连续时间金融的模拟方法

陈堰平

chen@yanping.me

中国人民大学 统计学院

November 22, 2007

An investment bank could be more collegial than a college.

— Emanuel Derman

My Life as a Quant(2004)

金融工程基本概念

金融工具

- 原生工具：
    - 股票（ stock ）
    - 债券（ bond ）
    - 货币
    - ……
- 衍生工具：
    - 远期（forward）
    - 期货（futures）
    - 期权（options ）
    - ……

衍生工具（ derivative ）

- **远期和期货**：两方签定合约，在确定的未来的某天（到期日），合约的买方必须支付规定数量的钱（即执行价）给合约的卖方，合约的卖方必须在到期日以执行价转让指定数量的股票给买方。
- **期权**：两方签定合约，赋予合约的买方在到期日以一定价格买入或卖出股票的权利（不是义务）。

期权

- **是否可以提前执行：** 美式期权、欧式期权
- **买入还是卖出资产：**
    - 看涨期权（ call options ）
    - 看跌期权（ put options ）

必备的数学知识

Brown 运动

Brown 运动又被称为 Wienner 过程。原指苏格兰生物学家 R. Brown 于 1827 年在显微镜下发现的花粉颗粒的不规则运动。以前都认为 Brown 运动的数学定义是 Einstein 首先于 1905 年提出的，但其实早在 1900年 Bachelier 就在他的博士论文中提出了 Brown 运动，并把 Brown 运动用在股票价格的研究。

Brown 运动的数学性质

设连续时间随机过程 $W_t : 0 \le t < T$ 是 $[0, T)$ 上的标准 Brown 运动，

- $W_0 = 0$
- **独立增量性**：对于有限个时刻 $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T$，随机变量
$$W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$
是独立的
- **正态性**：对任意的 $0 \le s < t < T$， $W_t - W_s$ 服从均值为0，方差为 $t - s$ 的正态分布

$$W(t+\Delta t) - W(t) = \epsilon(t+\Delta t) \sim N(0, \Delta t)$$

$$dW_t = \lim_{\Delta t \to 0}(W(t+\Delta t) - W(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \epsilon(t+\Delta t) \sim N(0, dt)$$

那么我们可以把 dW_t 当作普通的随机变量看待

$$E(dW_t) = 0, Var(dW_t) = dt, E((dW_t)^2) = dt$$

随机微分方程

一般形式 $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$

算术 Brown 运动

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})$$

几何 Brown 运动

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} \exp\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})\right]$$

随机微分方程

一般形式 $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$

算术 Brown 运动

$$dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} + \mu(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})$$

几何 Brown 运动

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

在给定初值 X_{t_0} 的条件下，可以求出方程的解为

$$X_t = X_{t_0} \exp\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t_0})\right]$$

Itô 引理

假设 $X(t)$ 满足随机微分方程

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

$f(X)$ 是 X 的函数，则

$$df(X) = f_X(X)dX + \frac{1}{2}f_{XX}(dX)^2$$

如果我们关心的函数 f 又是时间 t 的函数

$$\begin{aligned}
df(X,t) &= (f_X dX + f_t dt) + \frac{1}{2}[f_{XX}(dX)^2 + 2f_{Xt}dXdt + f_{tt}(dt)^2] \\
&= f_X dX + f_t dt + \frac{1}{2}f_{XX}(dX)^2 \\
&= f_X[\mu(t,X)dt + \sigma(t,X)dW_t] + f_t dt + \frac{1}{2}f_{XX}\sigma^2(X,t)dt \\
&= \left[\mu(X,t)f_X + \frac{1}{2}\sigma^2(X,t)f_{XX} + f_t\right]dt + \sigma f_X dW
\end{aligned}$$

Itô 引理

假设 $X(t)$ 满足随机微分方程

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

$f(X)$ 是 X 的函数，则

$$df(X) = f_X(X)dX + \frac{1}{2}f_{XX}(dX)^2$$

如果我们关心的函数 f 又是时间 t 的函数

$$\begin{aligned}
df(X,t) &= (f_X dX + f_t dt) + \frac{1}{2}[f_{XX}(dX)^2 + 2f_{Xt}dXdt + f_{tt}(dt)^2] \\
&= f_X dX + f_t dt + \frac{1}{2}f_{XX}(dX)^2 \\
&= f_X[\mu(t,X)dt + \sigma(t,X)dW_t] + f_t dt + \frac{1}{2}f_{XX}\sigma^2(X,t)dt \\
&= \left[\mu(X,t)f_X + \frac{1}{2}\sigma^2(X,t)f_{XX} + f_t\right]dt + \sigma f_X dW
\end{aligned}$$

