmatrix} 0.9957888 \\ 0.95789313 \\ 0.79157715 \end{bmatrix}$	10
Gauss-Seidel	$x = \begin{pmatrix} 0.99578947 \\ 0.95789473 \\ 0.79157895 \end{pmatrix}$	8

5.结果分析：（比较两种方法的收敛性）

Gauss-Seidel 法收敛更快，达到相同精度要求所需要的迭代次数更少，节约计算次数。

6.思考题： 1、实验的难点、遇到的问题及解决方案。

2、如何判定迭代终止？

1. 实验的难点在于两种迭代方法的迭代矩阵 B_J 与 B_G 的求解，得出迭代矩阵之后则进行迭代即可

2. 判定 $\|(x^{(i+1)}-x^{(i)})\| = \sqrt{e_1^2+e_2^2+e_3^2} < 10^{-5}$

则 e_1，e_2 e_3 均小于 10^{-5}

数值实验四

上机时间： 4月13日 **地点：** 宿舍

1.实验题目： 构造5次、10次 Lagrange 插值多项式、Hermit 插值多项式和三次样条插值多项式（自然边界条件）逼近函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

2.实验目的： 能够对给定的数据构造 Lagrange 插值多项式、Hermit 插值多项式和三次样条插值多项式

3.程序流程图：

Lagrange 插值（5次 10次）

选取插值点：5次：[0, 2, 4, 6, 8, 10]

10次：[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]

↓

构造插值多项式、Lagrange 插值基函数

Hermit 插值：

求导函数 ⟶ 选取插值点、

[0, 5, 10] $[0, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 10]$

↓

构造 lagrange 插值基函数

↓

构造插值多项式

样条曲线

求导函数 ⟶ 选取插值点 [0, 2, 4, 6, 8, 10]

⟶ 三弯矩法、联立方程组求解 ⟶ 构造插值多项式

4.实验结果：

数值方法	逼近函数
Lagrange 插值多项式	5次：L_{5} $-0.000237x^5+0.00715x^4-0.0815x^3+0.437x^2-1.081x+1$ 10次：L_{10} $1.45\times10^{-7}x^{10}-8.04\times10^{-6}x^9+0.000195x^8-0.00272x^7+0.0241x^6-0.141x^5+0.555x^4-1.441x^3+2.371x^2-2.266x+1$
Hermit 插值多项式	$H_6(x)=-3.09\times10^{-5}x^6+0.00116x^5-0.0168x^4+0.112x^3-0.305x^2+5.55\times10^{-17}x+1$
三次样条插值多项式	

$H_9(x)=4.368\times10^{-7}x^9-2.37\times10^{-5}x^8+0.000552x^7-0.00719x^6+0.0567x^5-0.275x^4+0.770x^3-1.02x^2+1.11\times10^{-6}x+1.$

$x\in[0,2]$ $S(x)=-0.0318x^3-0.[illegible]x+1$

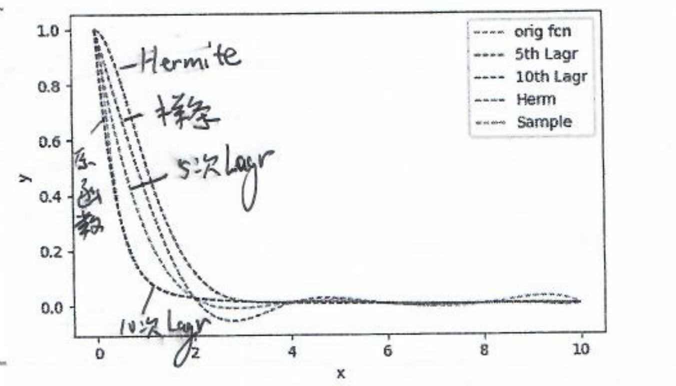
$x\in[2,4]$ $S(x)=-0.0398x^3-0.429x^2+1.45x-1.76$

$x\in[4,6]$ $S(x)=-0.0102x^3+0.170x^2-0.929x+1.71$

$x\in[6,8]$ $S(x)=0.00273x^3-0.0625x^2+0.469x-1.174$

$x\in[8,10]$ $S(x)=0.000529x^3+0.0159x^2-0.157x+0.515$

5. **结果分析：**（画出原函数与三种方法得到的逼近函数图象）



(a) Fig1

$x\in[0,2]$ $S(x)=0.0318x^3-0.636x^2+1$

$x\in[2,4]$ $S(x)=-0.0398x^3+0.429x^2-1.472x+1.572$

$x\in[4,6]$ $S(x)=0.0102x^3-0.170x^2+0.926x-1.624$

$x\in[6,8]$ $S(x)=-0.00273x^3+0.0625x^2-0.470x+1.167$

$x\in[8,10]$ $S(x)=0.000529x^3-0.0159x^2+0.156x-0.504.$

6. **练习题：观** … **的某一个数值有错误，试找出并校正它。**

x	-2	-1	0	1	2
$p_2(x)$	3	1	1	6	15

对前三项进行Lagrange插值

得 $L_2(x)=x^2+x+1$ 发现后两项均不在图象上

则错值在前三项中.

