Mobilité : Réseaux d'interconnexion
Cours Master 2, 2018

Michel Habib
habib@irif.fr
http://www.irif.fr/~habib

Janvier 2018

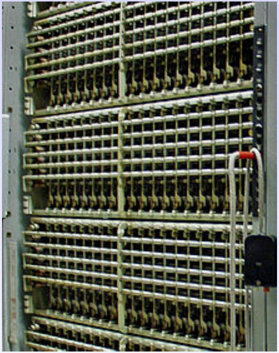
Plan

Historique

A l'origine il s'agissait de relier des communications téléphoniques à l'aide d'un autocommutateurs qui permettaient de relier deux fils et d'établir ainsi une communication.
Autocommutateurs de type Crossbar électro-mécaniques, première automatisation des centraux téléphoniques manuels.

Connexion manuelle

Un système Crosbar



Un système Crosbar

- Comment connecter des machines parallèles entre elles ?
- Quel réseau choisir ?
- Nous allons passer en revue quelques structures de réseaux classiques.

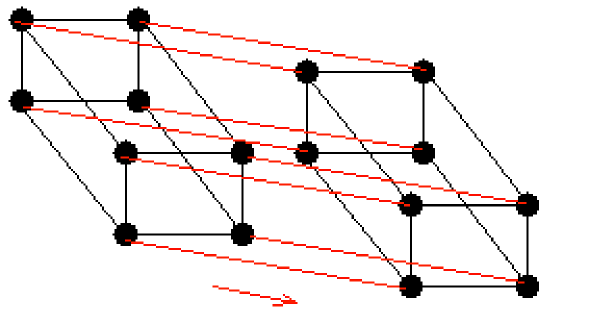
Le concept de réseau d'interaction peut s'appliquer soit à :

- un réseau de machines
- un réseau de processeurs au sein d'une même machine (voire d'un smartphone)
- un réseau virtuel entre pairs au dessus d'Internet

Bien sûr on peut utiliser un arbre symétrique pour connecter des machines, ou en encore une structure d'anneau ou de grille.
Mais ces structures perdent leur performances si le nombre de sommets augmentent (pas de passage à l'échelle). Car ces réseaux ne permettent pas le parallélisme entre les communications.

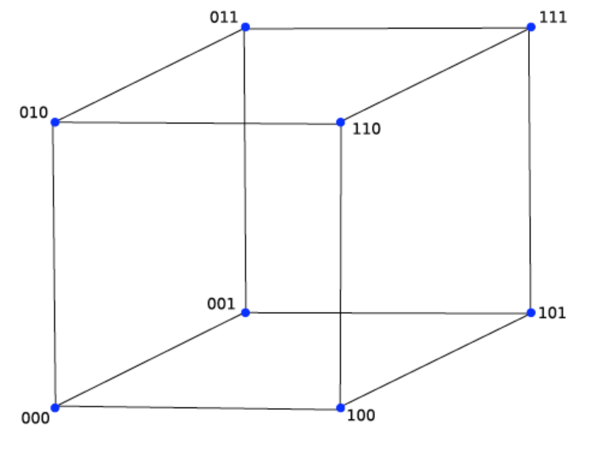
Les Hypercubes

- Pour passer d'une dimension à l'autre on utilise deux copies de l'hypercube de dimension inférieure.
- Doublement du nombre de sommets
- Représentation des sommets par une suite de $\{0,1\}^d$.
- Deux sommets sont adjacents ssi leur étiquettes diffèrent d'un bit.