Black-Scholes 方程(1)

t 时刻买入一份某股票的欧式看涨期权，敲定价是 K ，到期日是 T ，此时股价是 S_t ，市场上的无风险连续利率是 r 。在以下假定下为期权的价值 $V(S_t, t)$ 建模：

- 股价的变化服从几何 Brown 运动
- 股票没有红利
- 没有交易成本
- 市场上没有套利机会

终值条件： $V(S_T, T) = (S_T - K)^+$
边界条件： $V(0, t) = 0$

Black-Scholes 方程(2)

买入期权的同时，为了抵消风险就要卖出一定量的股票，下面是个投资组合

$$\Pi = V(S_t, t) - \Delta S_t$$

$$d\Pi = dV(S_t, t) - \Delta dS_t$$

Δ 是卖出股票的数量。股价满足下面的方程

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

$V(S_t, t)$ 是 S_t 和 t 的函数。由Itô 引理

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt - \Delta dS$$

Black-Scholes 方程(3)：Delta hedging

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt$$

可以看出，上式第一项含有随机性，如果取 $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ ，则可消除投资组合 Π 的随机性（风险）

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

$$\Pi = V - \frac{\partial V}{\partial S} S$$

无风险资产满足方程：

$$d\Pi = r\Pi dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

投资组合对冲掉风险后应与无风险资产等值，否则就会出现套利机会。

$$r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

两边约掉 dt ，整理得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

这就是Black-Scholes 方程

Black-Scholes 方程(4)：无套利原理

无风险资产满足方程：

$$d\Pi = r\Pi dt = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt$$

投资组合对冲掉风险后应与无风险资产等值，否则就会出现套利机会。

$$r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

两边约掉 dt ，整理得

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

这就是Black-Scholes 方程

Black-Scholes 公式

$$\begin{cases} \tau = T - t \\ d_1 = \dfrac{\ln \dfrac{S_t}{K} + (r + \dfrac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \\ V(S_t, t) = S_t N(d_1) - K\mathrm{e}^{-r\tau} N(d_2) \end{cases}$$

详细推导过程请看：

- 史树中.(2006).金融中的数学.北京:高等教育出版社

模拟技术

模拟的核心思想

由于 $dW_t \sim N(0, dt)$ ，所以当 Δt 足够小的时候，可以用 $\epsilon\sqrt{\Delta t}$ 近似 ΔW_t ，其中 $\epsilon \sim N(0, 1)$

Euler-Maruyama 格式

$$\begin{cases} t_N = T, \ \Delta t = \dfrac{t_N - t_0}{N} \\ t_j = t_{j-1} + \Delta t, \ (j = 1, 2, \ldots, N) \\ X_j - X_{j-1} = \mu(t_{j-1}, X_{j-1})\Delta t + \sigma(t_{j-1}, X_{j-1})\epsilon_j\sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

其中 $\{\epsilon_j\}_{j\geq 1}$ 是服从 $N(0, 1)$ 的白噪声，假设 X_0 已经给定

更多迭代格式：

- Kloeden P. E.,Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* . Berlin and Heideberg: Springer-Verlag,1992

模拟的核心思想

由于 $dW_t \sim N(0,dt)$ ，所以当 Δt 足够小的时候，可以用 $\epsilon\sqrt{\Delta t}$ 近似 ΔW_t ，其中 $\epsilon \sim N(0,1)$

Euler-Maruyama 格式

$$\begin{cases} t_N = T,\ \Delta t = \dfrac{t_N - t_0}{N} \\ t_j = t_{j-1} + \Delta t,\ (j = 1, 2, \ldots, N) \\ X_j - X_{j-1} = \mu(t_{j-1}, X_{j-1})\Delta t + \sigma(t_{j-1}, X_{j-1})\epsilon_j\sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

