1. 范数

1. $x = (1, 0, -3)^T$, $\|x\|_1 = 4, \|x\|_2 = \sqrt{10}, \|x\|_\infty = 3$
2. 映射：（1）函数，（2）泛函: $f(u) = \int_0^1 u(x)dx$,(3)抽象函数，（4）算子：$(Tu)(x) = u'(x)$
3. $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\| = 1$
4. A^TA对称：$(A^TA)^T = A^TA$
5. $\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|$
6. $x \to y$: $\|x - y\| \to 0$，$\|y - x\| = \|x - y\|$
7. $|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$
8. $Ax = \lambda x, x \neq 0, |\lambda I - A| = 0$
9. $\|I\| \geq 1$, $\|Ix\| \leq \|I\|\|x\| \to \|x\| \leq \|I\|\|x\| \to \|I\| \geq 1.$
10. $Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| \geq 1.$
11. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \geq |\lambda_n|$, $\|A\|_2 = |\lambda_1|$, $\|A^{-1}\|_2 = 1/|\lambda_n|$.
12. $Ax^* = b, Ax = \hat{b}$, $A(x^* - x) = b - Ax = r \to x^* - x = A^{-1}(b - Ax) = A^{-1}r$
13. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x) \to x_{k+1} = g(x_k)$
14. $\rho(B) \leq \|B\|$, $\forall \varepsilon > 0$, there exists a matrix norm such that $\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon$
15. $B_J = -D^{-1}(L + U + D - D) = -D^{-1}(A - D) = I - D^{-1}A$
16. $a_{jj}x_j + \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k = b_j, \to a_{jj}x_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k$
17. $x^{i+1} = D^{-1}(b - Lx^{i+1} - Ux^i) \to (D + L)x^{i+1} = b - Ux^i \to x^{i+1} = (D + L)^{-1}b - (D + L)^{-1}Ux^i$
18. $|(D + wL)^{-1}| = |D + wL|^{-1} = (a_{11} \cdots a_{nn})^{-1}$
19. $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$
20. $2D - A = 2D - D - L - U = D - L - U$

2. 多项式插值

1. $y(x) = \sum_{i=0}^{n} y(x_j)l_j(x)$. $y(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y(x_j)l_j(x_i) = y(x_i), i = 0, 1 \cdots, n.$
2. $y(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $y(x_i) = a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \cdots & & & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \cdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

3. $l_j(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$
4. $n = 1, l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$, $l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$
5. $|p_2(x)| = (x - a)(b - x) \leq (\frac{b-a}{2})^2$
6. $g(t) = t - t^3$, $g'(t) = 1 - 3t^3 = 0$
7. $l_j(x) = \prod_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y(x_j)l_j(x)$, $E_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}p_{n+1}(x)$
8. $|E_1(x)| \leq \frac{1}{8}\max|f''(x)|(b - a)^2$
9. $(n + 1)^2$
10. $f(x) = lnx, f'(x) = 1/x, f''(x) = -x^{-2}, |f''(x)| = 1/x^2 \leq 1/0.4^2, f'''(x) = 2x^{-3}, f''''(x) = -6x^{-4}$

    Example 2.1. $y_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$, $|E_1(x)| = |\frac{f''(\xi)}{2}||(0.6 - 0.5)(0.6 - 0.7)|$
    $y_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(z_2 - x_0)(x_2 - x_1)}f(x_2)$

11. $y_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n = b_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) + \tilde{b}_{n-1}(x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) + \cdots + \tilde{b}_0$
12. $f[x0] + f[x0, x1](x - x0) + f[x0, x1, x2](x - x0)(x - x1) + f[x0, x1, x2, x3](x - x0)(x - x1)(x - x2)$
    $= ((f[x0, x1, x2, x3](x - x2) + f[x0, x1, x2])(x - x1) + f[x0, x1])(x - x0) + f[x0]$
13. $D^k \geq N^n \to k\log D \geq n\log N \to R = \frac{k}{n}\log D \geq \log N$
14. $D^k = M = 2^{nH(X)} \to k\log D = nH(X) \to R = \frac{k}{n}\log D = H(X)$
15. $X^* = \{x1, x1x2, x1x2x3, ..., x1x2...xn, ..., xi \in X\}$
16. $S, span\{S\} = \{\sum_{k=1}^{n} c_kx_k | c_k \in R, x_k \in S, n \in N\}$