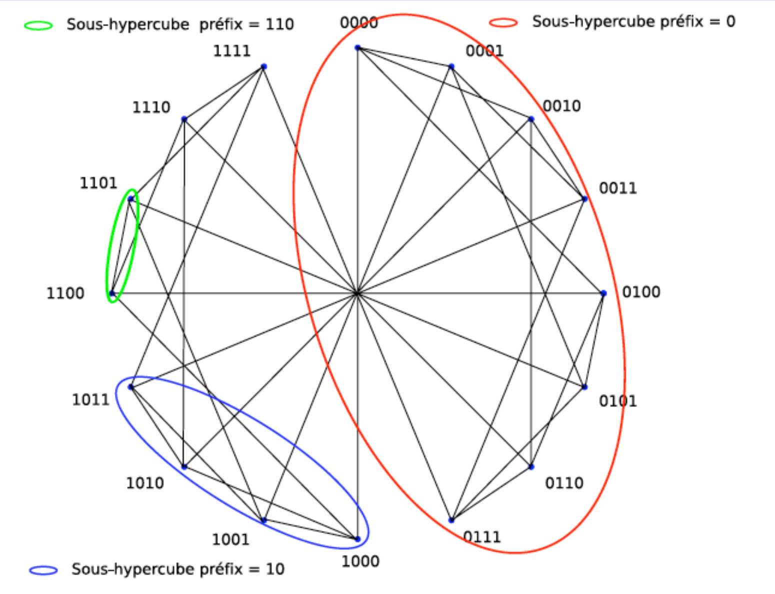
Un hypercube de dimension 4

Routages dans l'hypercube



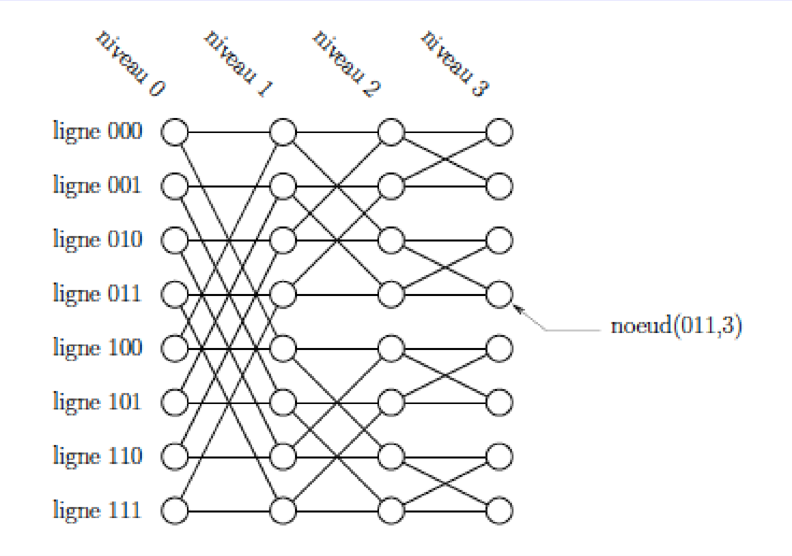
Hypercube de dimension 3

- On calcule le XOR entre l'identifiant de l'émetteur et celui du récepteur.
- Le nombre de bits différents indique la distance dans l'hypercube
- on procède de la gauche vers la droite (ou inversement).


Sous-hypercube préfix = 110
Sous-hypercube préfix = 0
Sous-hypercube préfix = 10
0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111

Le Cube-Connected Cycle

Le Cube-Connected Cycles (ou CCC) a été inventé par Archimède et remis à la mode par Preparata et Vuillemin. Il est organisé comme un Hypercube de dimension N où chaque sommet est remplacé par un cycle de N PEs (a) ; chaque PE est connecté dans le cycle et porte un des anciens liens de l'Hypercube. Son degré est de deux dans le cycle et de 1 dans l'Hypercube ; il est égal à 3 en tout et il est fixe quelque soit la dimension de l'Hypercube considéré ; c'est là le gros avantage des CCC sur les Hypercubes : leur degré ne croît pas !

