状態の数え上げ

Python 中級
鈴木 敬彦

環境が取り得る状態の数を把握しておくことは大切です。
例えば、Q 学習であれば数 MiB[1] 単位の記憶領域と保存領域で済む問題に、無駄に大規模なニューラルネットワークを使用して数 GiB 単位の領域を使用してしまったとしたら、これは無駄以外の何物でもありません。逆に、Q 学習では数 TiB の記憶領域と保存領域を必要とする問題を、適切な規模のニューラルネットワークを使用して数 GiB 単位の領域で済ませることができたのであれば、これはとても効率の良い解決法です。
そのためにも、環境が取り得る状態の数を把握しておくことは、とても大切です。

単純な Q テーブルを用いた場合にどれだけの記憶容量が必要となるのでしょうか?

例えば、n 目並べの盤面の状態を 3 進数的な表現(0:空白、1:○、2:×)で表したなら、行動の数と合わせて、テーブルサイズは $3^{n^2} \cdot n^2$ になります。これに使用する浮動小数点数のサイズを掛ければ、具体的な容量を算出できます。64bit 浮動小数点数であれば、$8 \cdot 3^{n^2} \cdot n^2$ バイトになり、32bit であればその半分になります。

n	テーブルサイズ	サイズ [byte]	
3	177,147	1,417,176	1.352 MiB
4	688,747,536	5,509,980,288	5.132 GiB
5	21,182,215,236,075	169,457,721,888,600	154.121 TiB
6	5.403E+18	4.323E+19	37.494 EiB
7	1.173E+25	9.381E+25	77.594 YiB
8	2.198E+32	1.758E+33	1,386.854 QiB
9	3.592E+40	2.873E+41	2.267E+11 QiB
10	5.154E+49	4.123E+50	3.252E+20 QiB

$n \geq 6$ では、とてもではありませんが現実的な数値とは言えません。

しかし、単純な Q テーブルには無駄が多すぎるのも事実です。三目並べの状態の数は $3^9 = 19683$ ですが、この中には、三目並べのルールでは存在し得ない状態も含まれます。現実には、後述の数え方であれば、初期状態から最終局面までの全ての状態は 850 しかありません。つまり、単純計算で 95% 以上の記憶領域を無駄に使用していることになります。

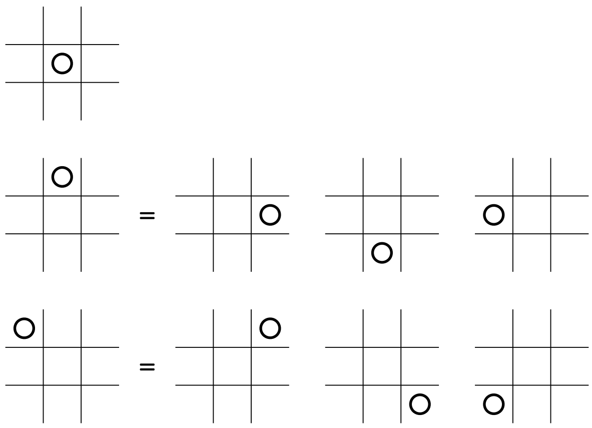
状態の数の削減が直ちに効率の改善に結びつくとは限りませんが、状態の数を把握しておくことは決して無駄ではありません。

---

[1] MiB=2^{20}, GiB=2^{30}, TiB=2^{40}, PiB=2^{50}, EiB=2^{60}, ZiB=2^{70}, YiB=2^{80}, RiB=2^{90}, QiB=2^{100}

バーンサイドの補題 / Burnside's lemma

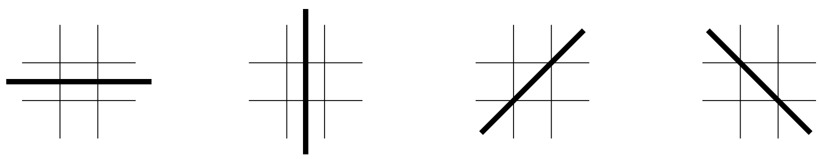
例えば、三目並べの一手目(先手:○)の状態を考えます。単純に考えれば、9 マスあるので、9 通りとなります。しかし、対称性や回転を考えれば、3 通りしかありません。

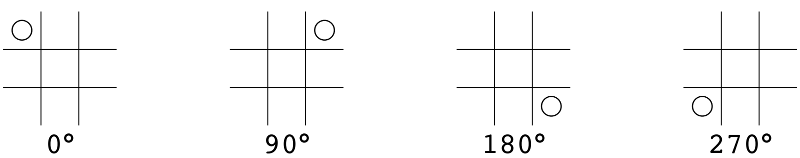


では、実際に対称性や回転を考慮した全ての状態を数え上げるにはどうすれば良いでしょうか?