其中 $\{\epsilon_j\}_{j\geq 1}$ 是服从 $N(0,1)$ 的白噪声，假设 X_0 已经给定

更多迭代格式：

- Kloeden P. E.,Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* . Berlin and Heideberg: Springer-Verlag,1992

模拟的核心思想

由于 $dW_t \sim N(0, dt)$ ，所以当 Δt 足够小的时候，可以用 $\epsilon\sqrt{\Delta t}$ 近似 ΔW_t ，其中 $\epsilon \sim N(0,1)$

Euler-Maruyama 格式

$$\begin{cases} t_N = T, \ \Delta t = \dfrac{t_N - t_0}{N} \\ t_j = t_{j-1} + \Delta t, \ (j = 1, 2, \dots, N) \\ X_j - X_{j-1} = \mu(t_{j-1}, X_{j-1})\Delta t + \sigma(t_{j-1}, X_{j-1})\epsilon_j\sqrt{\Delta t} \end{cases}$$

其中 $\{\epsilon_j\}_{j\geq 1}$ 是服从 $N(0,1)$ 的白噪声，假设 X_0 已经给定

更多迭代格式：

- Kloeden P. E.,Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* . Berlin and Heideberg: Springer-Verlag,1992

算术 Brown 运动的模拟

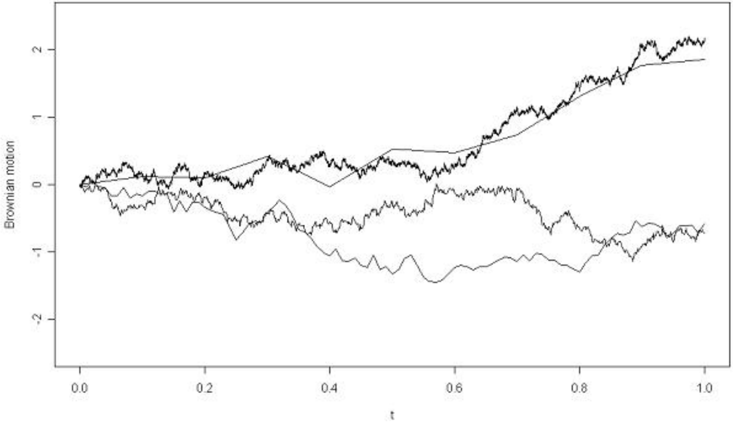

Figure: 算术 Brown 运动轨迹的模拟

几何 Brown 运动的模拟(1)

对 $j = 1, 2, \ldots, N$，做以下几步

- $t_j = t_{j-1} + \Delta t$
- 产生 $Z_j \sim N(0, 1)$
- $\Delta W_j = Z_j \sqrt{\Delta t}$
- $X_j = X_{j-1} \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma \Delta W_j \right)$

几何 Brown 运动的模拟(2)

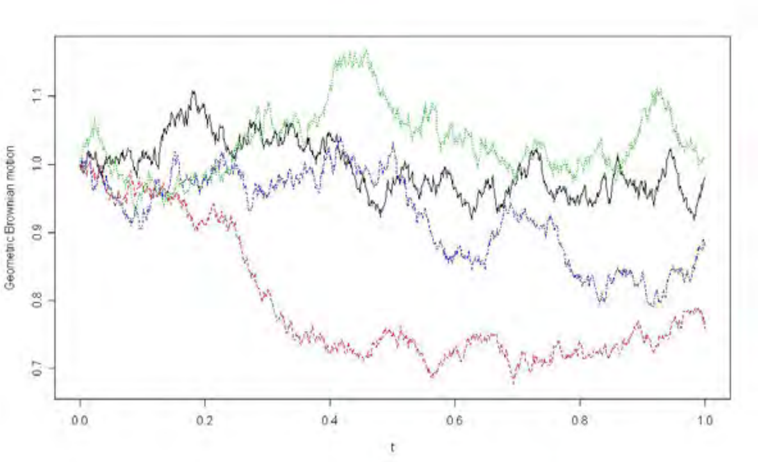

Figure: 几何 Brown 运动轨迹的模拟

期权定价的模拟方法

另一种思路：

$$V(S_t, t) = E\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)} V(S_T, T)\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} E\left[V(S_T, T)\right]$$

