中国人民大学硕士研究生入学考试
高等代数试题集*

I. 2005年试题

一、 (每小题5分，共30分) 设 A，B 是 n 阶方阵，判断下列命题是否成立，并说明理由：

1. 如果 AB 可逆，那么 A 可逆
2. 如果 $|A|=0$，那么线性方程组 $AX=\beta$ 有无穷多解
3. 如果 α 是 AB 的一个特征向量，那么 $B\alpha$ 是 A 的一个特征向量
4. 如果 A^2 是正定矩阵，那么 A 也是正定矩阵
5. 如果向量组 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，那么 α_1，α_2，α_3 也线性无关.
6. 如果 α，β 是 A 的属于不同特征值的两个特征向量，那么 $\alpha+\beta$ 不是 A 的特征向量.

二、 (每小题5分，共20分) 填空：

1. 二次多项式 x^2-1 除以 $x^{50}+2x^{25}$ 的余式是___ .
2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&5\\1&0&0&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}$. 则 $A^{-1}=$___ .
3. 若四阶方阵 A 与 B 相似，A 的特征值分别是-1，-2，-3，-4，那么行列式 $|B^{-1}-E|=$ ___.
4. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}$.则A的最小多项式 $m(x)=$___ .

三、 （20分）设 n 是正整数，$f(x)$ 是次数小于 n 的整系数多项式。

1. 证明 $p(x)=x^n-3$ 在有理数域上不可约.
2. 证明 $\sqrt[n]{3}$ 不是 $f(x)$ 的实根.

四、 （20分）设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上一个3维线性空间， $\mathbf{A}$ 是 V 上的一个线性变换，对 V 的一组基 ε_1，ε_2，ε_3 有

$$\mathbf{A}\varepsilon_1=2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ \mathbf{A}\varepsilon_2=-\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3,\ \mathbf{A}\varepsilon_3=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_3$$

1. 求 $\mathbf{A}$ 的全部特征值和特征向量.
2. $\mathbf{A}$ 是否可对角化？说明理由.

*没有答案，自己做出答案来才有意义。如果怀疑自己做的答案，那就说明你还没学到位

3. 设 $\mathbf{B}=2\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}$，求 $\mathbf{B}$ 的一个非平凡的不变子空间.

五、（20分）在 $\mathbb{R}[x]$ 中定义内积

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

1. 计算 (x^m,x^n)，$m,n\geq 0$.

2. 由基1，x，x^2，x^3出发作正交化，求 $\mathbb{R}[x]_4$ 的一组标准正交基。

六、（20分）设 a，b，c 是任意实数，$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$.

1. 计算 A 的行列式 $|A|$.

2. 证明 A 既不是正定的，也不是负定的.

七、（20分）设 B 是 n 阶方阵，满足 $B^{n-1}\neq 0$，$B^n=0$. 证明：

1. B 的秩 $\mathrm{r}(B)=n-1$.

2. 不存在 n 阶方阵 A 使得 $A^2=B$.

II. 2006年试题

一、（每小题5分，共30分）设 A，B 和 C 是 n 阶方阵，判断下列命题是否成立，并说明理由：

1. 如果 $A^n=0$，$B^n=0$，那么 $(AB)^n=0$.
2. 如果 $ABC=E$，那么 $CAB=E$. 这里 E 是单位矩阵.
3. 如果齐次方程组 $AX=0$ 只有零解，那么方程组 $AX=\beta$ 有唯一解.
4. 如果 A 是正定矩阵，那么 A^2 也是正定矩阵.
5. 如果 A，B 是正交矩阵，那么 $A+B$ 也是正定矩阵.
6. 如果 λ，μ 分别是 A，B 的特征值，那么 $\lambda+\mu$ 是 $A+B$ 的一个特征值.

