中国人民大学硕士研究生入学考试
数学分析试题集*

I. 2005年试题

一、 基本题（本题共5个小题，每小题10分，满分50分）

1. 求极限
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2^x+3^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}},\quad \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2^x+3^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$$

2. 求 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的极值.

3. 求 $\displaystyle\int_o^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

4. 利用 $\displaystyle\frac{1}{2}\left[\int_x^y f(z)\mathrm{d}z\right]^2$ 是 $f(y)\displaystyle\int_x^y f(z)\mathrm{d}z$ 的一个原函数（作为 y 的函数），计算 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$，其中 $f(x)$ 在[0,1]上连续，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=6$.

5. 设函数 $g(u)$ 二阶连续可导， $f(x,y,z)=g(r)$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，用 g 和 r 表示偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

二、 （本题15分）

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调有界，并且设严格单减数列 $\{x_n\}\subset(a,b)$ 收敛于 x_0. 证明：

1. 数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛；

2. 极限 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，并且有 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$

三、 （本题15分）

设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且满足
$$|f(x)|\geq 1+\frac{1}{2}\int_0^x t|f(t)|\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1]$$

*没有答案，自己做出答案来才有意义。如果怀疑自己做的答案，那就说明你还没学到位

证明：$\ln|f(x)| \geq \dfrac{x^2}{4}$，$x \in [0,1]$.

四、（本题15分）求半径为 r 的圆外切三角形的最小面积。

五、（本题25分）

1. 将 $f(x) = 2 + |x| \quad (-1 \leq x < 1)$展开成以2为周期的傅里叶级数.
2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和
3. 利用 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的和函数求 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

六、（本题15分）设 $u(x,y)$ 在平面上有二阶连续偏导数。证明 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ 在平面上处处成立的充要条件是：存在连续可导的函数 $f(x), g(x)$ 使得

$$u(x,y) = f(x) + g(y)$$

在平面上处处成立。

七、（本题15分）
设 L 是圆周：$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x + y + z &= 0 \end{cases}$，其正方向为：从 x 轴的正向看去，圆周是逆时针方向的。计算曲线积分

$$\oint_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$$

II. 2006年试题

一、 (本题共2个小题，每小题10分，满分20分）

1. 展开 $\ln x$ 为 $x-2$ 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$ 的和.

2. 利用 $\sin x$ 的麦克劳林展开式将 $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 表示成一个数项级数的和.

二、 （本题10分）

设 $a\in[0,2]$，求 $f(x)=|ax-1|$ 在[0,1]上的最大值.

三、 （本题10分）

设 n 是大于2的正整数，

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ (a_n\neq 0)$$

是 n 次代数多项式，若 $f(x)\geq 0$，$x\in[a,b]$，且存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)=0$。证明 $f'(c)=0$，并由此证明存在一个 $n-2$ 次代数多项式 $g(x)$ 使得

$$f(x)=(x-c)^2g(x),\ x\in[a,b]$$

四、 （本题25分）设 $f(x)$ 在[0,1]上二阶可导，$f''(x)<0$，$x\in[0,1]$，若 $f(0)=f(1)=0$。证明：

1. $f(x)$ 在[0,1]上的最大值 $M>0$；

2. 对任意的正整数 n，存在唯一的 $x_n\in(0,1)$ 使得

$$f'(x_n)=\frac{M}{n}$$

3. 数列 $\{x_n\}$ 是单调有界数列

4. $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=M$

五、 （本题25分）

设 $\alpha>0$，

$$f_n(x)=n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx},\ n=1,2,\ldots$$

1. 求函数列 $\{f_n(x)\}$ 在[0,1]上的极限函数 $f(x)$ 和 $|f_n(x)-f(x)|$ 在[0,1]上的最大值，并问 $\alpha>0$ 为何值时函数列 $\{f_n(x)\}$ 在[0,1]上一致收敛于 $f(x)$；

2. 求积分 $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$，并问 $\alpha>0$ 为何值时 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

六、（本题40分）

1. 用拉格朗日中值定理证明，对任何 $\alpha \ge 0$，当 $t > 0$ 时成立不等式

$$\left|\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}-\alpha t}{t}\right| \le \alpha^2 t$$

2. 设

$$F(\alpha, t)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{t}\cos t & t>0, 0\le\alpha<+\infty\\ \alpha & t=0, 0\le\alpha<+\infty\end{cases}$$

证明 $F(\alpha, t)$ 在任一点 $(\alpha_0, 0)$，$(\alpha_0 \ge 0)$处连续

3. 设

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

证明 $I(\alpha)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续；

4. 求 $I'(\alpha)$，$\alpha \in (0, +\infty)$；

5. 求积分

$$I(1)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{t}}{t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

七、（本题20分）设 Σ 是外侧球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，V 是以 Σ 为边界曲面的有界闭球体，点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in V-\Sigma$， $P(x, y, z) \in V$，$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{P_0P}=\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$，$r=|\overrightarrow{r}|$，$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{n}(x, y, z)$ 为 Σ 上点 $P(x, y, z)$ 处的外法向量，V_ε 是以 P_0 为球心 ε 为半径的闭球体，证明：

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\cos(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n})\,\mathrm{d}S$$

III. 2007年试题

一、（本题20分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，并且存在 $p>0$ 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^p}=1$.

1. 对任何 $1>|\delta|>0$，求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f[(1+\delta)x]-f(x)}{p\delta x^p}$$

2. 求二次极限

$$\lim_{\delta\to0}\lim_{x\to+\infty}\frac{f[(1+\delta)x]-f(x)}{p\delta x^p}$$

3. 若 $f'(x)$ 单调，证明对任何 $h>0$，$x\in(0,+\infty)$，只要 $x-h\in(0,+\infty)$，就有

$$f(x)-f(x-h)\le hf'(x)\le f(x+h)-f(x)$$

4. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{px^{p-1}}=1$

二、（本题25分）设直线 $y=ax\quad(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 在第一象限所围成的平面图形的面积为 S_1，$y=ax$，$y=x^2$与直线 $x=1$ 所围成的平面图形的面积为 S_2 .