Monte Carlo 方法：

- 对 $k = 1, 2, \ldots, M$，做以下几步
    - 模拟出第 k 条价格轨迹，得 T 的股价为 $(S_T)_k$
    - $(V(S_T, T))_k = V((S_T)_k, T) = ((S_T)_k - K)^+$
- $\hat{E}(V(S_T, T)) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}(V(S_T, T))_k$
- $\hat{V} = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\hat{E}(V(S_T, T))$

期权定价的模拟方法

另一种思路：

$$V(S_t, t) = E\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)} V(S_T, T)\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} E\left[V(S_T, T)\right]$$

Monte Carlo 方法：

- 对 $k = 1, 2, \ldots, M$，做以下几步
  - 模拟出第 k 条价格轨迹，得 T 的股价为 $(S_T)_k$
  - $(V(S_T, T))_k = V((S_T)_k, T) = ((S_T)_k - K)^+$
- $\hat{E}\left(V(S_T, T)\right) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} (V(S_T, T))_k$
- $\hat{V} = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \hat{E}\left(V(S_T, T)\right)$

期权定价的模拟方法

另一种思路：

$$V(S_t, t) = E\left[\mathrm{e}^{-r(T-t)} V(S_T, T)\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)} E\left[V(S_T, T)\right]$$

Monte Carlo 方法：

- 对 $k = 1, 2, \ldots, M$，做以下几步
  - 模拟出第 k 条价格轨迹，得 T 的股价为 $(S_T)_k$
  - $(V(S_T, T))_k = V((S_T)_k, T) = ((S_T)_k - K)^+$
- $\hat{E}\left(V(S_T, T)\right) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}(V(S_T, T))_k$
- $\hat{V} = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\hat{E}\left(V(S_T, T)\right)$

另一种思路：

$$V(S_t, t) = E\left[e^{-r(T-t)} V(S_T, T)\right] = e^{-r(T-t)} E\left[V(S_T, T)\right]$$

Monte Carlo 方法：

- 对 $k = 1, 2, \ldots, M$，做以下几步
  - 模拟出第 k 条价格轨迹，得 T 的股价为 $(S_T)_k$
  - $(V(S_T, T))_k = V((S_T)_k, T) = ((S_T)_k - K)^+$
- $\hat{E}\left(V(S_T, T)\right) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} (V(S_T, T))_k$
- $\hat{V} = e^{-r(T-t)} \hat{E}\left(V(S_T, T)\right)$

一个实例

考虑一份三个月到期，执行价为40美元的欧式看涨期权，股票现在的价格是36美元，波动率为0.5，无风险利率是0.05。

- 用Black-Scholes 公式算得期权的价格为2.26美元。
- 用模拟的方法：

	$M = 200$	$M = 1000$	$M = 5000$
$N = 1$	2.55	2.19	2.24
$N = 10$	2.59	2.28	2.20
$N = 100$	1.81	2.26	2.31

参考文献

金融衍生品：

- Hull,J.(2006).*OPtions, Futures and Other Derivatives*,6th ed.Prentice Hall,Englewood Cliffs,New Jersey.
- McDonald,R.(2003) .*Derivatives Markets*.Addison Wesley,Boston

数量金融：

- 史树中.(2006).金融中的数学.北京:高等教育出版社
- 史树中.(2004).金融经济学十讲.上海:上海人民出版社
- 姜礼尚.(2003).期权定价的数学模型和方法.北京:高等教育出版社
- Ross,S.M.*An Introduction to Mathematical Finance,Options and Other Topics*.Cambridge:Cambridge University Press
- Stampfli,J.,Goodman,V.(2001).*The Mathematics of Finance:Modeling and Hedging*.Thomson Learning
- Wilmott,P.(2000).*Paul Wilmott on Quantitative Finance*.Wiley,New York
- Merton,R.C. (1992).*Continuous Time Finance*,Rev.ed.Blackwell,Oxford

模拟技术：

- Chan,N. H,Wong, H. Y.(2006) *Simulation Techniques in Financial Risk Management*.Wiley,New York
- Seydel,R.U.(2006).*Tools for Computional Finance*,3rd ed.Springer-Verlag,Berlin
- McLeich,D.L.(2005).*Monte Carlo Simulation and Finance* .Wiley,New York
- Back, K. (2005), *A Course in Derivative Securities: Introduction to Theory and Computation*. Springer, New York.
- Glasserman ,P.(2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag,New York

Thank You!