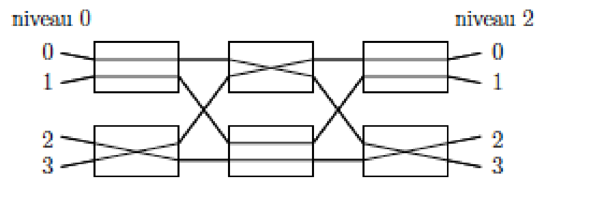


Le réseau Butterfly de niveau 3

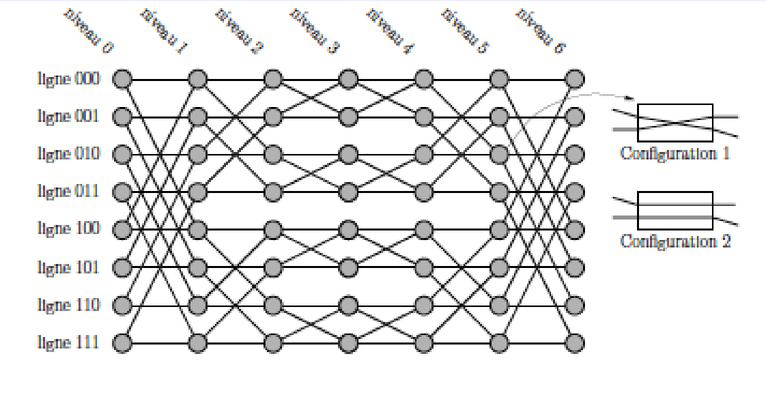
- Si l'on fusionne les sommet d'une ligne d'un butterfly de niveau r ?
- On obtient un hypercube de dimension r
- On peut donc récuperer le routage de l'hypercube

- Pour toute entrée E et toute Sortie S, il existe un chemin unique de E à S (et pourtant le graphe n'est pas une arbrorescence !)
- Le graphe se construit récursivement à partir de 2 Butterflys d'ordre inférieur + une couche
- B_r admet exactement $(r+1)2^r$ sommets
- Tout sommet x vérifie $d^-(x) = d^+(x) = 2$.
- On représente les sommets par des couples (ω, i) avec i le niveau et ω la représentation de la ligne en binaire.
- $(w, i)(w', i')$ est un arc ssi $i' = i + 1$ et soit $\omega = \omega'$ soit ils diffèrent par le ième bit.

- $Diametre(B_r) = 2r$
- Comme $log((r+1)2^r) = r + log(r+1)$ donc $Diametre(B_r) \in log(|B_r|)$

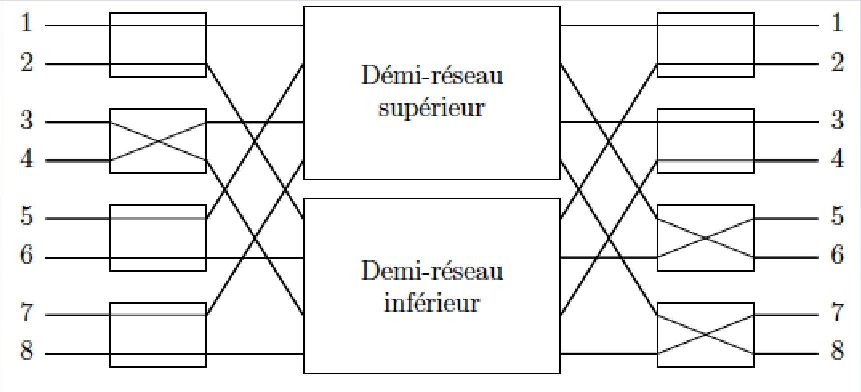


Le réseau Benes de niveau 1



Le réseau de Benes de niveau 3

Un réseau de Benes permet d'acheminer toute permutation



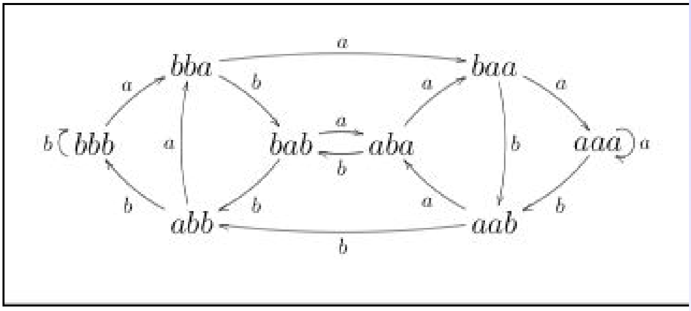
Le réseau Benes vu récursivement

Nicolaas Govert de Bruijn 1946

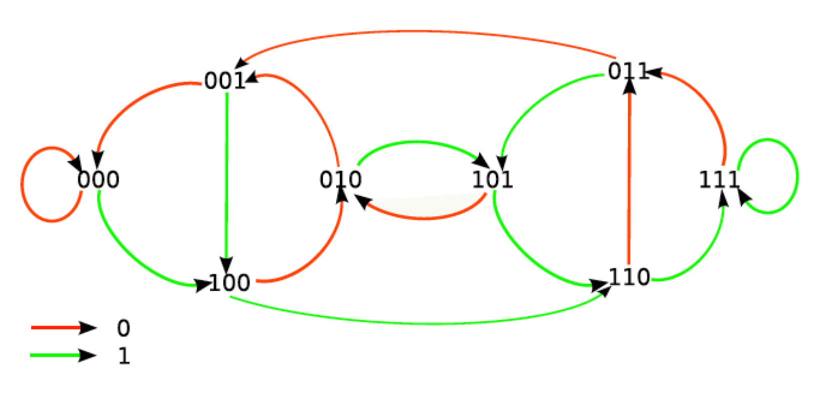
Photo en 1960.