二、（每小题4分，共20分）填空：

1. 如果 $x=-1$ 是多项式 $2x^3+ax^2+bx-3$ 的二重根，那么 $a=$___，$b=$___.
2. 已知矩阵 $\begin{pmatrix}1 & \alpha & \beta\\ 2 & 2\alpha+\beta-1 & \alpha+2\beta\\ 5 & 5\alpha+3\beta-3 & 3\alpha+5\beta\end{pmatrix}$ 的秩为1，那么 $\alpha=$___，$\beta=$___.
3. 设 A 是3阶矩阵，$|A|=2$，那么 $|(A^*)^*-3A^{-1}|=$___.
4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基 $\mathfrak{B}$ 到另一组基 $\mathfrak{B}'$ 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$. γ 在 $\mathfrak{B}'$ 下的坐标为 $(1,1,1)$. 则 γ 在 $\mathfrak{B}$ 下的坐标为___.
5. 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0\\ 5 & 6 & 4\\ -4 & -16 & -13\end{pmatrix}$. 则 A 的Jordan标准形为___.

三、（20分）设 P 是数域，$a_1,a_2,\ldots,a_n\in P$ 互不相同。定义

$$p_i(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),\qquad i=1,2,\ldots,n$$

1. 证明 $p_1(x),p_2(x),\ldots,p_n(x)$ 是 $P[x]_n$ 的一组基.
2. 设 $n=3$，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$. 求 x^2-x+1 在这组基下的坐标.

四、（20分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1. 证明：$(A-E)^2(A+E)=0$.
2. 由此计算 $A^{2006}-A^{2005}$.

五、（20分）设 V 为全体3阶实反对称矩阵组成的实线性空间，给定

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}\neq 0$$

在 V 上定义线性变换：$\mathbf{A}(X)=AX-XA,\ (X\in V)$.

1. 求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量；

2. $\mathbf{A}$ 是否可对角化？证明你的结论.

六、（20分）设 $\mathbf{A}$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^3$ 上的第二类正交变换.证明：

1. $\mathbf{A}$ 有一个特征值-1；

2. $\mathbf{A}$ 在某标准正交基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，$0 \le \theta \le 2\pi$.

七、（20分）设 f 是 n 维线性空间 V 上的双线性函数，记 V 的子集 $U = \{\alpha | f(\alpha,\beta) = 0,\ \text{任意}\beta\}$，$W = \{\beta | f(\alpha,\beta) = 0,\ \text{任意}\alpha\}$.
证明：U 和 W 都是 V 的子空间，且 $\dim U = \dim W$.

III. 2007年试题

一、（每小题5分，共30分）设 A，B 是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位阵，判断下列命题是否成立，并说明理由：

1. 如果 $A^6=0$，那么 $A-E$ 是可逆矩阵.
2. 如果 AB 与 A 有相同的秩，那么 B 是可逆矩阵.
3. 如果行列式 $|A^*|=0$，那么 $|A|=0$.
4. 如果 A，B 是正定矩阵，那么 AB 也是正定矩阵.
5. 如果 A^2 与 B^2相似，那么 A 与 B 相似.
6. 如果 A 是正交矩阵，那么 $|A|=1$.

二、（每小题5分，共20分）填空：

1. 已知 $x-1$ 除以多项式 $f(x)$ 的余数是3，$x+1$ 除 $f(x)$ 的余数是2，则 x^2-1 除 $f(x)$ 的余式为___.
2. 已知线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 3x_1+ax_2+bx_3=1 \end{cases}$$
同解，那么 $a=$___，$b=$___.
3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中一组基 $\mathfrak{B}$ 到基 $\mathfrak{B}'$ 的过渡矩阵是 A，向量 γ 在基 $\mathfrak{B}$ 下的坐标向量为 x.则 γ 在基 $\mathfrak{B}'$ 下的坐标向量为___.
4. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$___，$b=$___.

三、（15分）设 $f(x)=x^4-3x^3+ax^2+15x+50$，已知 $x+2$ 是 $f(x)$ 的一个因式.

1. 计算 a 的值.
2. 求方程 $f(x)=0$ 的全部根.

四、（15分）给定 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间，证明存在一个 $m\times n$ 矩阵 A 使得齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 W.