对后三项进行Lagrange插值

得 $L_2(x)=2x^2+3x+1$ 第一项在图线上，

第二项不在，故

$p_2(x)=1$，$x=-1$为错误值

数值实验五

上机时间： 4月14日 **地点：** 宿舍

1.实验题目：对给定的数据分别求出 3 次、4 次多项式的曲线拟合；再根据数据曲线形状，求出不同形式的曲线拟合，并用图示出数据曲线及拟合的曲线。

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.8	1.0
y	1.0	0.41	0.50	0.61	0.91	2.02	2.46

2.实验目的：对于给定的数据作出较好的曲线拟合

3.程序流程图：

求 4次 正交多项式组

$\rho(x)=1 \quad x\in[0,1]$

$\varphi_0(x)=1$

↓

待定系数法求拟合多项式组

↓

求解线性方程得到系数

↓

构造法方程组

↓

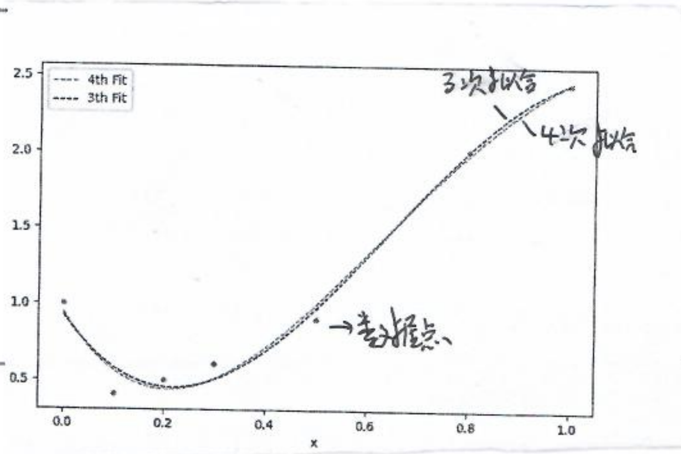
求解得到拟合多项式系数

↓

构造 3次、4次拟合多项式

4.实验结果：

- 3次拟合多项式：$f_3(x)=-6.62x^3+12.8x^2-4.65x+0.927$
- 4次拟合多项式$f_4(x)=3.885x^4-12.3x^3+16.27x^2-5.30x+0.943$