Les graphes de de Bruijn apparaissent dans divers contextes, par exemple en matière de réseaux ou encore d'automates. Leur combinatoire connue est très riche.
Le graphe de de Bruijn d'ordre k pour un alphabet $A = \{a_1, ..., a_n\}$ de taille n est défini de la façon suivante :

- Il a pour sommets l'ensemble des mots de longueur k sur A (donc n^k sommets).
- Chaque sommet a n arcs sortants étiquetés par les lettres de A.
- Les suivants d'un sommet s'obtiennent en supprimant sa première lettre et en ajoutant une des n lettres possibles à la fin.



Exemple, pour $A = \{a, b\}$ et $k = 3$



Graphe de de Bruijn, avec k=3 et décalage droit.

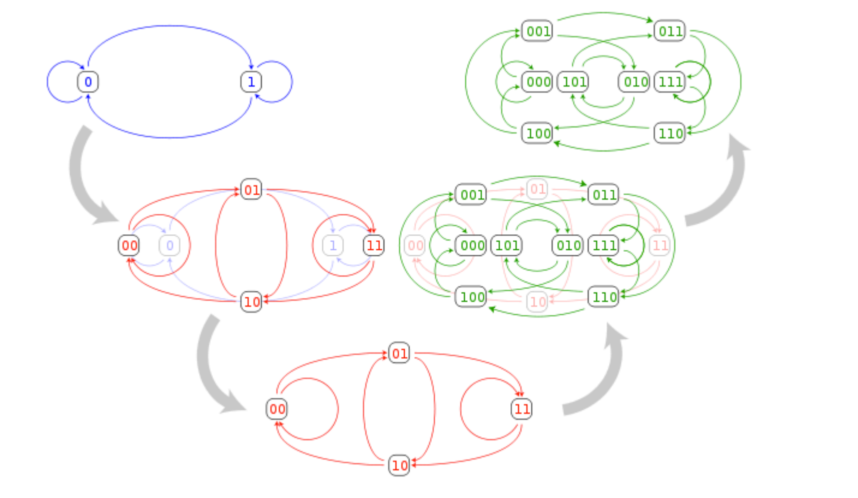
Cassage optimal d'un digicode

Le digicode, est un appareil qui n'a en général, que fort peu de mémoire : il ne se souvient que des p dernières touches enfoncées sur son clavier, p représentant la longueur du code qui permet d'ouvrir.
Mais chercher à forcer une porte en essayant systématiquement toutes les combinaisons sur un digicode à n touches nécessite bien sûr une stratégie. Celle qui consistera à essayer de taper une séquence la plus courte possible et contenant au moins une fois chacune des np combinaisons différentes.
Dans l'exemple simpliste où le digicode n'aurait que $n = 3$ touches différentes (0, 1 et 2) et où le code serait de longueur $p = 2$, la séquence 0011021220 de 10 caractères répond à ce critère, puisqu'on peut aisément vérifier qu'elle contient une et une seule occurrence de chacun des 9 codes possibles.