最も手っ取り早い方法は、力尽く (brute-force) で探索する方法でしょう。しかし、この方法だと $n = 3$程度であれば直ぐに計算も終わりますが、$n = 4$ ともなると全ての状態を探索するのにとても長い時間が掛かります。$n \geq 5$ であれば、当然、更に多くの時間を要します。

このような対称性や回転を考慮した状態を数え上げる時に、とても便利なバーンサイドの補題と言うものがあります。例えば、三目並べであれば、次の 4 つの対称軸と 4 つの回転が考えられます。バーンサイドの補題はこのような対称性を考慮した数え上げの方法を提供してくれるものです。





n 目並べの状態の数は以下の式で求められます。

$$N = \frac{1}{N_{\mathtt{axis}}}\left(\frac{N_{\mathtt{all}}}{N_{\mathtt{so}} \times N_{\mathtt{sx}} \times N_{\mathtt{se}}} + N_{\mathtt{r90}} + N_{\mathtt{r180}} + N_{\mathtt{r270}} + N_{\mathtt{fh}} + N_{\mathtt{fv}} + N_{\mathtt{f/}} + N_{\mathtt{f\backslash}}\right)$$

N　回転や反転させても重複することのない全ての組み合わせの数。

$N_{\mathtt{axis}}$　対称軸と回転の数。
対称軸と回転の数なので、ここでは常に 8 。

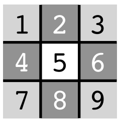
$N_{\mathtt{all}}$　全ての組み合わせの数。$n^2!$
$n = 3$ であれば、$9! = 362880$ 。

$N_{\mathtt{so}}$　○同士を入れ替えても同じ状態になる組み合わせの数。
盤上にある i 個の○の順列なので、$i!$ 。

$N_{\mathtt{sx}}$　×同士を入れ替えても同じ状態になる組み合わせの数。
盤上にある j 個の×の順列なので、$j!$ 。

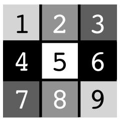
$N_{\mathtt{se}}$　空白同士を入れ替えても同じ状態になる組み合わせの数。
盤上にある k 個の空白の順列なので、$k!$ 。

$N_{\mathtt{r90}}$　90° 回転で同じ状態になる組み合わせの数。



左図で、同じ濃度のマスには同じ記号が入る組み合わせの数。
白いマスは制約無し。

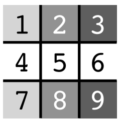
$N_{\mathtt{r180}}$　180° 回転で同じ状態になる組み合わせの数。



左図で、同じ濃度のマスには同じ記号が入る組み合わせの数。
白いマスは制約無し。

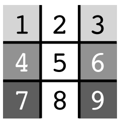
$N_{\mathtt{r270}}$　270° 回転で同じ状態になる組み合わせの数。90° 回転と同じ。

$N_{\mathtt{fh}}$　水平対称軸で反転させて同じ状態になる組み合わせの数。



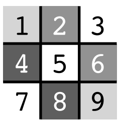
左図で、同じ濃度のマスには同じ記号が入る組み合わせの数。
白いマスは制約無し。

$N_{\mathtt{fv}}$　垂直対称軸で反転させて同じ状態になる組み合わせの数。



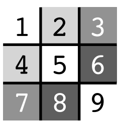
左図で、同じ濃度のマスには同じ記号が入る組み合わせの数。
白いマスは制約無し。

$N_{\mathtt{f/}}$　右斜対称軸で反転させて同じ状態になる組み合わせの数。



左図で、同じ濃度のマスには同じ記号が入る組み合わせの数。
白いマスは制約無し。

$N_{\mathtt{f\backslash}}$　左斜対称軸で反転させて同じ状態になる組み合わせの数。

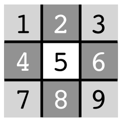


左図で、同じ濃度のマスには同じ記号が入る組み合わせの数。
白いマスは制約無し。

三目並べの一手目であれば、以下の様になります。

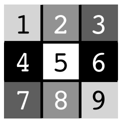
$$N_{\texttt{axis}} = 8 \qquad N_{\texttt{all}} = 9!$$
$$N_{\texttt{so}} = 1! \qquad N_{\texttt{sx}} = 0! \qquad N_{\texttt{se}} = 8!$$