五、（20分）设 $M_2(P)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in P\right\}$ 是数域 P 上的二阶矩阵空间，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in M_2(P)$. 在 $M_2(P)$ 上定义线性变换
$$\mathscr{A}: M_2(P)\to M_2(P)，\boldsymbol{X}\mapsto \boldsymbol{AXB}$$

1. 计算 $\mathscr{A}$ 的迹和行列式.
2. 讨论 $\mathscr{A}$ 可逆的充分必要条件.

六、（20分）用正交替换把实二次型

$$(a+1)x_1^2+(a+4)x_2^2+(a+1)x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

化为标准型，并讨论其正定性.

七、（15分）试给出全部4阶幂零矩阵的 Jordan 标准型.

八、（15分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$和 $\boldsymbol{T}$ 是 n 阶矩阵，且满足

$$\boldsymbol{AT}=\boldsymbol{TB}$$

1. 证明：对任意多项式 $f(x)$ 有 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{B})$.
2. 证明：如果 $\boldsymbol{T}\neq 0$，那么 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

IV. 2008年试题

一、（每小题5分，共30分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，判断下列命题是否成立，并说明理由：

1. 设有理多项式 $f(x)$ 只有无理根，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.
2. 若多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，则 $N(f(\boldsymbol{A}))\cap N(g(\boldsymbol{A}))=\{\boldsymbol{0}\}$，其中 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{A\alpha}=0\}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零空间.
3. 如果 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵，那么 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{E}$ 也是可逆矩阵.
4. 如果伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.
5. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都是正的，那么 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.
6. $\mathbb{R}^n$ 上的正交变换有特征值1或-1.

二、（每小题5分，共20分）填空：

1. 已知多项式 x^3+ax+2 有重根，则 $a=$___.
2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$，其中 $\boldsymbol{T}$ 为3阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{B}^{2008}+4\boldsymbol{A}^2=$___.
3. 已知二次型 $f(x)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ 可通过正交替换化为标准形 $y_1^2+2y_2^2+4y_3^2$，则 $a=$___.
4. 已知4阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式为 $(x-2)(x+1)^2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的可能的Jordan标准形为___.

三、（15分）设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 是实系数三次多项式. 已知 $f(x)$ 的三个根都是大于1的实数.

1. 证明 $a<-3$；
2. 用三个根的平方和证明 $a^2>2b+3$；
3. 用三个根的立方和证明 $a^3<-9b-3c-3$.

四、（20分）设线性方程组

$$\begin{cases}3x+\ 2y-\ \ z=10\\5x-\ \ y-\ 4z=17\\x+\ 5y+\ az=b\end{cases}$$

1. 已知方程组没有唯一解，求 a 的值.
2. 若方程组有无穷多解，求 b 的值.
3. 假设三个方程分别代表有公共相交直线 L 的三个平面，求直线 L 的方程：$\dfrac{x-p}{l}=\dfrac{y-q}{m}=\dfrac{z-r}{n}$.

五、（15分）设分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{C'}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 是正定矩阵，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 k 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 l 阶矩阵。证明

1. $\boldsymbol{A}$ 可逆.
2. $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C'}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 也是正定矩阵.

六、 （20分）设 $P[x]_n$ 是数域 P 上的次数小于 n 的多项式空间，在 $P[x]_n$ 上定义映射

$$\mathscr{A}: P[x]_n \to P[x]_n，f(x) \mapsto xf'(x) - 2f(x)$$

1. 证明 $\mathscr{A}$ 是 $P[x]_n$ 上的线性变换.
2. 求 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵.
3. 求核 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 和象空间 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的基.
4. 证明 $P[x]_n = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}$.

七、 （20分）已知三阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ -6 & -1 & 3 \\ 8 & 84 & \end{pmatrix}$$

求可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 使得 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}$.

八、 （10分）设 $M_n(\mathbb{R})$ 是 n 阶实矩阵组成的集合，在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义二元函数：

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}')$$

其中 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}')$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}'$ 的迹.

1. 证明 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 满足内积条件，因此 $M_n(\mathbb{R})$ 成为一个欧氏空间.
2. 写出一组标准正交基.