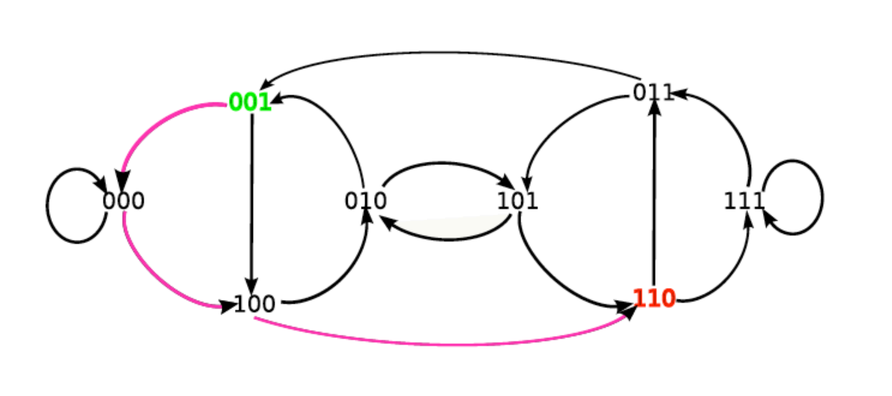
De plus, elle est de longueur minimale, chaque combinaison n'y étant présente qu'une seule fois. Une telle séquence porte un nom, celui de séquence de de Bruijn, en l'honneur du mathématicien hollandais qui les a étudiées dans les années quarante. Ces séquences constituent la solution optimale au problème du digicode, la question restant alors de savoir si l'on peut en trouver quels soient les nombres n et p considérés. A cette question, Euler donne une nouvelle fois la réponse, grâce à une transposition astucieuse de ce problème sous forme d'un graphe. Dès lors, si l'on cherche un code de longueur p, on trace un graphe contenant np-1 sommets, correspondant à toutes les combinaisons de touches de longueur p - 1.

Il faut juste savoir la taille du codage k qui permet de faire fonctionner le digicode.
Ensuit on construit le graphe de de Bruijn d'ordre k sur l'alphabet du digicode.

Par le théorème d'Euler, le graphe de de Bruijn est régulier de degré pair et donc il admet un chemin Eulérien qui passe une fois et une seule par chaque arc.



Construction récursive par graphe aux arcs successifs (line graph)



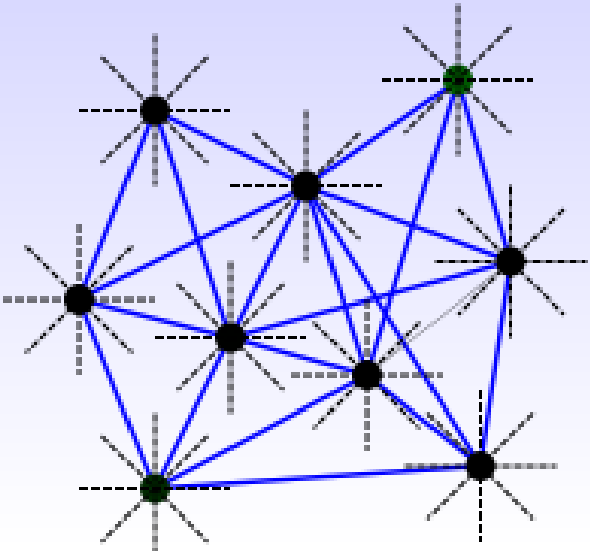
Routage du sommet 001 au sommet 110

Réseaux de Cayley

C'est un modèle très général.
Définis à partir d'un groupe fini (par exemple Z/7Z), et un générateur S du groupe.
Les sommet sont les éléments du groupe et les éléments de S définissent les arcs.
Cela fournit des réseaux très symétriques ayant de bonnes propriétés.

Réseaux issus de la géométrie : graphes de Delaunay, graphes de Yao . . .
et leurs généralisations : les Θ-graphes.

Graphes de Yao



Graphes de Gabriel

Ces graphes sont utilisés comme modèles dans les réseaux ad-hoc pour véhicules
et AODV y marche très bien (d'autant plus que les véhicules bougent vite).

- Some grid network topologies are de Bruijn graphs.
- The distributed hash table protocol Koorde uses a de Bruijn graph.

Conclusions

Tous ces réseaux d'origines très diverses et présentés ici peuvent servir à concevoir un réseau pair-à-pair.

Critères pour le choix d'un réseau d'interconnexion

- Nombre de sommets (le plus grand possible)
- Routage facile (Algorithme de routage simple)
- Degré borné
- Diamètre petit (logarithmique en le nombre de sommets)
- Facile à construire
- Extensible
- Doit pouvoir traiter de nombreuses communications en parallèle.

- Ces critères varient d'une application à l'autre, par exemple suivant que l'application est physique (commutateurs) ou virtuelle (réseau d'overlay dans les systèmes P-2-P).
- Enfin degré borné, diamètre petit et un grand nombre de sommets sont des contraintes contradictoires.