$N_{\texttt{r90}} = N_{\texttt{r270}} = 1$



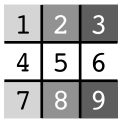
○は 1 個しかないので、5 にしか入らない。

$N_{\texttt{r180}} = 1$



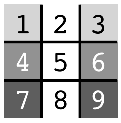
○は 1 個しかないので、5 にしか入らない。

$N_{\texttt{fh}} = 3$



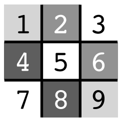
○は、4 か 5 か 6 に入る。

$N_{\texttt{fv}} = 3$



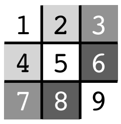
○は、2 か 5 か 8 に入る。

$N_{\texttt{f/}} = 3$



○は、3 か 5 か 7 に入る。

$N_{\texttt{f\textbackslash}} = 3$



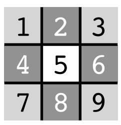
○は、1 か 5 か 9 に入る。

$$\therefore\ N = \frac{1}{8}\left(\frac{9!}{1!\times 0!\times 8!} + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3\right) = 3$$

同様にして三目並べの九手目は以下の様になります。

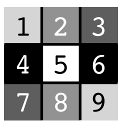
$$N_{\texttt{axis}} = 8 \qquad N_{\texttt{all}} = 9!$$
$$N_{\texttt{so}} = 5! \qquad N_{\texttt{sx}} = 4! \qquad N_{\texttt{se}} = 0!$$

$N_{\texttt{r90}} = N_{\texttt{r270}} = 2$



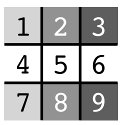
$${}_2C_1 = \frac{2!}{1!1!} = \frac{2}{1} = 2$$

$N_{\texttt{r180}} = 6$



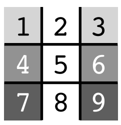
$${}_4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$$

$N_{\texttt{fh}} = 12$



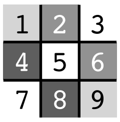
$$2\left({}_3C_2 + {}_3C_1\right) = 2\left(\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!}\right) = 12$$

$N_{\texttt{fv}} = 3$



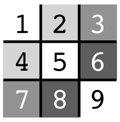
$$2\left({}_3C_2 + {}_3C_1\right) = 2\left(\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!}\right) = 12$$

$N_{\mathtt{f/}} = 3$



$$2\left({}_3C_2 + {}_3C_1\right) = 2\left(\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!}\right) = 12$$

$N_{\mathtt{f\backslash}} = 3$



$$2\left({}_3C_2 + {}_3C_1\right) = 2\left(\frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!}\right) = 12$$

$$\therefore\ N = \frac{1}{8}\left(\frac{9!}{5!\times 4!\times 0!} + 2 + 6 + 2 + 12 + 12 + 12 + 12\right) = \frac{126+58}{8} = 23$$

この様にして、三目並べの九手目は 23 パターンしかないことがわかります。
この 23 個の組み合わせは、以下の通りです。

○	×	○
×	○	×
○	×	○

×	○	×
○	○	○
×	○	×

×	×	×
○	×	○
○	○	○

×	×	×
○	○	○
○	×	○

○	○	○
×	×	×
○	×	○

×	○	×
○	×	○
○	×	○

○	○	○
×	○	×
×	○	×

○	○	×
×	○	×
×	○	○

○	○	○
○	×	×
○	×	×

×	○	○
○	○	×
○	×	×

×	○	×
○	×	○
×	○	○

○	×	×
×	○	○
×	○	○

×	○	○
○	×	×
○	×	○

×	×	×
×	○	○
○	○	○

×	×	×
○	○	○
×	○	○

×	×	○
×	○	×
○	○	○

×	×	○
○	×	○
○	○	×

×	×	○
○	○	○
×	○	×

○	○	○
×	×	×
×	○	○

○	○	○
×	×	○
×	○	×

×	×	○
○	○	×
×	○	○

×	×	○
○	○	×
○	×	○

×	×	○
○	×	×
○	○	○