5.结果分析：

根据拟合曲线与数据的接近程度，可以发现4次曲线相较于3次曲线提升的也不大，接近程度基本类似。对于0.1处明显偏离趋势的数据点，拟合也能避免影响。

6.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

实验的难点在于正交多项式的生成与最后系数的求解，须求解几个线性方程组，计算量与编程的难度均较大。

数值实验六

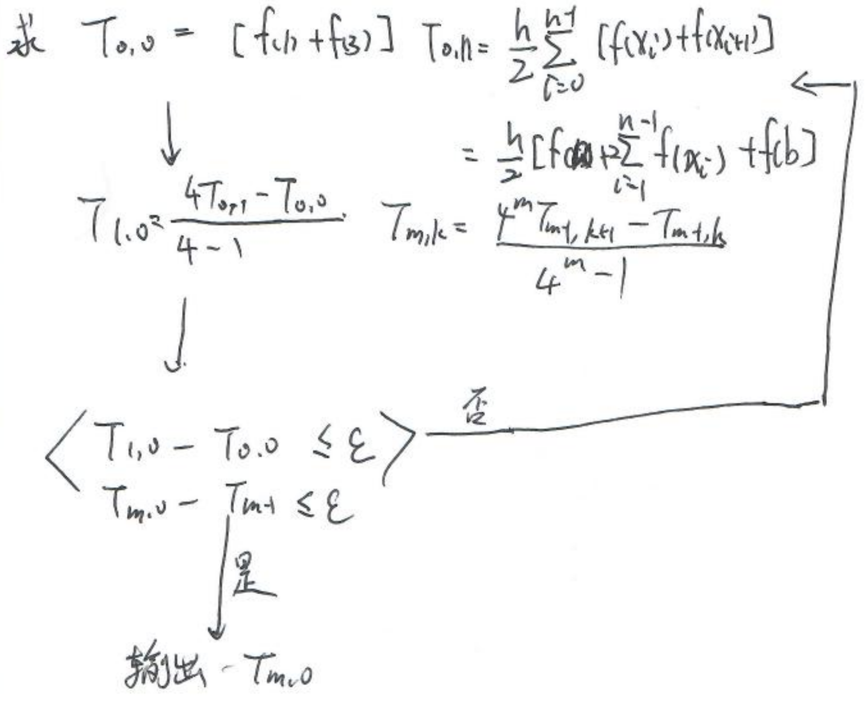
上机时间： 4月17日 **地点：** 宿舍

1.实验题目： 用复合求积公式和 Romberg 公式计算定积分 $\int_1^3 \frac{100}{x^2}\sin\frac{10}{x}dx$.

（$\int_1^3 (\frac{10}{x})^2 \sin\frac{10}{x}dx \approx -1.426014$）误差界为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-5}}$.

2.实验目的： 会应用数值方法求得给定的定积分。

3.程序流程图：



4.实验结果：

N	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$	$T_{i,4}$	…
1	-56.52	-52.23	-23.86	-6.828	
2	-50.80	-14.40	-1.152	-1.299	
3	-11.97	-0.2685	-1.309	-1.424	
4	-0.08280	-1.326	-1.426	-1.426	
…					

5.结果分析：

梯形公式划分不多时，误差很大，而且即使复化梯形公式划分不断增加，~~导~~向真值收敛也较慢。Romberg积分法相比复化方法能更快收敛，节省计算资源

6.思考题：实验的难点、遇到的问题及解决方案。

实验的难点在于递推公式的构造以及计算结果的存储。可以利用Python列表扩展的方法实现。

数值实验七

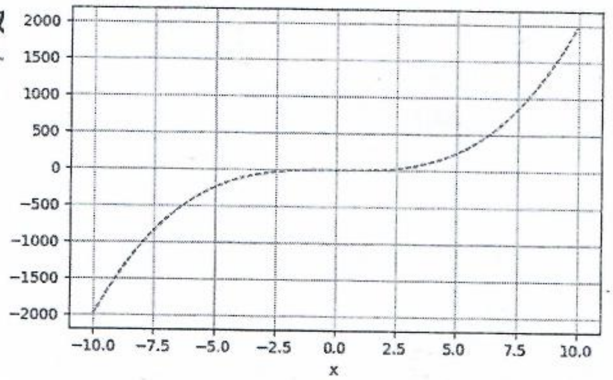
上机时间： 4月14日 **地点：** 宿舍

1.实验题目：用迭代法求方程 $f(x)=2x^3-x-1=0$ 的根（真解 $x=1,-0.5\pm 0.5i$），

要求 $\varepsilon<10^{-4}$.

2.实验目的：能够应用二分法、Newton 法、割线法求解非线性方程的数值解。

3.初值的选取



(b) Fig1

选取解区间： [-2, 2] **选取初值：** 0

4.程序流程图：

二分法：

$x_{i+1}=\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$

↓

判断 $f(x_i)\cdot f(x_{i+1})$ 是否小于0, 否

判断 $|x_{i+1}-x_i|<10^{-4}$

否 ↓是

输出结果

Newton法

求导函数 ⟶ 构造 Newton 迭代公式 ⟶ 迭代至 $x_{i+1}-x_i<10^{-4}$

5.实验结果：

	二分法	Newton 迭代	割线法
x_0	−2	−0.80	0
x_1	2	−0.241	2
x_2	1	−0.48	0.143
x_3	0.5	−0.89	0.292
……			
x_n	0.99997	1.0000	1.000
n	15	23	11
近似收敛阶 r	1	0.63	0.75

请用下面公式计算一个近似收敛阶：
$$r(n) \approx \frac{\log\left(\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right)}{\log\left(\dfrac{x_{n+3}-x_{n+2}}{x_{n+2}-x_{n+1}}\right)}$$

5.结果分析：（1、简要说明初值的选取对迭代法和结果的影响。2、比较不同方法得到的结果的好坏。）

①Newton法收敛最~~慢~~快 但迭代次数最多，受初值的影响大，~~收敛~~迭代前几步误差很大，但最终收敛时误差较小，

②割线法收敛快与Newton法相近，受初值影响也较大，收敛最快，迭代次数最少，较Newton法为优，也免于计算导函数

③二分法受初值影响不大，收敛快，但最终结果较其他两法为大、

6.思考题：如果要求解方程的复根，应该怎么处理？

在迭代函数中引入复数，先求实部再求虚部、然后进行加和、