1. 试确定 a 的值使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；
2. 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积；
3. 用定积分表示该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的侧面积（不必求出它的值）.

三、（本题30分）

1. 设 $p\in(0,1)$，将 $f(x)=\cos px$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为以 2π 为周期的傅里叶级数；
2. 利用 $\frac{1}{1+x}$ 的麦克劳林展开式，证明：$p\in(0,1)$ 时，

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+n}$$

3. 证明：$p\in(0,1)$ 时，

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin p\pi}$$

四、（本题20分）
证明：边长分别为 a，b，c，d 的凸四边形中，当 a，b 边的夹角 α 满足

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

并且 c，d 边的夹角 γ 满足 $\alpha+\gamma=\pi$ 时，该四边形的面积最大，并且最大面积为

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha$$

五、（本题20分）
设

$$[a,b]\times[c,+\infty)=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y<+\infty\}$$

$f(x,y)$ 定义在 $[a,b]\times[c,+\infty)$ 上.

1. 叙述含参变量 x 的无穷广义积分
$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$
在 $[a,b]$ 上一致收敛的柯西原理；
2. 叙述函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的柯西原理；
3. 证明：$I(x)=\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充要条件是对任何发散到 $+\infty$ 的数列 $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$，$(A_n>c$，$n=1,2,\ldots)$，函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，其中 $A_0=c$.

六、（本题35分）
设 V 是空间二维单连通的有界区域，其边界 Σ 是简单光滑曲面，点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in V$，$u=u(x,y,z)$ 在 $\bar{V}=V\cup\Sigma$ 上具有连续偏导数，在 V 内有具有二阶连续偏导数，且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

1. 证明：
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{4\pi t^2}\iint\limits_{\Sigma_t} u\mathrm{d}S=u(x_0,y_0,z_0)$$
其中 Σ_t 是含在 V 内的球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=t^2,(t>0)$；

2. 设$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(x,y,z)$ 为 Σ_t 上点 $P(x,y,z)$ 处的外法向量，$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_0P} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$，$r = |\overrightarrow{r}|$，证明：

$$\iint_{\Sigma_t} \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\, \mathrm{d}S = 0$$

3. 设$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(x,y,z)$ 为 Σ 上点 $P(x,y,z)$ 处的外法向量，$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{P_0P} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$，$r = |\overrightarrow{r}|$，计算积分

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \left[u\frac{\cos(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{n})}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}}\right] \mathrm{d}S$$

IV. 2008年试题

一、（本题40分）设 a，b 是实数，$a<b$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处有定义，并且极限 $\lim_{x\to a^+}f(x)$，$\lim_{x\to b^-}f(x)$，$\lim_{x\to x_0}f(x)$ 都存在.

1. 证明存在正数 δ_1 $\left(\delta_1<\frac{b-a}{2}\right)$，使得 $f(x)$ 在 $[a,a+\delta_1]\cup[b-\delta_1,b]$ 上有界;

2. 对任何 $x_0\in(a,b)$，证明存在正数 $\delta(x_0)$ $\left(\delta(x_0)<\min\{x_0-a,b-x_0\}\right)$，使得 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta(x_0),x_0+\delta(x_0))=O_{\delta(x_0)}(x_0)$ 内有界；

3. 叙述闭区间 $[a,b]$ 上的有限覆盖定理；

4. 用有限覆盖定理证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

二、(本题25分)
设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[-2a,2a]$ 上连续。

1. 交换积分
$$\int_{-a}^{a}\left[\int_{-a+x}^{a+x}f(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
的次序；

2. 证明
$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{2a}f(t)[2a-|t|]\,\mathrm{d}t$$

三、（本题40分）

1. 将 $f(x)=x$，$x\in[0,1]$ 展开成以2为周期的余弦级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和;

2. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 、$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和；

3. 利用
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^n,\ x\in(-1,1)$$
求函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-nx}$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n+1}$ 的和函数；

4. 设 $\varepsilon>0$，证明
$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x=\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)\varepsilon}}{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)\varepsilon}}{(n+1)^2}$$

5. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$

四、（本题20分）

1. 求 $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 2yz + 2z + 2$ 的极值；

2. 设 $g(x,y)$ 是具有二阶连续偏导数的函数，Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 上的凸区域（即 Ω 内任何两点的连线位于 Ω 内），$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是 Laplace 算子，$\Delta g = \Delta g(x,y) = \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}$.
   证明：$g(x,y)$ 在 Ω 上是常数的充要条件为 $\Delta g = \Delta(g^2) = 0$ 在 Ω 内处处成立。

五、（本题25分）

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是平面上一个定点，L 是不过 P_0 的简单光滑正向闭曲线，$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n}(x,y)$ 是 L 上点 $P(x,y)$ 的外法向量，$\overrightarrow{r}$ 是 P 指向 P_0 的向量，$r = |\overrightarrow{r}|$ 为 $\overrightarrow{r}$ 的模长，$\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})$ 是 $\overrightarrow{n}$ 和 $\overrightarrow{r}$ 的夹角的余弦.

1. 当 $P_0(x_0,y_0)$ 位于 L 的外部时，求曲线积分

$$\oint_L \frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r}\,\mathrm{d}s$$

2. 当 $P_0(x_0,y_0)$ 位于 L 的内部时，求曲线积分

$$\oint_L \frac{\cos(\overrightarrow{r},\overrightarrow{n})}{r}\,\mathrm{d}s$$