17. linear space: V对加法和数乘都封闭，称V为线性空间。例如：$C[0,1]$. take any $f,g\in C[0,1]$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x),(cf)(x)=cf(x)$
18. 线性空间的维数：dim(V)–V的极大线性无关组的元素个数。$\mathbb{R}^n$
19. $S_3(\pi)$ or $S_3(\Delta)$ $\dim S_m(\pi)=n+m$
20. 1.$\{u_i(x)\}_{i=1}^{n+3}\subset S_3(\pi)$, 2. $\{u_i(x)\}_{i=1}^{n+3}$线性无关。则$\{u_i(x)\}_{i=1}^{n+3}$为$S_3(\pi)$的基底
21. $s_k(x)=a_{k0}+a_{k1}x+a_{k2}x^2+a_{k3}x^3, x\in[x_{k-1},x_k], k=1,2,\cdots,n.$. $4n: 3(n-1)+n+1+2=4n$
22. 单步法：欧拉法，梯形法；多步法：定义
23. $y'=f(x,y)$, $y_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)dx$ 欧拉法：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$
24. 梯形法：$y_{n+1}=y_n+h\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}$
25. $y_{n+1}=\sum_{i=0}^{p}a_iy_{n-i}+\sum_{i=-1}^{p}b_iy'_{n-i}$
26. $\rho(r)=r^{p+1}-\sum_{i=0}^{p}a_ir^{p-i}$, $\sigma(r)=\sum_{i=-1}^{p}b_ir^{n-i}$
27. 多步法相容：$\rho(1)=0$, $\rho'(1)=\sigma(1)$.
28. 根条件：$\rho(1)=0$的根均在单位圆内或边上。落在边上的根为单根。
29. 多步法收敛当且仅当相容且满足根条件。

Example 2.2. *(1)* $y_{n+2}-4y_{n+1}+3y_n=h(f_{n+1}-3f_n)$
(2) $y_{n+2}+y_{n+1}-2y_n=h(2f_{n+1}+f_n)$

Proof. (1) $y_{n+1}=4y_n-3y_{n-1}+h(y'_n-3y'_{n-1})$, $\rho(r)=r^2-4r+3$, $\sigma(r)=r-3$. 相容：$\rho(1)=0$, $\rho'(1)=-2=\sigma(1)$. 所以，相容。$\rho(r)=0$: $r^2-4r+3=0$, $r=1,3$不满足根条件，所以，不收敛。
(2) $y_{n+1}=-y_n+2y_{n-1}+h(2y'_n+y'_{n-1})$, $\rho(r)=r^2+r-2$, $\sigma(r)=2r+1$. 相容：$\rho(1)=0$, $\rho'(1)=3=\sigma(1)$. 所以，相容。$\rho(r)=0$: $r^2+r-2=0$, $r=1,-2$不满足根条件，所以，不收敛. □

30. 泰勒展开法求单步法、多步法的收敛阶。注：局部收敛阶为$p+1\to$整体收敛阶为p.

Example 2.3. $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}[4f(t_n,y_n)+2f(t_{n+1},y_{n+1})+hf'(t_n,y_n)]$ *证明其收敛阶为3.*

Proof.

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n-\frac{h}{6}[4y'_n+2y'_{n+1}+hy''_n] &= y_n+y'_nh+y''_nh^2/2+y'''_nh^3/6-y_n \\ &\quad -\frac{h}{6}[4y'_n+hy''_n+2y'_n+2y''_nh+2y'''_nh^2/2+O(h^3)] \qquad (1)\\ = \quad h[y'_n-y'_n]+h^2[y''_n/2-y''_n/2]+h^3[y'''_n/6-y'''_n/6]+O(h^4)=O(h^4) \end{aligned}$$

□

Example 2.4. $y_{n+1}=ay_n+hby'_n$*确定a,b使得收敛阶最高。*

Proof.

$$y_{n+1}-ay_n-hby'_n=y_n+y'_nh+O(h^2)-ay_n-hby'_n=(1-a)y_n+hy'_n(1-b)+O(h^2). \qquad (2)$$

So $a=1,b=1$,$y_{n+1}=y_n+hy'_n$,局部收敛阶为2，整体收敛阶为1. □

3. 知识点总结

第零章 1. 误差来源
2. 会判有效数字位数，会判绝对误差和相对误差（限）
3. 会运用误差传播公式$y=f(x_1,\cdots,x_n),\tilde{y}=f(\tilde{x_1}\cdots,\tilde{x_n}),|y_n-\tilde{y_n}|\approx\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}(\tilde{x_1}\cdots,\tilde{x_n})e(y_i)$
4. 会秦九昭算法
5. 会构造稳定的迭代格式
6. 会避免近似数相减，大吃小

第一章 1. 会判断隔根区间（区间长度≤ 1）
2. 会利用二分法求方程的根，如$\sqrt{2}$

3. 会列写求方程根的牛顿迭代及割线迭代，如求$\sqrt{2}$或$e^x + sinx - 1 = 0$。

第二章 1. 会求简单的（2*2）向量范数与矩阵范数
2. 会Gauss列主元消去法解3*3线性方程组
3. 会Crout、Dollittle方法解3*3线性方程组(三对角阵为其特例)

第三章 1. 会线性插值、抛物插值及其误差估计，P106 (6)，p107 (7),(8), p110 例3.2.
2. 会求最佳一次多项式平方逼近。p158 (25) p160, 例3.12
3. 会求线性拟合或可线性化的拟合函数

第四章 1. 会梯形公式、Simpson公式及其误差估计，p184 (5),(6) p189 (18),(19)
2. 会两段复华梯形公式、Simpson公式及其误差估计，p191，192
3. 会判求积公式的代数精度

第五章 1. 记住欧拉公式、梯形公式(见上面) p273(5)
2. 会判多步迭代法的收敛性
3. 会利用泰勒展开法判迭代格式的收敛阶，局部p+1阶→整体p阶收敛
4. 会利用待定系数法求带未知数的多步法的最高收敛阶